

LỜI NÓI ĐẦU

Như chúng ta đã biết, tín hiệu nói chung là khái niệm chỉ ra các biến có mang hoặc chứa một loại thông tin nào đấy mà ta có thể biến đổi, hiện thị, gia công chẳng hạn như: tiếng nói, tín hiệu sinh học (điện tim, điện não đồ), âm thanh, hình ảnh, tín hiệu radar, sonar... Tín hiệu số là tín hiệu được biểu diễn bằng dãy số theo biến rời rạc. Xử lý tín hiệu số (DSP: Digital Signal Processing) là môn học đề cập đến các phép xử lý các dãy số để có được các thông tin cần thiết như phân tích, tổng hợp mã hoá, biến đổi tín hiệu sang dạng mới phù hợp với hệ thống. Các công cụ xử lý tín hiệu số cơ bản bao gồm: Phép chập, phép tương quan, lọc số, các phép biến đổi rời rạc và điều chế số.

Các cơ sở toán học về xử lý tín hiệu số đã có từ đầu thế kỷ 19 với sự xuất hiện của phép biến đổi Fourier và biến đổi Laplace, nhưng phải đến những năm đầu thập niên 80 của thế kỷ 20, với sự ra đời của chip chuyên dụng xử lý tín hiệu số, đầu tiên là chip DSP của hãng Texas Instrument, đã làm cho kỹ thuật xử lý tín hiệu số bước sang một bước ngoặt mới phát triển rực rỡ. Hiện nay, xử lý tín hiệu số đã có một phạm vi ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như: xử lý ảnh (mắt người máy), đo lường điều khiển, xử lý tiếng nói/âm thanh, quân sự (bảo mật, xử lý tín hiệu radar, sonar), điện tử y sinh và đặc biệt là trong viễn thông và công nghệ thông tin, đa phần các hệ thống thông tin đã được số hoá hoàn toàn.

So với xử lý tín hiệu tương tự, xử lý tín hiệu số có nhiều ưu điểm như: Độ chính xác, tin cậy cao hơn; Độ linh hoạt và mềm dẻo cao hơn; Thời gian thiết kế nhanh hơn; và đặc biệt là công nghệ phần cứng, phần mềm cho DSP ngày càng hoàn thiện và có độ tích hợp cao; Các thiết bị lưu trữ dữ liệu số cũng bền và dung lượng lớn hơn....

Bài giảng này được biên soạn dành cho sinh viên Đại học các ngành Điện tử truyền thông, Công nghệ thông tin và Điện – Điện tử trong môn học “Xử lý tín hiệu số”. Trên cơ sở mục đích và yêu cầu đặt ra trong đề cương chi tiết môn học, bài giảng được cấu trúc gồm 5 chương như sau:

Chương I: Tín hiệu và hệ thống rời rạc.

Chương II: Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền z .

Chương III: Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số liên tục.

Chương IV: Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số rời rạc.

Chương V: Bộ lọc số.

Trong quá trình biên soạn, chắc chắn tài liệu còn một số sơ sót, mong người đọc thông cảm và đóng góp các ý kiến cho tác giả trong quá trình học tập, trao đổi.

Hà Nội, tháng 11 năm 2013

NHÓM BIÊN SOẠN

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	i
DANH MỤC HÌNH VẼ.....	v
DANH MỤC BẢNG BIỂU	xi
CHƯƠNG 1. TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC	1
GIỚI THIỆU	1
1.1. KHÁI NIỆM CHUNG	1
1.1.1. Các hệ thống xử lý tín hiệu	1
1.1.2. Lấy mẫu tín hiệu	1
1.2. TÍN HIỆU RỜI RẠC	4
1.2.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc.....	4
1.2.2. Một số dãy cơ bản (Tín hiệu rời rạc cơ bản).....	5
1.2.3. Các phép toán cơ bản với dãy số	8
1.2.4. Các đặc trưng cơ bản của dãy số.....	13
1.3. HỆ THỐNG RỜI RẠC	15
1.3.1. Hệ thống tuyến tính.....	15
1.3.2. Hệ thống tuyến tính bất biến.....	16
1.3.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả.....	20
1.3.4. Hệ thống tuyến tính bất biến và ổn định	21
1.4. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH	22
1.4.1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số biến đổi.....	22
1.4.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng	22
1.4.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính	24
1.4.4. Thực hiện hệ thống tuyến tính, bất biến từ phương trình sai phân	26
1.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP	31
CHƯƠNG 2. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z	39
2.1. MỞ ĐẦU	39
2.2. BIẾN ĐỔI Z.....	40
2.2.1. Định nghĩa biến đổi Z (ZT: Z TRANSFORM).....	40
2.2.2. Sự tồn tại của biến đổi z.....	42
2.2.3. Điểm cực và điểm không (POLE and ZERO)	43
2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM)	45
2.3.1. Định nghĩa biến đổi z ngược.....	45
2.3.2. Phương pháp tính biến đổi Z ngược	45
2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z.....	50
2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z.....	51
2.5.1. Hàm truyền đạt.....	51
2.5.2. Hệ thống tuyến tính bất biến trong miền Z	52

2.5.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z.....	52
2.5.4. Độ ổn định.....	53
2.5.5. Thực hiện hệ thống trong miền Z	56
2.6. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP	59
CHƯƠNG 3. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC.....	68
3.1. MỞ ĐẦU	68
3.2. BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC	69
3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (Fourier Transform: FT)	69
3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier.....	73
3.2.3. Biến đổi Fourier và biến đổi Z.....	74
3.2.4. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform).....	75
3.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER.....	78
3.4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC.....	79
3.4.1. Đáp ứng tần số	79
3.4.2. Giải phương trình sai phân bằng biến đổi Fourier	81
3.4.3. Thực hiện hệ thống trong miền tần số	81
3.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP	81
CHƯƠNG 4. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC	88
4.1. MỞ ĐẦU	88
4.2. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DẪY TUẦN HOÀN.....	90
4.2.1. Các định nghĩa	90
4.2.2. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn với chu kỳ N	92
4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT CỦA DẪY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN.....	95
4.3.1. Các định nghĩa	95
4.3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DẪY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N.....	98
4.3.3. Phép chập nhanh (phép chập phân đoạn).....	105
4.3.4. Khôi phục biến đổi Z và biến đổi Fourier từ DFT	107
4.4. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT) PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN N	107
4.4.1. Định nghĩa.....	107
4.4.2. Thuật toán FFT phân thời gian cơ sở 2	108
4.4.3. Các dạng khác của thuật toán.....	113
4.5. BIẾN ĐỔI FFT NHANH PHÂN THEO TẦN SỐ K.....	116
4.5.1. Định nghĩa.....	116
4.5.2. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp cơ sở 2.....	116
4.5.3. Các dạng khác của thuật toán.....	119
4.6. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP	120
CHƯƠNG 5. BỘ LỌC SỐ	126
5.1. MỞ ĐẦU	126

5.2. BỘ LỌC SỐ LÝ TƯỞNG	126
5.2.1. Bộ lọc thông thấp lý tưởng (Low pass Filter)	126
5.2.2. Bộ lọc thông cao lý tưởng (High pass Filter).....	129
5.2.3. Bộ lọc thông dải lý tưởng (Band pass Filter).....	130
5.2.4. Bộ lọc chặn dải lý tưởng (Band stop Filter).....	131
5.2.5. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế	132
5.3. BỘ LỌC SỐ FIR.....	133
5.3.1. Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính.....	133
5.3.2. Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR pha tuyến tính	135
5.3.3. Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR	136
5.3.4. Phương pháp cửa sổ	136
5.3.5. Phương pháp lấy mẫu tần số	148
5.3.6. Phương pháp lặp tối ưu	152
5.4. BỘ LỌC SỐ IIR.....	153
5.4.1. Các tính chất tổng quát của bộ lọc IIR.....	153
5.4.2. Tổng hợp bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự	153
5.4.3. Tổng hợp bộ lọc số IIR bằng biến đổi tần số	169
5.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP	170
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	180

DANH MỤC HÌNH VẼ

Hình 1.1 Quá trình xử lý tín hiệu	1
Hình 1.2 Quá trình chuyển đổi A/D	2
Hình 1.3 Phân loại tín hiệu.....	2
Hình 1.4 Minh hoạ sự phân loại tín hiệu.....	3
Hình 1.5 Biểu diễn tín hiệu bằng đồ thị	4
Hình 1.6 Dãy xung đơn vị $\delta(n)$	5
Hình 1.7 Dãy xung $\delta(n-1)$	5
Hình 1.8 Dãy nhảy đơn vị $u(n)$	6
Hình 1.9 Dãy $u(n+3)$	6
Hình 1.10 Dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$	6
Hình 1.11 Dãy chữ nhật $\text{rect}_3(n-2)$	7
Hình 1.12 Dãy dốc đơn vị $r(n)$	7
Hình 1.13 Dãy dốc đơn vị $r(n-1)$	7
Hình 1.14 Dãy hàm mũ $e(n)$	8
Hình 1.15 Tổng của hai dãy	8
Hình 1.16 Tích của hai dãy	9
Hình 1.17 Tích của dãy với hằng số 2.....	9
Hình 1.18 Minh hoạ $x(n)$ trong ví dụ 1.14	10
Hình 1.19 Dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_4$	13
Hình 1.20 Dãy có chiều dài hữu hạn.....	13
Hình 1.21 Mô hình hệ thống	15
Hình 1.22 Mô hình hệ thống với phép biến đổi	15
Hình 1.23 Hệ thống bất biến	16

Hình 1.24 Hệ thống tuyến tính bất biến	16
Hình 1.25 Minh họa tính phép chập bằng đồ thị.....	18
Hình 1.26 Kết quả phép chập	19
Hình 1.27 Tính giao hoán.....	19
Hình 1.28 Tính kết hợp	20
Hình 1.29 Tính phân phối	20
Hình 1.30 Hệ thống tuyến tính bất biến	21
Hình 1.31 Hệ thống tuyến tính bất biến	23
Hình 1.32 Phần tử trễ	28
Hình 1.33 Phần tử cộng.....	29
Hình 1.34 Phần tử nhân (khuếch đại).....	29
Hình 1.35 Hệ thống không đệ quy	29
Hình 1.36 Hệ thống đệ quy	30
Hình 1.37 Hệ thống đệ quy thuần túy	30
Hình 1.38 Sơ đồ hệ thống trong ví dụ 1.20	30
Hình 1.39 Sơ đồ thực hiện hệ thống.....	31
Hình 2. 1 Biến đổi Z	39
Hình 2. 2 Mặt phẳng phức Z	40
Hình 2. 3 Biểu diễn z trên mặt phẳng phức.....	41
Hình 2. 4 Vòng tròn đơn vị	41
Hình 2. 5 Miền hội tụ của $X_1(z)$, $X_3(z)$	42
Hình 2. 6 Miền hội tụ của $X_2(z)$	42
Hình 2. 7 Miền hội tụ của $X_4(z)$	43
Hình 2. 8 Miền hội tụ của $X_5(z)$	43
Hình 2. 9 Biểu diễn điểm cực, điểm không trong mặt phẳng z	44

Hình 2. 10 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến trong miền n	51
Hình 2. 11 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến trong miền Z	51
Hình 2. 12 Miền ổn định của hệ thống trong ví dụ 2.10	56
Hình 2. 13 Phần tử trễ	57
Hình 2. 14 Biểu diễn phần tử trễ trong miền Z	57
Hình 2. 15 Phần tử cộng.....	57
Hình 2. 16 Phần tử nhân với hằng số	57
Hình 2. 17 Ví dụ về mô hình hệ thống trong miền Z	58
Hình 2. 18 Hình vẽ bài tập 2.12	65
Hình 3.1 Quan hệ giữa miền tần số ω và các miền khác	69
Hình 3.2 Biểu diễn độ lớn, pha, phổ biên độ, phổ pha.....	72
Hình 3.3 Thực hiện biến đổi z trên vòng tròn đơn vị.....	74
Hình 3.4 Miền hội tụ	75
Hình 3.5 Vòng tròn đơn vị	75
Hình 3.6 Độ lớn và pha	76
Hình 3.7 Biểu diễn $x(n)$ tìm được sau khi biến đổi IFT	78
Hình 3.8 Mô hình hệ thống tuyến tính, bất biến	79
Hình 3.9 Mô hình hệ thống trong miền tần số	80
Hình 3.10 Mô hình hệ thống tuyến tính, bất biến	81
Hình 3.11 Bài tập 3.2	85
Hình 4.1 Quan hệ giữa các miền biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc	88
Hình 4.2 Các điểm $\frac{2\pi}{N}$ trên vòng tròn đơn vị	88
Hình 4.3 Các dạng phổ của các dạng tín hiệu khác nhau.....	89
Hình 4.4 Tín hiệu rời rạc và phổ rời rạc tuần hoàn của nó	89

Hình 4.5 Biểu diễn $\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$ trong ví dụ 4.2	93
Hình 4.6 Biểu diễn cách tính phép chập tuần hoàn bằng đồ thị.....	94
Hình 4.7 Biểu diễn kết quả của ví dụ 4.3	94
Hình 4.8 Biểu diễn dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N $x(n)_N$	96
Hình 4.9 Biểu diễn dãy tuần hoàn có chiều dài chu kỳ M $\tilde{x}(n)_M$	96
Hình 4.10 Biểu diễn bằng đồ thị $x(n)_N = \delta(n)$	97
Hình 4.11 Biểu diễn $X(k)$	98
Hình 4.12 Minh hoạ các phép trễ của tín hiệu	99
Hình 4.13 Minh hoạ ví dụ 4.4 với chiều dài $N=4$	102
Hình 4.14 Minh hoạ ví dụ 4.5 với $N=4$	103
Hình 4.15 Minh hoạ tính phép chập vòng $x_1(n)_8 (*)_8 x_2(n)_8$	104
Hình 4.16 Sơ đồ tính phép chập tuyến tính thông qua biến đổi DFT	105
Hình 4.17 Mô hình tính FFT	109
Hình 4.18 Ba giai đoạn tính DFT với $N=8$	111
Hình 4.19 Thuật toán FFT 8 điểm theo thời gian n	111
Hình 4.20 Phép tính cánh bướm cơ bản trong FFT thập phân theo thời gian.....	112
Hình 4.21 Sắp xếp lại vị trí tín hiệu vào	113
Hình 4.22 Tính chất đảo bit	113
Hình 4.23 Lưu đồ tính toán cánh bướm cơ bản trong FFT cơ số 4.....	114
Hình 4.24 Thuật toán phân chia theo thời gian cơ số 4 cho biến đổi 16 điểm.....	115
Hình 4.25 FFT theo tần số	117
Hình 4.26 Phép tính cánh bướm cơ bản trong thuật toán FFT chia theo tần số.....	118
Hình 4.27 Thuật toán FFT điểm chia theo tần số.....	118
Hình 4.28 Thuật toán phân chia theo tần số cơ số 4 cho biến đổi 16 điểm.....	119

Hình 4.29 Hình bài 4.11	125
Hình 5.1 Bộ lọc thông thấp lý tưởng.....	127
Hình 5.2 Đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp lý tưởng	128
Hình 5.3 Bộ lọc thông cao lý tưởng	129
Hình 5.4 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến	130
Hình 5.5 Bộ lọc thông dải lý tưởng.....	131
Hình 5.6 Bộ lọc chặn dải lý tưởng	132
Hình 5.7 Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế thông thấp và các tham số	133
Hình 5.8 Biểu diễn $A_R(e^{j\omega})$	138
Hình 5.9 Cửa sổ chữ nhật với $N=7$	140
Hình 5.10 Dịch phải đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng	140
Hình 5.11 Xác định $w_R(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$ với $N=7$	141
Hình 5.12 Sơ đồ bộ lọc FIR thông thấp với $N=7$	141
Hình 5.13 Đồ thị $G_R(e^{j\omega})$ với a) $N=31$; b) $N=61$, c) $N=101$	142
Hình 5.14 Cửa sổ tam giác với $N=7$	144
Hình 5.15 Dịch phải đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng	145
Hình 5.16 Xác định $w_T(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$ với $N=7$	145
Hình 5.17 Sơ đồ bộ lọc FIR thông cao với $N=7$	145
Hình 5.18 Lấy mẫu trong miền tần số.....	149
Hình 5.19 Sự ánh xạ $z = e^{sT}$ của khoảng $2\pi/T$ (với $\sigma < 0$) trong mặt phẳng s lên các điểm trong đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng z	156
Hình 5.20 Mạch điện RC	158
Hình 5.21 Sơ đồ cấu trúc ứng với mạch RC	159
Hình 5.22 Mạch điện RC	160

Hình 5.23 Sơ đồ cấu trúc ứng với mạch RC	161
Hình 5.24 Ánh xạ $s = (1 - z^{-1})/T$ biến LHP trong mặt phẳng s thành các điểm nằm bên trong đường tròn bán kính 1/2 và tâm 1/2 trong mặt phẳng z.....	162
Hình 5.25 Mạch điện RC	163
Hình 5.26 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc.....	164
Hình 5.27 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại I.....	167
Hình 5.28 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại II	168
Hình 5.29 Hình bài tập 5.17	179
Hình 5.30 Hình bài tập 5.18	179

DANH MỤC BẢNG BIỂU

Bảng 2.1 Các tính chất biến đổi Z.....	50
Bảng 3.1 Tính chất của biến đổi Fourier.....	78
Bảng 4.1 Tổng kết các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N	95
Bảng 4.2 Tính chất của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N	99
Bảng 4.3 Bảng HELM chọn chiều dài thực hiện DFT	106
Bảng 5.1 Bảng biến đổi số-số:	169
Bảng 5.2 Bảng biến đổi trực tiếp với thiết kế song tuyến.....	170
Bảng 5.3 Các tham số quan trọng của một số hàm cửa sổ.....	172
Bảng 5.4 Một số hàm cửa sổ để tổng hợp bộ lọc FIR.....	173

CHƯƠNG 1. TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

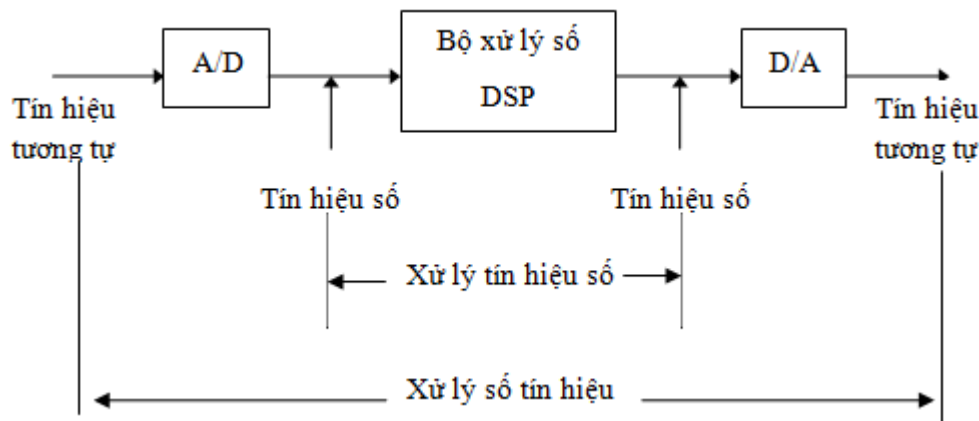
GIỚI THIỆU

Trong chương này, chúng ta sẽ đề cập đến các khái niệm cơ bản của tín hiệu và hệ thống rời rạc, các phương pháp phân loại tín hiệu và hệ thống rời rạc; đồng thời cũng đề cập đến vấn đề phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền thời gian rời rạc n.

1.1. KHÁI NIỆM CHUNG

1.1.1. Các hệ thống xử lý tín hiệu

Một quá trình xử lý tín hiệu bằng con đường số như hình minh họa dưới đây sẽ bao gồm biến đổi A/D để biến đổi tín hiệu từ tương tự sang số, sau đó các tín hiệu số sẽ được gia công, thao tác theo các mục đích khác nhau nhờ các chip xử lý tín hiệu số DSP và cuối cùng chúng ta sẽ thực hiện biến đổi D/A để đưa tín hiệu về dạng tương tự.



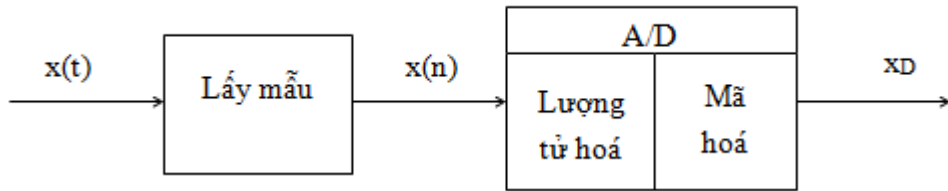
Hình 1.1 Quá trình xử lý tín hiệu

Nhìn vào hình vẽ ta thấy có thể phân biệt rõ 3 loại hệ thống xử lý tín hiệu là:

- Hệ thống xử lý tín hiệu tương tự: đầu vào và đầu ra của hệ thống đều là tín hiệu tương tự; phần lõi bên trong hệ thống đều là các hệ xử lý tương tự.
- Hệ thống xử lý số tín hiệu: đầu vào và đầu ra của hệ thống đều là tín hiệu tương tự; phần lõi bên trong hệ thống đều là các hệ xử lý tín hiệu số.
- Hệ thống xử lý tín hiệu số: đầu vào và đầu ra của hệ thống đều là tín hiệu số.

1.1.2. Lấy mẫu tín hiệu

Nguyên lý làm việc của bộ A/D được minh họa theo sơ đồ khối trên hình vẽ sau dưới đây. Từ hình vẽ ta thấy, quá trình chuyển đổi từ tín hiệu tương tự thành tín hiệu số gồm 3 giai đoạn: lấy mẫu, lượng tử hóa và mã hóa. Ở đây, ta không quan tâm nhiều đến cấu trúc chi tiết từng khối mà ta chỉ quan tâm đến tín hiệu đầu vào và đầu ra trên mỗi khối chức năng của bộ chuyển đổi A/D và phân biệt rõ các loại tín hiệu này.



Hình 1.2 Quá trình chuyển đổi A/D

1.1.2.1. Khái niệm về tín hiệu

Về mặt vật lý: tín hiệu là dạng biểu diễn vật lý của thông tin.

Ví dụ: - Các tín hiệu ta nghe thấy là do âm thanh phát ra gây nên sự nén dãn áp suất không khí đưa đến tai chúng ta.

- Ánh sáng ta nhìn được là do sóng ánh sáng chuyển tải các thông tin về màu sắc, hình khối đến mắt chúng ta.

Về mặt toán học: tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của một hoặc nhiều biến số độc lập.

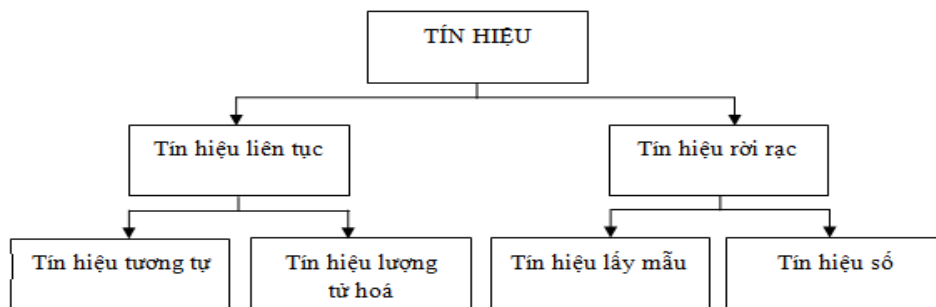
Ví dụ: - Tín hiệu âm thanh $x(t)$ là hàm của một biến độc lập trong đó x là hàm t là biến.

- Tín hiệu ảnh $x(i,j)$ là hàm của hai biến độc lập i và j .

Trong môn học này chúng ta chỉ tập trung nghiên cứu đối với các tín hiệu là hàm của một biến độc lập.

1.1.2.2. Phân loại tín hiệu

Các tín hiệu trên thực tế được phân loại như sau:



Hình 1.3 Phân loại tín hiệu

- Định nghĩa tín hiệu liên tục: Nếu biến độc lập của biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu liên tục.

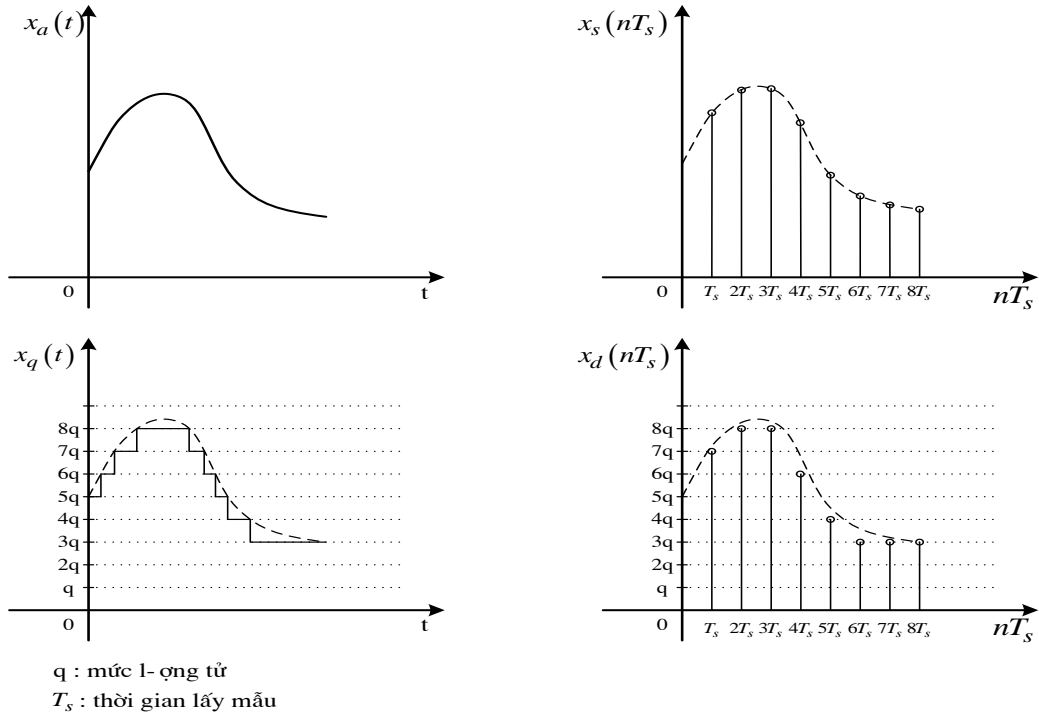
Nhận xét: Tín hiệu liên tục là tín hiệu liên tục theo biến, xét theo hàm hay biên độ ta có tín hiệu tương tự và tín hiệu lượng tử hoá.

+ Định nghĩa tín hiệu tương tự: Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu tương tự.

Nhận xét: Tín hiệu tương tự liên tục theo cả biến và hàm, trong sơ đồ bộ chuyển đổi A/D thì nó là tín hiệu vào $x(t)$.

+ **Định nghĩa tín hiệu lượng tử hoá:** Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu lượng tử hoá.

Nhận xét: Tín hiệu lượng tử hoá liên tục theo biến và rời rạc theo biên độ, trong sơ đồ bộ chuyển đổi A/D thì nó là tín hiệu ra của bộ lượng tử hóa.



Hình 1.4 Minh hoạ sự phân loại tín hiệu

- **Định nghĩa tín hiệu rời rạc:** Nếu biến độc lập của biểu diễn toán học của một tín hiệu là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu rời rạc.

Nhận xét: Tín hiệu liên tục là tín hiệu liên tục theo biến, xét theo hàm ta có tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số.

+ **Định nghĩa tín hiệu lấy mẫu:** Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là liên tục và không bị lượng tử hoá thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu lấy mẫu.

Nhận xét: Tín hiệu lấy mẫu rời rạc theo hàm, liên tục theo biến, trong sơ đồ bộ chuyển đổi A/D thì nó là tín hiệu ra của bộ lấy mẫu $x(nT_s)$ hay chuẩn hóa đơn vị thành $x(n)$.

+ **Định nghĩa tín hiệu số:** Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu số.

Nhận xét: Tín hiệu số rời rạc theo cả biến và theo cả hàm, trong sơ đồ bộ chuyển đổi A/D thì nó là tín hiệu ra của bộ mã hóa x_D .

Lưu ý: Việc phân loại tín hiệu sẽ là cơ sở để phân loại hệ thống xử lý, chẳng hạn như ta có hệ thống rời rạc hay hệ thống tương tự được phân loại tương ứng với loại tín hiệu mà hệ thống đó xử lý là tín hiệu rời rạc hay tín hiệu tương tự.

1.1.2.3. Định lý lấy mẫu

Các tín hiệu được nghiên cứu trong môn học này, chúng ta chỉ đề cập đến tín hiệu rời rạc do vậy chúng ta cần quan tâm đến định lý lấy mẫu của Shannon.

Định lý lấy mẫu: Nếu một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có tần số cao nhất là $F_{\max} = B$, được lấy mẫu tại tốc độ $F_s > 2F_{\max} \equiv 2B$, thì $x_a(t)$ có thể được phục hồi một cách chính xác từ giá trị các mẫu của nó nhờ hàm nội suy.

Khi $F_s = 2F_{\max} = 2B$ ta gọi F_s lúc này là tần số lấy mẫu Nyquist, Ký hiệu là $F_{\text{Nyquist}} (F_N)$.

1.2. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1.2.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc

Trước khi biểu diễn ta có thể chuẩn hoá $T_s = 1$ như sau: $x(nT_s) \xrightarrow{T_s=1} x(n)$.

1.2.1.1. Biểu diễn theo toán học

$$x(n) = \begin{cases} f(n) & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & n \end{cases} \quad \text{Trong đó } f(n) \text{ là một biểu thức toán học nào đó.}$$

Ví dụ 1.1

Ta có thể biểu diễn tín hiệu:
$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

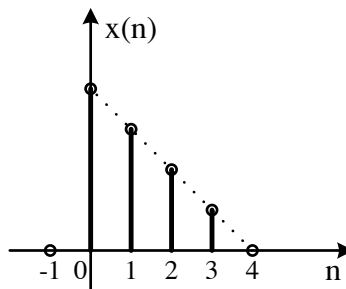
Ở đây ta thấy: $x(0)=1$; $x(1)=3/4$; $x(2)=1/2$; $x(3)=1/4$; $x(4)=0$.

1.2.1.2. Biểu diễn bằng đồ thị

Cách biểu diễn này cho ta cách nhìn trực quan về một tín hiệu rời rạc.

Ví dụ 1.2

Với tín hiệu như ở ví dụ 1.1, ta có thể biểu diễn bằng đồ thị như sau:



Hình 1.5 Biểu diễn tín hiệu bằng đồ thị

1.2.1.3. Biểu diễn bằng dãy số

$$x(n) = \{\dots, x(n-1), \overline{x(n)}, x(n+1), \dots\}$$

Lưu ý ở đây, ta phải có mốc đánh dấu \rightarrow để thể hiện thời điểm gốc $n=0$.

Do cách biểu diễn này, ta còn gọi **tín hiệu rời rạc** là **dãy**.

Ví dụ 1.3

Biểu diễn bằng dãy số tín hiệu trong ví dụ 1.1 và 1.2: $x(n) = \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

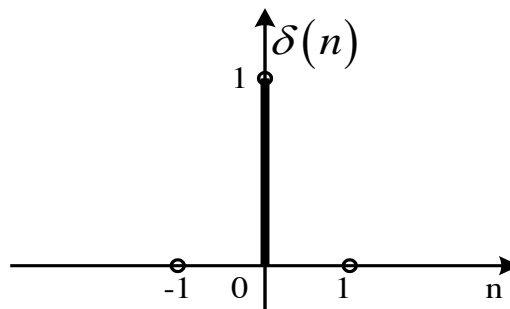
Ta thấy, cả ba ví dụ trên đều biểu diễn một tín hiệu theo ba cách khác nhau.

