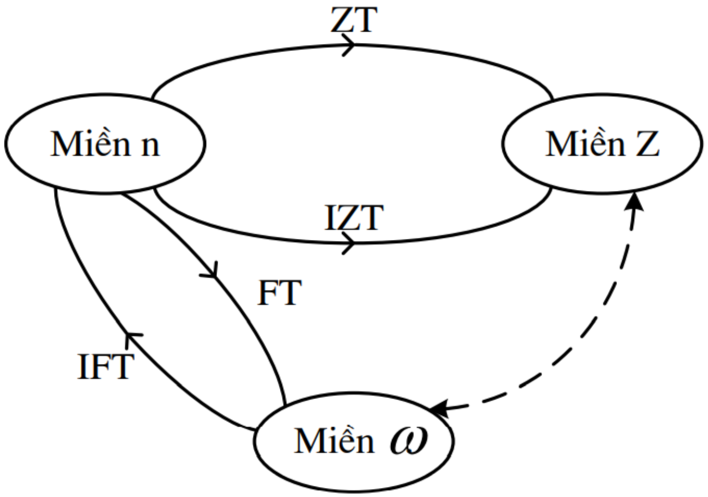
CHƯƠNG 3. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.1. MỞ ĐẦU



3.2. BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (Fourier Tranform: FT)

Nếu dãy x(n) thoả mãn điều kiện : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

thì sẽ tồn tại phép biến đổi Fourier $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega . n}$

Biến đổi *Fourier* thuận đã chuyển dãy số $x(n)$ thành hàm phức $X(e^{j\omega})$

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) \qquad\qquad x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

$X(e^{j\omega})$ là hàm tuần hoàn của biến ω với chu kỳ 2π :

$$X(e^{j(\omega+k.2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+k.2\pi).n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega.n} = X(e^{j\omega})$$

Chỉ cần nghiên cứu $X(e^{j\omega})$ với $\omega \in (-\pi , \pi)$ hoặc $\omega \in (0 , 2\pi)$

Các cách thể hiện $X\left(e^{j\omega}\right)$

+ Biểu diễn theo phần thực phần ảo Re, Im

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\operatorname{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]+j\operatorname{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

+ Biểu diễn theo Modul và Argument

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$

- $X\left(e^{j\omega}\right)$: Phổ của tín hiệu x(n).

- $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$: Phổ biên độ của tín hiệu x(n).

- $\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\varphi(\omega)$: Phổ pha của tín hiệu x(n).

- $X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\varphi(\omega)}$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha

Độ lớn có thể lấy giá trị âm và dương

$$X\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right).e^{j\theta(\omega)}$$

$A\left(e^{j\omega}\right)$: độ lớn của tín hiệu x(n), có thể dương (>0) hoặc âm (<0)

$\theta(\omega)$: pha của tín hiệu x(n)

Một số các quan hệ:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad \text{khi } \omega \geq 0$$

$$\varphi(\omega)=\theta(\omega) \qquad \text{khi} \qquad A\left(e^{j\omega}\right)\geq 0$$

$$\varphi(\omega)=\theta(\omega)+\pi \qquad \text{khi} \qquad A\left(e^{j\omega}\right)< 0$$

Ví dụ Cho phổ tín hiệu $X\left(e^{j\omega}\right)=\sin 3\omega.e^{-j\frac{\omega}{2}}$

Hãy xác định: - Các thành phần phần thực, ảo Re, Im

- $A\left(e^{j\omega}\right)$, $\theta(\omega)$, $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$, $\varphi(\omega)$