1.2.2. Một số dãy cơ bản (Tín hiệu rời rạc cơ bản)

1.2.2.1. Dãy xung đơn vị:

Trong miền n , dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

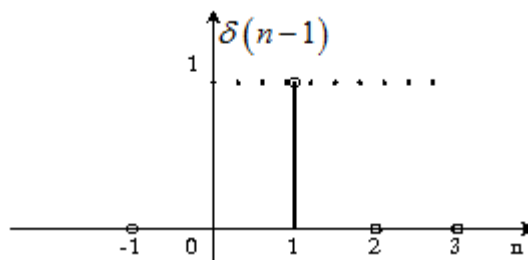
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$



Hình 1.6 Dãy xung đơn vị $\delta(n)$

Ví dụ 1.4

Hãy biểu diễn dãy $\delta(n-1)$:

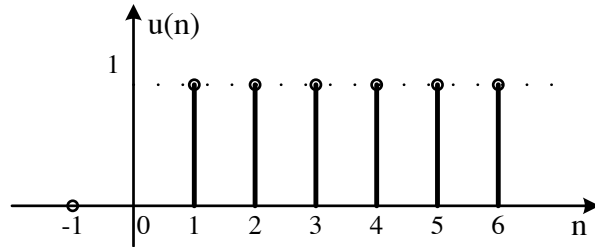


Hình 1.7 Dãy xung $\delta(n-1)$

1.2.2.2. Dãy nhảy đơn vị

Trong miền n , dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

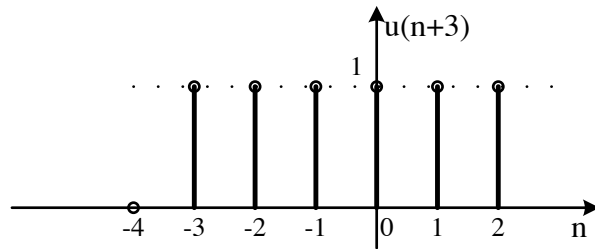
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$



Hình 1.8 Dãy nhảy đơn vị $u(n)$

Ví dụ 1.5

Hãy biểu diễn dãy $u(n+3) = \begin{cases} 1 & n \geq -3 \\ 0 & n < -3 \end{cases}$

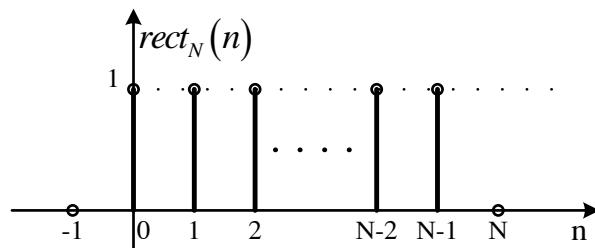


Hình 1.9 Dãy $u(n+3)$

1.2.2.3. Dãy cửa sổ chữ nhật:

Trong miền n , dãy chữ nhật được định nghĩa như sau:

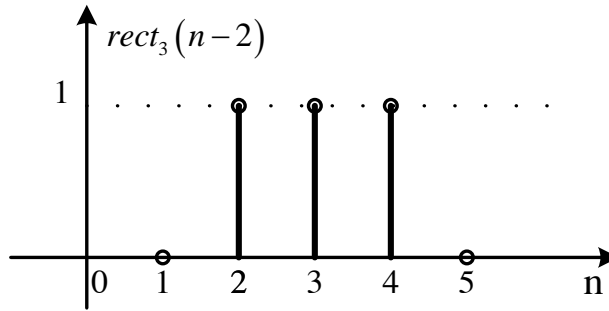
$$w(n) = \text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.3)$$



Hình 1.10 Dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$

Ví dụ 1.6

Hãy biểu diễn dãy $rect_3(n-2) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n-2 \leq 2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

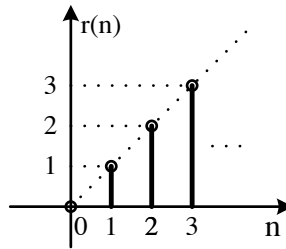


Hình 1.11 Dãy chữ nhật $rect_3(n-2)$

1.2.2.4. Dãy dốc đơn vị:

Trong miền n , dãy dốc đơn vị được định nghĩa như sau:

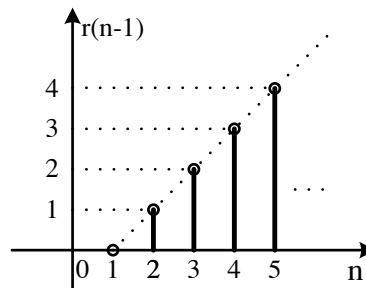
$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.4)$$



Hình 1.12 Dãy dốc đơn vị $r(n)$

Ví dụ 1.7

Hãy biểu diễn dãy $r(n-1) = \begin{cases} n-1 & n-1 \geq 0 (n \geq 1) \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$



Hình 1.13 Dãy dốc đơn vị $r(n-1)$

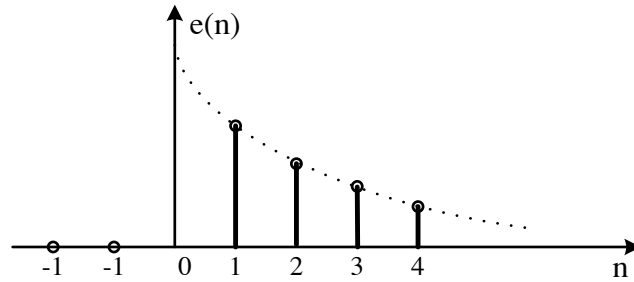
1.2.2.5. Dãy hàm mũ:

Trong miền n , dãy hàm mũ được định nghĩa như sau:

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.5)$$

Ví dụ 1.8

Hãy biểu diễn $e(n)$ với $0 \leq a \leq 1$.



Hình 1.14 Dãy hàm mũ $e(n)$

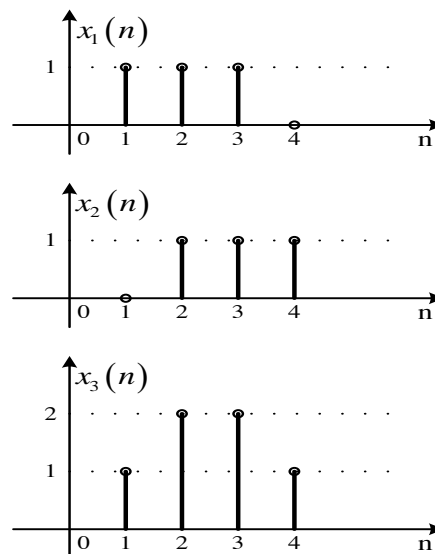
1.2.3. Các phép toán cơ bản với dãy số

1.2.3.1. Tổng của 2 dãy:

Tổng của 2 dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

Ví dụ 1.9

Hãy thực hiện $x_3(n) = x_1(n) + x_2(n)$



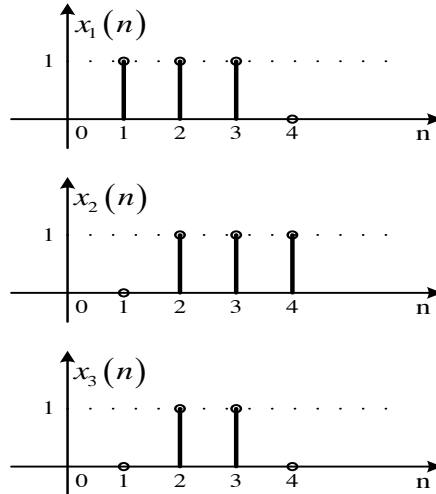
Hình 1.15 Tổng của hai dãy

1.2.3.2. Tích của 2 dãy:

Tích của 2 dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

Ví dụ 1.10

Hãy thực hiện $x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$



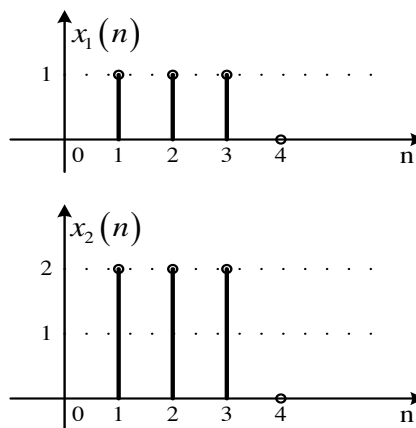
Hình 1.16 Tích của hai dãy

1.2.3.3. Tích của một dãy với hằng số:

Tích của một dãy với các hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy với hằng số đó.

Ví dụ 1.11

$x_2(n) = \alpha \cdot x_1(n)$, α là hằng số giả sử cho bằng 2 ta có:



Hình 1.17 Tích của dãy với hằng số 2

1.2.3.4. Trễ:

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ nếu có quan hệ sau đây:

$$x_2(n) = x_1(n - n_0) \quad n_0: \text{nguyên}$$

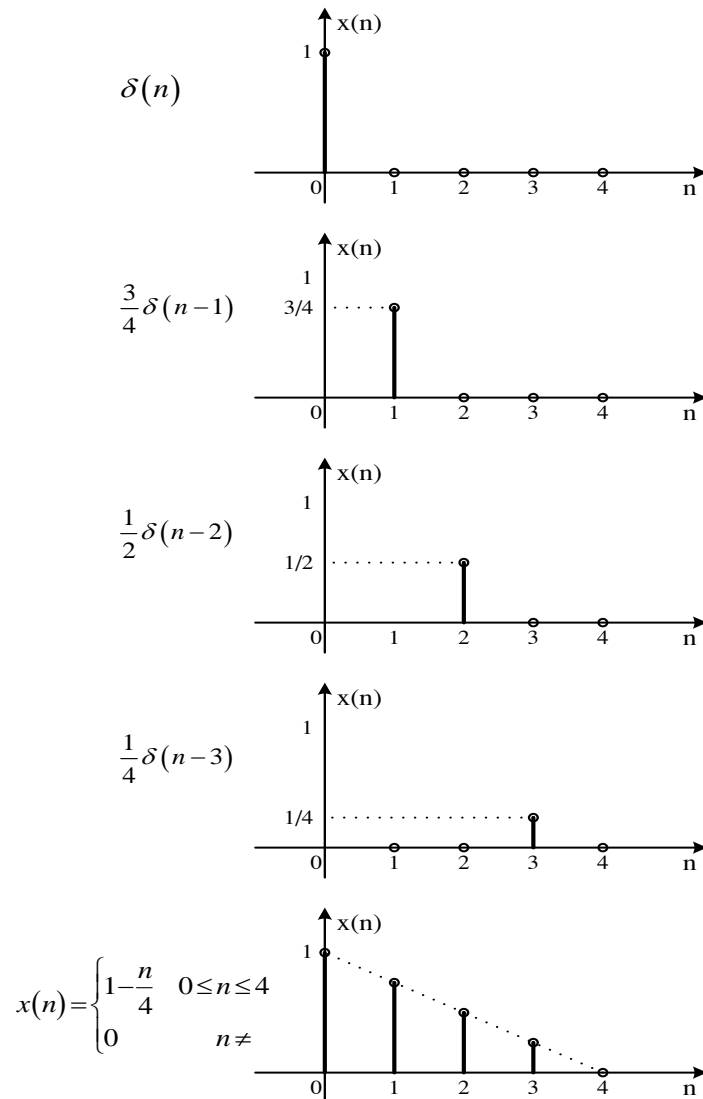
Ví dụ 1.12

Biểu diễn tín hiệu $x(n]$ được mô tả như sau:

$$x(n) = \delta(n) + \frac{3}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n-3)$$

Giải:

Ta biểu diễn lần lượt các thành phần trong mô tả trên, sau đó thực hiện phép cộng như minh họa dưới đây để xác định $x(n]$.



Hình 1.18 Minh họa $x(n]$ trong ví dụ 1.14

Từ ví dụ, ta thấy rằng: Một dãy $x(n]$ bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng sau đây:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \quad (1.6)$$

Trong đó ta chú ý $x(k)$ là giá trị $x(n)$ tại thời điểm $n = k$, do vậy về mặt bản chất $x(k)$ và $x(n)$ khác nhau (n là biến thời gian rời rạc, k là chỉ số), nhưng về mặt thể hiện $x(n)$ và $x(k)$ là như nhau.

1.2.3.5. Phép nội suy và phép phân chia tín hiệu

Phép nội suy: thực chất là phép tăng tần số lấy mẫu lên một hệ số lần.

Phép phân chia: thực chất là phép giảm tần số lấy mẫu đi một hệ số lần.

Ví dụ 1.13

Cho tín hiệu $x(n) = \{1, 2, 3, \bar{4}, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tìm phép nội suy $x\left(\frac{n}{2}\right)$ và phép phân chia $x(2n)$ với hệ số 2 của tín hiệu $x(n)$.

Giải:

Phép nội suy với hệ số 2 của $x(n)$ là: $x\left(\frac{n}{2}\right) = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \bar{4}, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9\}$

Ta thấy, $x\left(\frac{n}{2}\right)$ là được suy ra từ $x(n)$ khi thêm 1 số không và giữa các phần tử của nó.

Tổng quát ta có, $x\left(\frac{n}{A}\right)$ là được suy ra từ $x(n)$ khi thêm $A-1$ số không và giữa các phần tử của nó.

Phép nội suy với hệ số 2 của $x(n)$ là: $x(2n) = \{2, \bar{4}, 6, 8\}$

Ta thấy, $x(2n)$ là được suy ra từ $x(n)$ khi chỉ giữ lại các vị trí mà chỉ số n chia hết cho

2. Tổng quát ta có, $x\left(\frac{n}{A}\right)$ là được suy ra từ $x(n)$ khi chỉ giữ lại các vị trí mà chỉ số n chia hết cho A .

1.2.3.6. Phép tương quan tín hiệu

Phép tương quan thường dùng để so sánh nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... rất hay dùng khi xử lý các tín hiệu Radar dùng trong quân sự, có hai loại tương quan:

Tương quan chéo (cross – correlation):

Tương quan chéo giữa tín hiệu $x(n)$ với $y(n)$ (một trong hai tín hiệu phải có năng lượng hữu hạn) được định nghĩa như sau:

$$R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n) \quad (1.7)$$

Tự tương quan (auto – correlation):

Trong phép tương quan chéo khi $x(n) \equiv y(n)$ ta có phép tự tương quan của tín hiệu $x(n)$ với chính nó và được định nghĩa như sau:

$$R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n) \quad (1.8)$$

Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu cách thực hiện phép tương quan thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 1.14

Hãy xác định chuỗi tương quan chéo $R_{xy}(n)$ của các chuỗi

$$x(n) = \{..., 0, 0, 2, -1, 3, 7, \vec{1}, 2, -3, 0, 0, ...\}$$

$$y(n) = \{..., 0, 0, 1, -1, 2, -2, \vec{4}, 1, -2, 5, 0, 0, ...\}$$

Giải :

Ta dùng định nghĩa để tính $R_{xy}(n)$.

- Đối với $n = 0$, ta có

$$R_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)y(m)$$

$$R_{xy}(0) = 7$$

- Đối với $n > 0$, ta dịch $y(n)$ sang phải n đơn vị so với $x(m)$, tính tích $x(m)y(m-n)$ và lấy tổng theo tất cả giá trị của tích.

Kết quả ta có

$$R_{xy}(1) = 13 \quad R_{xy}(2) = -18 \quad R_{xy}(3) = 16 \quad R_{xy}(4) = -7$$

$$R_{xy}(5) = 5 \quad R_{xy}(6) = -3 \quad R_{xy}(n) = 0 \quad n \geq 7$$

- Đối với $n < 0$, ta dịch $y(n)$ sang trái n đơn vị so với $x(m)$, tính tích $x(m)y(m-n)$ và lấy tổng theo tất cả giá trị của tích.

Kết quả ta có:

$$R_{xy}(-1) = 0 \quad R_{xy}(-2) = 33 \quad R_{xy}(-3) = -14 \quad R_{xy}(-4) = 36$$

$$R_{xy}(-5) = 19 \quad R_{xy}(-6) = -9 \quad R_{xy}(-7) = 10 \quad R_{xy}(n) = 0, n \leq -8$$

Bởi vậy, chuỗi tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$ là

$$R_{xy}(n) = \{10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, \bar{7}, 13, -18, 16, -7, 5, -3\}$$

1.2.4. Các đặc trưng cơ bản của dãy số

1.2.4.1. Dãy tuần hoàn với chu kỳ N

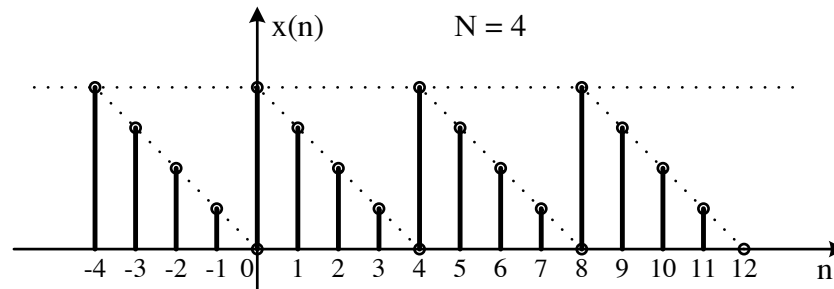
Ta nói rằng một dãy $x(n)$ là tuần hoàn với chu kỳ N nếu thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$x(n) = x(n + N) = x(n + lN) \quad l: \text{số nguyên}; N: \text{chu kỳ}$$

Khi cần nhấn mạnh tính tuần hoàn, người ta ký hiệu dấu \sim phía trên. Ký hiệu: $\tilde{x}(n)_N$.

Ví dụ 1.15

Biểu diễn dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ với $N = 4$.



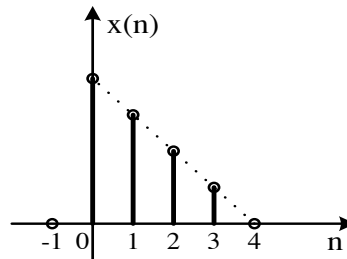
Hình 1.19 Dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_4$

1.2.4.2. Dãy có chiều dài hữu hạn L

Một dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu ta gọi là dãy có chiều dài hữu hạn với N là chiều dài của dãy.

L : Toán tử chiều dài

$$L[x(n)] = [0, 3] = 4$$



Hình 1.20 Dãy có chiều dài hữu hạn

1.2.4.3. Năng lượng của dãy:

Năng lượng của một dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.9)$$

Ví dụ 1.16

Tìm năng lượng của 3 dãy

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_N(n)$$

$$x_3(n) = u(n)$$

Giải:

$$E_{x_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1 \quad \text{Dãy có năng lượng hữu hạn}$$

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{rect}_N(n)|^2 = N \quad \text{Dãy có năng lượng hữu hạn}$$

$$E_{x_3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty \quad \text{Dãy có năng lượng vô hạn (không tồn tại thực tế)}$$

1.2.4.4. Công suất trung bình của một tín hiệu

Công suất trung bình của một tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.10)$$

Nếu ta định nghĩa năng lượng của tín hiệu $x(n)$ trong một khoảng hữu hạn $-N \leq n \leq N$ là:

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.11)$$

Thì có thể biểu diễn năng lượng tín hiệu E như sau:

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \quad (1.12)$$

và công suất trung bình của tín hiệu $x(n)$ là

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (1.13)$$

Như vậy, nếu E là hữu hạn thì $P = 0$. Mặt khác, nếu E là vô hạn thì công suất trung bình P có thể là hữu hạn hoặc vô hạn. Nếu P là hữu hạn (và không zero) thì tín hiệu gọi là *tín hiệu công suất*.

1.3. HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.3.1. Hệ thống tuyến tính

1.3.1.1. Một số khái niệm



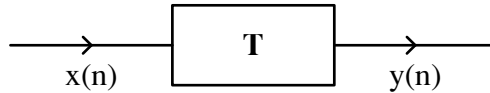
Hình 1.21 Mô hình hệ thống

Kích thích và đáp ứng:

- + Dãy vào của hệ thống được gọi là kích thích
- + Dãy ra được gọi là đáp ứng của hệ thống ứng với kích thích đang khảo sát.

Toán tử T:

- + Một hệ thống tuyến tính đặc trưng bởi toán tử T làm nhiệm vụ biến đổi dãy vào thành dãy ra.



Hình 1.22 Mô hình hệ thống với phép biến đổi

$$T[x(n)] = y(n) \quad (1.14)$$

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

1.3.1.2. Hệ thống tuyến tính:

Đối với các hệ thống tuyến tính toán tử T phải tuân theo nguyên lý xếp chồng, tức là phải tuân theo quan hệ sau đây:

$$T[a.x_1(n) + b.x_2(n)] = a.T[x_1(n)] + b.T[x_2(n)] = a.y_1(n) + b.y_2(n) \quad (1.15)$$

1.3.1.3. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính:

Trong phần trước ta có biểu diễn của tín hiệu đầu vào $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$

Thực hiện biến đổi theo toán tử T ta xác định $y(n)$

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h_k(n) \quad (1.16)$$

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)] \text{ được gọi là } \textbf{đáp ứng xung}. \quad (1.17)$$

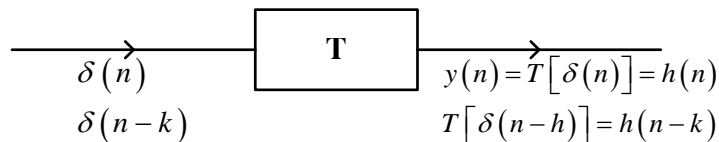
Đáp ứng xung $h_k(n)$ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống thay cho toán tử T.

1.3.2. Hệ thống tuyến tính bất biến

1.3.2.1. Định nghĩa:

Nếu ta có $y(n)$ là đáp ứng với kích thích $x(n)$ thì hệ thống được gọi là bất biến nếu $y(n-k)$ là đáp ứng với kích thích $x(n-k)$.

1.3.2.2. Phép chập:



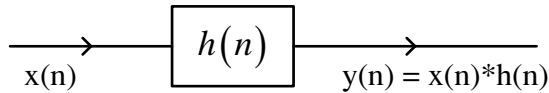
Hình 1.23 Hệ thống bất biến

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (1.18)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1.19)$$

Ở đây $h(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB)

Dấu hoa thị (*) ký hiệu phép chập.



Hình 1.24 Hệ thống tuyến tính bất biến

Như vậy, đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB) sẽ bằng dãy vào chập với đáp ứng xung.

Phương pháp tính phép chập

Về nguyên tắc chúng ta phải tính $y(n) = x(n) * h(n)$ theo cách tìm từng giá trị $y(n)$ ứng với từng giá trị n cụ thể từ $n = -\infty$ đến $n = \infty$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) \quad (n: -\infty \rightarrow \infty)$$

$$n = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(0-k)$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(1-k)$$

$n=2$ Cứ thay vào như vậy về nguyên tắc ta phải tính đến giá trị $n = \infty$.

Đối với các giá trị $n < 0$ ta cũng phải tính lần lượt

$$n = -1 \Rightarrow y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(-1-k)$$

$n = -2$ và phải tính đến giá trị $n = -\infty$

Tập hợp các giá trị tìm được ta có kết quả phép chập $y(n)$ cần tìm.

Để dễ dàng trong việc tính toán người ta đưa ra nhiều phương pháp tính phép chập trong đó có phương pháp đồ thị như sau:

Các bước tính phép chập bằng đồ thị:

Bước 1: Đổi biến n thành biến k , $x(n) \rightarrow x(k)$, $h(n) \rightarrow h(k)$, cố định $h(k)$

Bước 2: Quay $h(k)$ đối xứng qua trục tung để thu được $h(-k)$, tức $h(0-k)$ ứng với $n=0$.

Bước 3: Dịch chuyển $h(-k)$ theo từng giá trị n , nếu $n > 0$ dịch chuyển về bên phải, nếu $n < 0$ dịch chuyển về phía trái ta thu được $h(n-k)$.

Bước 4: Thực hiện phép nhân $x(k).h(n-k)$ theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của k .

Bước 5: Cộng các giá trị thu được ta có một giá trị của $y(n)$, tổng hợp các kết quả ta có dãy $y(n)$ cần tìm.

Lưu ý: ta có thể cố định $h(k)$ rồi lấy đối xứng $x(k)$ qua trục tung rồi tiến hành các bước như trên, kết quả sẽ không thay đổi do phép chập có tính chất giao hoán.

Các bước trên sẽ được minh hoạ ở ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.17

$$\text{Cho một HTTTBB có: } x(n) = \text{rect}_5(n); h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

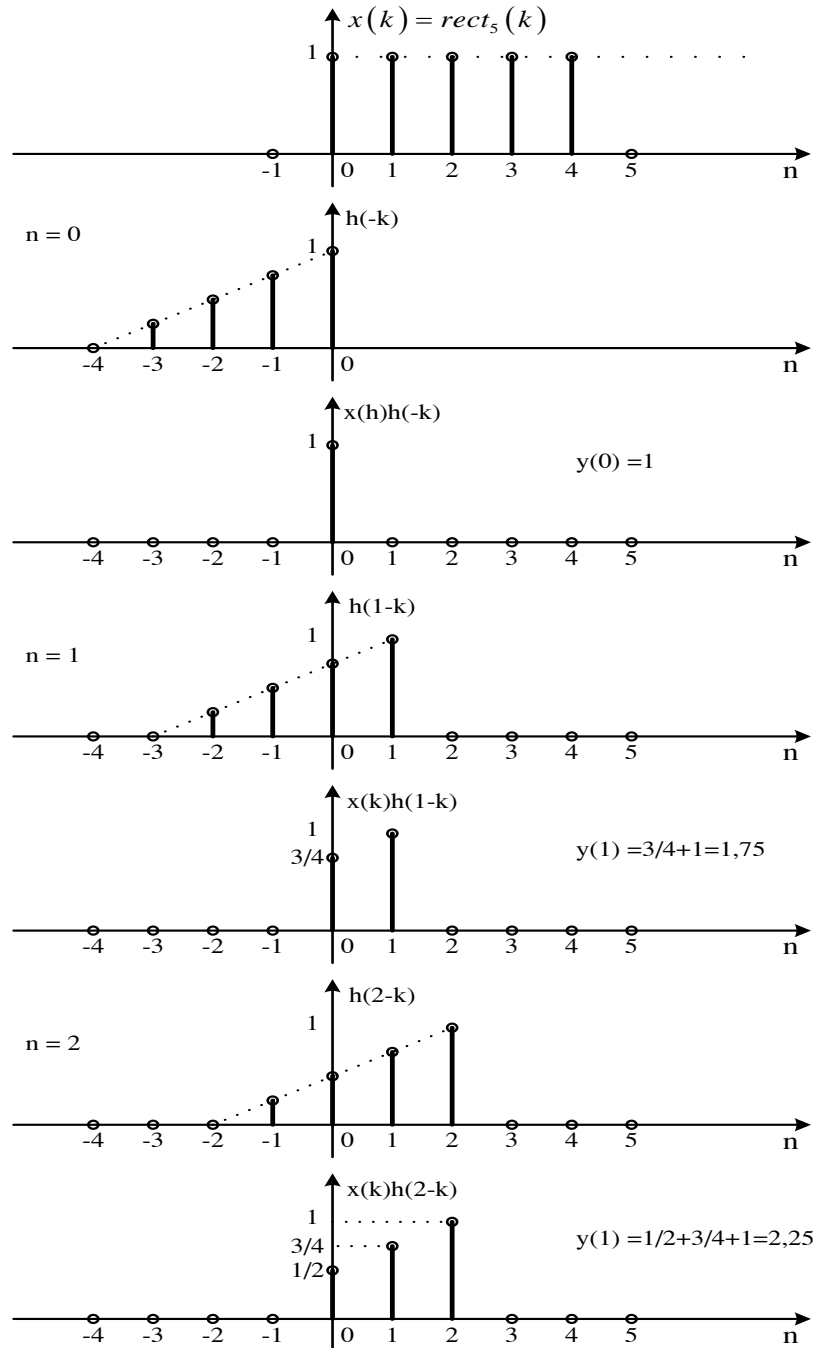
Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống $y(n)$?

Giải:

Ta thực hiện theo phương pháp tính phép chập bằng đồ thị:

- + Đổi biến n thành biến k
- + Giữ nguyên $x(k)$, lấy đối xứng $h(k)$ thành $h(-k)$

+ Dịch $h(-k)$ sang trái ($n < 0$) hoặc sang phải ($n > 0$) theo từng mẫu, sau đó tính từng giá trị của $y(n)$ ứng với từng n cụ thể như đồ thị sau.



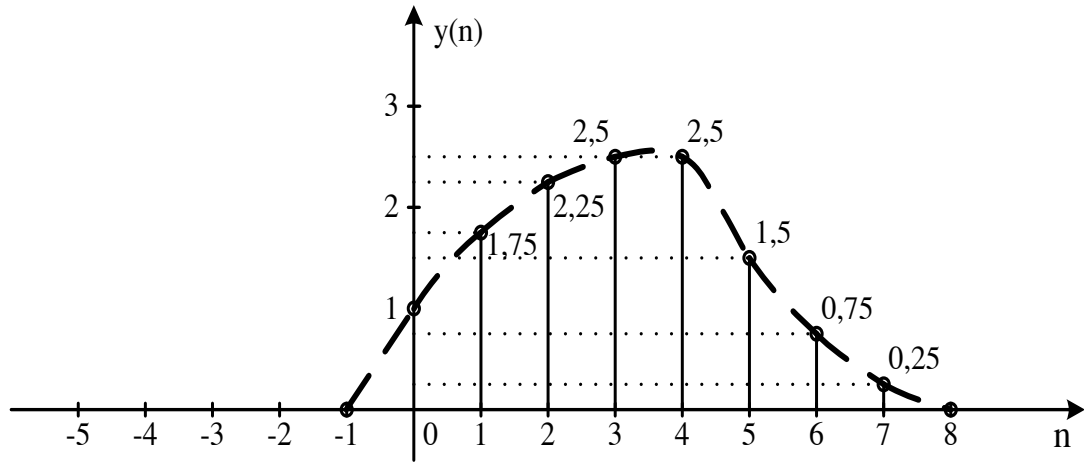
Hình 1.25 Minh họa tính phép chập bằng đồ thị

Tiếp tục tính như trên ta được các giá trị:

$$y(3) = 2,5 \quad y(5) = 1,5 \quad y(7) = 0,25 \quad y(-1) = 0 \quad \dots \quad y(-\infty) = 0$$

$$y(4) = 2,5 \quad y(6) = 0,75 \quad y(8) = 0 \quad \dots y(\infty) = 0$$

Dựa vào kết quả tính toán, ta vẽ được đáp ứng ra của hệ thống:



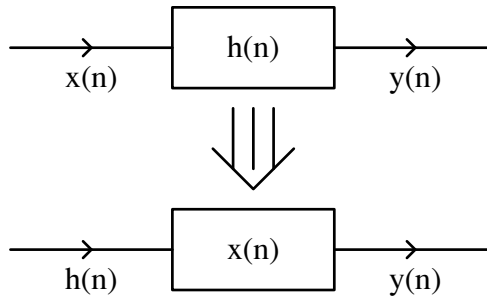
Hình 1.26 Kết quả phép chập

Các tính chất của phép chập:

- **Tính giao hoán:**

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (1.20)$$

Ý nghĩa:



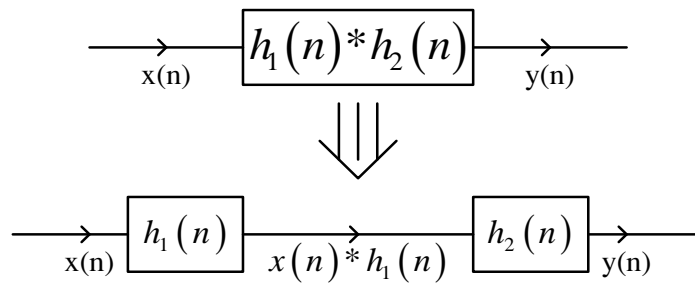
Hình 1.27 Tính giao hoán

Trong một hệ thống, ta có thể hoán vị đầu vào $x(n)$ và đáp ứng xung $h(n)$ cho nhau thì đáp ứng ra $y(n)$ không thay đổi.

- **Tính kết hợp:**

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (1.21)$$

Ý nghĩa:



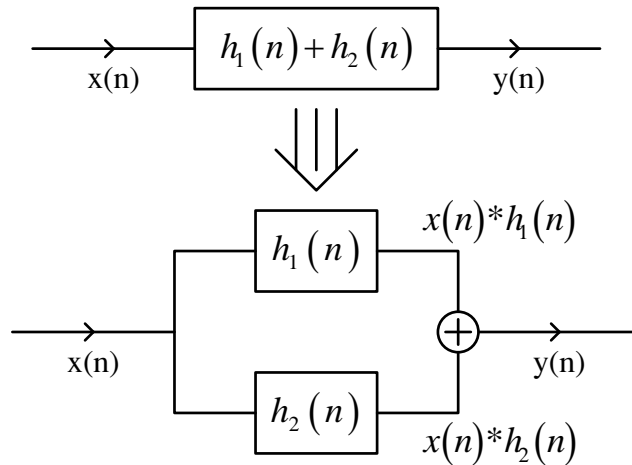
Hình 1.28 Tính kết hợp

Nếu ta có hai hệ thống ghép nối tiếp với nhau thì đáp ứng xung của hệ thống tổng quát sẽ là chập của đáp ứng xung của các hệ thống thành phần.

- Tính phân phối (chập và cộng):

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)] \quad (1.22)$$

Ý nghĩa:



Hình 1.29 Tính phân phối

Nếu ta có hai hệ thống ghép song song với nhau thì đáp ứng xung của hệ thống tổng quát sẽ là tổng đáp ứng xung của các hệ thống thành phần.

1.3.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

1.3.3.1. Định nghĩa

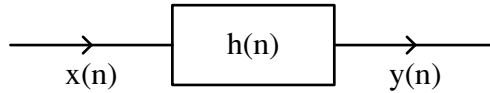
Một hệ thống tuyến tính bất biến được gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở thời điểm bất kỳ $n = n_0$ hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai, $n > n_0$.

1.3.3.2. Định lý

Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả phải bằng 0 với $n < 0$ ($h(n) = 0$ với mọi $n < 0$).

- Một dãy $x(n)$ được gọi là nhân quả nếu $x(n) = 0$ với $n < 0$.

Xét phép chấp để xác định đáp ứng ra $y(n)$ với tín hiệu và hệ thống TTBB nhân quả.



Hình 1.30 Hệ thống tuyến tính bất biến

- Nếu $x(n)$ nhân quả:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad x(k) \neq 0 \text{ khi } k \geq 0$$

- Nếu $h(n)$ nhân quả: $h(n) \neq 0$ khi $n \geq 0$:

$$\text{Vì } h(n-k) \neq 0 ; (n-k) \geq 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

1.3.4. Hệ thống tuyến tính bất biến và ổn định

1.3.4.1. Định nghĩa

Một hệ thống tuyến tính bất biến gọi là ổn định nếu ứng với dãy vào bị chặn ta cũng có dãy ra bị chặn (biên độ bị hạn chế $\neq \pm\infty$).

$$|x(n)| < \infty \rightarrow |y(n)| < \infty \quad (1.23)$$

Hệ thống này còn được gọi là hệ thống BIBO (Bounded Input Bounde Output)

1.3.4.2. Định lý

Một hệ thống tuyến tính bất biến được gọi là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.24)$$

(Tổng giá trị tuyệt đối của mọi giá trị đáp ứng xung)

Ví dụ 1.18

Xét sự ổn định của các hệ thống có đáp ứng xung sau:

$$h_1(n) = u(n)$$

$$h_2(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải:

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |1| = \infty \quad \rightarrow \text{Hệ thống không ổn định}$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_3(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ nếu } a < 1 \quad \rightarrow \text{Hệ thống ổn định}$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \infty \text{ nếu } a \geq 1 \quad \rightarrow \text{Hệ thống không ổn định}$$

1.4. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

1.4.1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số biến đổi

Về mặt tín hiệu, một hệ thống tuyến tính (HTTT) sẽ được mô tả bởi một phương trình sai phân tuyến tính có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r) \quad (1.25)$$

$$a_0(n) y_0(n) + \sum_{k=1}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r(n)}{a_0(n)} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k(n)}{a_0(n)} y(n-k) \quad (1.26)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n)$$

$a_k(n)$, $b_r(n)$ hệ số phương trình đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính, thay cho đáp ứng xung.

1.4.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Một HTTT bất biến về mặt toán học được mô tả bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng dạng tổng quát sau đây:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.27)$$

a_k , b_r hệ số hằng.

N: Bậc của phương trình

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k)$$

$a_0 = 1$, thì

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (1.28)$$

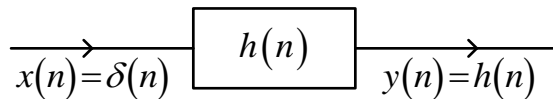
b_r, a_k đặc trưng cho hệ thống, thay cho đáp ứng xung.

Đáp ứng ra $y(n)$ được xác định bởi phương trình sai phân (PTSP) như trên tương đương với đáp ứng ra được xác định theo phép chập:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (1.29)$$

đáp ứng xung $h(n)$ đặc trưng cho hệ thống.

Lưu ý: Nếu đầu vào là xung đơn vị $\delta(n)$ thì đầu ra ta có đáp ứng xung $h(n)$.



Hình 1.31 Hệ thống tuyến tính bất biến

Có hai phương pháp giải phương trình sai phân để xác định đáp ứng ra $y(n)$, đáp ứng xung $h(n)$:

- Phương pháp thế

- Phương pháp tìm nghiệm tổng quát: giải phương trình tìm nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng rồi xác định nghiệm tổng quát.

Việc giải phương trình sai phân theo phương pháp thế sẽ được mô tả trong ví dụ 1.18.

Ví dụ 1.19

Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau:

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của phương trình sai phân đã mô tả với điều kiện: $y(-1) = 0$.

Giải:

$N = 1, a_0 = 1$: Phương trình bậc 1.

$$a_1 = -A, M = 0, b_0 = 1, \text{ cho } x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) \equiv h(n)$$

$$h(n) = Ah(n-1) + \delta(n)$$

Tìm $h(n)$ với hệ thống nhân quả. Thay vào:

$$n = 0: \quad h(0) = Ah(-1) + \delta(0) = 0 + 1 \quad h(0) = 1 \quad (\text{Do } h(-1) = y(-1) = 0)$$

$$n = 1: \quad h(1) = Ah(0) + \delta(1) = A.1 + 0 \quad h(1) = A$$

$$n = 2: \quad h(2) = Ah(1) + \delta(2) = A.A + 0 \quad h(2) = A^2$$

$$n = 3: \quad h(3) = Ah(2) + \delta(3) = A.A^2 + 0 \quad h(3) = A^3$$

.....

Cứ thế tiếp tục ta có:

$$h(n) = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

1.4.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sẽ bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(n)$ và nghiệm riêng của phương trình $y_p(n)$:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) \quad (1.30)$$

1.4.3.1. Tìm $y_0(n)$:

Phương trình thuần nhất là phương trình sai phân mà đầu vào $x(n) = 0$ sẽ có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.31)$$

Ta thường tìm nghiệm dưới dạng hàm mũ $y_0(n) = \alpha^n$, thay vào ta có:

$$\begin{aligned} a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{N-1} \alpha^{n-N+1} + a_N \alpha^{n-N} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^{n-N} (a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + a_2 \alpha^{N-2} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N) &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nghiệm $\alpha^{n-N} = 0$ tức $\alpha = 0$ là nghiệm tầm thường ta không xét đến, ta có phương trình đặc trưng

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + a_2 \alpha^{N-2} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (1.33)$$

Phương trình này sẽ có N nghiệm, nếu các nghiệm này là nghiệm đơn ta có sẽ có dạng nghiệm của phương trình thuần nhất như sau:

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + A_3 \alpha_3^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (1.34)$$

Các hệ số A_1 và A_2 được xác định nhờ các điều kiện đầu.

1.4.3.2. Tìm $y_p(n)$:

Đây chính là nghiệm phương trình sai phân khi đầu vào $x(n) \neq 0$, Nó sẽ có dạng của phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Ở đây ta thường chọn $y_p(n)$ giống dạng đầu vào $x(n)$:

- Nếu dạng đầu vào $x(n) = \beta^n (\beta \neq \alpha_k)$ ta đặt $y_p(n) = B.\beta^n$

- Nếu dạng đầu vào $x(n) = \beta^n$ mà β trùng với dạng nghiệm α_k của phương trình đặc trưng ta phải đặt $y_p(n) = B.n.\beta^n$

Sau đó ta xác định B bằng cách thay $y_p(n)$ vào phương trình ban đầu.

1.4.3.3. Xác định nghiệm tổng quát $y(n)$:

Đến đây ta sẽ có:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n + B.\beta^n & (\beta \neq \alpha_k) \\ \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n + B.n.\beta^n & (\beta = \alpha_k) \end{cases} \quad (1.35)$$

Các hệ số A_1 và A_2 sẽ được xác định nhờ các điều kiện đầu.

Ta sẽ tìm hiểu cụ thể cách giải phương trình sai phân tìm nghiệm tổng quát thông qua ví dụ trên như sau.

Ví dụ 1.20

Hãy xác định đáp ứng $y(n)$, $n \geq 0$ của hệ được biểu diễn bởi phương trình sai phân bậc hai:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

khi đầu vào là: $x(n) = 4^n$ và điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 0$

Giải:

Tìm $y_0(n)$

Ta chọn dạng nghiệm của $y_0(n) = \alpha^n$ ta có:

Ta có phương trình đặc trưng: $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$ có 2 nghiệm $\alpha_1 = -1$; $\alpha_2 = 4$.

Dạng nghiệm thuần nhất sẽ là: $y_0(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n$

Tìm $y_p(n)$

Nghiệm riêng là một chuỗi hàm mũ giống như $x(n)$. Do $\alpha_2 = 4$ trùng với dạng của $x(n) = 4^n$ nên dạng nghiệm sẽ là: $y_p(n) = B.n.(4)^n$

Thay vào phương trình đầu bài cho ta có:

$$B.n(4)^n - 3B.(n-1)(4)^{n-1} - 4B(n-2)(4)^{n-2} = (4)^n + 2(4)^{n-1}$$

Giải ra ta có $B = \frac{6}{5}$. Do vậy: $y_p(n) = \frac{6}{5}n(4)^n$

Xác định nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

Nghiệm chung của phương trình sai phân có được bằng cách cộng nghiệm thuần nhất với nghiệm riêng ta có:

$$y(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n \quad n \geq 0$$

Ở đây, các hằng số C_1 và C_2 sẽ được xác định theo điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$.

Thay vào:

$$y(-1) = A_1(-1)^{-1} + A_2(4)^{-1} + \frac{6}{5}(-1)(4)^{-1} = 0$$

$$y(-2) = A_1(-1)^{-2} + A_2(4)^{-2} + \frac{6}{5}(-2)(4)^{-2} = 0$$

Giải ra ta có kết quả:

$$A_1 = \frac{3}{50} \text{ và } A_2 = \frac{36}{25}.$$

Vậy, ta có kết quả cần tìm là:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{3}{50}(-1)^n + \frac{36}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

1.4.4. Thực hiện hệ thống tuyến tính, bất biến từ phương trình sai phân

1.4.4.1. Hệ thống đệ quy và không đệ quy

1.4.4.1.1. Các hệ thống không đệ quy

Từ phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Trong trường hợp đặc biệt cho $N = 0$ thì:

$$a_0 y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$a_0 = 1: \quad y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Định nghĩa: Một HTTT bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc 0 được gọi là hệ thống không đệ qui.

Nhận xét:

$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$ chỉ phụ thuộc đầu vào ở thời điểm hiện tại và các thời điểm quá khứ.

Từ phương trình này, ta đổi chữ r thành chữ k , b_k thành h_k , ta thấy đây chính là quan hệ của phép chập: $y(n) = \sum_{k=0}^M h(k).x(n-k) = h(n) * x(n)$

$h(n)$ nhân quả vì $\forall n < 0$ thì $h(n) = 0$.

Vì chiều dài chỉ chạy từ 0 đến M : $L[h(n)] = [0, M] = M + 1$

Như vậy, từ nhận xét trên ta thấy: Hệ thống không đệ qui chính là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn. Ký hiệu FIR (Finite-Duration Impulse Response)

Xét ổn định:

Tiêu chuẩn ổn định: $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$; $S = \sum_{n=0}^M |h(n)| < \infty$

Điều kiện ổn định đối với đáp ứng xung luôn luôn được thỏa mãn, vì vậy hệ thống FIR là hệ thống luôn luôn ổn định, đây là đặc điểm ưu việt nhất của hệ thống này nên hay dùng trong đa số mạch điện.

1.4.4.1.2. Hệ thống đệ qui

Phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Nếu $N > 0$, $a_0 = 1$:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Định nghĩa: Một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân bậc $N > 0$ được gọi là hệ thống đệ qui.

Nhận xét:

+ Đầu ra phụ thuộc

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)]$$

Trong trường hợp này đầu ra (đáp ứng hệ thống) không những chỉ phụ thuộc vào đầu vào ở các thời điểm hiện tại và quá khứ, mà còn phụ thuộc vào đầu ra ở các thời điểm quá khứ. Chẳng hạn ta xem xét hệ thống được biểu diễn theo phương trình sai phân sau:

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n), \quad N = 1: \text{phương trình bậc nhất.}$$

Như trên ta đã có, giải phương trình trên ta được:
$$h(n) = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$L[h(n)] = \infty$, đáp ứng xung của hệ thống có chiều dài vô hạn, do vậy hệ thống này (hệ thống đệ quy) còn gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn IIR. (Infinite-Duration Impulse Response)

Xét tính ổn định:

$$S = \frac{1}{1-A}$$

+ Hệ thống đệ quy ổn định khi tham số $A < 1$

+ Hệ thống này không ổn định nếu tham số $A \geq 1$

Như vậy hệ thống đệ quy có thể ổn định hoặc không ổn định. Khi xét hệ thống đệ quy, ta phải xét tính ổn định hệ thống.

1.4.4.1.3. Hệ thống đệ quy thuần túy

$N > 0, M = 0$: ta có hệ thống đệ quy thuần túy

$$a_0 = 1: \quad y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$N=1>0, M=0, a_0 = 1$ có:
$$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$$

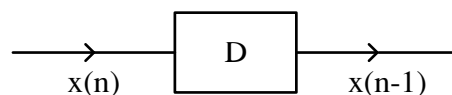
Định nghĩa: Một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân bậc $N > 0$ và $M = 0$ được gọi là hệ thống đệ quy thuần túy (trường hợp riêng của hệ thống đệ quy).

1.4.4.2. Thực hiện hệ thống

1.4.4.2.1. Các phần tử thực hiện

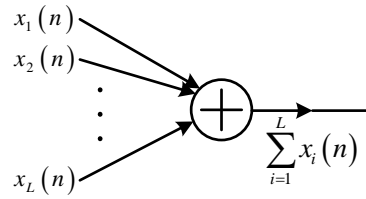
Có 3 phần tử chính để thực hiện hệ thống trong miền rời rạc như sau:

+ Phần tử trễ:



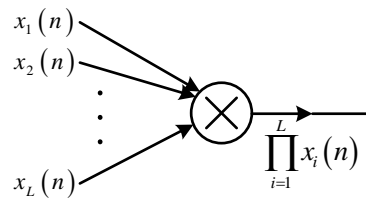
Hình 1.32 Phần tử trễ

+ Phần tử cộng:



Hình 1.33 Phần tử cộng

+ Phần tử nhân:



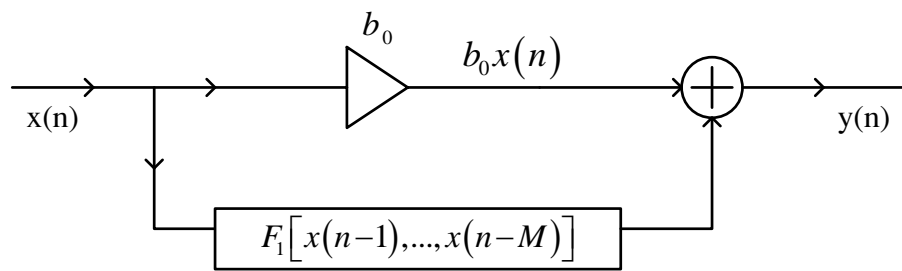
Hình 1.34 Phần tử nhân (khuếch đại)

1.4.4.2.2. Thực hiện hệ thống

Từ các phần tử trên ta sẽ mô tả các hệ thống đệ quy, không đệ quy, đệ quy thuần túy như sau:

Hệ thống không đệ quy: $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) = b_0 x(n) + \sum_{r=1}^M b_r x(n-r)$

$$\sum_{r=1}^M b_r x(n-r) = F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

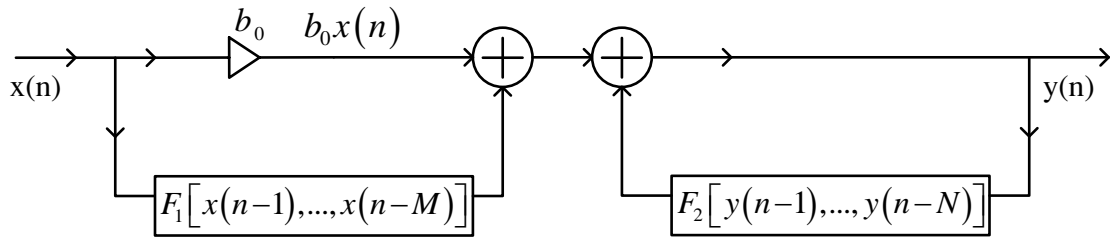


Hình 1.35 Hệ thống không đệ quy

Hệ thống đệ quy: $y(n) = b_0 x(n) + \sum_{r=1}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$

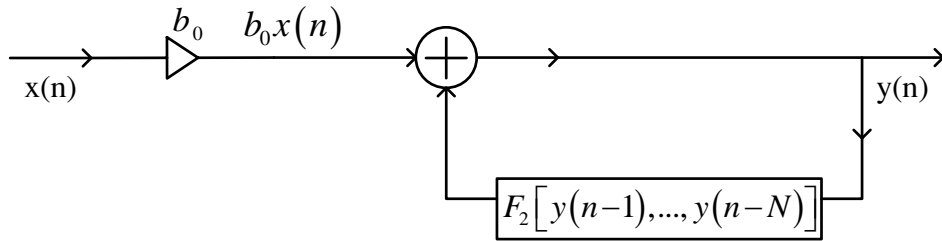
$$\sum_{r=1}^M b_r x(n-r) = F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

$$\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k) = F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]$$



Hình 1.36 Hệ thống đệ quy

Hệ thống đệ quy thuần túy: $y(n) = b_0 x(n) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$



Hình 1.37 Hệ thống đệ quy thuần túy

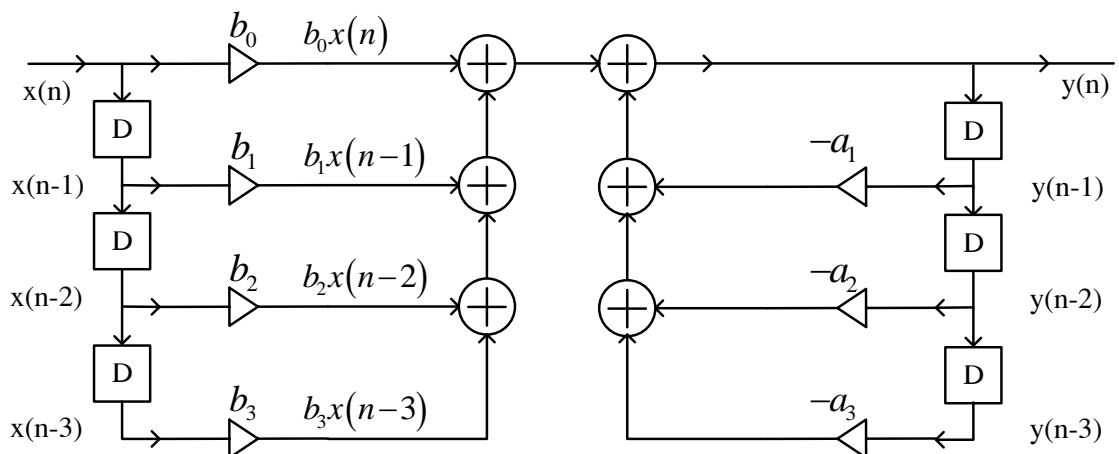
Ví dụ 1.21

Hãy biểu diễn HTTTBB được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = b_0 x(n) + \sum_{r=1}^3 b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^3 (-a_k) y(n-k)$$

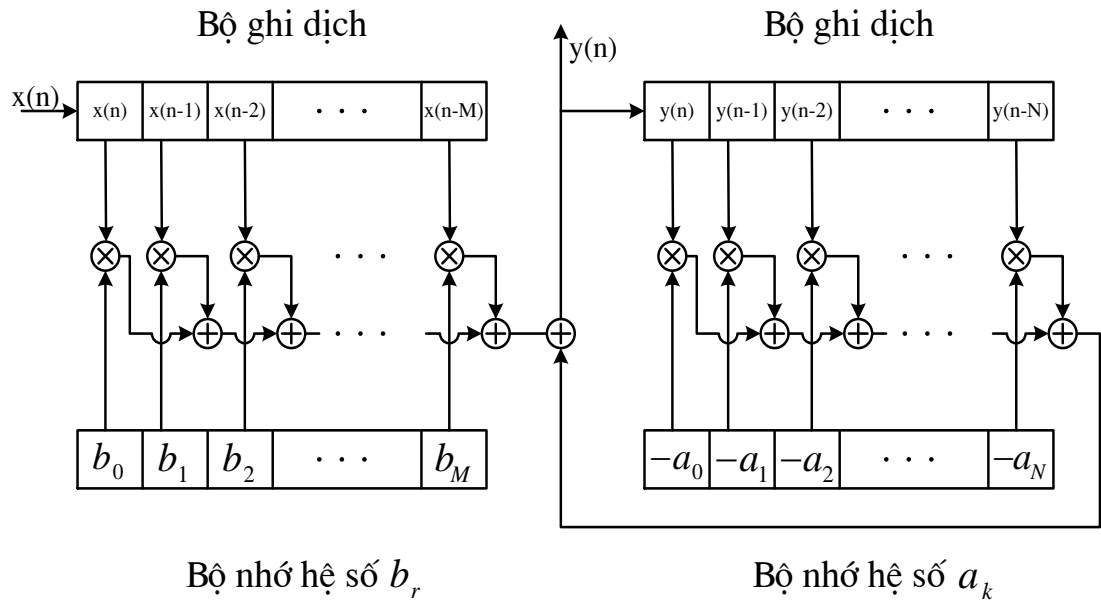
Giải:

Dùng các phần tử thực hiện hệ thống ta có sơ đồ cấu trúc như sau:



Hình 1.38 Sơ đồ hệ thống trong ví dụ 1.20

Khi thực hiện các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng phần cứng, ta sẽ thực hiện bằng các thanh ghi dịch, bộ nhớ và các bộ xử lý toán học như sau



Hình 1.39 Sơ đồ thực hiện hệ thống.

1.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP

Chương 1 là chương đề cập đến các khái niệm cơ bản nhất về tín hiệu rời rạc, hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc, các biểu diễn cơ bản, các phép toán cơ bản, tất nhiên tất cả các vấn đề được đề cập trong chương này đều được xét ở miền thời gian rời rạc.

Những vấn đề chính được đề cập trong chương này cần lưu ý là:

1. Định lý lấy mẫu

Ta chú ý rằng một tín hiệu sẽ được khôi phục khi tần số lấy mẫu phải lớn hơn hoặc bằng hai lần bề rộng phổ của tín hiệu. $F_s \geq 2B$ ($B = F_{\max}$)

2. Phân loại tín hiệu, hệ thống xử lý tín hiệu.

Theo định nghĩa về mặt toán học, tín hiệu bao gồm *tín hiệu liên tục* và *tín hiệu rời rạc*.

Tín hiệu liên tục bao gồm *tín hiệu tương tự* và *tín hiệu lượng tử hoá*.

Tín hiệu rời rạc bao gồm *tín hiệu lấy mẫu* và *tín hiệu số*.

Các hệ thống xử lý tín hiệu được phân loại theo tín hiệu xuất hiện trong hệ. Ví dụ: các tín hiệu trong hệ thống là tín hiệu số thì hệ thống đó gọi là hệ thống xử lý tín hiệu số.

Chú ý: Phân biệt khái niệm xử lý tín hiệu số và xử lý số tín hiệu.

3. Cách biểu diễn tín hiệu rời rạc.

Lưu ý khi biểu diễn tín hiệu người ta thường chuẩn hoá chu kỳ lấy mẫu $T_s = 1$. Tức là $x(nT_s) = x(n)$.

Có 3 cách biểu diễn tín hiệu:

- Biểu diễn bằng biểu thức toán học.
- Biểu diễn bằng đồ thị.
- Biểu diễn bằng dãy số.

Còn một cách biểu diễn nữa rất quan trọng chúng ta cần phải nhớ đó là một tín hiệu bất kỳ $x(n)$ đều được biểu diễn thông qua đáp ứng xung dạng tổng quát như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

4. Các tín hiệu (dãy) cơ bản

Các dãy cơ bản cần nhớ bao gồm:

- Dãy xung đơn vị $\delta(n)$
- Dãy nhảy đơn vị $u(n)$
- Dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$
- Dãy dốc đơn vị $r(n)$
- Dãy hàm mũ $e(n)$

Có thể xem thêm dãy tuần hoàn.

5. Các phép toán cơ bản

Các phép toán cơ bản cần nhớ bao gồm:

- Phép cộng, phép nhân hai tín hiệu.
- Phép nhân một tín hiệu với hằng số.
- Phép trễ tín hiệu.

6. Các khái niệm cơ bản

Một số khái niệm cơ bản bao gồm:

- Dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$
- Dãy có chiều dài hữu hạn N .
- Năng lượng của dãy.
- Công suất của dãy.

7. Hệ thống tuyến tính bất biến. Đáp ứng xung $h(n)$

- Cần lưu ý hệ thống tuyến tính bất biến phải thỏa mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)] = a \cdot T[x_1(n)] + b \cdot T[x_2(n)].$$

- Hệ thống tuyến tính bất biến: ứng với kích thích đầu vào $x(n)$ ta có đáp ứng ra là $y(n)$ thì tương tự ứng với kích thích đầu vào $x(n-k)$ ta có đáp ứng ra là $y(n-k)$.

- Khi ta có đầu vào hệ thống tuyến tính bất biến là xung đơn vị $\delta(n)$ thì đầu ra là đáp ứng xung $h(n)$. Đáp ứng xung $h(n)$ là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính bất biến.

8. Phép chập

Đây là phép toán quan trọng nhất trong xử lý tín hiệu để xác định đầu ra $y(n)$ hệ thống khi biết đầu vào $x(n)$ và đáp ứng xung $h(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

phép chập có tính chất: giao hoán, phân phối, kết hợp.

9. Hệ thống TTBB nhân quả, tín hiệu nhân quả.

Hệ thống TTBB được gọi là hệ thống nhân quả khi đáp ứng xung $h(n)$ của nó thoả mãn $h(n) = 0$ với $\forall n < 0$.

Tín hiệu $x(n)$ được gọi tín hiệu nhân quả khi nó thoả mãn $x(n) = 0$ với $\forall n < 0$.

Lưu ý: Các hệ thống nhân quả và tín hiệu nhân quả mới tồn tại trong thực tế.

Hệ thống TTBB ổn định

Hệ thống ổn định là hệ thống BIBO, đáp ứng xung $h(n)$ của nó phải thoả mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

10. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

Quan hệ vào ra của hệ thống tuyến tính bất biến sẽ được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r)$$

Trong đó x : đầu vào.

y : đầu ra.

Các hệ số a_k, b_r đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống có vai trò tương tự như đáp ứng xung $h(n)$.

Việc giải PTSPTTHSH để tìm ra đầu ra $y(n)$ có hai phương pháp chính:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp tìm nghiệm riêng và nghiệm thuần nhất.

Từ PTSPTTSH trên ta sẽ có một số khái niệm về:

- Hệ thống không đệ quy khi $N = 0$. Bản chất của hệ thống này là không có thành phần hồi tiếp.

- Hệ thống đệ quy khi $N \neq 0$. Bản chất của hệ thống này là có thành phần hồi tiếp.

- Hệ thống đệ quy thuần túy khi $N \neq 0$, $M = 0$. Hệ thống này chỉ gồm duy nhất các thành phần đệ quy.

Lưu ý: Như vậy đến đây ta có hai cách thể hiện quan hệ vào ra hệ thống rời rạc.

- Thể hiện theo phép chập: $y(n) = x(n) * h(n)$

- Thể hiện theo Phương trình SPTTSH: $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ thường phải chuẩn hoá $a_0 = 1$

11. Thực hiện hệ thống

Các phần tử thực hiện hệ thống bao gồm: phần tử cộng, phần tử nhân, nhân với hằng số, phần tử trễ D.

Khi thực hiện hệ thống phải dựa vào phương trình SPTT-HSH, luôn nhớ phải chuẩn hoá hệ số $a_0 = 1$ để có $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ rồi mới vẽ sơ đồ hệ thống. Trên thực tế người ta sẽ dùng các bộ xử lý toán học ALU, các thanh ghi dịch... để thực hiện hệ thống xử lý tín hiệu số theo sơ đồ.

12. Tương quan tín hiệu

Phép tương quan thường dùng để nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... có hai loại tương quan:

Tự tương quan: Tương quan tín hiệu $x(n)$ với chính nó: $R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n)$

Tương quan chéo: Tương quan tín hiệu $x(n)$ với $y(n)$: $R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n)$

Nhắc lại kiến thức toán học

Tổng cấp số nhân.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. 1

Cho tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Hãy xác định tốc độ lấy mẫu Nyquist đối với tín hiệu này?

Bài 1. 2

Cho tín hiệu $x_a(t) = 3\cos 100\pi t$

a) Xác định tốc độ lấy mẫu nhỏ nhất cần thiết để khôi phục tín hiệu ban đầu.

b) Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 200$ Hz. Tín hiệu rời rạc nào sẽ có được sau lấy mẫu?

Bài 1. 3

Tìm quan hệ giữa dãy nhảy đơn vị $u(n)$ và dãy xung đơn vị $\delta(n)$

Bài 1. 4

Tương tự bài trên tìm quan hệ biểu diễn dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$ theo dãy nhảy đơn vị $u(n)$.

Bài 1. 5

Hãy biểu diễn dãy $\delta(n+1)$

Bài 1. 6

Xác định $x(n) = u(n-5) - u(n-2)$

Bài 1. 7

Xác định năng lượng của chuỗi

$$x(n) = \begin{cases} (1/2)^2 & n \geq 0 \\ 3^n & n < 0 \end{cases}$$

Bài 1. 8

Hãy xác định năng lượng của tín hiệu $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$

Bài 1. 9

Xác định công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị $u(n)$

Bài 1. 10

Xác định công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị $u(n)$

Bài 1. 11

Hãy xác định công suất trung bình của tín hiệu $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$

Bài 1. 12

Đáp ứng xung và đầu vào của một hệ TTBB là:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy xác định đáp ứng ra $y(n)$ của hệ.

Bài 1. 13

Tương tự như bài trên hãy tính phép chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ với:

$$a) x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}; \quad x_2(n) = \text{rect}_2(n-1).$$

$$b) x_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n-2); \quad x_2(n) = \text{rect}_3(n).$$

Bài 1. 14

Cho HTTT bất biến có $h(n)$ và $x(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} b^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$0 < a < 1, 0 < b < 1, a \neq b$. Tìm tín hiệu ra (đáp ứng ra)?

Bài 1. 15

Hãy xác định xem các hệ có phương trình mô tả quan hệ vào ra dưới đây có tuyến tính không:

$$a) y(n) = nx(n)$$

$$b) y(n) = x^2(n)$$

Bài 1. 16

Hãy xác định xem các hệ có phương trình mô tả quan hệ vào ra dưới đây có tuyến tính không:

a) $y(n) = x(n^2)$

b) $y(n) = Ax(n) + B$

Bài 1. 17

Xác định xem các hệ được mô tả bằng những phương trình dưới đây là nhân quả hay không:

a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

b) $y(n) = ax(n)$

Bài 1. 18

Xác định xem các hệ được mô tả bằng những phương trình dưới đây là nhân quả hay không:

a) $y(n) = x(n) + 3x(n+4);$

b) $y(n) = x(n^2);$

c) $y(n) = x(2n);$

d) $y(n) = x(-n)$

Bài 1. 19

Xét tính ổn định của hệ thống có đáp ứng xung $h(n) = \text{rect}_N(n)$.

Bài 1. 20

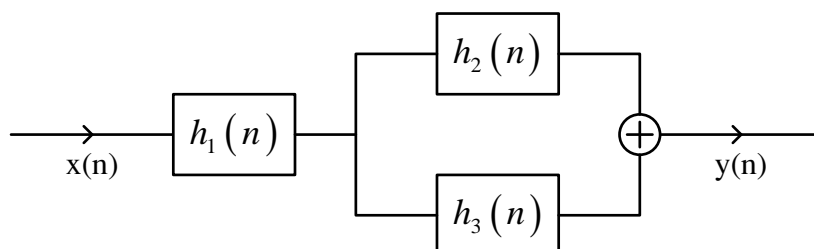
Xác định khoảng giá trị của a và b để cho hệ TT BB có đáp ứng xung

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

là ổn định.

Bài 1. 21

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của một hệ thống số được cho bởi sơ đồ sau đây:



Bài 1. 22

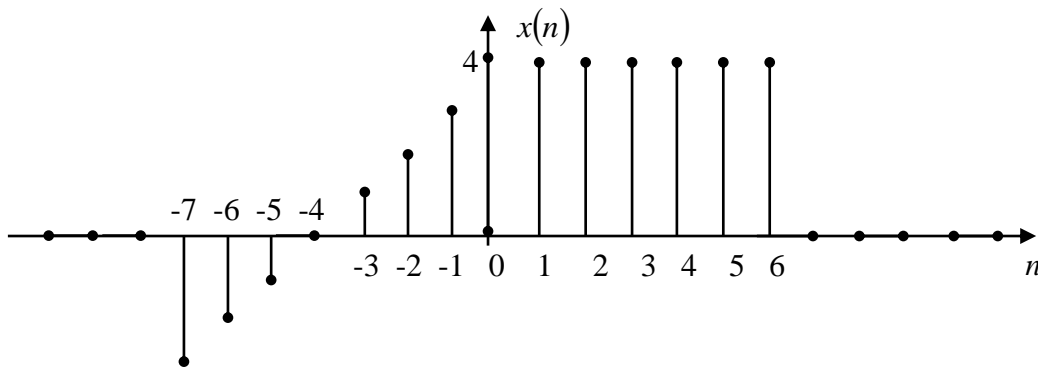
Cho một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n] = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + b_4x(n-4)$$

Hãy biểu diễn hệ thống đó.

Bài 1. 23

Hãy biểu diễn bằng đồ thị tín hiệu $y(n] = x(2n]$, ở đây $x(n]$ là tín hiệu được mô tả như sau:..



Bài 1. 24

Hãy xác định nghiệm riêng của phương trình sai phân.

$$y(n] = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n]$$

khi hàm cưỡng bức đầu vào $x(n] = 2^n$, $n \geq 0$ và bằng không với n khác.

Bài 1. 25

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau:

$$y(n] - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n] + x(n-2)$$

Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$ và $x(n] = 5^n$

Bài 1. 26

Cho $x(n] = \text{rect}_3(n]$

Hãy xác định hàm tự tương quan $R_{xx}(n]$.

CHƯƠNG 2. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

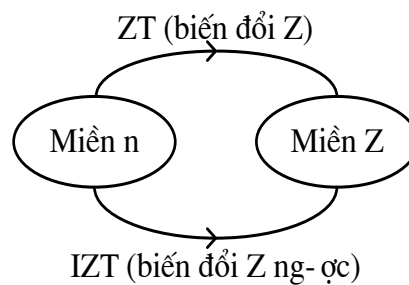
2.1. MỞ ĐẦU

Phép biến đổi là một công cụ quan trọng trong phân tích tín hiệu và các hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian. Chương 2 này sẽ trình bày về phép biến đổi Z, các tính chất của biến đổi Z chứng minh tầm quan trọng của nó trong việc phân tích đặc trưng của các hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc theo thời gian.

Như ta đã biết, tại miền thời gian rời rạc n các tín hiệu được biểu diễn trực quan, thấy ngay các kết quả cụ thể. Nhưng khi phân tích mạch là rất khó giống trường hợp ta gặp ở miền thời gian liên tục t khi nghiên cứu các hệ thống tương tự, do vậy cần có sự biến đổi để việc nghiên cứu trở nên dễ dàng hơn.