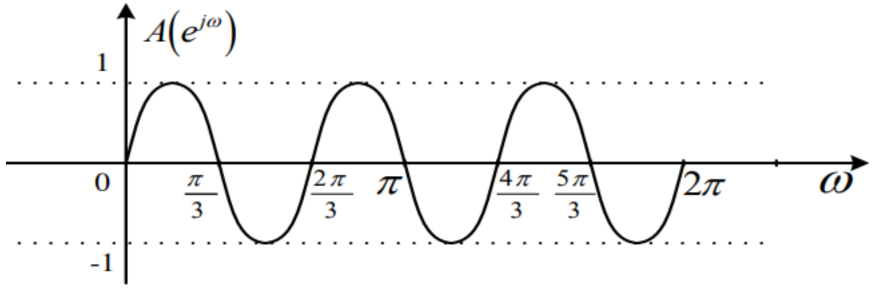
- $\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\sin 3\omega.\cos\frac{\omega}{2}$; $\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\sin 3\omega.\sin\frac{\omega}{2}$

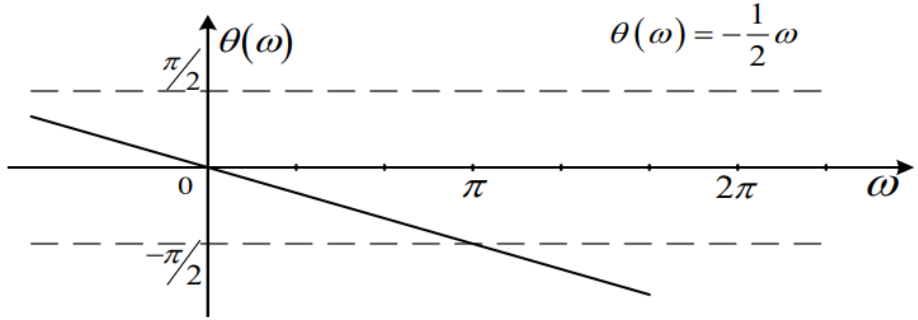
- $A\left(e^{j\omega}\right)=\sin 3\omega$;

- $\theta(\omega)=-\frac{\omega}{2}$

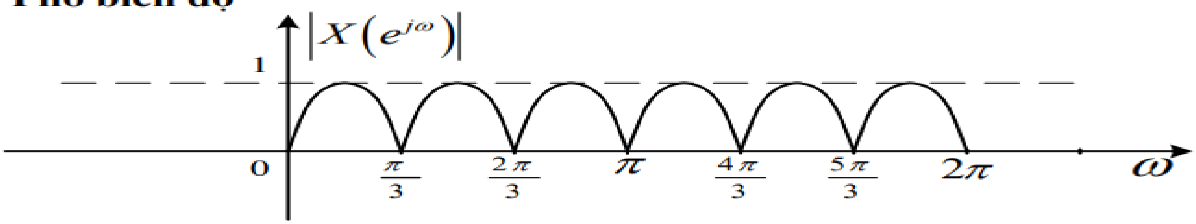
- $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\sin 3\omega\right|$

- $$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\omega}{2} & \text{khi} \quad \sin 3\omega\geq 0\\ -\frac{\omega}{2}+\pi & \text{khi} \quad \sin 3\omega<0\end{cases}$$