Ở đây, ta sẽ thấy, vai trò của biến đổi Z trong phân tích tín hiệu rời rạc và các hệ thống tuyến tính bất biến tương tự như biến đổi Laplace trong phân tích tín hiệu liên tục theo thời gian và các hệ thống tuyến tính bất biến liên tục. Sau khi biến đổi Z, các phép toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Chẳng hạn, trong miền Z phép chập hai tín hiệu miền thời gian là tương đương với phép nhân các biến đổi Z tương ứng của chúng. Tính chất này đã làm đơn giản đáng kể việc phân tích đáp ứng của hệ thống tuyến tính bất biến đối với các loại tín hiệu khác nhau. Ngoài ra, biến đổi Z còn cung cấp cho ta phương pháp đặc trưng hoá một hệ thống tuyến tính bất biến, đáp ứng của nó đối với các loại tín hiệu theo các điểm cực - điểm không (Zero) của hệ thống.

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền Z, khi chúng ta ánh xạ các tín hiệu ở miền thời gian rời rạc n sang miền Z thông qua biến đổi Z. Sau khi nghiên cứu chúng ta sẽ thấy sự thuận lợi khi phân tích hệ thống trong miền Z, (giống miền Laplace s khi phân tích hệ thống tương tự).



Hình 2. 1 Biến đổi Z

ZT: Z Transform

IZT: Inverse Z Transform

Các nội dung chính của chương bao gồm:

- Biến đổi Z (ZT) và biến đổi Z ngược (IZT).
- Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền Z.

2.2. BIẾN ĐỔI Z

2.2.1. Định nghĩa biến đổi Z (ZT: Z TRANSFORM)

Định nghĩa 1: Biến đổi z của một dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.1)$$

Ký hiệu bởi toán tử:

$$ZT[x(n)] = X(z) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{ZT} X(z)$$

Định nghĩa 2: Biến đổi z một phía của một dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

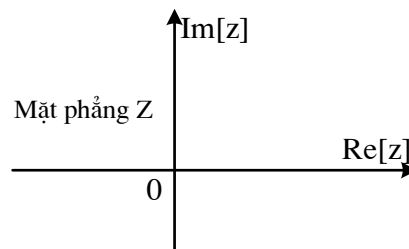
Ký hiệu bởi toán tử:

$$ZT1[x(n)] = X1(z) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{ZT1} X1(z)$$

Ở đây ta phải thấy được z là một biến số phức và được biểu diễn theo hai dạng:

+ Biểu diễn theo phần thực, phần ảo $\text{Re}[z]$, $\text{Im}[z]$

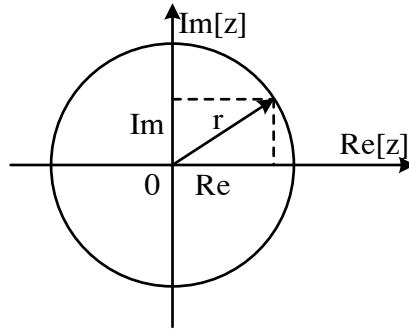
$$z = \text{Re}[z] + j.\text{Im}[z]$$



Hình 2. 2 Mặt phẳng phức Z

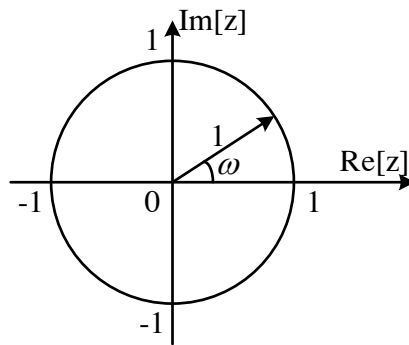
+ Biểu diễn theo tọa độ cực:

$$z = re^{j\omega} = r(\cos \omega + j \sin \omega) = r \cos \omega + j \sin \omega = \text{Re}[z] + j \text{Im}[z]$$



Hình 2. 3 Biểu diễn z trên mặt phẳng phức

- Trường hợp đặc biệt: $|z| = r = 1$, ta có vòng tròn đơn vị.



Hình 2. 4 Vòng tròn đơn vị

Ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về biến đổi z thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 2. 1

Tìm ZT của các dãy sau:

$$x_1(n) = \delta(n); x_2(n) = \delta(n-1); x_3(n) = \delta(n+1); x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n); x_5(n) = 2^n u(n)$$

Giải: $X_1(z) = ZT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1$

$$X_2(z) = ZT[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)z^{-n} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$$

$$X_3(z) = ZT[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1)z^{-n} = 1 \cdot z^1 = z$$

$$X_4(z) = ZT[x_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Với $|z| > \frac{1}{2}$;

$$X_5(z) = ZT[x_5(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2z^{-1})^n = \frac{1}{1-2z^{-1}} \text{ với } |z| > 2$$

2.2.2. Sự tồn tại của biến đổi z

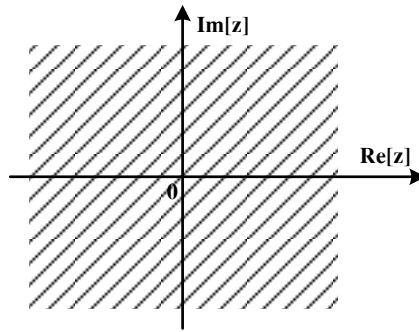
Tập hợp tất cả các giá trị của z mà tại đó chuỗi $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi z .

Ký hiệu: RC: miền hội tụ (Region of Convergence)

Ví dụ 2. 2

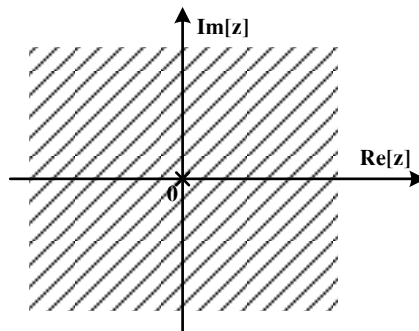
Hãy tìm miền hội tụ của biến đổi z trong ví dụ 2.1

a. $RC[X_1(z)], RC[X_2(z)]$ Toàn bộ mặt phẳng z như hình 2.5



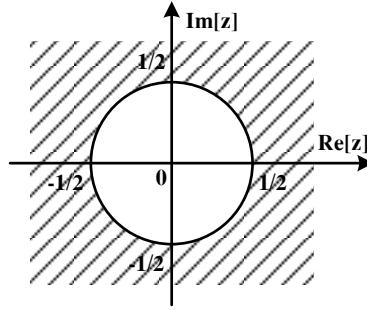
Hình 2. 5 Miền hội tụ của $X_1(z), X_3(z)$

b. $RC[X_2(z)]$: Toàn bộ mặt phẳng z trừ gốc tọa độ $z = 0$ như hình 2.6



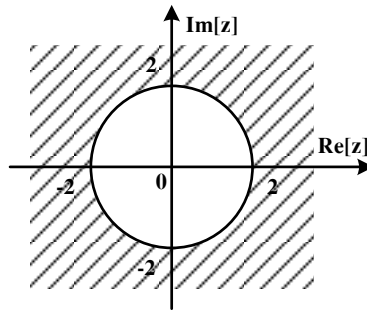
Hình 2. 6 Miền hội tụ của $X_2(z)$

c. $RC[X_4(z)]$: Ngoài vòng tròn bán kính $\frac{1}{2}$ như hình 2.7.



Hình 2. 7 Miền hội tụ của $X_4(z)$

$RC[X_5(z)]$: Ngoài vòng tròn bán kính 2 như hình 2.8.



Hình 2. 8 Miền hội tụ của $X_5(z)$

2.2.3. Điểm cực và điểm không (POLE and ZERO)

2.2.3.1. Định nghĩa điểm không

Trong biến đổi z nếu tại các điểm z_{or} mà tại đó $X(z)$ triệt tiêu $X(z)|_{z=z_{or}} = 0$ thì z_{or} gọi là các điểm không của $X(z)$.

Biểu diễn:
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Như vậy z_{or} là nghiệm của đa thức $N(z)$.

Nếu $N(z)$ có bậc là M và viết là: $N(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_Mz^M$

$\Rightarrow M$ nghiệm $\rightarrow X(z)$ có M điểm không.

Viết lại dưới dạng các nghiệm:

$$N(z) = b_M (z - z_{01})(z - z_{02}) \dots (z - z_{0M}) = b_M \prod_{r=1}^M (z - z_{0r})$$

2.2.3.2. Định nghĩa điểm cực

Nếu tại các điểm z_{pk} mà tại đó $X(z)$ không xác định $X(z)\Big|_{z=z_{pk}} \rightarrow \infty$ thì những điểm z_{pk} này gọi là các điểm cực của $X(z)$.

Như vậy z_{pk} chính là nghiệm của $D(z)$ (mẫu số).

Nếu $D(z)$ có bậc là N và viết là:

$$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_N z^N$$

$\Rightarrow N$ nghiệm $\rightarrow X(z)$ có N điểm cực $z_{p1}, z_{p2}, \dots, z_{pN}$.

$$D(z) = a_N (z - z_{p1})(z - z_{p2}) \dots (z - z_{pN}) = a_N \prod_{k=1}^N (z - z_{pk})$$

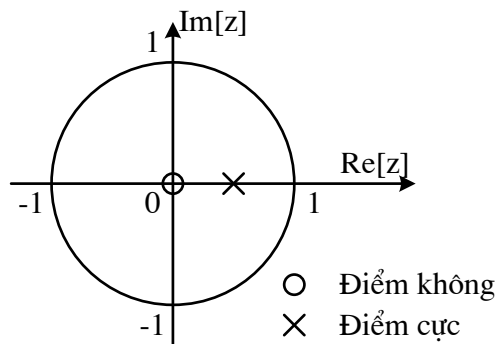
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M \prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{a_N \prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

Ví dụ 2.3

Cho $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$. Tìm điểm cực và điểm không?

Giải: Biến đổi:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}; N(z) = z \rightarrow z_{01} = 0; D(z) = z - \frac{1}{2} \rightarrow z_{p1} = \frac{1}{2}$$



Hình 2.9 Biểu diễn điểm cực, điểm không trong mặt phẳng z

2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM)

2.3.1. Định nghĩa biến đổi z ngược

$$\text{IZT}[X(z)] = x(n) \text{ hay } X(z) \xrightarrow{\text{IZT}} x(n)$$

Biến đổi z ngược được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z).z^{n-1} dz, \quad (2.2)$$

Ta hoàn toàn có thể chứng minh được bằng định lý cosin

\oint_C - Đường cong kín bao quanh gốc tọa độ. Tích phân đường đi theo chiều dương.

2.3.2. Phương pháp tính biến đổi Z ngược

Có 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:

- Phương pháp thặng dư để tìm trực tiếp tích phân, cho chúng ta cách tìm cơ bản..
- Khai triển thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi z ngược cơ bản.
- Khai triển thành các phân thức tối giản.

2.3.2.1. Phương pháp thặng dư

Trong phương pháp này ta tính trực tiếp tích phân theo công thức sau:

$$x(n) = \sum_k \text{Res} \left[X(z).z^{n-1} \Big|_{z=z_{pk}} \right] \quad (2.3)$$

z_{pk} : cực của $X(z)$ nhân với z^{n-1} .

$$\text{Viết dưới dạng: } X(z).z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - z_{pk})^{s_k}} \quad (2.4)$$

z_{pk} : cực bội bậc s_k

$$\psi(z) = (z - z_{pk})^{s_k} X(z).z^{n-1}$$

Thặng dư tìm được bằng công thức sau đây:

$$\text{Res} \left[X(z).z^{n-1} \Big|_{z=z_{pk}} \right] = \frac{1}{0!} \frac{d^0 \psi(z)}{dz^0} \Big|_{z=z_{pk}} = \psi(z_{pk}) \quad (2.5)$$

Ví dụ 2. 4

Cho $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$; miền hội tụ $RC[X(z)]: |z| > 1/2$.

Giải:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} z^{n-1} = \frac{z^n}{z - \frac{1}{2}}$$

$x(n) \geq 0$, $x(n)$ nhân quả.

\Rightarrow có một cực đơn $z_{pk} = \frac{1}{2}$; $s_k = 1$

$$x(n) = \text{Res} \left[X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=\frac{1}{2}} \right] = \psi \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\psi(z) = (z - z_{pk})^{s_k} X(z) \cdot z^{n-1} = z^n$$

$$\Rightarrow \psi \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^n, n \geq 0$$

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

2.3.2.2. Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa

Ở phương pháp này, ta khai triển biến đổi z thành một chuỗi lũy thừa có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n}, \text{ trong đó } \alpha_n \text{ là hệ số của chuỗi lũy thừa.}$$

So sánh với định nghĩa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \Rightarrow x(n) \equiv \alpha_n: \text{ nhận thấy rằng, hệ số của chuỗi chính là các mẫu}$$

của tín hiệu $x(n)$.

Ví dụ 2. 5

Cho $X(z) = \frac{z}{z-2}$. Tìm $x(n)$ với điều kiện miền hội tụ $RC[X(z)], |z| > 2$ (nằm ngoài vòng tròn bán kính 2).

Giải: Biến đổi $X(z) = \frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$

Thực hiện chia đa thức:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \frac{1-2z^{-1}}{2z^{-1}} \\ \hline 2z^{-1} \\ - \frac{2z^{-1}-4z^{-2}}{4z^{-2}} \\ \hline 4z^{-2} \\ - \frac{4z^{-2}-8z^{-3}}{8z^{-3}} \\ \hline 8z^{-3} \\ - \frac{8z^{-3}-16z^{-4}}{16z^{-4}} \dots \end{array} \quad \left| \frac{1-2z^{-1}}{1+2z^{-1}+4z^{-2}+8z^{-3}+16z^{-4} \dots} \right.$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n$$

Vậy: $x(n) = (2)^n u(n)$

2.3.2.3. Phương pháp khai triển thành các phân thức tối giản

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}; \text{Bậc của } N(z) \text{ là } M, \text{ bậc của } D(z) \text{ là } N.$$

* $M \geq N$: Để phân thức tối giản thì:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = S(z) + \frac{P(z)}{Q(z)}, \text{ với } S(z) \text{ là phần nguyên.}$$

$$D(z) \equiv Q(z)$$

Bậc của $S(z)$: $M - N$

$$S(z) = B_{M-N}z^{M-N} + B_{M-N-1}z^{M-N-1} + \dots + B_1z^1 + B_0$$

$$s(x) = B_{M-N}\delta[n+(M-N)] + B_{M-N-1}\delta[n+(M-N-1)] + \dots + B_1\delta[n+1] + B_0$$

* $M < N$:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Xét $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $M < N$

- Trường hợp 1: $X(z)$ chỉ có các cực đơn

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_{pk}} \quad (2.6)$$

z_{pk} : điểm cực của $Q(z)$, có N cực

$$A_k = \left. (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \right|_{z=z_{pk}} \quad (2.7)$$

- Trường hợp 2: $X(z)$ có một cực bội, còn lại là đơn

Giả sử $X(z)$ có một cực bội là z_{pl} bậc s

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{j=1}^s \frac{C_j}{(z - z_{pl})^j} \quad (2.8)$$

z_{pl} : Cực bội bậc s ; z_{pk} : Cực đơn

$$A_k = \left. (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \right|_{z=z_{pk}} \quad (2.9)$$

$$C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} \left[(z - z_{pl})^s \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \Big|_{z=z_{pl}} \quad (2.10)$$

- Trường hợp 3: $X(z)$ có L cực bội

Giả sử $X(z)$ có L cực bội bậc s_1, s_2, \dots, s_L . Các cực còn lại là cực đơn.

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N'} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{s_i} \frac{C_{js_i}}{(z - z_{pl_i})^j} \quad (2.11)$$

$$N' = N - \sum_{i=1}^L s_i$$

z_{pl_i} : Cực bội bậc s_i ; z_{pk} : Cực đơn

$$A_k = \left(z - z_{pk} \right) \frac{P(z)}{Q(z)} \Bigg|_{z=z_{pk}} \quad (2.12)$$

$$C_{js_i} = \frac{1}{(s_i - j)!} \frac{d^{s_i-j}}{dz^{s_i-j}} \left[\left(z - z_{pl_i} \right)^{s_i} \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \Bigg|_{z=z_{pl_i}} \quad (2.13)$$

Ta lưu ý:

$$\text{IZT} \left[\frac{z}{(z - z_{pk})^{n-1}} \right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} z_{pk}^{n-m} u(n)$$

Ví dụ 2. 6

Cho $X(z) = \frac{z+2}{z^2-3z+2}$, hãy tìm $x(n)$.

Giải:

Ta phân tích $X(z)/z$ thành phân thức tối giản:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z^2-3z+2)z} \text{ có 3 điểm cực } z_{p1}=1, z_{p2}=2, z_{p3}=0$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)z} = \frac{A_1}{(z-1)} + \frac{A_2}{z-2} + \frac{A_3}{z}$$

Đều là cực đơn nên:

$$A_1 = \cancel{(z-1)} \frac{z+2}{\cancel{(z-1)}(z-2)z} \Bigg|_{z=1} = -3$$

$$A_2 = \cancel{(z-2)} \frac{z+2}{(z-1)\cancel{(z-2)}z} \Bigg|_{z=2} = 2$$

$$A_3 = \cancel{z} \frac{z+2}{(z-1)(z-2)\cancel{z}} \Bigg|_{z=0} = 1$$

Vậy: $\frac{X(z)}{z} = \frac{-3}{(z-1)} + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z}$

$$X(z) = \frac{-3z}{z-1} + \frac{2z}{z-2} + 1$$

m = 0 thì:

$$x(n) = (-3) \cdot (1)^n u(n) + 2 \cdot 2^n u(n) + \delta(n) \quad (\text{Vì } \frac{z}{z-\alpha} \leftrightarrow \alpha^n u(n))$$

Như vậy đã hoàn thành biến đổi z ngược.

2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Các tính chất của biến đổi z được tổng kết lại trong bảng sau:

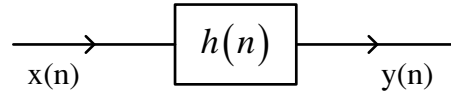
Bảng 2.1 Các tính chất biến đổi Z

TT	Tính chất	Miền n	Miền z
1	Định nghĩa	$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{-1} dz$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$
2	Tuyến tính	$ax_1(n) + bx_2(n)$; a, b là hằng số	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3	Trễ thời gian n	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$
4	Thay đổi tỷ lệ trong miền Z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
5	Vi phân trong miền Z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
6	Dãy liên hợp phức	$x^*(n)$; (*: liên hợp phức)	$X^*(z^*)$
7	Đảo biến	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
8	Tích chập trong miền n	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
9	Tích chập trong miền Z	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$
10	Tương quan tín hiệu	$x_1(n) * x_2(-n)$	$X_1(z) \cdot X_2\left(\frac{1}{z}\right)$

2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.5.1. Hàm truyền đạt

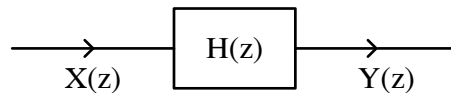
Miền n: Trong miền thời gian rời rạc n ta có quan hệ vào ra của hệ thống được thể hiện qua phép chập:



Hình 2. 10 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến trong miền n

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Miền z: Trong miền z ta có:



Hình 2. 11 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến trong miền Z

$$X(z) = ZT [x(n)]$$

$$H(z) = ZT [h(n)] \quad (2.14)$$

$$Y(z) = ZT [y(n)]$$

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

Trong miền z phép chập đã được chuyển thành phép nhân đại số thông thường, đây chính là một trong những ưu điểm của biến đổi Z.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.15)$$

$$h(n) = IZT [H(z)]$$

Trong miền z quan hệ vào ra của hệ thống được thực hiện nhờ phép nhân đại số thông thường thay thế cho phép chập, điều này dẫn đến hiệu năng tính toán cao.

H(z): Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc là biến đổi z của đáp ứng xung) hay nó còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi z của tín hiệu ra trên biến đổi z của tín hiệu vào.

H(z) là hàm truyền đạt của hệ thống đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền z có vai trò tương tự như đáp ứng xung h(n) trong miền thời gian rời rạc.

2.5.2. Hệ thống tuyến tính bất biến trong miền Z

Xét phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Biến đổi z hai phía của phương trình sai phân:

$$ZT \left[\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \right] = ZT \left[\sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \right]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k ZT[y(n-k)] = \sum_{r=0}^M b_r ZT[x(n-r)]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

Ta rút ra:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.16)$$

Nếu $a_0 = 1$ sẽ được:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.17)$$

Đây chính là hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc tìm được thông qua biến đổi Z đối với phương trình sai phân.

2.5.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z

Với các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân ta có:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Như vậy, về nguyên tắc nếu có $x(n)$ ta tìm được $X(Z)$, $Y(Z)$ và tìm lại $y(n)$.

Ví dụ 2.7

Cho phương trình sai phân: $y(n) - 5y(n-1) = x(n)$

Tìm $y(n)$ khi $x(n) = 5^n \cdot u(n)$ và điều kiện đầu $y(-1)=0$?

Giải:

Ta có: $x(n) = 5^n \cdot u(n)$ nên $X(Z) = \frac{1}{1-5Z^{-1}}$

$$y(n) - 5y(n-1) = x(n) \text{ nên } H(Z) = \frac{1}{1-5Z^{-1}}$$

$$\text{Vậy: } Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z) = \frac{1}{(1-5Z^{-1})^2}$$

$$\text{Từ đó ta có: } y(n) = \text{IZT}[Y(Z)] = \text{IZT}\left[\frac{1}{(1-5Z^{-1})^2}\right] = 5^n(n+1) \cdot u(n)$$

2.5.4. Độ ổn định

Ta nhắc lại điều kiện ổn định đã học trong chương 1

Điều kiện ổn định trong miền thời gian rời rạc n:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Điều kiện ổn định trong miền z:

Trong miền z một hệ thống ổn định sẽ phải thỏa mãn định lý sau:

Định lý ổn định: Một HTTTBB nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt $H(z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị (tức là chỉ cần một điểm cực nằm trên hoặc nằm trong vòng tròn đơn vị là hệ thống mất ổn định).

Ví dụ 2.8

Cho HTTTBB được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$, tìm $h(n)$ và xét ổn định trong miền z.

Giải:

Lấy biến đổi z cả hai vế

$$Y(z) = Az^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$Y(z)(1 - Az^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - Az^{-1}} = \frac{z}{z - A}, \text{ điểm cực } z = A.$$

$$h(n) = \text{IZT}[H(z)] = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Xét ổn định:

$$H(z) = \frac{z}{z - A}$$

$$D(z) = z - A \rightarrow z_{p1} = A.$$

$$A < 1 \rightarrow \text{Hệ thống ổn định.}$$

$$A \geq 1 \rightarrow \text{Hệ thống không ổn định.}$$

Tiêu chuẩn ổn định Jury:

Theo tiêu chuẩn này việc xét tính ổn định sẽ đơn giản hơn vì đối với hệ thống có bậc cao, tức là số điểm cực nhiều thì việc xác định các điểm cực gặp nhiều khó khăn. Sau đây chúng ta sẽ xem xét tiêu chuẩn Jury:

Ta biết hàm truyền đạt của hệ thống được biểu diễn như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Từ công thức này, gọi $D(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$.

Từ các hệ số a_k của $D(z)$ chúng ta lập bảng Jury có $2N - 3$ hàng bằng cách sau đây:

Hàng

Hệ số

1	1	a_1	a_2	a_3	...	a_{N-1}	a_N
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	a_{N-3}	...	a_1	1
3	c_0	c_1	c_2	c_3	...	c_{N-2}	c_{N-1}
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	c_{N-4}	...	c_1	c_0
5	d_0	d_1	d_2	d_3	...		
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	d_{N-5}	...		
\vdots	\vdots						
$2N-3$	r_0	r_1	r_2				

Công thức tính:

$$c_i = \det \begin{bmatrix} 1 & a_{N-1} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = a_i - a_N \cdot a_{N-i}; \quad i: 0 \rightarrow N-1.$$

$$d_i = \det \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = c_0 c_i - c_{N-1} \cdot c_{N-1-i}; \quad i: 0 \rightarrow N-2.$$

Sau khi lập xong $2N-3$ hàng như vậy ta có tiêu chuẩn

Một hệ thống là ổn định nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1. $D(z)|_{z=1} > 0$
2. $D(z)|_{z=-1} > 0$ với N chẵn

$$D(z)|_{z=-1} < 0 \text{ với N lẻ}$$

3. $1 > |a_N|$
 $|c_0| > |c_{N-1}|$
 $|d_0| > |d_{N-2}|$
.....
 $|r_0| > |r_2|$

Chỉ cần không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên là hệ thống không ổn định.

Ví dụ 2.9

Cho HTTTBB được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n)$$

Tìm $H(z)$

Xét ổn định theo tiêu chuẩn Jury.

Giải:

Lấy biến đổi z cả 2 vế

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = X(z) \text{ hay } Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z)$$

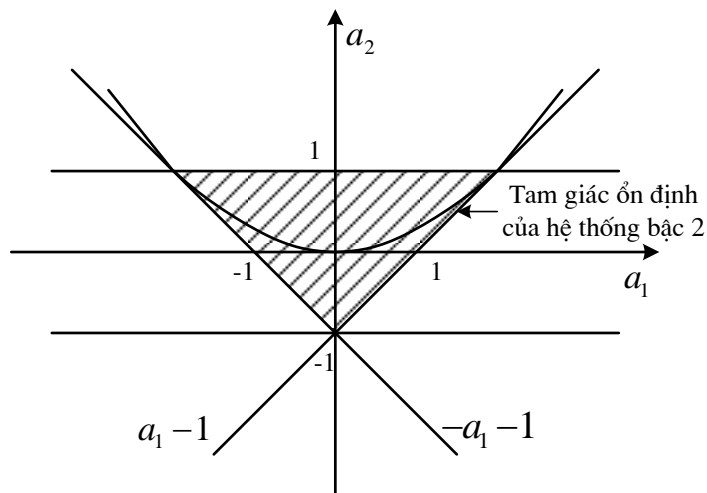
$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Ta có: $D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$

Theo chuẩn Jury như trình bày ở trên ta có:

1. $D(z)|_{z=1} = 1 + a_1 + a_2 > 0$
 $\Rightarrow a_2 > -(1 + a_1)$
2. $D(z)|_{z=-1} = 1 - a_1 + a_2 > 0$ N chẵn
 $\Rightarrow a_2 > -(1 - a_1)$
3. $1 > |a_2| \Rightarrow -1 < a_2 < 1$

Dựa vào 3 điều kiện trên ta sẽ xác định được miền ổn định của hệ thống theo hai tham số a_1 và a_2 như sau:



Hình 2. 12 Miền ổn định của hệ thống trong ví dụ 2.10

2.5.5. Thực hiện hệ thống trong miền Z

Trong miền z các phần tử thực hiện hệ thống cũng tương tự như ở chương 1, chỉ có thể hiện khâu trễ là khác nhau.

+ Các phần tử thực hiện:

- Phần tử trễ:

Miền n:

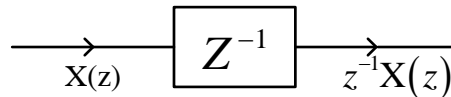


Hình 2. 13 Phần tử trễ

Miền z:

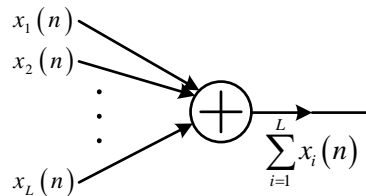
$$\text{ZT}[x(n)] \equiv X(z)$$

$$\text{ZT}[x(n-1)] \equiv z^{-1} X(z)$$



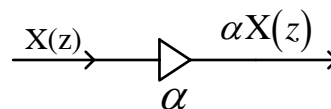
Hình 2. 14 Biểu diễn phần tử trễ trong miền Z

- Phần tử cộng:



Hình 2. 15 Phần tử cộng

- Phần tử nhân với hằng số:



Hình 2. 16 Phần tử nhân với hằng số

Cách mắc sơ đồ hệ thống trong miền z:

- Nếu có các hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tổng các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

$$H(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z) \quad (2.18)$$

- Nếu có các hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tích các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

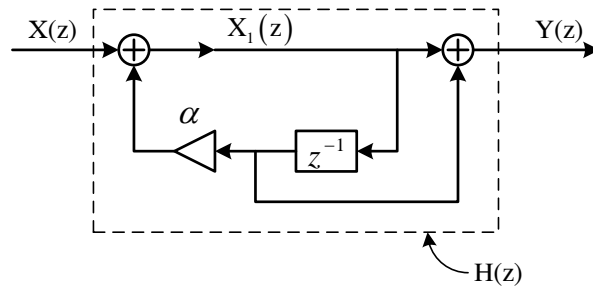
$$H(Z) = \prod_{i=1}^N H_i(Z) \quad (2.19)$$

- Nếu $H_2(z)$ mắc hồi tiếp với $H_1(z)$ thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z).H_2(z)} \quad (2.20)$$

Ví dụ 2. 10

Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ sau đây:



Hình 2. 17 Ví dụ về mô hình hệ thống trong miền Z

Tìm hàm truyền đạt $H(z)$? Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống?

Giải:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X_1(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X_1(z)$$

$$X(z) = X_1(z) [1 - \alpha z^{-1}]$$

$$Y(z) = X_1(z) + z^{-1} X_1(z) = X_1(z) [1 + z^{-1}]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Tìm $h(n)$ = ?

Phân tích $H(z)$ làm 2 thành phần:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} + \underbrace{z^{-1} \frac{z}{z-\alpha}}_{\alpha^{n-1}u(n-1)}$$

$$h(n) = \alpha^n u(n) + \alpha^{n-1} u(n-1)$$

2.6. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP

Trong chương 2, chúng ta đã xem xét cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền z. Có thể nói rằng, vai trò của biến đổi z trong miền rời rạc tương tự như vai trò của biến đổi Laplace trong miền liên tục. Khi thực hiện biến đổi z, ánh xạ các tín hiệu và hệ thống từ miền n sang miền z, ta thấy các công cụ toán học trong miền z đơn giản hơn so với các công cụ toán học trong miền thời gian rời rạc n, ví dụ như trong miền z, hệ thống xử lý tín hiệu đều được khảo sát bằng các phương pháp đại số thông qua hàm truyền đạt của hệ thống, còn trong miền thời gian rời rạc n chúng ta phải khảo sát thông qua phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, khi bậc của phương trình sai phân lớn hơn 2 ta thấy việc giải phương trình này gặp nhiều khó khăn. Hơn nữa, trong miền z, phép chập trong miền thời gian rời rạc n đã được chuyển thành phép nhân.

Những vấn đề cần tập trung xem xét kỹ trong chương 2 bao gồm:

1. Biến đổi z

Định nghĩa biến đổi z :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Nếu thay đổi cận:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Ta có biến đổi Z một phía.

Nhớ rằng Z là một biến số phức nên có thể được biểu diễn theo 2 cách.

2. Miền hội tụ của biến đổi Z

Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z.

Ký hiệu miền hội tụ là RC. Ta phải chú ý đến miền hội tụ khi thực hiện biến đổi z.

3. Điểm cực điểm không

Cần phân biệt điểm cực, điểm không của tín hiệu và điểm cực, điểm không của hệ thống.

Nếu tín hiệu $X(z)$ có dạng phân thức $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ thì:

- Điểm cực z_{pk} của tín hiệu $X(z)$ là tập các điểm làm cho $X(z)$ không xác định:
 $X(z) \Big|_{z=z_{pk}} = \infty$. Nghĩa là z_{pk} là nghiệm của $D(z)$

- Điểm không z_{or} của tín hiệu $X(z)$ là tập các điểm làm cho $X(z)$ triệt tiêu: $X(z) \Big|_{z=z_{or}} = 0$.

Nghĩa là z_{or} là nghiệm của $N(z)$

Lưu ý rằng điểm cực điểm không của hệ thống được xác định theo hàm truyền đạt $H(z)$.

- Điểm cực của hệ thống là tập các điểm z_{pk} làm cho $H(z)$ không xác định
 $H(z) \Big|_{z=z_{pk}} = \infty$

- Điểm không của hệ thống là tập các điểm z_{or} làm cho $H(z)$ triệt tiêu $H(z) \Big|_{z=z_{or}} = 0$

Do vậy hàm truyền đạt $H(z)$ còn được biểu diễn theo dạng điểm cực và điểm không:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{or})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})} \text{ hay:}$$

$$H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{or})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

Trong đó $G = \frac{b_M}{a_N}$ là hệ số truyền

4. Biến đổi Z ngược

Định nghĩa biến đổi Z ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Trong đó \oint_C - Đường cong kín đi qua gốc tọa độ đi ngược chiều kim đồng hồ.

Chúng ta phải nhớ 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:

1. Phương pháp thẳng dư để tìm trực tiếp tích phân.
2. Khai triển thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi z ngược cơ bản.
3. Khai triển thành các phân thức tối giản.

Trong đó các bài tập sẽ tập trung ở phương pháp thứ ba. Khi làm bài tập về biến đổi Z ngược chúng ta phải nhớ các biến đổi tương đương hay gặp như:

Nếu ta đưa $X(z)$ về dạng phân thức tối giản $X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_{pk}}$

thì ta phải sử dụng biến đổi tương đương

$$\text{miền } z \Leftrightarrow \text{miền } n$$

$$\frac{A_k}{z - z_{pk}} \Leftrightarrow A_k \cdot (z_{pk})^{n-1} \cdot u(n-1)$$

5. Các tính chất biến đổi z

Phải nhớ tính chất quan trọng là khi chuyển sang miền z thì phép chập trở thành phép nhân thông thường.

$$x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z).$$

6. Biểu diễn hệ thống trong miền z.

Ta phải nhớ rằng đặc trưng cho hệ thống trong miền z là hàm truyền đạt $H(z)$. Hàm truyền đạt có vai trò như đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống trong miền thời gian rời rạc.

Hàm truyền đạt $H(z)$ được hiểu theo hai khái niệm:

- Hàm truyền đạt $H(z)$ là tỷ số của biến đổi z tín hiệu ra trên biến đổi z tín hiệu vào.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Hàm truyền đạt $H(z)$ là biến đổi z của đáp ứng xung $h(n)$.

7. Liên hệ giữa biến đổi z và phương trình sai phân.

Biến đổi z hai vế của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

ta thu được:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \text{ nên nhớ luôn chuẩn hoá } a_0 = 1 \text{ để dễ vẽ sơ đồ thực hiện.}$$

Các phần tử thực hiện hệ thống trong miền z cũng giống như trong miền thời gian rời rạc n: phần tử cộng, nhân, nhân với hằng số. Phần tử trễ D trong miền n khi sang miền z trở thành phần tử z^{-1} .

Có 3 dạng cấu trúc thông thường của hệ thống: song song, nối tiếp, hồi tiếp. Cách xác định hàm truyền đạt hệ thống tổng quát tương ứng như sau:

- Nếu có N hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z)$$

- Nếu có N hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z)$$

- Nếu $H_2(z)$ mắc hồi tiếp với $H_1(z)$ thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z).H_2(z)}$$

8. Sự ổn định của hệ thống trong miền z.

Một hệ thống TTBB nhân quả trong miền z muốn ổn định phải thoả mãn:

Tất cả các điểm cực z_{pk} của hàm truyền đạt $H(z)$ phải nằm bên trong vòng tròn đơn vị tức là:

$$\forall |z_{pk}| < 1 .$$

Ta có $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Khi bậc N của hệ thống tức bậc của đa thức đặc trưng $D(z)$ lớn hơn 2 thì ta phải dùng tiêu chuẩn Jury để xét tính ổn định.

Một số phép toán cần nắm vững để làm học tập trong chương này.

- Các khái niệm về chuỗi, chuỗi hội tụ.
- Các phép toán về số phức.

- Tổng cấp số nhân.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 2. 1

Xác định biến đổi z của các tín hiệu hữu hạn sau

a) $x_1(n) = \{\bar{1} \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

b) $x_2(n) = \{1 \ 2 \ \bar{5} \ 7 \ 0 \ 1\}$

c) $x_3(n) = \{\bar{0} \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

d) $x_4(n) = \{2 \ 4 \ \bar{1} \ 7 \ 0 \ 1\}$

Bài 2. 2

Xác định biến đổi z của các tín hiệu hữu hạn sau

a) $x_1(n) = \delta(n-k), \quad k > 0$

b) $x_2(n) = \delta(n+k), \quad k > 0$

Bài 2. 3

Xác định biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Bài 2. 4

Cho $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$

Xác định $X(z)$.

Bài 2. 5

Xác định biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

Bài 2. 6

Cho $X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{3}}$

Xác định $x(n)$ bằng phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa.

Bài 2. 7

Cho $H(z) = \frac{z+3}{(z^2+z+1).(z-\frac{1}{2})}$

Xác định điểm cực điểm không hệ thống. Biểu diễn trên mặt phẳng z.

Bài 2. 8

Cho $H(z) = \frac{3}{(z^2+z+1).(z+\frac{1}{4})}$

Xét ổn định hệ thống?

Bài 2. 9

Cho tín hiệu $X(z) = \frac{z+2}{2z^2-7z+3}$, Hãy xác định $x(n) = ?$

Bài 2. 10

Cho hệ thống có hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{2z+3}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

- Xác định điểm cực điểm không của hệ thống.
- Xét xem hệ thống có ổn định không.
- Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống.

Bài 2. 11

Cho hệ thống có:

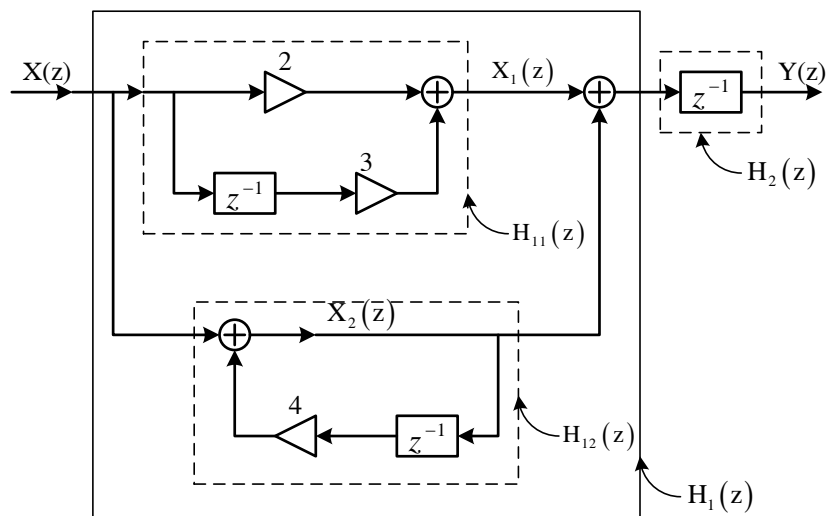
$$H(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}$$

- a) Hãy xét xem hệ thống có ổn định không
b) Hãy xác định đáp ứng xung của hệ thống.

c) Xác định $h(n)$ khi $H(z) = \frac{z^{2006}}{2z^2 - 3z + 1}$

Bài 2. 12

Cho sơ đồ hệ thống:



Hình 2. 18 Hình vẽ bài tập 2.12

Hãy xác định hàm truyền đạt $H(z)$

Bài 2. 13

Cho hệ thống có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{1}{4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}$$

Hãy xét sự ổn định của hệ thống.

Bài 2. 14

Tìm hệ thống và đáp ứng mẫu đơn vị của hệ thống được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + 2x(n)$$

Bài 2. 15

Cho tín hiệu $x(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n u(n)$

Biến đổi z của nó sẽ là:

a) $X(z) = \frac{z}{z - \frac{3}{2}}$ với $|z| > \frac{3}{2}$

b) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}}$ với $|z| > \frac{3}{2}$

c) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$ với $|z| < \frac{3}{2}$

d) $X(z) = \frac{z}{z + \frac{3}{2}}$ với $|z| > \frac{3}{2}$

Bài 2. 16

Cách biểu diễn nào sau đây thường được dùng biểu diễn hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống:

a) $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

b) $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

c) $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^r}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^k}$

d) $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}}$

Bài 2. 17

Cho tín hiệu $x(n) = n a^n u(n)$ hãy cho biết trường hợp nào sau đây là biến đổi $X(z)$ của nó:

a) $\frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$ với $|z| > |a|$

b) $\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$ với $|z| > |a|$

c) $\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$ với $|z| < |a|$

d) $\frac{az}{(1 - az^{-1})^2}$ với $|z| > |a|$

Bài 2. 18

Phần tử Z^{-1} trong hệ thống rời rạc là phần tử:

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| a) phần tử trễ | b) phần tử tích phân |
| c) phần tử vi phân | c) phần tử nghịch đảo |

Bài 2. 19

Hệ thống số đặc trưng bởi hàm truyền đạt $H(z)$ sẽ ổn định nếu:

- a) Tất cả các điểm không (Zero) z_{0r} phân bố bên trong vòng tròn đơn vị.
- b) Tất cả các điểm cực (Pole) z_{pk} của hệ thống phân bố bên trong vòng tròn đơn vị.
- c) Tất cả các điểm cực (Pole) z_{pk} của hệ thống phân bố bên ngoài vòng tròn đơn vị.
- d) Tất cả các điểm không (Zero) z_{0r} phân bố bên ngoài vòng tròn đơn vị.

Bài 2. 20

Phương án nào sau đây thể hiện hàm truyền đạt của hệ thống biểu diễn theo dạng điểm cực và điểm không?

$$a) H(z) = G \cdot \frac{\sum_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\sum_{k=1}^N (z - z_{0k})}$$

$$b) H(z) = G \cdot \frac{\sum_{k=1}^N (z - z_{pk})}{\sum_{r=1}^M (z - z_{0r})}$$

$$c) H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

$$d) H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=0}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=0}^N (z - z_{pk})}$$

CHƯƠNG 3. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.1. MỞ ĐẦU

Bên cạnh biến đổi z , một công cụ toán học khác cũng rất quan trọng và hữu hiệu thường được dùng trong việc phân tích và tổng hợp các hệ thống tuyến tính bất biến, đó là *chuỗi và biến đổi Fourier*. Ở đây, tín hiệu được phân giải thành các thành phần hình sin (hoặc mũ phức). Do đó, ta nói tín hiệu được biểu diễn trong miền tần số.

Biểu diễn toán học cơ bản của tín hiệu tuần hoàn là chuỗi Fourier, là tổng trọng số tuyến tính của các hài hình sin hoặc mũ phức. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), một nhà toán học người Pháp, đã dùng khai triển chuỗi lượng giác như thế để mô tả hiện tượng dẫn nhiệt và sự phân bố nhiệt độ của vật thể. Mặc dù công trình của ông chỉ là giải quyết bài toán dẫn nhiệt, nhưng phương pháp toán học được xây dựng vào nửa đầu thế kỷ thứ 19 này đến bây giờ vẫn được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như: quang, dao động cơ học, lý thuyết hệ thống và điện từ trường và đặc biệt trong xử lý tín hiệu.

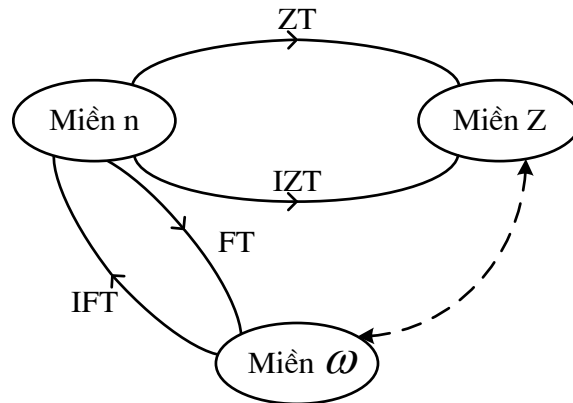
Tương tự như việc phân tích phổ ánh sáng, trong việc phân tích tín hiệu ở miền tần số, thay cho ánh sáng, dạng tín hiệu của ta là các hàm theo thời gian. Vai trò của thấu kính chính là công cụ phân tích Fourier như chuỗi và biến đổi Fourier. Việc tổ hợp các thành phần hình sin để phục hồi tín hiệu ban đầu là bài toán tổng hợp Fourier. Giống như ánh sáng bức xạ của các nguyên tố hoá học, mỗi tín hiệu sẽ có phổ khác nhau. Như vậy phổ là sở cứ để nhận dạng tín hiệu.

Cũng như trong vật lý, từ “phổ” được dùng khi muốn nói về nội dung tần số tín hiệu. Quá trình vận dụng công cụ toán học để có được phổ của tín hiệu đã cho trong chương này được gọi là *phân tích tần số hay phân tích phổ*. Ngược lại, quá trình xác định phổ của tín hiệu trong thực tế dựa trên các phép đo tín hiệu được gọi là *đánh giá phổ*. Sự phân biệt này là rất quan trọng. Trong bài toán thực tế, tín hiệu cần phân tích tự nó không được mô tả bằng một hàm toán học chính xác mà nó luôn luôn là dạng thể hiện một thông tin nào đấy mà từ đó ta tách ra tín tức thích hợp.

Kết quả phân tích *tín hiệu tuần hoàn* được gọi là *chuỗi Fourier*. Sự phân giải đối với *tín hiệu có năng lượng hữu hạn* được gọi là *biến đổi Fourier*. Việc phân giải này đóng vai trò quan trọng trong phân tích hệ thống tuyến tính bất biến vì đáp ứng của hệ này đối với tín hiệu hình sin cũng có dạng hình sin cùng tần số nhưng khác biên độ và pha. Hơn nữa, tính tuyến tính của hệ tuyến tính bất biến nói lên rằng tổng tuyến tính của các thành phần hình sin ở đầu vào sẽ sinh ra một tổng tuyến tính tương tự của các thành phần hình sin trên đầu ra, chỉ khác về biên độ và pha so với tín hiệu vào. Mặc dù có nhiều phương pháp phân tích khác nhau, nhưng chỉ có tín hiệu hình sin (hay mũ phức) là thoả mãn tính chất này khi đi qua một hệ tuyến tính bất biến.

Nội dung chương này được bắt đầu từ việc biểu diễn các tín hiệu tuần hoàn và không tuần hoàn liên tục theo thời gian dưới dạng chuỗi và biến đổi Fourier tương ứng. Kết quả của chương này là nền tảng cho việc nghiên cứu biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của một dãy hữu hạn, một biến đổi có vai trò rất quan trọng trong nhiều ứng dụng khác nhau, đặc biệt là lĩnh vực xử lý tín hiệu số.

Sau đây ta sẽ quan sát các hình ảnh tương quan giữa các miền đã học: miền thời gian rời rạc n , miền z với miền tần số ω như hình vẽ dưới đây



Hình 3.1 Quan hệ giữa miền tần số ω và các miền khác

Việc ánh xạ tín hiệu từ miền thời gian rời rạc sang miền tần số ω được thực hiện nhờ biến đổi Fourier và ngược lại, việc ánh xạ tín hiệu từ miền tần số ω sang miền thời gian rời rạc được thực hiện nhờ biến đổi Fourier ngược.

Ký hiệu: FT: Fourier Transform

IFT: Inverse Fourier Transform

Trong chương này chúng ta cũng thấy sự liên quan giữa biến đổi Z và biến đổi Fourier và việc chuyển đổi giữa chúng.

Các nội dung chính được đề cập trong chương này bao gồm:

- Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược, điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier.
- Các khái niệm về đáp ứng tần số, pha tần số của hệ thống.
- Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số.

3.2. BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (Fourier Transform: FT)

Biến đổi Fourier của một tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.1)$$

Ký hiệu toán tử:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

Ta thấy rằng $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$: tuần hoàn với chu kỳ 2π , do vậy khi thể hiện $X(e^{j\omega})$ ta chỉ cần thể hiện với dải từ 0 đến 2π hoặc từ $-\pi$ đến π rồi lấy tuần hoàn.

Các cách thể hiện $X(e^{j\omega})$

+ Biểu diễn theo phần thực phần ảo Re, Im

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (3.2)$$

Đây là dạng biểu diễn quen thuộc của số phức.

+ Biểu diễn theo Modul và Argument

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \quad (3.3)$$

Ở đây:

$$|X(e^{j\omega})|: \text{Modul}; \quad \arg[X(e^{j\omega})]: \text{Argument}$$

(Tên gọi theo Newton)

Ta có một số khái niệm như sau:

- $X(e^{j\omega})$: Phổ của tín hiệu $x(n)$.
- $|X(e^{j\omega})|$: Phổ biên độ của tín hiệu $x(n)$.
- $\arg[X(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$: Phổ pha của tín hiệu $x(n)$.
- $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha

Độ lớn có thể lấy giá trị âm và dương.

$$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)} \quad (3.4)$$

$A(e^{j\omega})$: độ lớn của tín hiệu $x(n)$, có thể dương (>0) hoặc âm (<0).

$\theta(\omega)$: pha của tín hiệu $x(n)$.

Một số các quan hệ:

$$|X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| \quad \text{khi } \omega \geq 0$$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) \quad \text{khi } A(e^{j\omega}) \geq 0$$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) + \pi \quad \text{khi } A(e^{j\omega}) < 0$$

Ví dụ 3.1

Cho phổ tín hiệu $X(e^{j\omega}) = \sin 3\omega \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$.

Hãy xác định:

- Các thành phần phần thực, ảo Re, Im
- $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$.

Giải:

Từ biểu thức đã cho của đầu bài ta có:

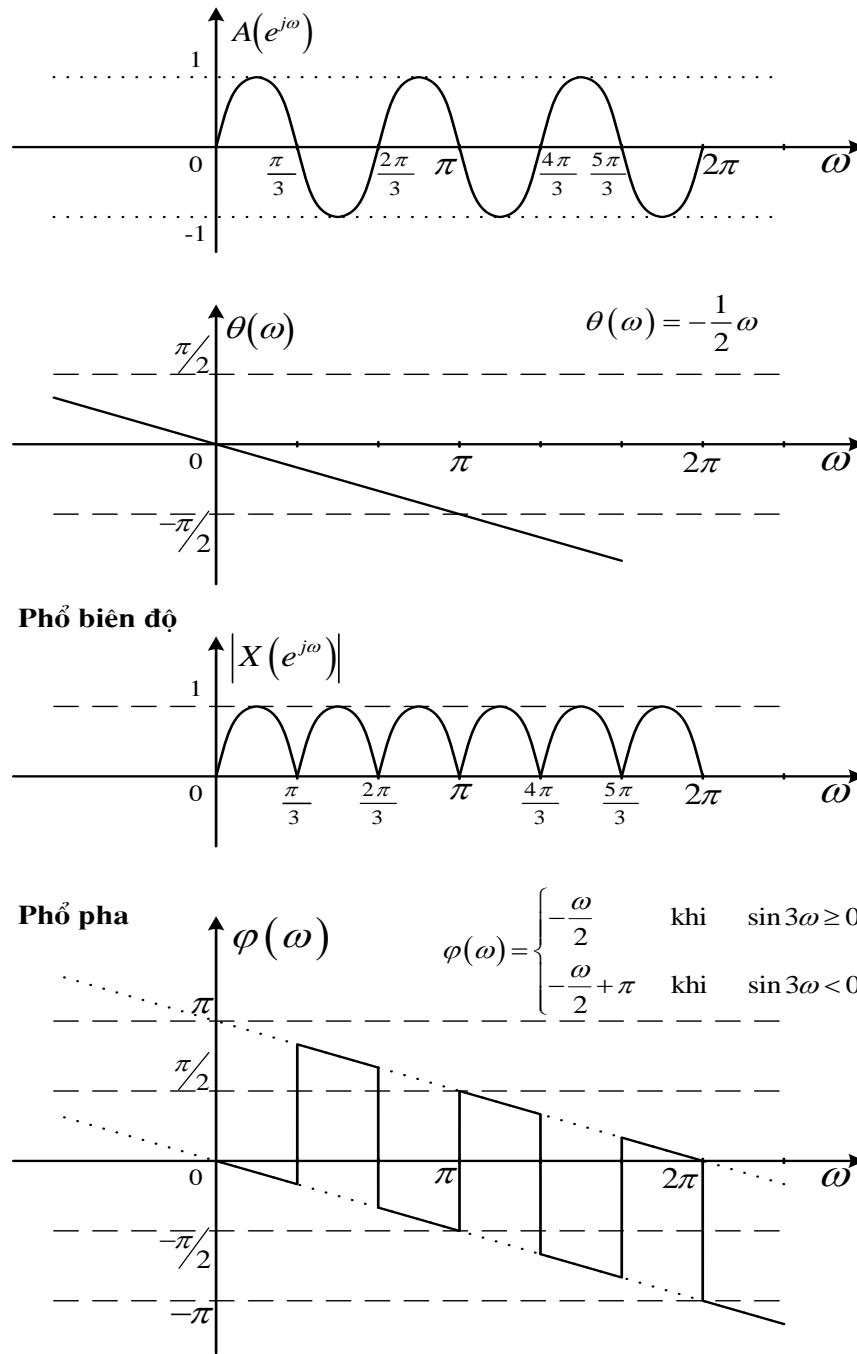
$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \sin 3\omega \cdot \cos \frac{\omega}{2}; \quad \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\sin 3\omega \cdot \sin \frac{\omega}{2}$$

$$A(e^{j\omega}) = \sin 3\omega;$$

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

$$|X(e^{j\omega})| = |\sin 3\omega|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega}{2} & \text{khi } \sin 3\omega \geq 0 \\ -\frac{\omega}{2} + \pi & \text{khi } \sin 3\omega < 0 \end{cases}$$



Hình 3.2 Biểu diễn độ lớn, pha, phổ biên độ, phổ pha

Tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về biến đổi Fourier rời rạc thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 3.2

Hãy tìm biến đổi Fourier các dãy sau đây: $x_1(n) = \delta(n)$; $x_2(n) = \delta(n-1)$;

$$x_3(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1); x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n); x_5(n) = u(n); x_6(n) = 2^n u(n)$$

Giải:

$$X_1(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=0} = 1$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=1} = e^{-j\omega}$$

$$\begin{aligned} X_3(e^{j\omega}) &= \text{FT}[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega} \\ &= 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=-1} + 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2 \cos \omega \end{aligned}$$

$$X_4(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$$X_5(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_5(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} + \dots$$

Đây là chuỗi lũy thừa, không hội tụ do $|e^{-j\omega}| = |\cos \omega - j \sin \omega| = \sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega} = 1$

Do vậy ta kết luận là không tồn tại biến đổi Fourier.

$$X_6(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_6(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n$$

cũng với lý do như phần trên ta thấy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n$ không hội tụ do vậy không tồn tại biến đổi Fourier.

Như vậy, thông qua các ví dụ trên chúng ta thấy rằng không phải đối với tín hiệu rời rạc $x(n)$ nào cũng thực hiện được biến đổi Fourier, rõ ràng phải có một điều kiện để cho biến đổi Fourier tồn tại.

3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier

Căn cứ vào các tính chất hội tụ của chuỗi và sự ánh xạ đầy đủ từ miền thời gian rời rạc n sang miền tần số ω (tức là khi sang miền tần số ω , chỉ tồn tại biến ω chứ không tồn tại biến n), ta có:

Biến đổi Fourier của một dãy $x(n)$ sẽ tồn tại nếu và chỉ nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

(Có nghĩa là chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$ hội tụ).

3.2.3. Biến đổi Fourier và biến đổi Z

Ta thấy, theo định nghĩa của biến đổi z :

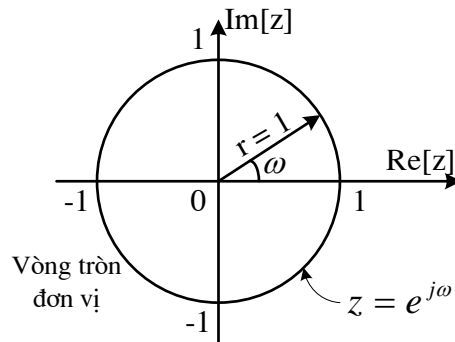
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Mặt khác z là một biến số phức và được biểu diễn trong mặt phẳng phức theo tọa độ cực như sau:

$$z = r \cdot e^{j\omega}$$

Nếu chúng ta đánh giá biến đổi Z trên vòng tròn đơn vị ($r=1$), ta có:

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \quad (3.5)$$



Hình 3.3 Thực hiện biến đổi z trên vòng tròn đơn vị

Như vậy, ta rút ra một số nhận xét:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.
- Như vậy, biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z.

- Như vậy, có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

Ví dụ 3.3

Hãy tìm biến đổi Fourier từ các biến đổi Z sau:

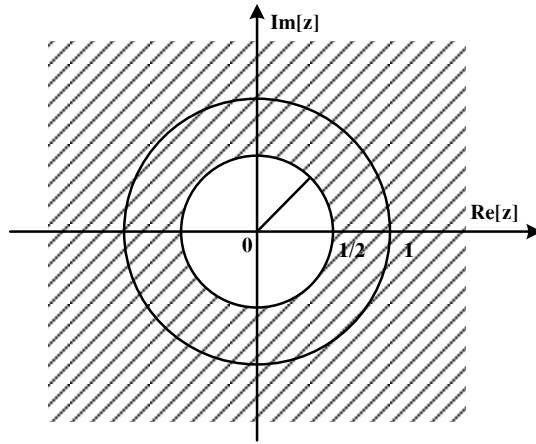
a) $X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}; \quad |z| > \frac{1}{2}$

b) $X_2(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}; \quad |z| > 2$

Giải:

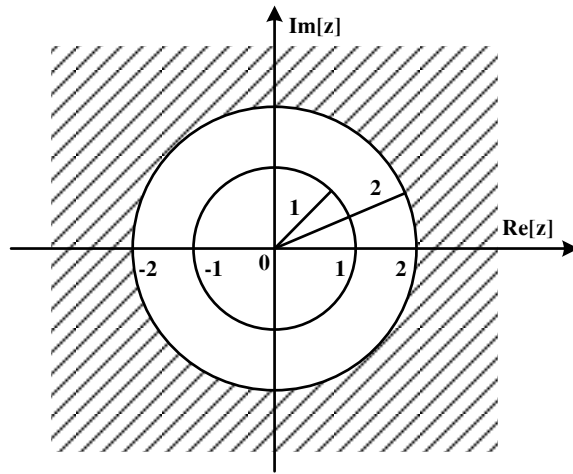
Đầu tiên phải xem vòng tròn đơn vị có nằm trong miền hội tụ không.

a) Vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ, ta có biến đổi Fourier: $X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$



Hình 3.4 Miền hội tụ

b) Vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ, nên ta không thực hiện được biến đổi Fourier.



Hình 3.5 Vòng tròn đơn vị

3.2.4. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform)

Biến đổi Fourier ngược của phổ tín hiệu $X(e^{j\omega})$ được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.6)$$

Ký hiệu: $IFT[X(e^{j\omega})] = x(n)$ hay $X(e^{j\omega}) \xrightarrow{IFT} x(n)$

Ở đây biến đổi Fourier ngược giúp ta xác định được $x(n)$ từ $X(e^{j\omega})$.

Ví dụ 3.4

$$\text{Cho } X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

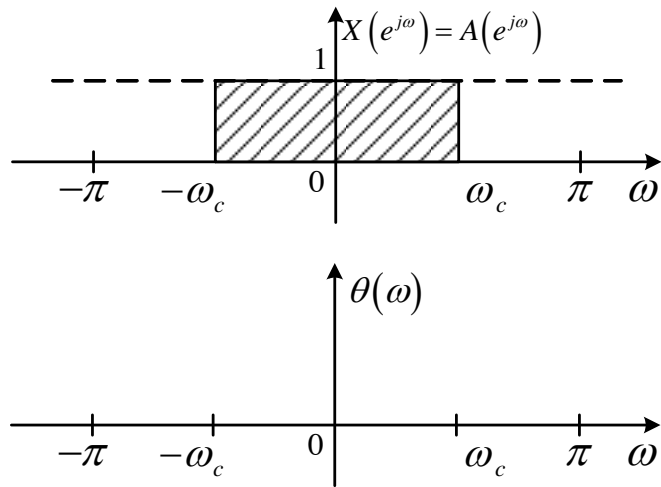
Hãy xác định $x(n)$ và vẽ $x(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

Giải:

$$\text{Ta có: } X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

Từ đây theo đầu bài ta suy ra: $A(e^{j\omega}) = 1$

$$\theta(\omega) = 0$$



Hình 3.6 Độ lớn và pha

Theo định nghĩa biến đổi IFT ta tính tích phân:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n$$

Khi $n=0$ $x(n)$ có dạng $\frac{0}{0}$ nên ta phải biến đổi tiếp thành dạng:

$$x(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

Vẽ với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; Thay vào ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n}$$

$$n = 0: \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

$$n = 1: \quad x(1) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} = x(-1)$$

$$n = 2: \quad x(2) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 2}{\frac{\pi}{2} \cdot 2} = 0 = x(-2)$$

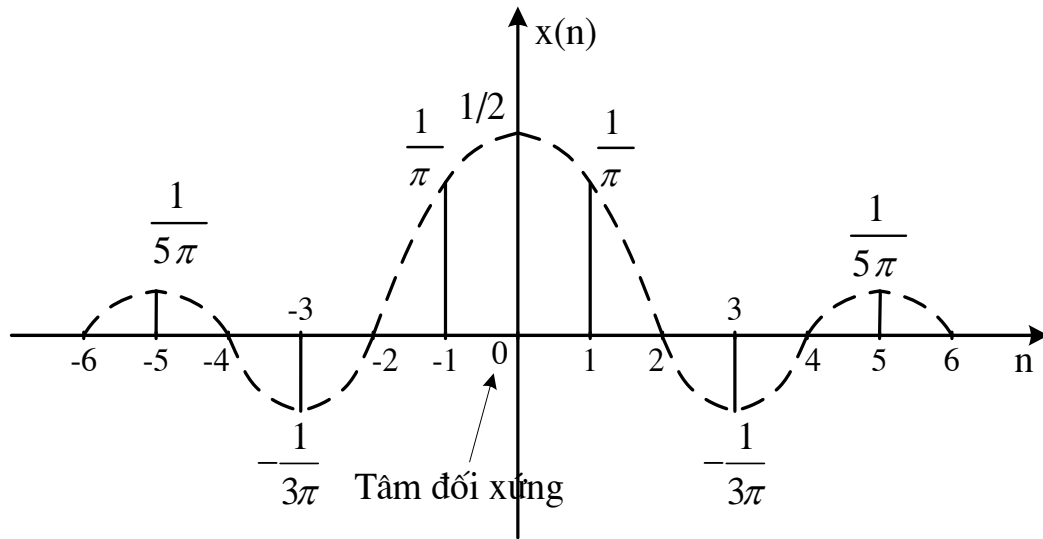
$$n = 3: \quad x(3) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 3}{\frac{\pi}{2} \cdot 3} = -\frac{1}{3\pi} = x(-3)$$

$$n = 4: \quad x(4) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 4}{\frac{\pi}{2} \cdot 4} = 0 = x(-4)$$

$$n = 5: \quad x(5) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 5}{\frac{\pi}{2} \cdot 5} = \frac{1}{5\pi} = x(-5)$$

$$n = 6: \quad x(6) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 6}{\frac{\pi}{2} \cdot 6} = 0 = x(-6)$$

Đây chính là đáp ứng xung bộ lọc nửa băng tần, rất có lợi trên thực tế. Đặc điểm của bộ lọc này là tất cả những điểm chẵn đều bằng 0, lợi dụng tính chất này người ta thường chia thành 2 băng nên tốc độ tính toán và truyền đi nhanh.



Hình 3.7 Biểu diễn $x(n]$ tìm được sau khi biến đổi IFT

Ở đây ta rút ra 3 nhận xét:

- Tín hiệu $x(n]$ đối xứng qua trục tung; pha $\theta(\omega)$ cũng đối xứng.
- $\theta(\omega) = 0$ (pha bằng không) dẫn đến tâm đối xứng nằm tại $n = 0$ (gốc tọa độ).
- $x(n]$: đối với tín hiệu thực có tính đối xứng vì phổ đối xứng (Đối xứng Helmitle).

3.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

Các tính chất của biến đổi Fourier được tổng kết trong bảng sau:

Bảng 3.1 Tính chất của biến đổi Fourier

TT	Tính chất	Miền n	Miền ω
1	Định nghĩa	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$
2	Tuyến tính	$ax_1(n) + bx_2(n)$; (a, b: hằng số)	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
3	Trễ trong miền thời gian n	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
4	Tính đối xứng	$x(n)$ là thực (tính chất đối xứng)	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

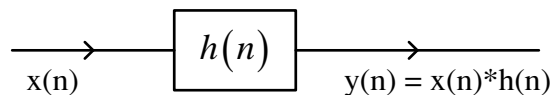
			$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})]$
			$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})]$
			$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
			$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$
	Tính đối xứng	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
		$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
5	Tích chập trong miền n	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
6	Tích chập trong miền tần số	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j(\omega-\omega')}) \cdot X_2(e^{j\omega'}) d\omega'$
7	Vi phân trong miền tần số	$nx(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
8	Dịch tần số	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
9	Tính chất điều chế	$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2} X[e^{j(\omega-\omega_0)}] + \frac{1}{2} X[e^{j(\omega+\omega_0)}]$
10	Định lý Weiner Khinchine	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2^*(e^{j\omega}) d\omega$
11	Quan hệ Parseval	Quan hệ Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Ghi chú: $|X(e^{j\omega})|^2$: mật độ phổ năng lượng tín hiệu $x(n)$, thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm mũ của tần số. Ký hiệu là $S_{xx}(e^{j\omega})$.

3.4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

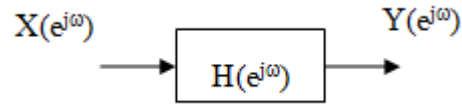
3.4.1. Đáp ứng tần số

Trong miền thời gian rời rạc n ta có đặc trưng cho hệ thống là đáp ứng xung và quan hệ vào ra của hệ thống được thể hiện bởi phép chập:



Hình 3.8 Mô hình hệ thống tuyến tính, bất biến

Trong miền tần số ω ta thấy rằng:



Hình 3.9 Mô hình hệ thống trong miền tần số

$$x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

$$y(n) \xrightarrow{FT} Y(e^{j\omega})$$

$$h(n) \xrightarrow{FT} H(e^{j\omega})$$

Quan hệ vào ra của hệ thống trong miền ω được thể hiện bằng phép nhân như sau:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \text{ hay:}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (3.7)$$

Ở đây $H(e^{j\omega})$ được gọi là **đáp ứng tần số** và nó chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(n)$ hay còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền tần số ω

Các cách thể hiện $H(e^{j\omega})$:

+ Biểu diễn theo phần thực và phần ảo Re, Im:

$$H(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j \text{Im}[H(e^{j\omega})] \quad (3.8)$$

+ Biểu diễn theo Modul và Argument:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} \quad (3.9)$$

$|H(e^{j\omega})|$: Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$: Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).