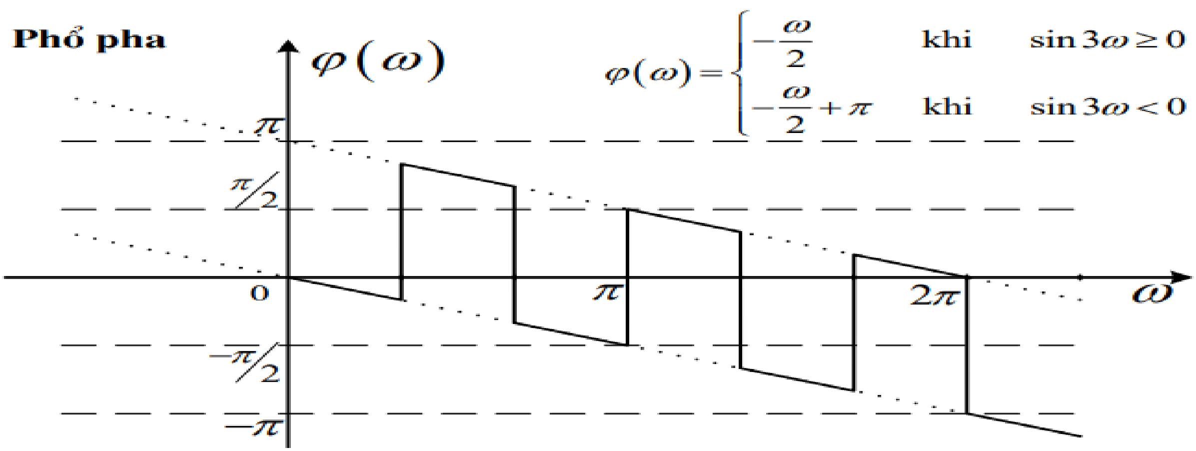




Phổ biên độ



Phổ pha



Ví dụ Hãy tìm biến đổi Fourier các dãy sau đây: $x_1(n)=\delta(n)\,;x_2(n)=\delta(n-1)\,;$

$$x_3(n)=\delta(n+1)+\delta(n-1)\,;x_4(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\,;x_5(n)=u(n)\,;x_6(n)=2^n u(n)$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\mathrm{x}_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\omega} = 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\mathrm{x}_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega} = 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=1} = e^{-j\omega}$$

$$X_3(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\mathrm{x}_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega}$$

$$= 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=-1} + 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos\omega$$

$$X_4(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\mathrm{x}_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$$X_5(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\mathrm{x}_5(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j2\omega} + \ldots$$

Đây là chuỗi luỹ thừa, không hội tụ do $\left|e^{-j\omega}\right| = \left|\cos\omega\text{-j}\sin\omega\right| = \sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega} = 1$

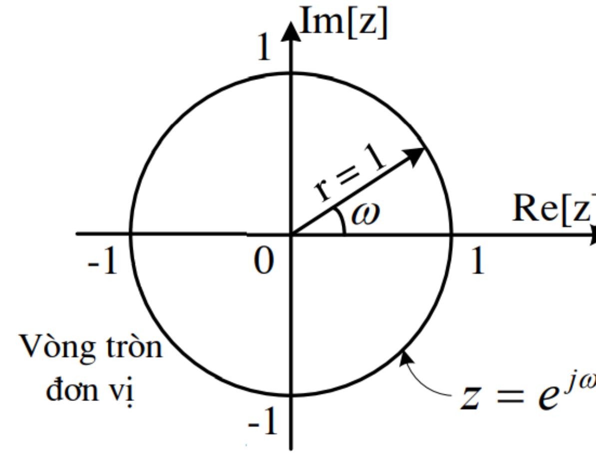
Do vậy ta kết luận là không tồn tại biến đổi Fourier.

3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier của một dãy x(n) sẽ tồn tại nếu và chỉ nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

(Có nghĩa là chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$ *hội tụ)*

3.2.3. Biến đổi Fourier và biến đổi Z



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

$$z = r.e^{j\omega}$$

Như vậy, ta rút ra một số nhận xét:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.

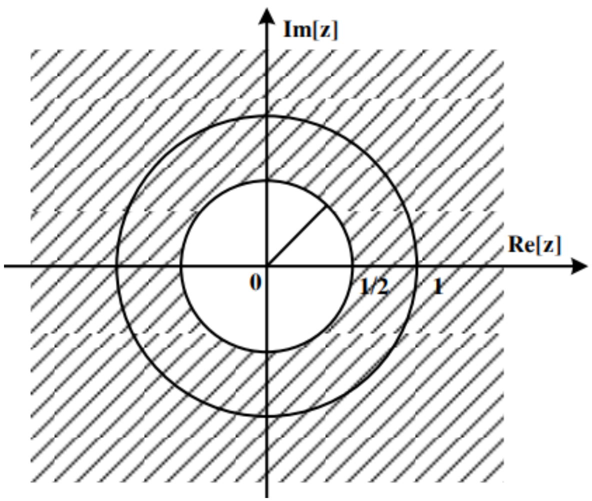
- Như vậy, biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z.