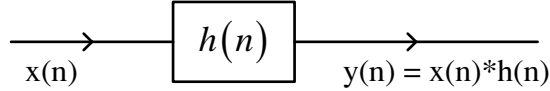
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)} \quad (3.10)$$

3.4.2. Giải phương trình sai phân bằng biến đổi Fourier

Xét mô hình hệ thống tuyến tính, bất biến sau:



Hình 3.10 Mô hình hệ thống tuyến tính, bất biến

Đặc biệt: nếu tín hiệu vào $x(n] = e^{j\omega n}$ thì ta dễ thấy:

$$y(n] = h(n] * x(n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega})$$

Từ đó, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1: Nếu $h(n]$ là thực với mọi n thì:

- Nếu: $x(n] = A \cdot \sin(n\omega + \varphi)$ thì $y(n] = A \cdot |H(e^{j\omega})| \cdot \sin[n\omega + \varphi + \varphi(\omega)]$
- Nếu: $x(n] = A \cdot \cos(n\omega + \varphi)$ thì $y(n] = A \cdot |H(e^{j\omega})| \cdot \cos[n\omega + \varphi + \varphi(\omega)]$

Hệ quả 2: Mỗi quan hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào:

- Biên độ tín hiệu ra tăng đáp ứng biên độ (lần) so với tín hiệu vào.
- Pha tín hiệu ra dịch đi đáp ứng pha (đơn vị) so với tín hiệu vào.

Vậy ta có thể dùng biến đổi Fourier để giải phương trình sai phân như sau:

- Tìm $X(e^{j\omega})$ và $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$ rồi tính ngược lại $y(n]$.
- Nếu tín hiệu vào $x(n]$ có dạng sin thì áp dụng 2 hệ quả trên.

3.4.3. Thực hiện hệ thống trong miền tần số

Thực chất biến đổi Fourier là một trường hợp đặc biệt của biến đổi Z nên với những hệ thống ổn định ta có: $H(e^{j\omega}) = H(Z)|_{Z=e^{j\omega}}$ nên với những hệ thống ổn định này, ta chỉ việc thay ký hiệu $Z = e^{j\omega}$ khi cần biểu diễn hệ thống trong miền tần số.

3.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP

Trong chương này, chúng ta đã xem xét việc phân tích và xử lý tín hiệu rời rạc trong một miền mới khác với hai chương đã học ở trên đó là miền tần số. Ta thấy rằng các thao tác

trong miền này tập trung vào việc khảo sát tần số, phổ của tín hiệu, đây là tiền đề quan trọng cho các phương thức truyền dẫn, điều chế trong viễn thông.

Việc ánh xạ tín hiệu từ miền thời gian rời rạc n sang miền tần số liên tục ω được thực hiện thông qua biến đổi Fourier. Ta cũng nhận thấy rằng biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z , do vậy các tính chất của biến đổi Fourier cũng tương tự như biến đổi z , ví dụ như phép chập trong miền thời gian rời rạc n trở thành phép nhân trong miền tần số ω .

Trong chương này, ngoài việc chúng ta phải hiểu rõ về biến đổi Fourier xuôi và ngược, cần phân biệt được các khái niệm về phổ, phổ biên độ, pha, phổ pha...các đặc tính của bộ lọc số lý tưởng.

Các nội dung kiến thức cần nhớ trong chương này sẽ được đề cập sau đây.

1. Biến đổi Fourier – FT

Định nghĩa:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

2. Điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier

Một dãy $x(n)$ thực hiện được biến đổi Fourier nếu và chỉ nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

3. Các khái niệm, ký hiệu về tín hiệu trong miền tần số liên tục

- $X(e^{j\omega})$: Phổ của tín hiệu $x(n)$.
- $|X(e^{j\omega})|$: Phổ biên độ của tín hiệu $x(n)$.
- $\arg[X(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$: Phổ pha của tín hiệu $x(n)$.
- $A(e^{j\omega})$: Độ lớn của tín hiệu $x(n)$.
- $\theta(\omega)$: Pha của tín hiệu $x(n)$.

Các quan hệ cần nhớ:

$$+ X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$+ X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$$

+ $A(e^{j\omega})$ có thể dương (>0) âm (<0) hoặc bằng 0.

$$+ |X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

Với $\omega \geq 0$

$$+\varphi(\omega) = \theta(\omega) \quad \text{khi} \quad A(e^{j\omega}) \geq 0$$

$$+\varphi(\omega) = \theta(\omega) + \pi \quad \text{khi} \quad A(e^{j\omega}) < 0$$

4. Biến đổi Fourier ngược - IFT

Định nghĩa:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

5. Tính chất của biến đổi Fourier

Ở đây, ta sẽ chú ý một số tính chất:

- Phép chập trong miền thời gian rời rạc n sẽ trở thành phép nhân:

$$x_1(n) * x_2(n) \quad \Leftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

- Trễ tín hiệu: $x(n - n_0) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

- Trễ tần số: $e^{j\omega_0 n} x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$

- Quan hệ Parseval: thể hiện sự bảo toàn về mặt năng lượng khi chuyển từ miền thời gian sang miền tần số.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

6. Đáp ứng tần số

Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống trong miền tần số liên tục được xây dựng theo hai cách:

- Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống là tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

- Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(n)$.

Đáp ứng tần số của hệ thống được thể hiện như sau:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

trong đó:

$$|H(e^{j\omega})|: \text{Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})]: \text{Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).}$$

hay Độ lớn và pha:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$$

Một số kiến thức toán học cần thiết để nghiên cứu học tập trong chương này.

+ Tích phân thông dụng để tính IFT:

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$$

+ Tổng cấp số nhân:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

+ Khai triển Ôle:

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

$$e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$$

+ Một số khai triển thông thường:

$$1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} \cdot (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = 2j \cdot \sin(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2}$$

$$1 + e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} \cdot (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) = 2\cos(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2}$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 3. 1

Xác định biến đổi Fourier của tín hiệu

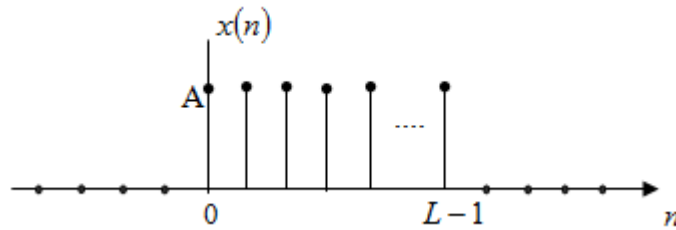
$$x(n) = a^{|n|} \quad -1 < a < 1$$

Bài 3.2

Tìm biến đổi Fourier và phổ biên độ của dãy

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

với minh hoạ như hình sau



Hình 3.11 Bài tập 3.2

Bài 3.3

Hãy tính phép chập các dãy $x_1(n) * x_2(n)$ với

$$x_1(n) = x_2(n) = \{1, 1, 1\}$$

thông qua biến đổi Fourier.

Bài 3.4

Xác định mật độ phổ năng lượng $S_{xx}(e^{j\omega})$ của tín hiệu

$$x(n) = a^n u(n) \quad -1 < a < 1$$

Bài 3.5

Cho $x(n) = a^n u(n)$ với $a = 0.5$ và $a = -0.5$. Hãy biểu diễn mật độ phổ năng lượng $S_{xx}(e^{j\omega})$

Bài 3.6

Cho tín hiệu $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$. Phổ của tín hiệu sẽ là đáp án nào sau đây:

a) Không tồn tại.

$$b) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

$$c) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{j\omega}}$$

$$d) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

Bài 3.7

Cho tín hiệu $x(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n u(n)$. Phổ của tín hiệu sẽ là đáp án nào sau đây:

a) Không tồn tại.

$$b) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}e^{-j\omega}}$$

$$c) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}e^{j\omega}}$$

$$d) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}e^{-j\omega}}$$

Bài 3.8

Thành phần tương ứng của $x(n-k)$ khi chuyển sang miền tần số ω sẽ là:

$$a) e^{j\omega k} X(e^{j\omega})$$

$$b) e^{j\omega k} X(e^{-j\omega})$$

$$c) e^{-j\omega k} X(e^{-j\omega})$$

$$d) e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

Bài 3.9

Thành phần tương ứng của $x(n)\cos \omega_0 n$ khi chuyển sang miền tần số ω sẽ là:

$$a) \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

$$b) \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$$

$$c) \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$$

$$d) \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) - \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$$

Bài 3.10

Thành phần tương ứng của $e^{j\omega_0 n} x(n)$ khi chuyển sang miền tần số ω sẽ là:

$$a) X(e^{j(\omega + \omega_0)})$$

$$b) X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

c) $e^{j\omega_0} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

d) $e^{j\omega_0} X(e^{j(\omega+\omega_0)})$

Bài 3. 11

Những câu trả lời nào sau đây là đúng:

- a) Biến đổi Fourier là trường hợp riêng của biến đổi Z
- b) Biến đổi Z là trường hợp riêng của biến đổi Fourier
- c) Biến đổi Fourier là biến đổi Z thực hiện trên vòng tròn đơn vị
- d) Biến đổi Fourier hoàn toàn độc lập với biến đổi Z.

Bài 3. 12

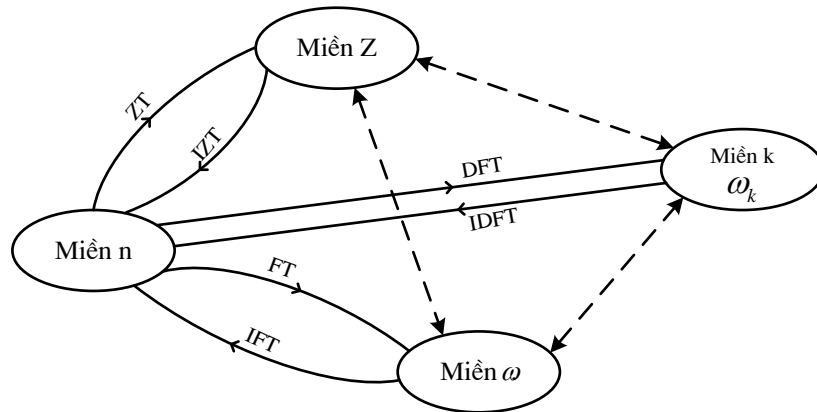
Các tín hiệu trong miền tần số ω có tính chất:

- a) Tuần hoàn với chu kỳ là π
- b) Tuần hoàn với chu kỳ là 2π
- c) Không phải là tín hiệu tuần hoàn
- d) Tuần hoàn khi $\omega \geq 0$.

CHƯƠNG 4. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1. MỞ ĐẦU

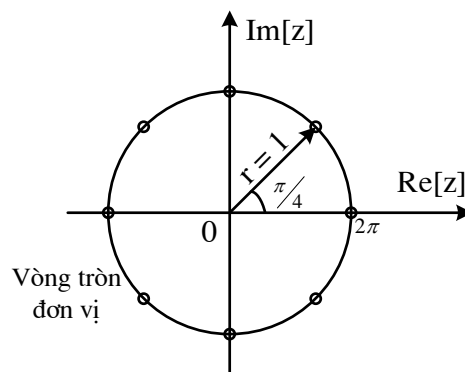
Sơ đồ dưới đây cho biết quan hệ giữa các miền ta đã nghiên cứu với miền tần số rời rạc sẽ học trong chương 4



Hình 4.1 Quan hệ giữa các miền biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc

Trong bốn miền biểu diễn tín hiệu & hệ thống rời rạc hay dùng, Chúng ta đã xét cả 3 miền: miền thời gian rời rạc n , miền z , miền tần số ω thông qua các biến đổi z hay biến đổi Fourier. Trong chương này, ta tập trung nghiên cứu đến biến đổi Fourier rời rạc với các dãy có đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài bằng hữu hạn N .

Ý nghĩa:



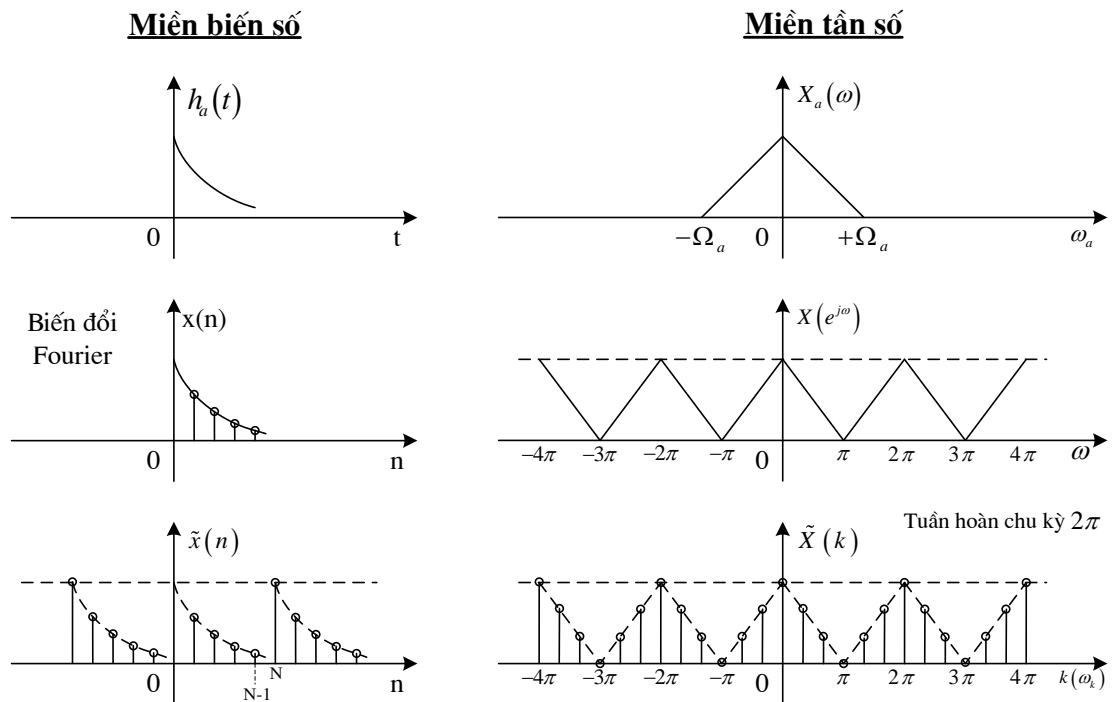
Hình 4.2 Các điểm $\frac{2\pi}{N}$ trên vòng tròn đơn vị

Ta đã biết rằng biến đổi Fourier vừa xét ở chương 3 là một trường hợp riêng của biến đổi z hay nói cách khác biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn

vị. Nhưng đối với một dãy tuần hoàn bất kỳ với chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$, ta thấy không cần thiết phải thực hiện biến đổi Fourier liên tục mà chỉ cần lợi dụng tính chất tuần hoàn của $\tilde{x}(n)_N$ với chu kỳ N và tính tuần hoàn của biến $e^{j\omega}$ chu kỳ 2π , nghĩa là chỉ cần lấy các điểm đặc biệt $\frac{2\pi}{N}$ trên đường tròn đơn vị tương ứng với chu kỳ N của tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$

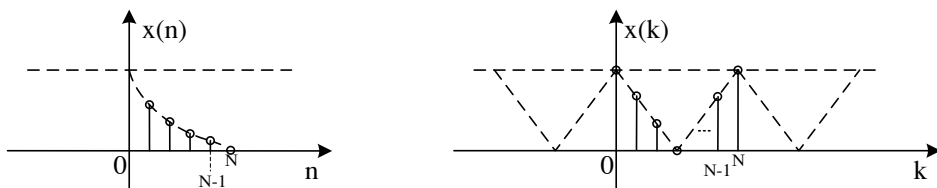
Ví dụ: Chia 8 phần, tức là thay $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $N = 8 \rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{8}k = \frac{\pi}{4}k$, $k = 0 \div 7$.

Khái quát hóa ta sẽ so sánh các dạng phổ của các dạng tín hiệu khác nhau trên hai miền: miền biến số thời gian liên tục và miền tần số..



Hình 4.3 Các dạng phổ của các dạng tín hiệu khác nhau

Khi biến đổi DFT đối với tín hiệu tuần hoàn, đúng ra là ta phải xét từ $-\infty$ đến ∞ nhưng trên thực tế, khi biến đổi thường nghiên cứu trong một chu kỳ từ 0 đến $N - 1$ để xét cho dễ, các chu kỳ khác coi bằng 0 (vì theo tính chất tuần hoàn) như hình 4.2. Các kỹ thuật biến đổi Fourier rời rạc sẽ được xem xét cụ thể trong chương này.



Hình 4.4 Tín hiệu rời rạc và phổ rời rạc tuần hoàn của nó

Các nội dung chính của chương bao gồm:

- Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N.
- Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N.
- Tính phép chập tuyến tính bằng phép chập vòng thông qua biến đổi DFT.
- Phép chập nhanh và biến đổi Fourier nhanh FFT.

4.2. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DÃY TUẦN HOÀN.

4.2.1. Các định nghĩa

4.2.1.1. Định nghĩa DFT của dãy tuần hoàn

Biến đổi Fourier rời rạc của một dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\omega_k n} \quad (4.1)$$

Trong đó: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ với $\begin{cases} k = 0 \div N-1 \\ n = 0 \div N-1 \end{cases}$ và $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn chu kỳ N

nên nó thỏa mãn: $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + lN)$

Đặt: $W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.2)$

$$W_N^{-kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}; W_N^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}; W_N^0 = 1$$

Theo cách đặt như trên thì biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N được viết lại như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn} \quad (4.3)$$

Để biểu diễn cho gọn người ta thường biểu diễn theo (4.3)

Ký hiệu toán tử:

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) \text{ hay } \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$$

Ví dụ 4.1

Cho dãy tuần hoàn: $\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$ chu kỳ $N = 10$.

Hãy xác định $\tilde{X}(k)$

Giải:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^9 \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^4 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}, \text{ áp dụng công thức định nghĩa}$$

$$\tilde{X}(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k \cdot 5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k \cdot 1}}, (n + 1 = 4 + 1 = 5).$$

Biến đổi phần thực và ảo ta được

$$\tilde{X}(k) = \frac{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{2j \sin \frac{\pi k}{10} e^{-j\frac{\pi}{10}k}} = \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\sin \frac{\pi k}{10}} e^{-j\frac{\pi}{10}k} = A(k) e^{j\theta(k)} = |\tilde{X}(k)| e^{j\varphi(k)}, k = 0 \div 9$$

Lưu ý: Khi tính toán ta chỉ cần xác định với k chạy từ 0 đến 9, các chu kỳ khác lặp lại.

4.2.1.2. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc IDFT đối với dãy tuần hoàn

Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.4)$$

Hay viết lại cho gọn:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \cdot W_N^{-kn} \quad (4.5)$$

Ký hiệu: $\text{IDFT}[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$ hay $\tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} \tilde{x}(n)$

Lưu ý: Cách tính IDFT hoàn toàn giống DFT chỉ khác dấu $(-)$, $(+)$ và hệ số $1/N$ trước dấu \sum . Vì vậy ta chỉ cần xét DFT rồi suy ra biến đổi IDFT. Về mặt thuật toán là như nhau.

4.2.1.3. Biểu diễn DFT dưới dạng ma trận

Xuất phát từ biểu thức (4.3)

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn}$$

Ta khai triển:

$$k=0: \quad \tilde{X}(0) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^0 + \tilde{x}(2)W_N^0 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^0$$

$$k=1: \quad \tilde{X}(1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^1 + \tilde{x}(2)W_N^2 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)}$$

$$k=2: \quad \tilde{X}(2) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^2 + \tilde{x}(2)W_N^4 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

.....

$$k=N-1: \quad \tilde{X}(N-1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^{N-1} + \tilde{x}(2)W_N^{2(N-1)} + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

Ta ký hiệu:

$$\tilde{X}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$W_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ta có thể viết lại cho gọn dạng biểu diễn theo ma trận như sau:

$$\tilde{X}(k) = \tilde{x}(n) \cdot W_N \quad (4.8)$$

4.2.2. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn với chu kỳ N

Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc sẽ được tóm tắt trong bảng tổng kết 4.1, ở đây ta tập trung xem xét khái niệm về phép chập tuần hoàn.

Phép chập tuần hoàn

Ta thấy rằng tích chập tuyến tính đã học trong chương 1 được biểu diễn dưới dạng:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) \quad (4.9)$$

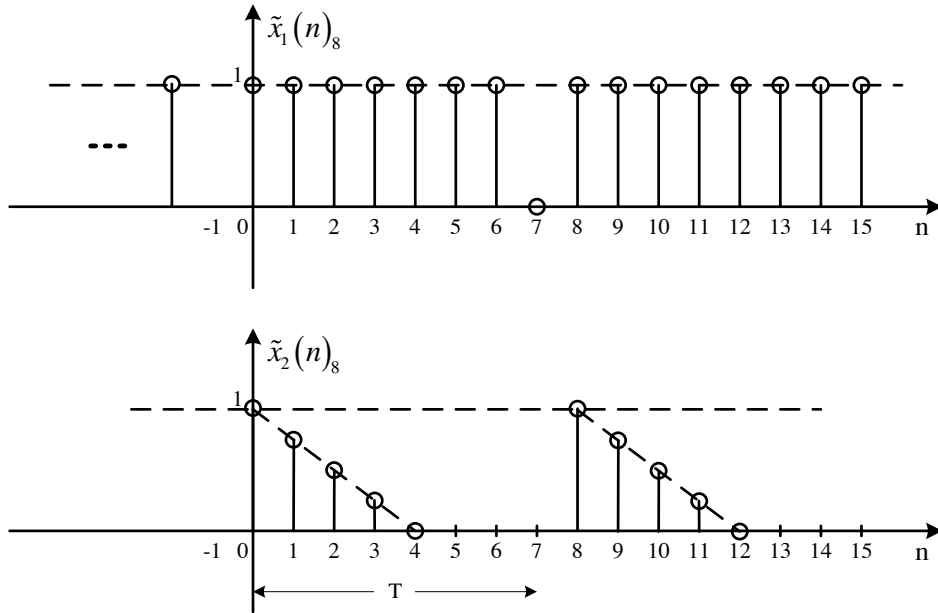
Tích chập tuần hoàn (lấy cùng một chu kỳ) được biểu diễn như sau:

$$\tilde{x}_3(n)_N = \tilde{x}_1(n)_N \left(\tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)_N \tilde{x}_2(n-m)_N \quad (4.10)$$

Ta sẽ tìm hiểu cụ thể về phép chập tuần hoàn thông qua ví dụ 4.2 như sau.

Ví dụ 4.2

Tính phép chập của 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$ (có chu kỳ 8) đã cho trong hình 4.3 như sau:



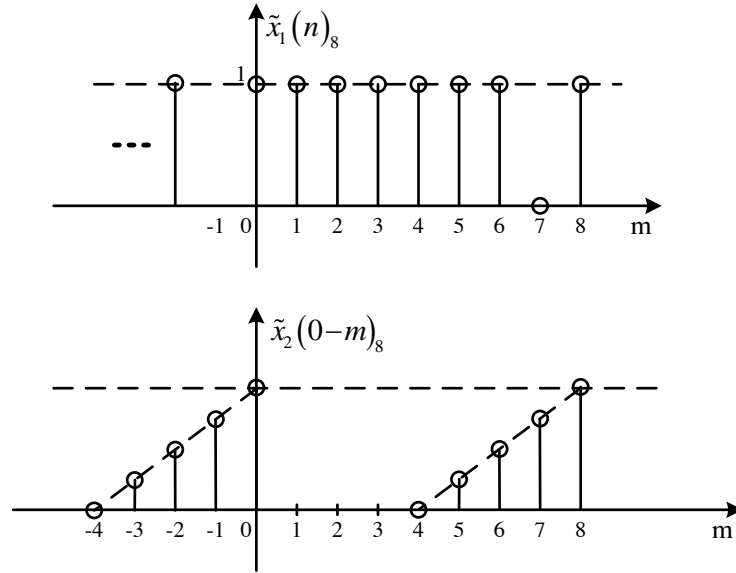
Hình 4.5 Biểu diễn $\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$ trong ví dụ 4.2

Giải:

Theo công thức ta có:

$$\tilde{x}_3(n)_8 = \tilde{x}_1(n)_8 \left(\tilde{*} \right)_8 \tilde{x}_2(n)_8 = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)_8 \tilde{x}_2(0-m)_8$$

Thực hiện các bước tính phép chập bằng đồ thị giống như chương 1, giữ nguyên $\tilde{x}_1(n)_8$ và lấy đối xứng $\tilde{x}_2(n)_8$ ta có:



Hình 4.6 Biểu diễn cách tính phép chập tuần hoàn bằng đồ thị

$$\tilde{x}_3(0)_8 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1,75$$

$$\tilde{x}_3(1)_8 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

$$\tilde{x}_3(2)_8 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = 2,25$$

$$\tilde{x}_3(3)_8 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = 2,5$$

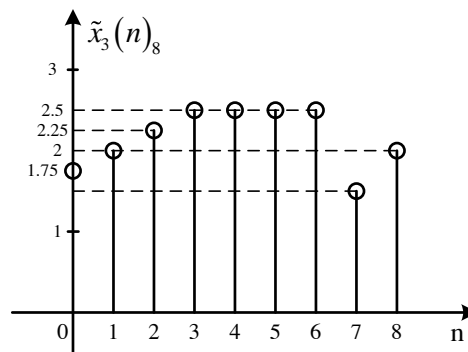
$$\tilde{x}_3(4)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(5)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(6)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(7)_8 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,5$$

Biểu diễn trong một chu kỳ như sau:



Hình 4.7 Biểu diễn kết quả của ví dụ 4.3

Lưu ý các chu kỳ khác lặp lại như chu kỳ chúng ta vừa biểu diễn.

Bảng 4.1 Tổng kết các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Miền n	Miền k
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$
$a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$	$a\tilde{X}_1(k)_N + b\tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0} \tilde{X}(k)$
$W_N^{ln} \tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+l)$
$\tilde{x}_1(n)_N \left(\tilde{x}_2(n)_N \right)^*$	$\tilde{X}_1(k)_N \tilde{X}_2^*(k)_N$
$\tilde{x}_1(n)_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)_N \tilde{X}_2(k-l)_N$ $\tilde{X}_1(k)_N \left(\tilde{X}_2^*(k)_N \right)$
$\tilde{x}(n)$ thực	$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$
	$\text{Re}[\tilde{X}(k)] = \text{Re}[\tilde{X}(-k)]$
	$\text{Im}[\tilde{X}(k)] = -\text{Im}[\tilde{X}(-k)]$
	$ \tilde{X}(k) = \tilde{X}(-k) $
	$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$

4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT CỦA DÃY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN

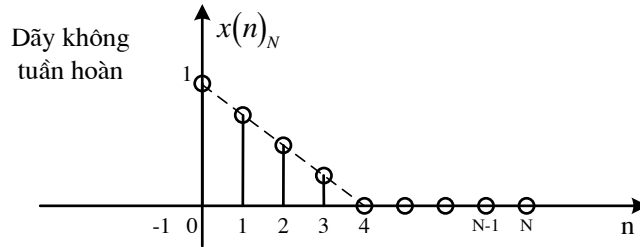
4.3.1. Các định nghĩa

Một dãy $x(n)$ có chiều dài N nghĩa là:

$$L[x(n)] = [0, N-1] = N$$

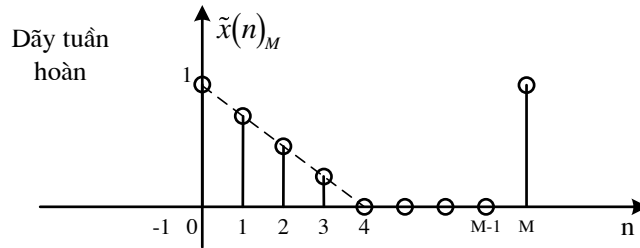
Như trên chúng ta đã xét biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N và đã thấy ưu điểm nổi bật của biến đổi Fourier rời rạc DFT là biến đổi xuôi và biến đổi ngược đều được thực hiện cùng một thuật toán, nhưng trên thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng gặp dãy tuần hoàn.

Bây giờ, ta xét dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn như sau



Hình 4.8 Biểu diễn dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N $x(n)_N$.

Ta coi dãy có chiều dài N như trên là một chu kỳ của một dãy tuần hoàn có chu kỳ M như sau:



Hình 4.9 Biểu diễn dãy tuần hoàn có chiều dài chu kỳ M $\tilde{x}(n)_M$

Quan hệ giữa chu kỳ M và chiều dài N phải thỏa mãn: $M \geq N$ (thường chọn $M = 2^\gamma$ nghĩa là chọn dạng hàm mũ theo cơ số 2). Nếu $M=N$, ta có thể biểu diễn quan hệ giữa dãy có chiều dài hữu hạn N $x(n)_N$ và dãy tuần hoàn có chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ như sau:

$$x(n)_N = \begin{cases} \tilde{x}(n)_N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (4.11)$$

Hay biểu diễn cho gọn dưới dạng sau:

$$x(n)_N = \tilde{x}(n)_N \text{rect}_N(n) \quad (4.12)$$

Như vậy, nếu ta coi chiều dài hữu hạn N : $x(n)_N$ là một chu kỳ của dãy tuần hoàn có chu kỳ M : $\tilde{x}(n)_M$ với $M \geq N$ ta có thể áp dụng định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn như đã xét ở trên cho dãy có chiều dài hữu hạn. Sau khi thực hiện biến đổi xong ta lấy

kết quả nhưng chỉ khoanh vùng trong một chu kỳ, từ đây ta xây dựng được định nghĩa cho cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N.

Định nghĩa cặp DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N

Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau.

4.3.1.1. Biến đổi xuôi DFT

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad (4.13)$$

Ký hiệu: $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$ hay $x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$

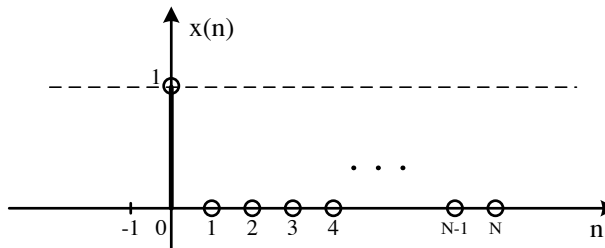
4.3.1.2. Biến đổi ngược IDFT

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (4.14)$$

Ký hiệu: $\text{IDFT}[X(k)] = x(n)$ hay $X(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} x(n)$

Ví dụ 4.3

Hãy tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy có chiều dài hữu hạn sau: $x(n) = \delta(n)$.



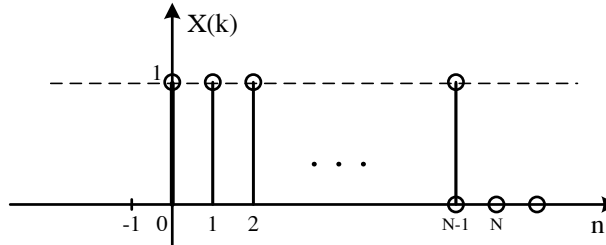
Hình 4.10 Biểu diễn bằng đồ thị $x(n)_N = \delta(n)$.

Giải: Nhìn trên đồ thị ta thấy $x(n)_N$ có một mẫu bằng 1 tại $n=0$, còn lại N-1 mẫu bằng 0 và chúng ta chỉ xét dãy này trong khoảng từ 0 đến N-1.

$$\text{Áp dụng định nghĩa (4.3): } X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

Chỉ có một giá trị $x(n)|_{n=0} = 1$, vì vậy: $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Ta biểu diễn phổ từ 0 đến $N-1$ như sau:



Hình 4.11 Biểu diễn $X(k)$

4.3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DÃY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N

Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc được tổng kết trong bảng 4.2, ở đây ta sẽ xem xét khái niệm về phép chập vòng, tức là phép chập được thực hiện với các dãy có chiều dài hữu hạn.

Để hiểu rõ phép chập vòng, trước tiên ta phải xem xét tính chất trễ vòng như sau.

Chẳng hạn ta xét dãy: $x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Ở đây ta cần phân biệt rõ một số khái niệm.

+ $x(n)$: dãy theo đầu bài cho.

+ $\tilde{x}(n)_4$: dãy tuần hoàn với chu kỳ 4 trong đó 1 chu kỳ của nó đúng bằng $x(n)$ đã cho.

+ $x(n)_4$: dãy $x(n)$ theo đầu bài cho với chiều dài bằng 4. Ở đây ta thấy $x(n)_4 = x(n)$.

+ $x(n-2)$: dãy trễ của $x(n)$ đi 2 mẫu sang phải được gọi là trễ tuyến tính.

+ $\tilde{x}(n-2)_4$: dãy trễ tuần hoàn của $\tilde{x}(n)_4$ đi 2 mẫu.

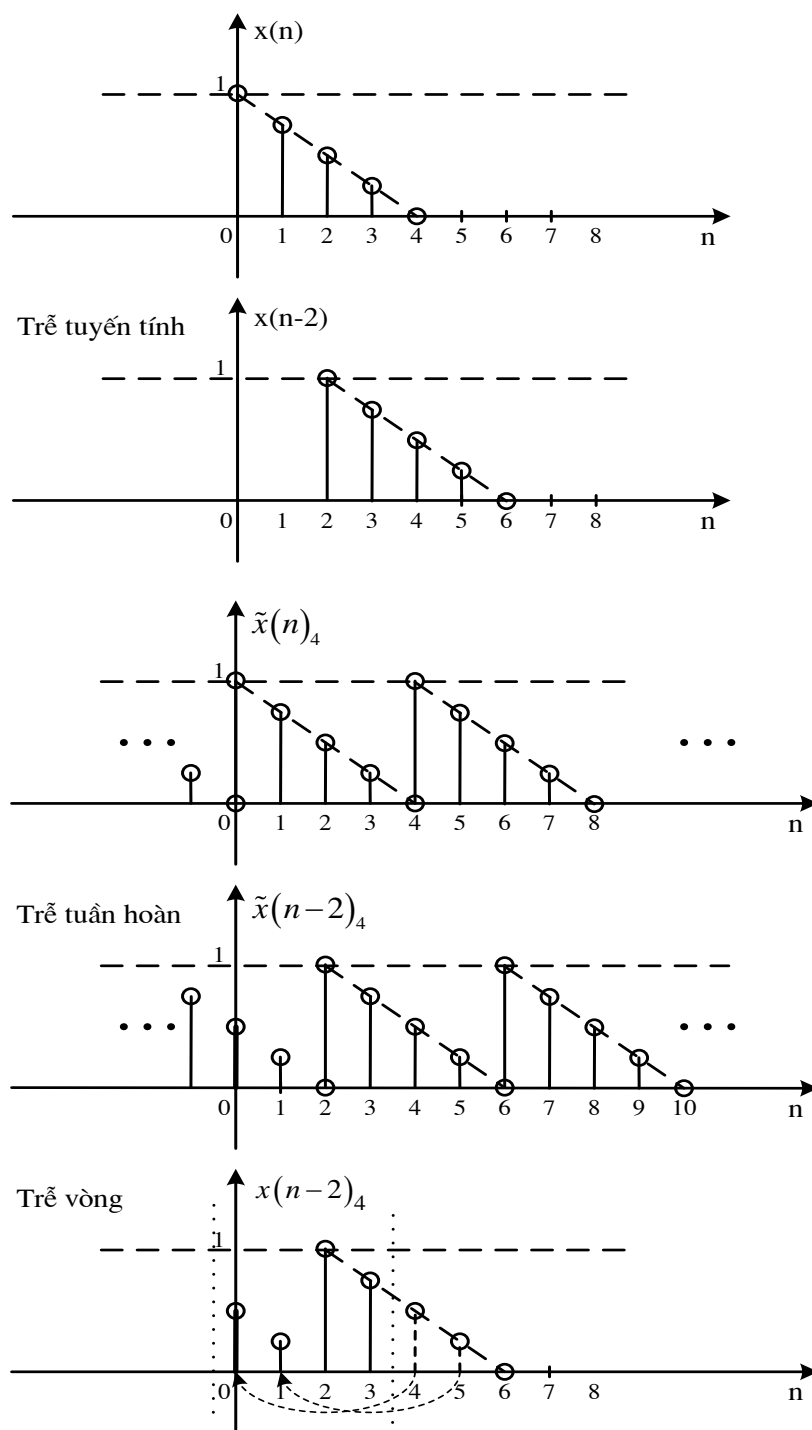
+ $x(n-2)_4$: dãy trễ của $x(n)_4$ đi 2 mẫu, ký hiệu như thế này gọi là trễ vòng.

Ta thấy:

- Trễ vòng của dãy có chiều dài hữu hạn N chỉ xác định trong khoảng $0:-: N-1$.

- Các mẫu mà trễ ngoài khoảng $0:-: N-1$ sẽ vòng về theo giá trị N, chính vì điều này mà người ta gọi là trễ vòng.

Trong minh hoạ hình (4.10), $x(n-2)_4$ chỉ xác định trong khoảng 0:-3 (vì $N=4$). Các mẫu trễ ngoài khoảng này sẽ vòng về theo 4.



Hình 4.12 Minh hoạ các phép trễ của tín hiệu

Bảng 4.2 Tính chất của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N

Miền n	Miền tần số rời rạc k
----------	-------------------------

$x(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$	$X(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$
$ax(n)_{N_1} + bx(n)_{N_2} = x(n)_{N_3}, N_3 = \max[N_1, N_2]$	$aX_1(k)_{N_3} + bX_2(k)_{N_3} = X_3(k)_{N_3}$
$x(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0} X(k)_N$
$W_N^{-k_0n} x(n)$	$X(k-k_0)_N$
$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N = x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$	$X_1(k)_N X_2(k)_N$
$x_1(n)_N x_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)_N X_2(k-l)_N$
$x^*(n)_N$	$X^*(-k)_N$
$x^*(-n)_N$	$X^*(k)_N$
$\text{Re}[x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N + \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
$j \text{Re}[x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N - \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
Với $x(n)_N$ thực	$X(k)_N = X^*(-k)_N$
	$X^*(k)_N = X(-k)_N$
	$\text{Re}[X(k)_N] = \text{Re}[X(-k)_N]$
	$\text{Im}[X(k)_N] = -\text{Im}[X(-k)_N]$
	$ X(k)_N = X(-k)_N $
	$\arg[X(k)_N] = -\arg[X(-k)_N]$
$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} X(k)_N ^2$

Ví dụ 4.4

Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn N như sau:

$$x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n)$$

Tìm $x_3(n)_N = x_1(n)_N (*) x_2(n)_N$ thông qua biến đổi Fourier rời rạc (DFT).

Giải:

Ta sử dụng tính chất phép chập ở miền n sang miền tần số rời rạc k trở thành phép nhân thông thường. Ta chuyển $x_1(n)_N$ và $x_2(n)_N$ sang miền k thành $X_1(k)$ và $X_2(k)$ ta có:

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N X_2(k)_N$$

$$x_3(n)_N = \text{IDFT}[X_3(k)_N]$$

$$X_1(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

$$X_1(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \text{ thay vào:}$$

$$X_1(k) = \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow X_3(k) = \begin{cases} N^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Biến đổi ngược theo công thức:

$$x_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$x_3(n) = \begin{cases} N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

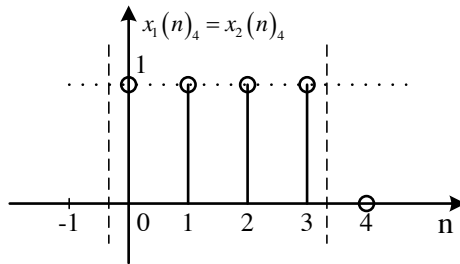
Khi N=4 ta có:

$$x_3(n) = \begin{cases} 4 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$X_1(k) = X_2(k) = \begin{cases} 4 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

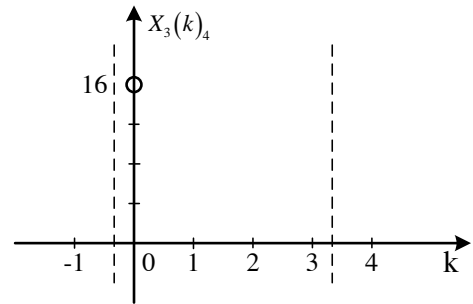
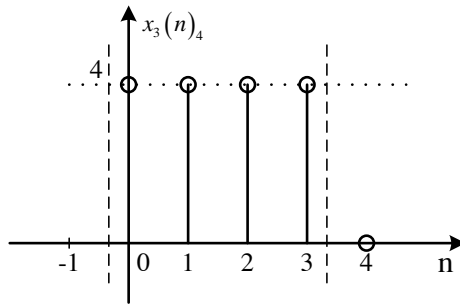
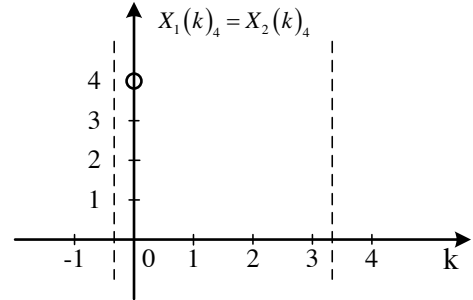
$$X_3(k) = \begin{cases} 16 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Vẽ trong miền n



n ----> k

Vẽ trong miền k



Hình 4.13 Minh họa ví dụ 4.4 với chiều dài N=4

Ví dụ 4.5

Hãy tính phép chập tuyến tính của 2 dãy

$$x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n), N=4.$$

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

Giải:

Đây chính là phép chập quen thuộc ta đã học trong chương 1.

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^4 x_1(m) x_2(n-m)$$

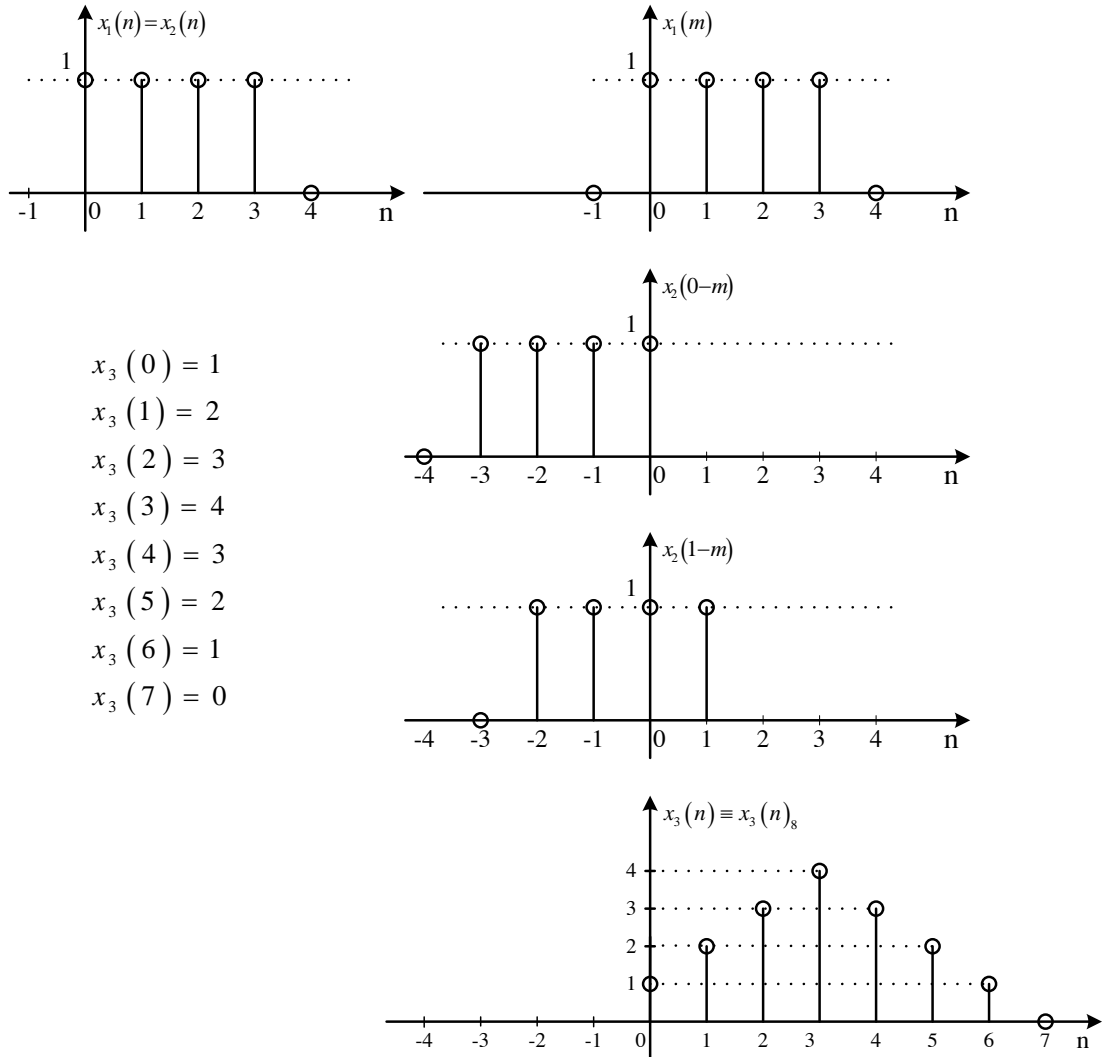
$$x_3(0)=1, x_3(1)=3, x_3(2)=3, x_3(3)=4, x_3(4)=3, x_3(5)=2, x_3(6)=1, x_3(7)=0$$

Lưu ý: Nếu có 2 dãy có chiều dài hữu hạn N_1 và N_2 : $x_1(n)_{N_1}$ và $x_2(n)_{N_2}$

Khi ta thực hiện phép chập tuyến tính không vòng: $x_3(n)_{N_3} = x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2}$

Thì chiều dài phép tuyến tính là: $N_3 = N_1 + N_2 - 1$; Nếu $N = N_1 = N_2 = 4$ thì $N_3 = 7$.

Kết quả phép chập này sẽ được minh hoạ như sau



Hình 4.14 Minh hoạ ví dụ 4.5 với $N=4$

Ví dụ 4.6

Hãy tính phép chập vòng của 2 dãy: $x_1(n)_8 = x_2(n)_8 = \text{rect}_4(n)$

Giải: Ở đây ta thấy $x_1(n)_8 = x_2(n)_8$ chính là dãy chữ nhật $\text{rect}_4(n)$ và thêm 4 mẫu 0.

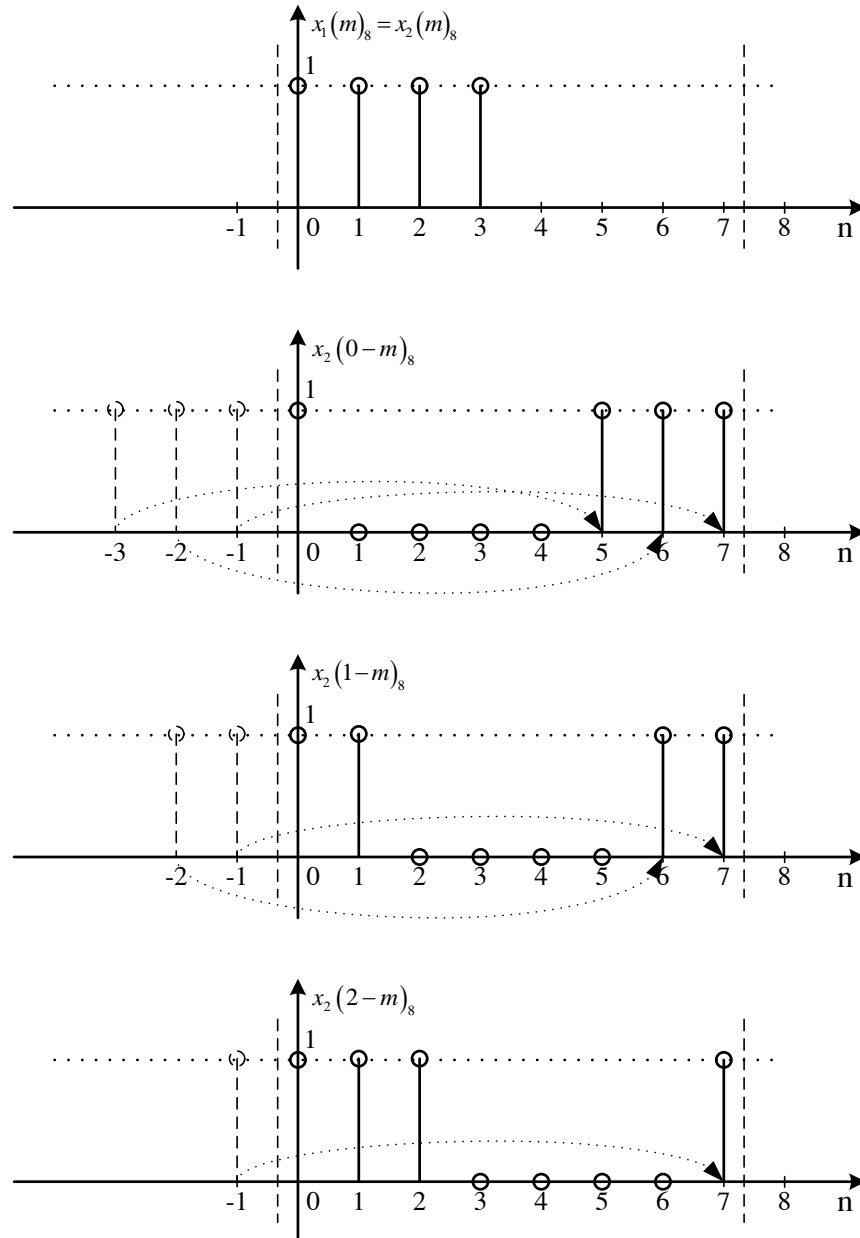
Ta có:
$$x_3(n)_8 = x_1(n)_8 (*) x_2(n)_8 = \sum_{m=0}^7 x_1(m)_8 x_2(n-m)_8$$

$$x_3(0)_8 = \sum_{m=0}^7 x_1(m)_8 x_2(0-m)_8 = 1.$$

Thực hiện phép chập như minh sau ta có kết quả trùng với kết quả của ví dụ 4.5.

$$x_3(1)_8 = 2, x_3(2)_8 = 3, x_3(3)_8 = 4, x_3(4)_8 = 3, x_3(5)_8 = 2, x_3(6)_8 = 1, x_3(7)_8 = 0$$

Lưu ý: Nếu chiều dài của dãy là 8 khi thực hiện phép chập vòng ta chỉ cần xác định các mẫu trong khoảng từ 0 đến 7 (tức từ 0:-N-1).



Hình 4.15 Minh hoạ tính phép chập vòng $x_1(n)_8 (*)_8 x_2(n)_8$

Qua 3 ví dụ (4.4), (4.5) và (4.6) ta thấy:

- Kết quả ví dụ (4.5) chính là kết quả ví dụ (4.6).

- Ví dụ (4.6) tương tự như ví dụ (4.4) khi ta cho $N=4$ nhưng lại có kết quả khác nhau do ta chọn chiều dài để tính phép chập vòng khác nhau.

- Ở ví dụ (4.6) nếu ta thay chiều dài bằng 7 và tính phép chập vòng

$$x_3(n)_7 = x_1(n)_7 (*)_7 x_2(n)_7 = \sum_{m=0}^6 x_1(m)_7 x_2(n-m)_7 \text{ ta thấy kết quả không thay đổi. so}$$

với kết quả ta tìm được với chiều dài bằng 8.

Vậy, ta rút ra kết luận:

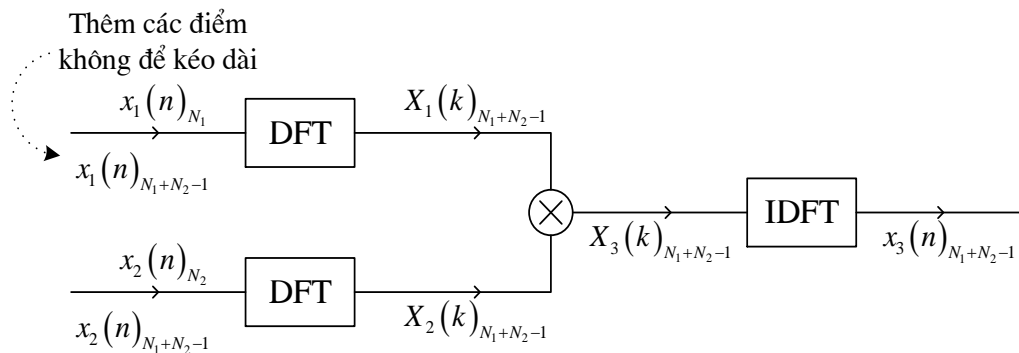
Điều kiện để ta có thể sử dụng phép chập vòng để tính phép chập tuyến tính đối với 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x_1(n)_{N_1}$ và $x_2(n)_{N_2}$ là chiều dài chúng ta chọn để thực hiện phép N_3 phải thỏa mãn: $N_3 \geq N_1 + N_2 - 1$

Ở đây, trước tiên ta phải bổ xung các mẫu bằng 0 để tăng chiều dài $x_1(n)_{N_1}$ và $x_2(n)_{N_2}$ tối thiểu bằng N_1+N_2+1 sau đó mới thực hiện phép chập vòng:

$$x_3(n)_{N_1+N_2-1} = x_1(n)_{N_1} (*)_{N_1+N_2-1} x_2(n)_{N_2}$$

Nếu tính phép chập tuyến tính thông qua phép chập vòng ta sẽ lợi dụng được ưu thế của biến đổi Fourier rời rạc là biến đổi xuôi ngược cùng một thuật toán, do vậy cải thiện hiệu năng tính toán đáng kể, hơn nữa phép chập sang miền tần số rời rạc trở thành phép nhân cho nên thực hiện cũng đơn giản hơn rất nhiều.

Sơ đồ ứng dụng DFT tính phép chập tuyến tính:



Hình 4.16 Sơ đồ tính phép chập tuyến tính thông qua biến đổi DFT

4.3.3. Phép chập nhanh (phép chập phân đoạn)

Trên thực tế, chúng ta thường gặp trường hợp phải thực hiện biến đổi Fourier rời rạc với các dãy có chiều dài khác xa nhau, một dãy trong phép DFT quá dài sẽ dẫn đến vượt quá dung lượng của bộ nhớ thời gian tính toán quá lớn không cho phép, để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi kết thúc tất cả quá trình tính toán. Khi gặp vấn đề trên ta phải chia tính toán ra thành nhiều giai đoạn.

Giả sử chúng ta xét một hệ thống với đầu vào $x(n)$ có chiều dài N , đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài M , ta thấy rằng trên thực tế $N \gg M$. Khi thực hiện phép chập tuyến tính để xác định đầu ra $y(n)$ của hệ thống $y(n)=x(n)*h(n)$ thông qua DFT ta phải thực hiện các bước sau theo phương pháp Stockham:

- Chia đầu vào $x(n)$ ra thành nhiều dãy con: $x(n)_N = \sum_i x(n)_{N_i}$ (4.15)

với $x_i(n)_{N_i} = \begin{cases} x(n) & iN_1 \leq n \leq (i+1)N_1 - 1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$ (4.16)

- Thực hiện chập từng dãy con với nhau: $y_i(n)_{N_1+M-1} = h(n)_M * x_i(n)_{N_i}$ (4.17)

Phép chập này được thực hiện thông qua phép chập vòng nhờ DFT. Ở đây, chiều dài thực hiện DFT là N_1+M-1 .

- Sau đó chúng ta tổ hợp các kết quả thành phần:

$$y(n) = \sum_i y_i(n)_{N_1+M-1} \quad (4.18)$$

Ta phải chọn giá trị của N_1 tối ưu so với M để được chiều dài thực hiện DFT theo cơ số 2 (2^r). Việc chọn này đã được tổng kết ở bảng HELMS như sau:

Bảng 4.3 Bảng HELM chọn chiều dài thực hiện DFT

Chiều dài của $h(n)$ M	Chiều dài của DFT $N_1 + M - 1$
≤ 10	32
11-17	64
18-29	128
30-52	256
53-94	512
95-171	1024
172-310	2048
311-575	4096
576-1050	8192

1051-2000	16.384
2001-3800	32.768
3801-7400	65.536
7401-1480	131.072

4.3.4. Khôi phục biến đổi Z và biến đổi Fourier từ DFT

Ta có:

$$\begin{aligned}
 X(Z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n).Z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} \text{IDFT}[X(k)].Z^{-n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}.Z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k}.Z^{-1})^n \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{1 - W_N^{-N.k}.Z^{-N}}{1 - W_N^{-k}.Z^{-1}} = \frac{1 - Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k}.Z^{-1}}
 \end{aligned}$$

Khi thay $Z = e^{j\omega}$ ta có:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{N})}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{N})}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} e^{-j[\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi k}{N}]}
 \end{aligned}$$

4.4. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT) PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN N

4.4.1. Định nghĩa

Ta xem xét việc tính toán DFT với số điểm $N = 2^V$ bằng phương pháp chia và hạn chế, ta chọn $M = N/2$ và $L = 2$. Sự lựa chọn này dẫn đến việc chia dãy số liệu N điểm thành hai dãy số liệu $N/2$ điểm $f_1(n)$ và $f_2(n)$ tương ứng với các mẫu chẵn và lẻ của dãy $x(n)$, có nghĩa là:

$$\begin{aligned}
 f_1(n) &= x(2n) \\
 f_2(n) &= x(2n+1) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Do $f_1(n)$ và $f_2(n)$ có được bằng cách làm chia dãy $x(n)$ bởi hệ số 2 nên kết quả là thuật toán FFT này được gọi là *thuật toán chia trong miền thời gian*.

Tương tự nếu biểu diễn N là lũy thừa với cơ số khác thì ta có thuật toán chia trong miền thời gian theo cơ số tương ứng.

4.4.2. Thuật toán FFT phân thời gian cơ số 2

Bây giờ DFT N điểm có thể được biểu diễn bằng tổng của các DFT của dãy số liệu được chia như sau:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n \text{ chẵn}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n \text{ lẻ}} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nhưng $W_N^2 = W_{N/2}$. Với sự thay đổi này, (4.20) có thể được biểu diễn là:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

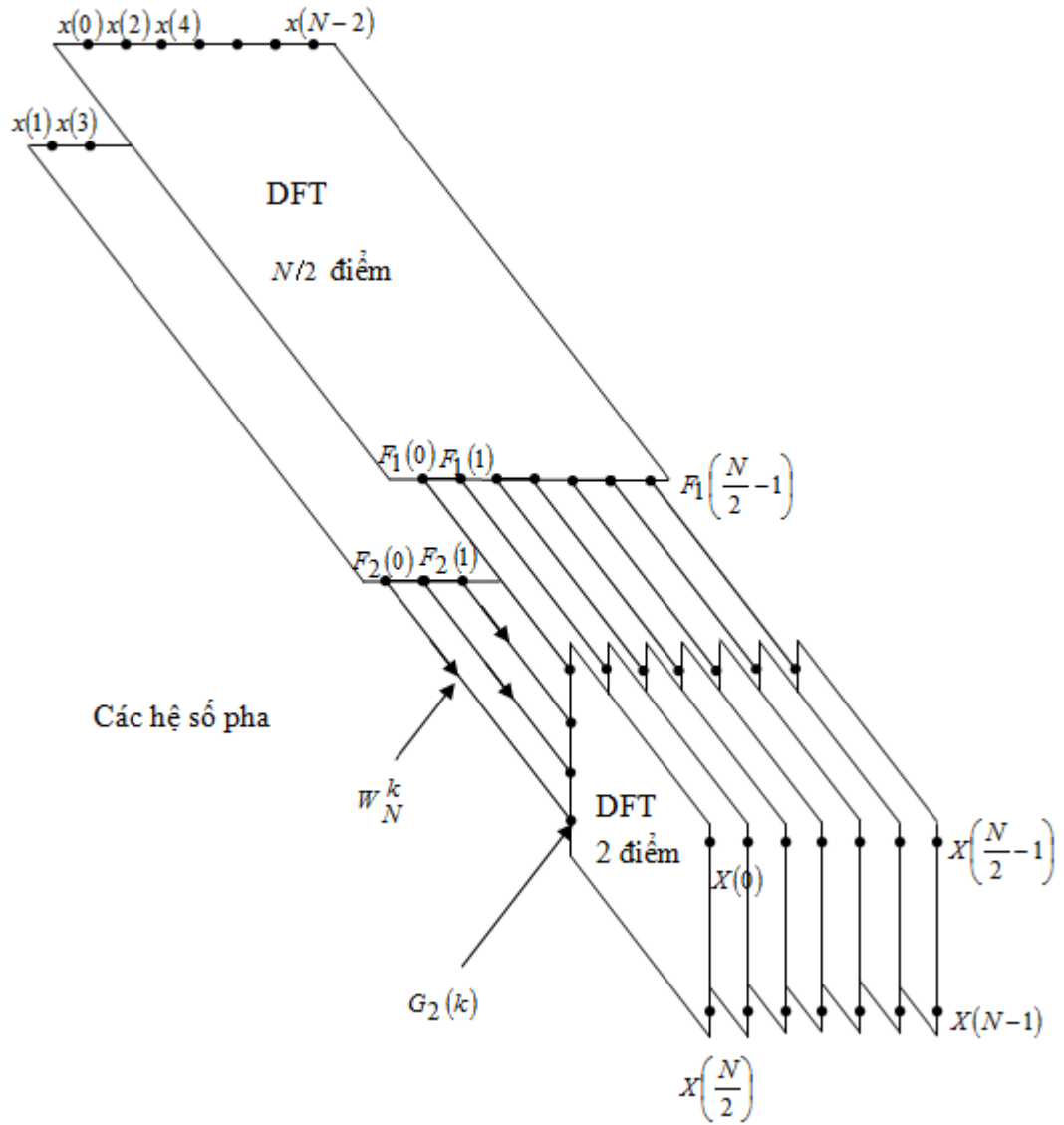
trong đó $F_1(k)$ và $F_2(k)$ là các DFT $N/2$ điểm tương ứng của các dãy $f_1(m)$ và $f_2(m)$.

Vì $F_1(k)$ và $F_2(k)$ là tuần hoàn với chu kỳ $N/2$ nên ta có $F_1(k + N/2) = F_1(k)$ và $F_2(k + N/2) = F_2(k)$. Hơn nữa, ta có $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$. Như vậy, (4.21) có thể viết:

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.22)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.23)$$

Chúng ta thấy rằng việc tính toán trực tiếp $F_1(k)$ cần $(N/2)^2$ phép nhân số phức. Số lượng phép nhân số phức cũng tương tự cho việc tính $F_2(k)$. Thêm nữa để tính toán $W_N^k F_2(k)$ cần $N/2$ phép cộng số phức. Do đó việc tính toán $X(k)$ cần $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$ phép nhân số phức. Trong bước đầu tiên này đã giảm được số phép nhân từ N^2 xuống $N^2/2 + N/2$, mức giảm này cỡ khoảng 2 lần khi N lớn.



Hình 4.17 Mô hình tính FFT

Để thống nhất với các kí hiệu trước đây chúng ta định nghĩa

$$\begin{aligned} G_1(k) &= F_1(k) & k &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ G_2(k) &= W_N^k F_2(k) & k &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

thì DFT $X(k)$ có thể viết là

$$\begin{aligned} X(k) &= G_1(k) + G_2(k) & k &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= G_1(k) - G_2(k) & k &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Việc tính toán này được minh họa trong hình trên.

Chúng ta đã thực hiện việc chia theo thời gian một lần, chúng ta có thể lặp lại quá trình này cho các dãy $f_1(n)$ và $f_2(n)$. Do đó dãy $f_1(n)$ được chia nhỏ thành 2 dãy $N/4$ điểm :

$$\begin{aligned} v_{11}(n) &= f_1(2n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{12}(n) &= f_1(2n+1) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

và $f_2(n)$ cũng được chia thành hai dãy :

$$\begin{aligned} v_{21}(n) &= f_2(2n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{22}(n) &= f_2(2n+1) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bằng cách tính toán các DFT $N/4$ điểm, chúng ta nhận được các DFT $N/2$ điểm $F_1(k)$ và $F_2(k)$ từ các quan hệ :

$$\begin{aligned} F_1(k) &= V_{11}(k) + W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_1\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{11}(k) - W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

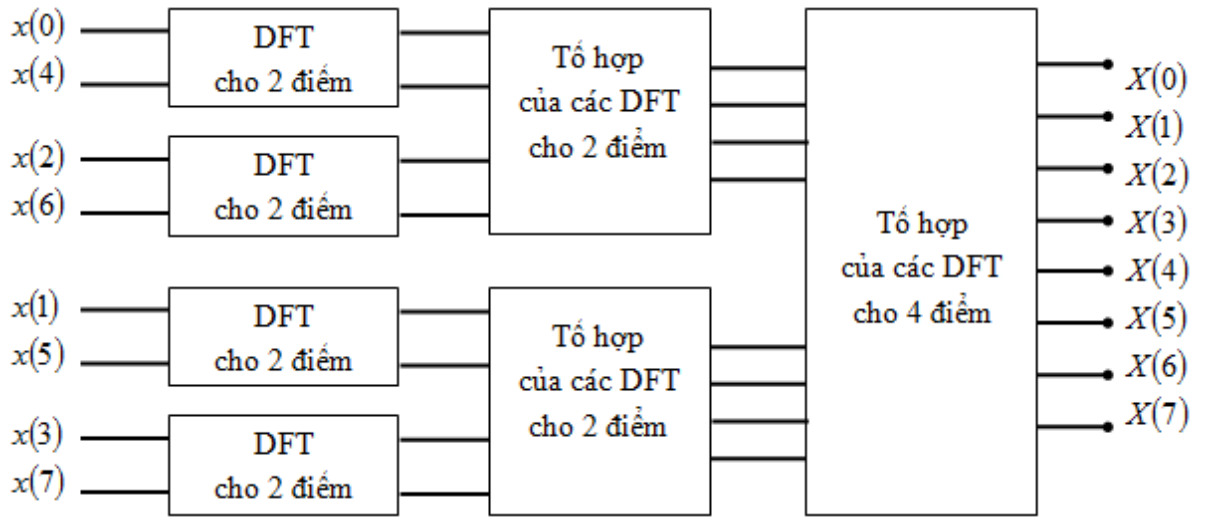
$$\begin{aligned} F_2(k) &= V_{21}(k) + W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_2\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{21}(k) - W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Trong đó $\{V_{ij}(k)\}$ là các DFT của các dãy $\{v_{ij}(n)\}$.