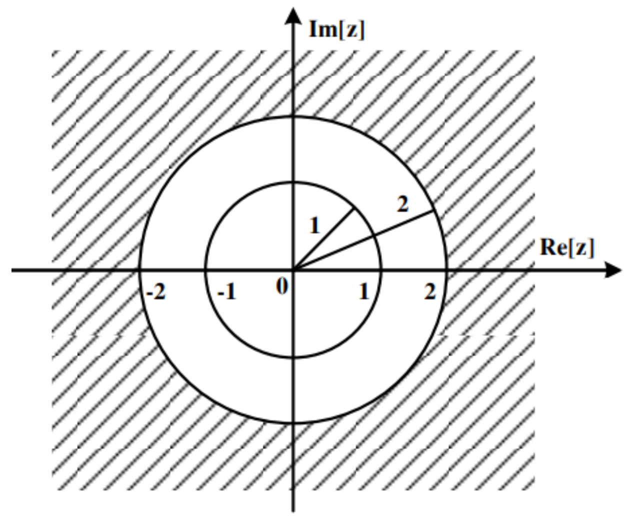
- Như vậy, có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

Ví dụ Hãy tìm biến đổi Fourier từ các biến đổi Z

a) $X_1(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$; $|z| > \dfrac{1}{2}$ b) $X_2(z) = \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}}$; $|z| > 2$

a) Vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ, ta có biến đổi Fourier: $X_1(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$





b) Vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ, nên ta không thực hiện được biến đổi Fourier.

3.2.4. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform)

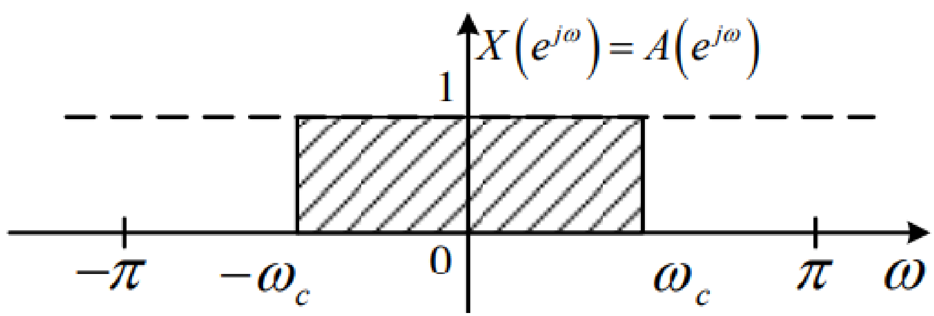
Ký hiệu: $IFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=x(n)$ hay $X\left(e^{j\omega}\right)\xrightarrow{IFT}x(n)$

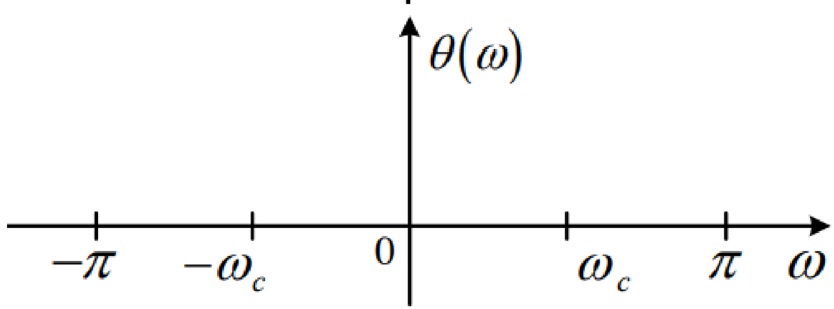
$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

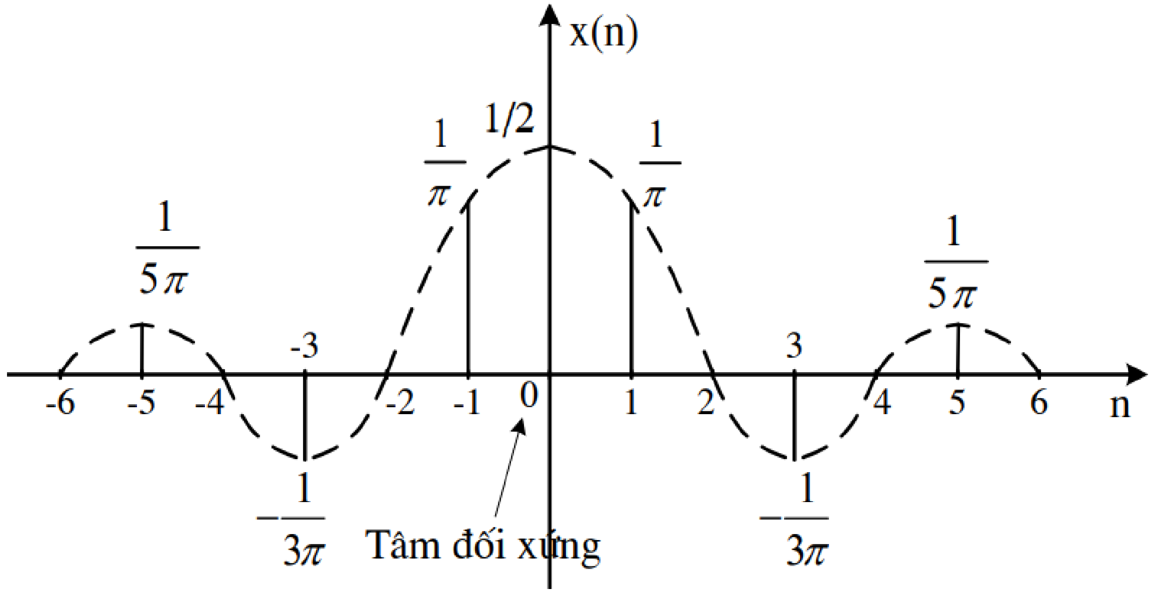
Ví dụ

Cho $X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & -\omega_c\le\omega\le\omega_c\\ 0 & \omega \text{ còn lai}\end{cases}$ $\quad(-\pi\le\omega\le\pi)$

Hãy xác định x(n) và vẽ x(n) với $\omega_c=\dfrac{\pi}{2}$







Đây chính là đáp ứng xung bộ lọc nửa băng tần.

3 nhận xét:

- Tín hiệu x(n) đối xứng qua trục tung; pha $\theta(\omega)$ cũng đối xứng.

- $\theta(\omega) = 0$ (pha bằng không) dẫn đến tâm đối xứng nằm tại n = 0 (gốc tọa độ).

- x(n): đối với tín hiệu thực có tính đối xứng vì phổ đối xứng (Đối xứng Helmitle).

3.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

TT	Tính chất	Miền n	Miền ω
1	Định nghĩa	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
2	Tuyến tính	$ax_1(n)+bx_2(n)$; (a, b: hằng số)	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$
3	Trễ trong miền thời gian n	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
4	Tính đối xứng	x(n) là thực (tính chất đối xứng)	$X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$
			$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$
			$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$
			$\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$
			$\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{-j\omega})]$
	Tính đối xứng	x*(n)	$X^*(e^{-j\omega})$
		x(-n)	$X(e^{-j\omega})$
5	Tích chập trong miền n	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega})$
6	Tích chập trong miền tần số	$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j(\omega-\omega')}).X_2(e^{j\omega'})d\omega'$
7	Vi phân trong miền tần số	nx(n)	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
8	Dịch tần số	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
9	Tính chất điều chế	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X[e^{j(\omega-\omega_0)}]+\frac{1}{2}X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
10	Định lý Weiner Khinchine	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n).x_2^*(n)$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\omega}).X_2^*(e^{j\omega})d\omega$
11	Quan hệ Parseval	Quan hệ Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

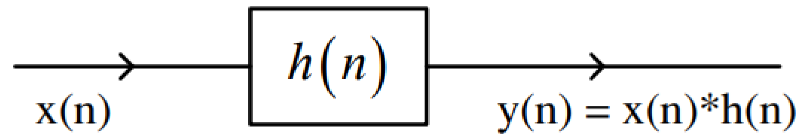
3.4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

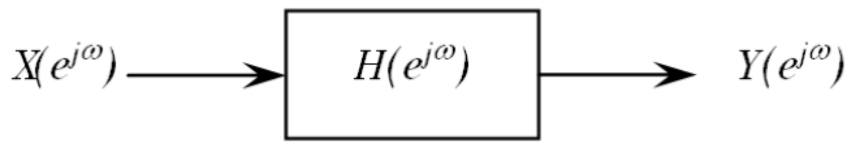
3.4.1. Đáp ứng tần số

$$x(n) \xrightarrow{FT} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$y(n) \xrightarrow{FT} Y\left(e^{j\omega}\right)$$

$$h(n) \xrightarrow{FT} H\left(e^{j\omega}\right)$$





$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$ được gọi là ***đáp ứng tần số***

Các cách thể hiện $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$**:**

\+ Biểu diễn theo phần thực và phần ảo Re, Im:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

\+ Biểu diễn theo Modul và Argument:

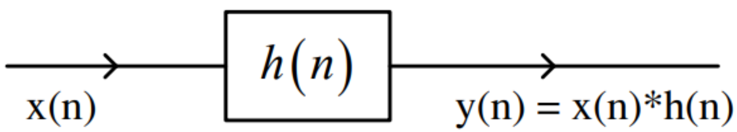
$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\arg\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$

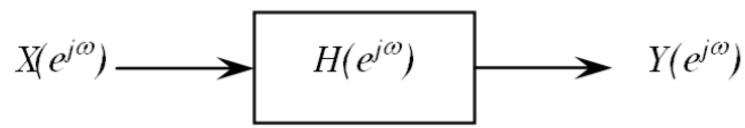
$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$: Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\varphi(\omega)$: Đáp ứng tần số của pha

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha: $H\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)e^{j\theta(\omega)}$

3.4.2. Giải phương trình sai phân bằng biến đổi Fourier





Đặc biệt: nếu tín hiệu vào $x(n)=e^{j\omega n}$ thì

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)e^{j\omega(n-k)}=e^{j\omega n}.H(e^{j\omega})$$

có hệ quả sau:

Hệ quả 1: Nếu h(n) là thực với mọi n thì:

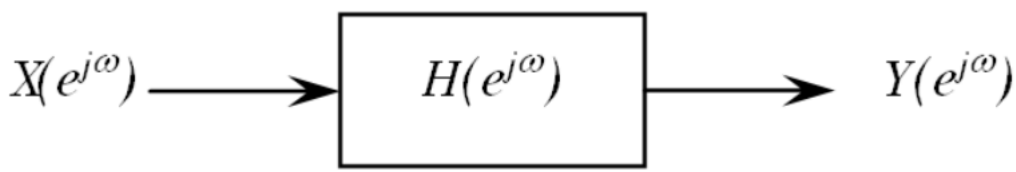
- Nếu: $x(n)=A.\sin(n\omega+\varphi)$ thì $y(n)=A.|H(e^{j\omega})|.\sin[n\omega+\varphi+\varphi(\omega)]$

- Nếu: $x(n)=A.\cos(n\omega+\varphi)$ thì $y(n)=A.|H(e^{j\omega})|.\cos[n\omega+\varphi+\varphi(\omega)]$

Hệ quả 2: Mối quan hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào:

- Biên độ tín hiệu ra tăng đáp ứng biên độ (lần) so với tín hiệu vào
- Pha tín hiệu ra dịch đi đáp ứng pha (đơn vị) so với tín hiệu vào

3.4.3. Thực hiện hệ thống trong miền tần số



$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$