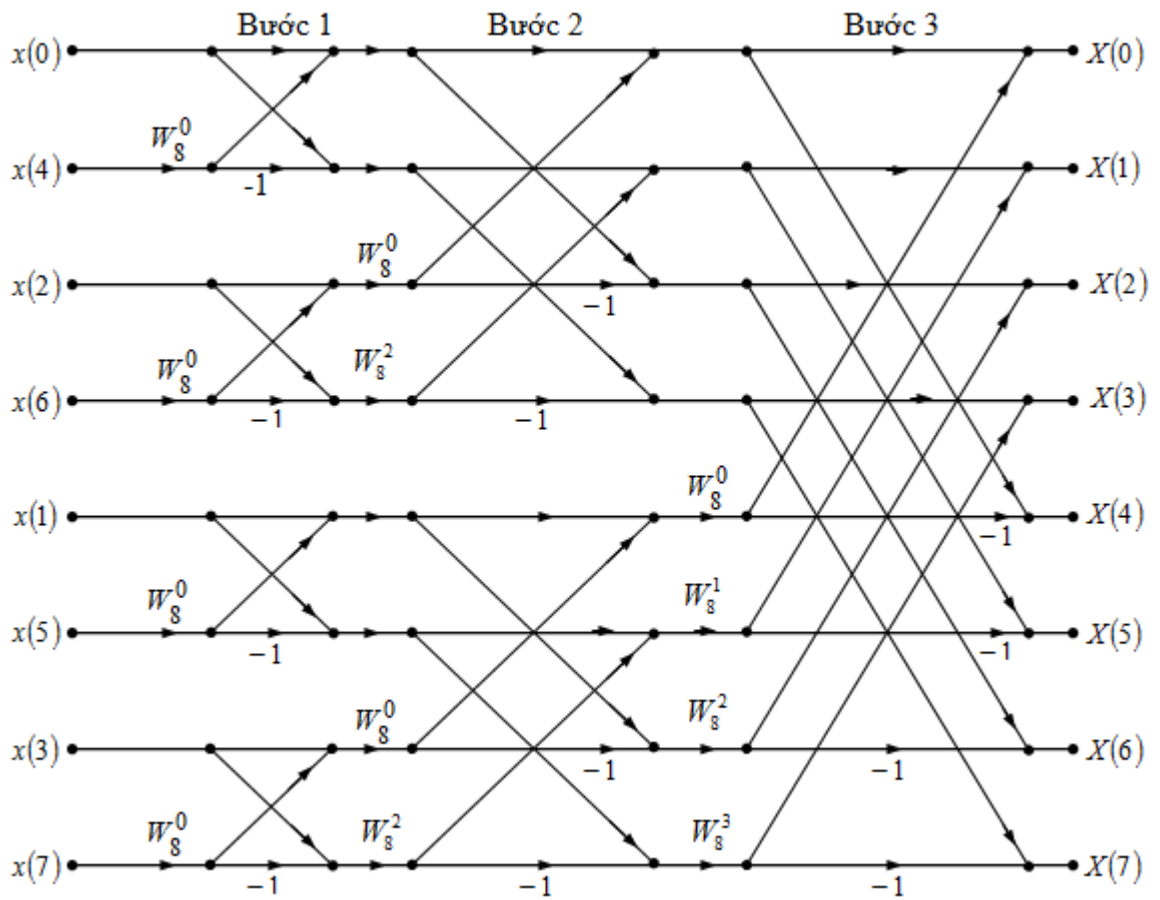
Chúng ta thấy rằng việc tính $\{V_{ij}(k)\}$ cần $4(N/4)^2$ phép nhân và do đó việc tính $F_1(k)$ và $F_2(k)$ có thể được thực hiện bằng $N^2/4 + N/2$ phép nhân số phức. Thêm nữa, cần $N/2$ phép nhân số phức để tính toán $X(k)$ từ $F_1(k)$ và $F_2(k)$. Kết quả là tổng số phép nhân được giảm xuống xấp xỉ 2 lần nữa, xuống còn $N^2/4 + N$.

Việc chia dãy số liệu có thể lại tiếp tục được lặp đi lặp lại cho đến khi dãy cuối cùng được giảm đến còn một điểm. Với $N = 2^v$, việc chia này có thể được thực hiện $v = \log_2 N$ lần. Như vậy tổng số phép nhân số phức được giảm xuống còn $(N/2)\log_2 N$. Và số phép cộng số phức cũng được giảm xuống còn $N \log_2 N$.

Cũng với mục đích minh họa, hình vẽ sau mô tả việc tính toán của một biến đổi DFT $N = 8$ điểm. Ta thấy rằng việc tính toán được thực hiện theo ba mức, đầu tiên là tính 4 DFT 2 điểm, tiếp theo là tính 2 DFT 4 điểm, và cuối cùng là tính một DFT 8 điểm.



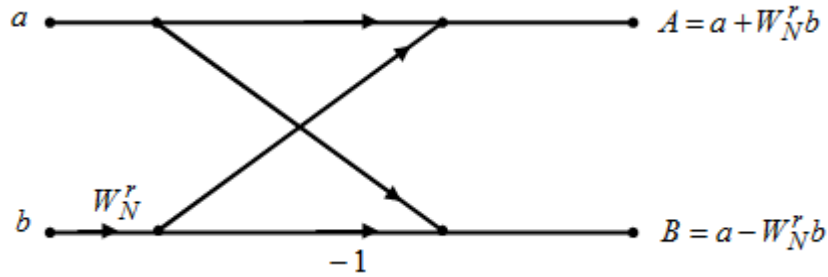
Hình 4.18 Ba giai đoạn tính DFT với $N=8$



Hình 4.19 Thuật toán FFT 8 điểm theo thời gian n

Việc kết hợp các DFT nhỏ hơn thành DFT cấp lớn hơn được minh họa trong hình vẽ với $N = 8$.

Như minh hoạ ta thấy rằng các tính toán cơ bản, được lặp đi lặp lại ở tất cả các bước, phải được tiến hành trên hai số phức, gọi là cặp số (a, b) , nhân b với W_N^r , và sau đó cộng và trừ với tích của a để tạo thành hai số phức mới (A, B) . Theo hình vẽ sau, ta thấy việc tính toán cơ bản này được gọi là một cánh bướm bởi vì lưu đồ đó rất giống một cánh bướm.



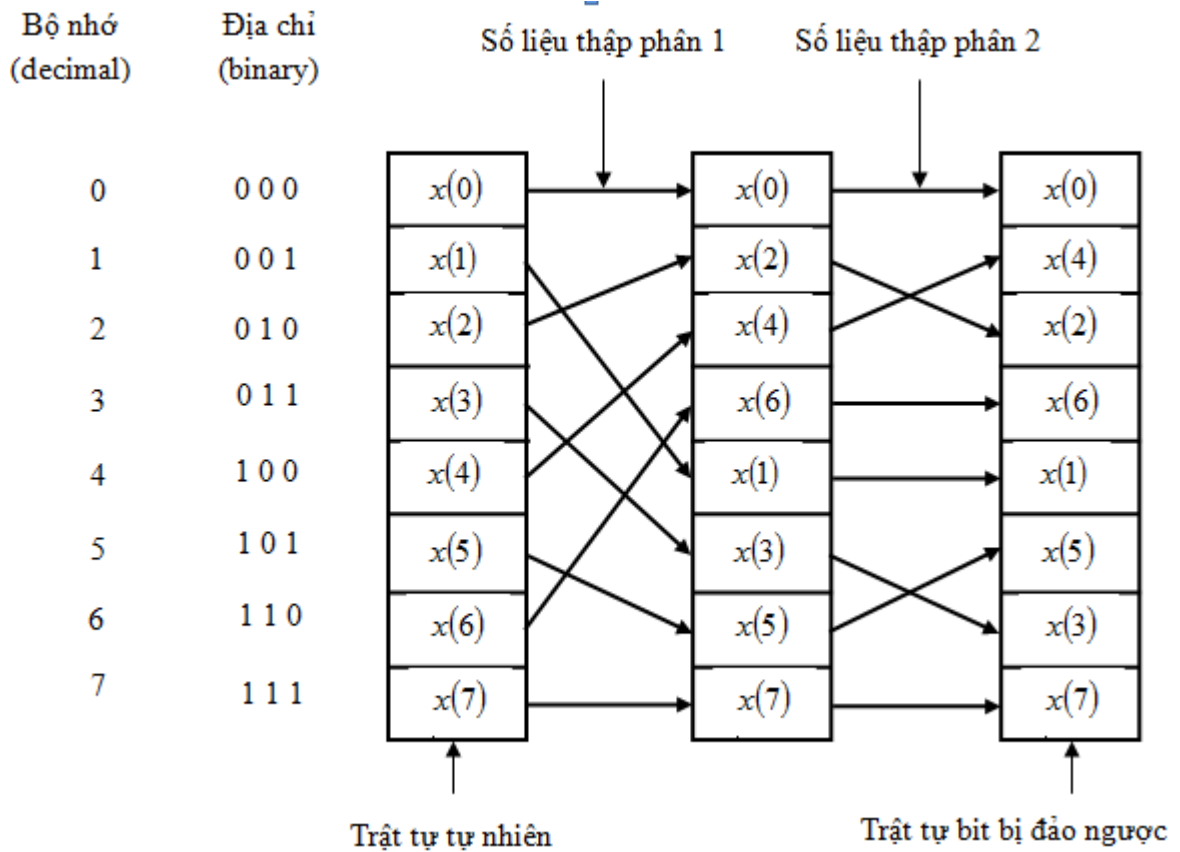
Hình 4.20 Phép tính cánh bướm cơ bản trong FFT thập phân theo thời gian

Thường thì mỗi cánh bướm cần thực hiện một phép nhân số phức và hai phép cộng số phức.

Với $N = 2^v$ thì có $N/2$ cánh bướm cho mỗi bước tính trong quá trình tính toán và có tổng cộng là $\log_2 N$ bước.

Một điểm quan trọng thứ hai cần quan tâm là trật tự của của dãy số liệu đầu vào sau khi nó được chia nhỏ $(v-1)$ lần. Chẳng hạn, nếu chúng ta xem xét trường hợp mà trong đó $N = 8$, thì trong lần chia nhỏ lần đầu tiên chúng ta nhận được dãy $x(0), x(2), x(4), x(6), x(1), x(3), x(5), x(7)$, và trong lần chia nhỏ thứ hai ta nhận được dãy $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$. Sự đảo lộn của dãy tín hiệu đầu vào này có một trật tự hoàn toàn xác định và ta có thể thấy trong hình vẽ dưới đây, nó minh hoạ việc chia nhỏ dãy số liệu đầu vào 8 điểm. Trong dãy $x(n)$, bằng việc biểu thị chỉ số n ở dạng nhị phân, ta dễ dàng tìm thấy trật tự của dãy số liệu được chia nhỏ bằng cách đọc số nhị phân biểu thị chỉ số n theo chiều đảo ngược. Do đó, điểm số liệu $x(3) = x(011)$ được xếp trong vị trí $m = 110$ hoặc $m = 6$ trong mảng số liệu được chia nhỏ. Như vậy, có thể nói rằng dữ liệu $x(n)$ sau khi chia nhỏ được lưu theo trật tự đảo bit.

Với dãy số liệu đầu vào được lưu theo trật tự đảo bit và việc tính toán cánh bướm được thực hiện tại chỗ thì dãy kết quả DFT $X(k)$ nhận được theo trật tự bình thường (nghĩa là $k = 0, 1, \dots, N-1$). Ngược lại, ta có thể sắp xếp thuật toán FFT sao cho dãy đầu vào theo trật tự bình thường và kết quả đầu ra DFT sẽ theo trật tự đảo bit. Hơn nữa, ta có thể sắp đặt để hạn chế cả hai dãy số liệu đầu vào $x(n)$ và dãy đầu ra $X(k)$ theo trật tự bình thường, và như vậy sẽ tạo ra một thuật toán FFT, trong đó việc tính toán không còn được thực hiện tại chỗ nữa. Và do đó thuật toán như vậy phải cần thêm vùng nhớ để lưu trữ.



Hình 4.21 Sắp xếp lại vị trí tín hiệu vào

$(n_2 n_1 n_0) \rightarrow (n_0 n_2 n_1) \rightarrow (n_0 n_1 n_2)$		
(000)	\rightarrow	(000)
(001)	\rightarrow	(100)
(010)	\rightarrow	(001)
(011)	\rightarrow	(101)
(100)	\rightarrow	(010)
(101)	\rightarrow	(110)
(110)	\rightarrow	(011)
(111)	\rightarrow	(111)

Hình 4.22 Tính chất đảo bit

4.4.3. Các dạng khác của thuật toán

Khi số điểm số liệu N trong tính toán DFT là số mũ cơ số 4 (tức là $N = 4^v$), tất nhiên là ta luôn có thể sử dụng thuật toán cơ số 2 để tính toán, nhưng trong trường hợp này, việc tính toán sẽ có hiệu quả hơn khi chúng ta sử dụng thuật toán FFT cơ số 4.

Ta bắt đầu bằng việc mô tả thuật toán FFT cơ số 4 chia theo thời gian, thuật toán nhận được bằng cách lựa chọn $L = 4$ và $M = N/4$. Với lựa chọn này, ta có $l, p = 0, 1, 2, 3; m, q$

$= 0, 1, \dots, N/4 - 1$; $n = 4m + l$; và $k = (N/4)p + q$. Từ đó, ta chia hoặc tách dãy số liệu đầu vào N điểm thành 4 dãy số liệu con $x(4n)$, $x(4n+1)$, $x(4n+2)$, $x(4n+3)$ với

$$n = 0, 1, \dots, N/4 - 1. \text{ Ta có: } X(p, q) = \sum_{l=0}^3 \left[W_N^{lq} F(l, q) \right] W_4^{lp} \quad p = 0, 1, 2, 3 \quad (4.29)$$

trong đó $F(l, q)$ được xác định:

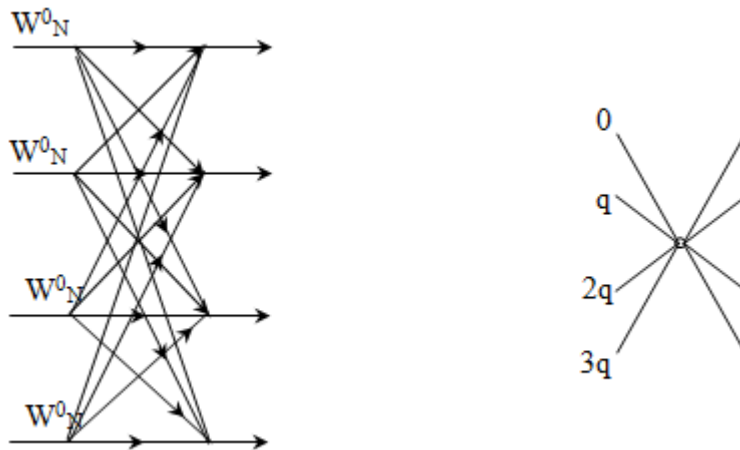
$$F(l, q) = \sum_{m=0}^{(N/4)-1} x(l, m) W_{N/4}^{mq} \quad \begin{matrix} l = 0, 1, 2, 3 \\ q = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{matrix} \quad (4.30)$$

$$\text{và} \quad x(l, m) = x(4m + l) \quad (4.31)$$

$$X(p, q) = X\left(\frac{N}{4} p + q\right) \quad (4.32)$$

Vì thế, 4 DFT $N/4$ điểm nhận được từ (4.30) kết hợp theo (4.29) để tạo thành DFT N điểm. Biểu thức trong (4.29) biểu diễn việc kết hợp các DFT $N/4$ điểm xác định một lưu đồ cánh bướm chia theo thời gian cơ số 4, trong đó có thể biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} X(0, q) \\ X(1, q) \\ X(2, q) \\ X(3, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0, q) \\ W_N^q F(1, q) \\ W_N^{2q} F(2, q) \\ W_N^{3q} F(3, q) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$



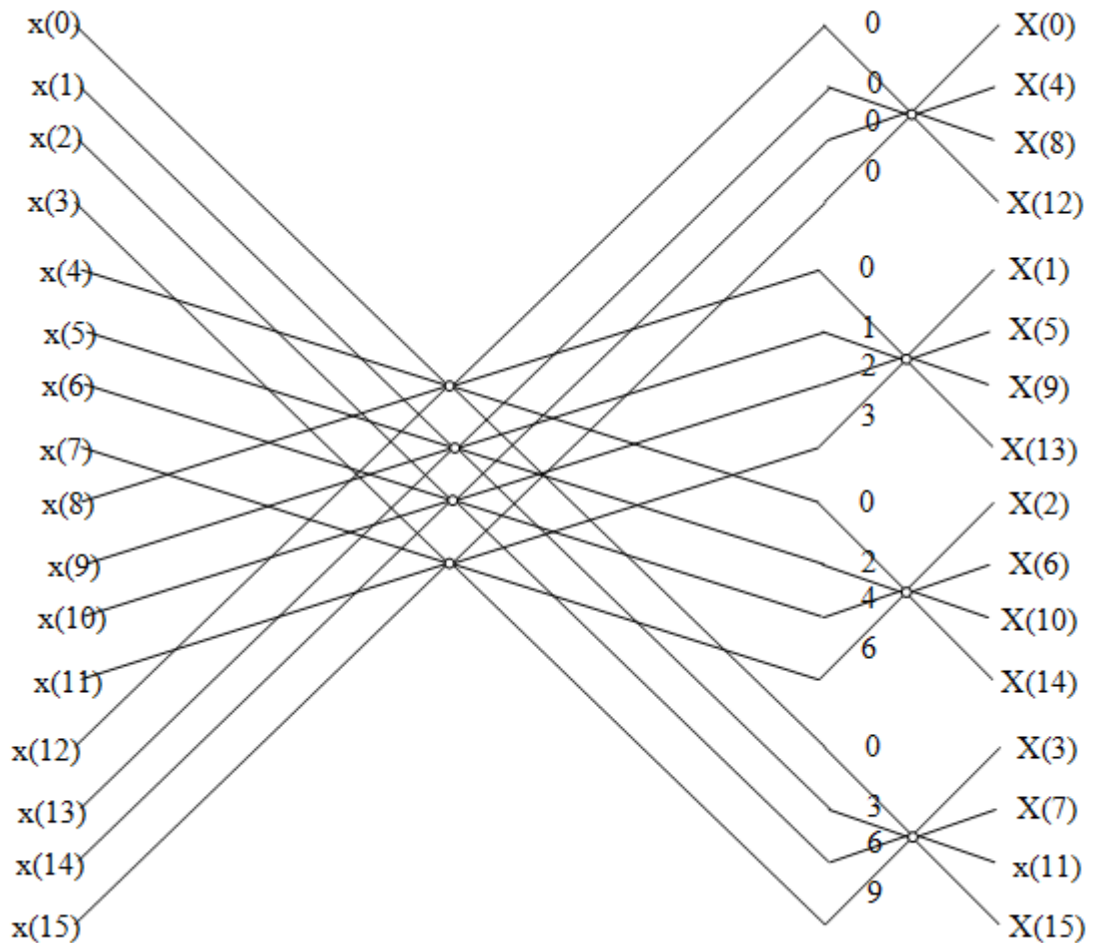
Hình 4.23 Lưu đồ tính toán cánh bướm cơ bản trong FFT cơ số 4

Lưu đồ cánh bướm cơ số 4 và dạng rút gọn được minh họa trong hình vẽ trên đây. Chú ý rằng, do $W_N^0 = 1$ nên mỗi cánh bướm cần 3 phép nhân số phức và 12 phép cộng số phức.

Thuật chia theo thời gian trình bày ở trên có thể được đệ qui v lần. Do đó thuật toán FFT có v bước, trong đó mỗi bước chứa $N/4$ lưu đồ cánh bướm. Kết quả là nhiệm vụ của việc tính toán theo thuật toán này là $3vN/4 = (3N/8)\log_2 N$ phép nhân số phức và $(3N/2)\log_2 N$ phép cộng số phức. Ta thấy rằng số phép nhân được giảm 25%, nhưng số lượng phép cộng lại tăng 50% từ $N\log_2 N$ lên $(3N/2)\log_2 N$.

Tuy nhiên, vẫn đáng chú ý là bằng việc thực hiện các phép cộng theo hai bước, ta có thể giảm số phép cộng của mỗi lưu đồ cánh bướm từ 12 xuống 8. Việc giảm này có thể được thực hiện bằng việc biểu diễn dạng ma trận của chuyển đổi tuyến tính trong (4.33) thành một tích của hai ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} X(0, q) \\ X(1, q) \\ X(2, q) \\ X(3, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0, q) \\ W_N^q F(1, q) \\ W_N^{2q} F(2, q) \\ W_N^{3q} F(3, q) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$



Hình 4.24 Thuật toán phân chia theo thời gian cơ sở 4 cho biến đổi 16 điểm

Bây giờ mỗi phép nhân ma trận cần đến 4 phép cộng, cho toàn bộ hai ma trận là 8 phép cộng. Từ đó tổng số phép cộng số phức được giảm xuống $N\log_2 N$, và số lượng này tương

tự như trong thuật toán FFT cơ sở 2. Tính ưu điểm của thuật toán này chính là ở chỗ giảm được 25% số lượng phép nhân số phức cần phải thực hiện.

Mình hoạ cho thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo thời gian với $N=16$ được trình bày trong hình vẽ trên đây. Chú ý rằng trong thuật toán này dãy số liệu đầu vào có trật tự bình thường còn dãy đầu ra DFT bị đảo trật tự. Trong thuật toán FFT cơ sở 4 việc chia được thực hiện theo hệ số 4 nên trật tự của dãy được chia có thể được xác định bằng việc đảo trật tự của các chỉ số n theo cụm 4 (tức là hệ thống số lập từ các số 0,1,2,3).

4.5. BIẾN ĐỔI FFT NHANH PHÂN THEO TẦN SỐ K

4.5.1. Định nghĩa

Một thuật toán FFT cơ sở 2 khác được gọi là thuật toán chia nhỏ theo tần số, thuật toán này có thể nhận được với việc chọn $M=2$ và $L=N/2$. Lựa chọn các tham số này có nghĩa là việc lưu dãy tín hiệu đầu vào theo kiểu cột. Để tạo ra thuật toán này, ta cũng bắt đầu bằng việc tách công thức tính DFT thành hai tổng, trong đó một tổng liên quan đến việc tính tổng của $N/2$ điểm số liệu đầu tiên và tổng thứ hai liên quan đến việc tính tổng của $N/2$ điểm số liệu còn lại.

Tương tự với các cơ sở khác ta có thuật toán FFT phân theo tần số với cơ sở tương ứng.

4.5.2. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp cơ sở 2

Với việc chọn $M=2$ và $L=N/2$, ta nhận được :

(4.35)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + W_N^{Nk/2} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right)W_N^{kn}$$

Vì $W_N^{kN/2} = (-1)^k$, nên biểu thức (4.35) có thể viết lại như sau :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \quad (4.36)$$

Bây giờ, ta tách (chia nhỏ) $X(k)$ thành các mẫu chẵn và các mẫu lẻ. Khi đó chúng ta

nhận được :

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (4.37)$$

Và

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{kn} \right\} W_{N/2}^k \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (4.38)$$

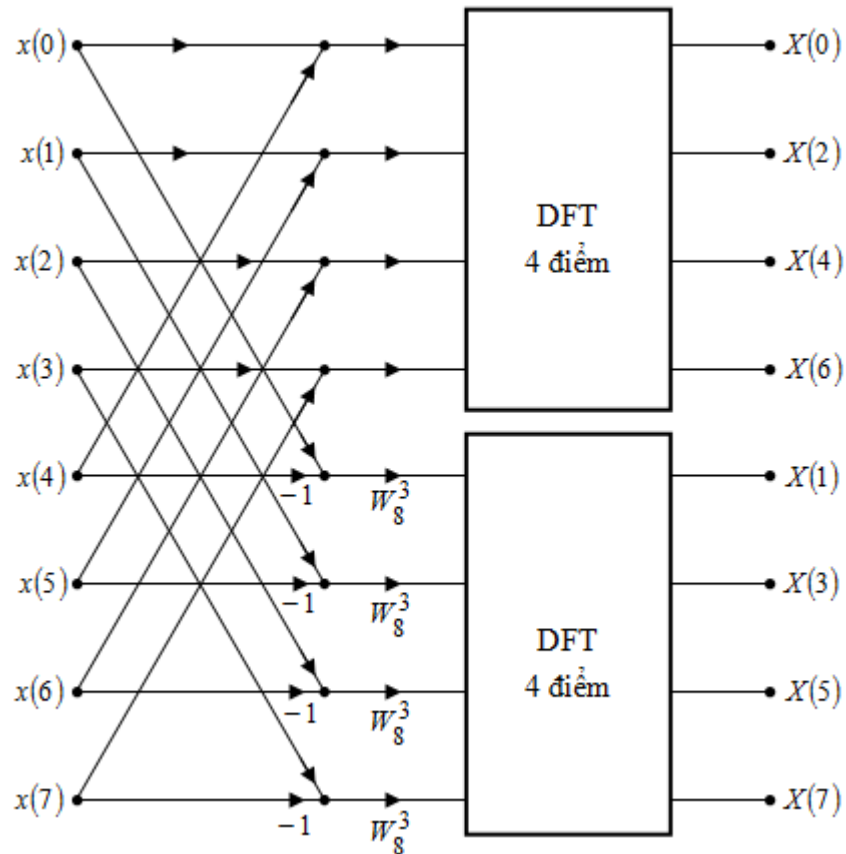
ở đây sử dụng nhận xét $W_N^2 = W_{N/2}$.

Nếu định nghĩa các dãy $N/2$ điểm $g_1(n)$ và $g_2(n)$ như sau :

$$\begin{aligned} g_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ g_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Khi đó thì:

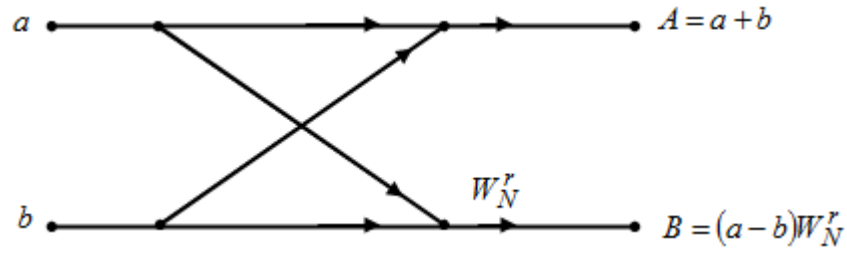
$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n) W_{N/2}^{kn} \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n) W_{N/2}^{kn} \end{aligned} \quad (4.40)$$



Hình 4.25 FFT theo tần số

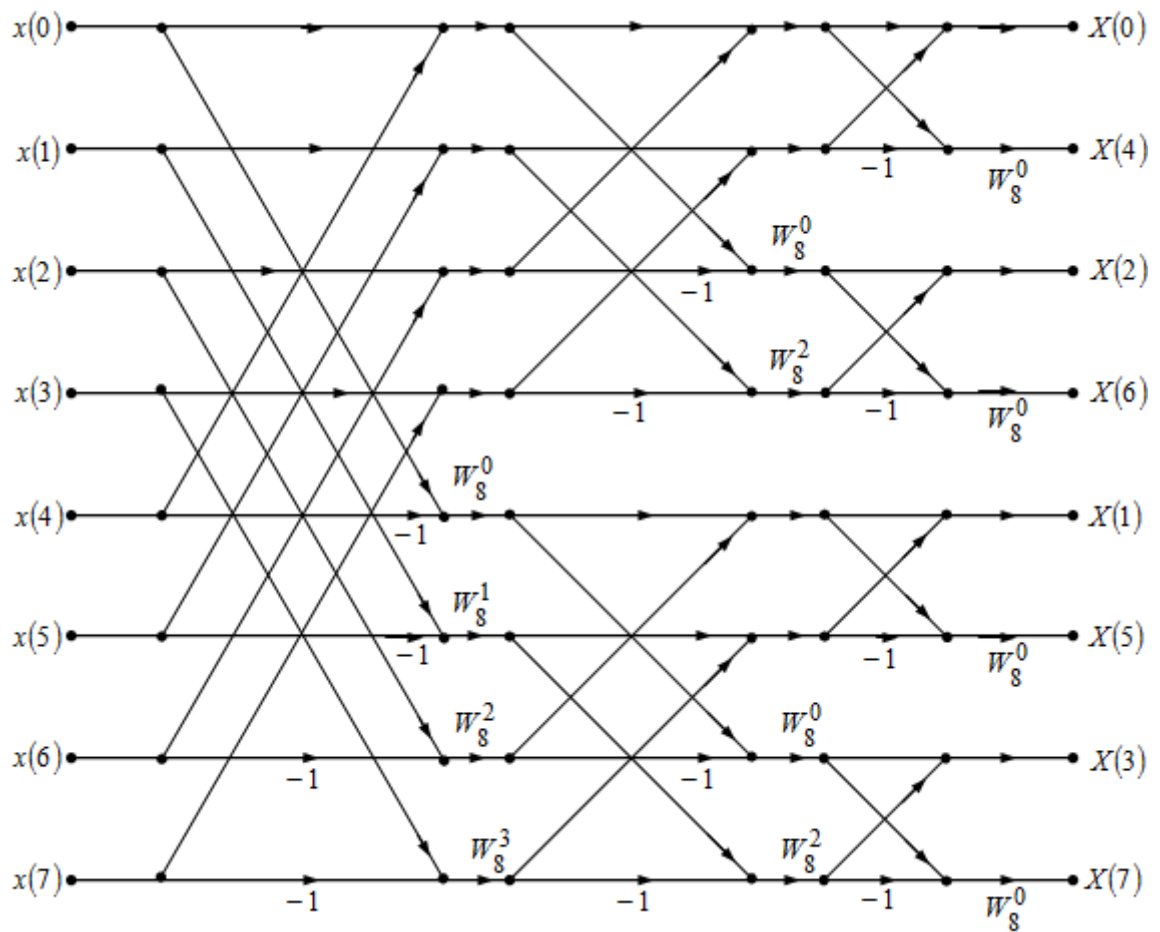
Việc tính toán các dãy $g_1(n)$ và $g_2(n)$ theo công thức (4.39) và tiếp đến sử dụng những dãy này để tính toán các DFT $N/2$ điểm được mô tả trong hình vẽ sau đây. Chúng ta thấy

rằng việc tính toán cơ bản trong minh họa này có liên quan đến việc thực hiện cánh bướm được trình bày trong hình vẽ kế tiếp.



Hình 4.26 Phép tính cánh bướm cơ bản trong thuật toán FFT chia theo tần số

Thủ tục tính toán ở trên có thể được lặp đi lặp lại qua việc chia nhỏ của các DFT $N/2$ điểm của các dãy $X(2k)$ và $X(2k+1)$. Toàn bộ quá trình cần $v = \log_2 N$ bước chia nhỏ, trong đó mỗi bước cần $N/2$ cánh bướm như trình bày trong hình trên. Kết quả là việc tính toán DFT N điểm qua thuật toán FFT chia theo tần số cần $(N/2)\log_2 N$ phép nhân số phức và $N\log_2 N$ phép cộng số phức, và cũng giống như với thuật toán FFT chia theo thời gian. Thuật toán FFT chia theo tần số 8 điểm được minh họa trong hình vẽ dưới đây.



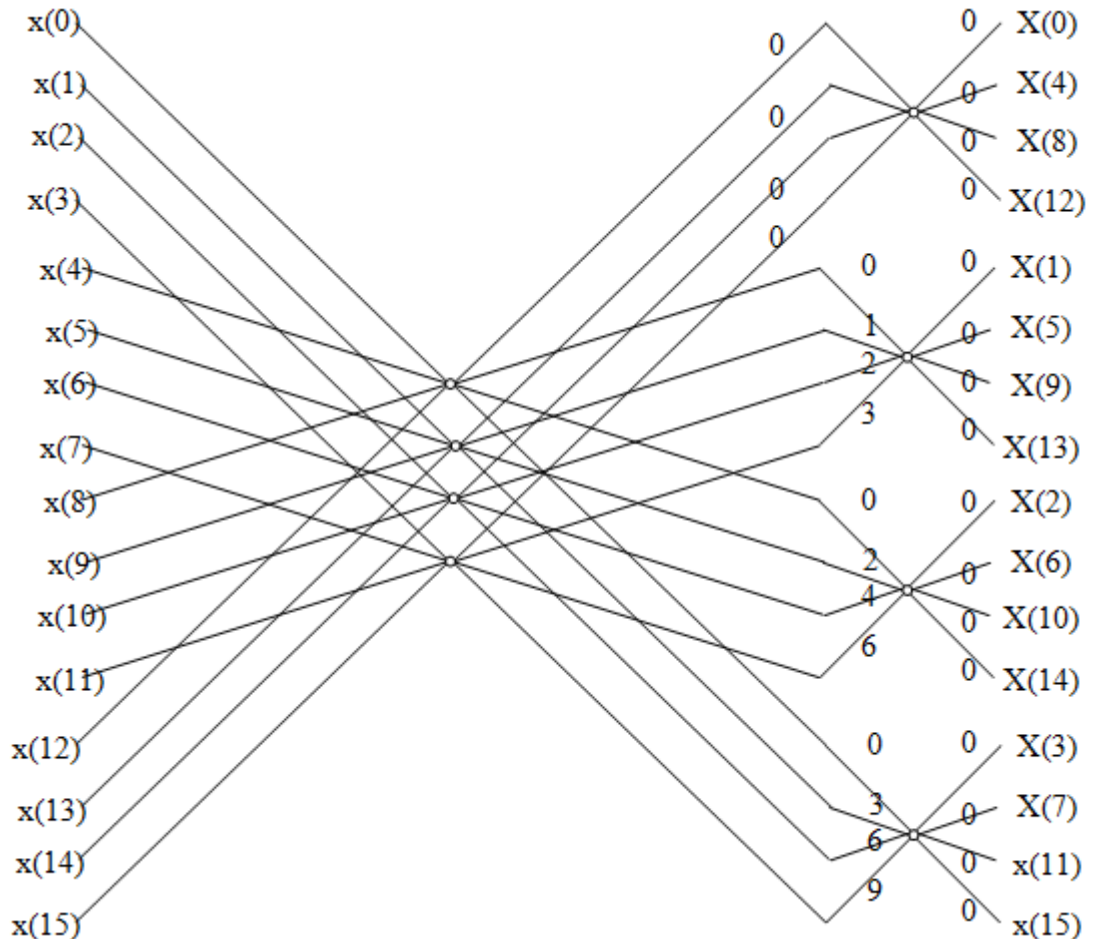
Hình 4.27 Thuật toán FFT điểm chia theo tần số

Từ hình vẽ, ta thấy rằng dãy số liệu đầu vào theo trật tự bình thường nhưng dãy số liệu đầu ra có trật tự bị đảo ngược. Ta cũng thấy rằng, các tính toán được thực hiện tại chỗ. Tuy nhiên, có thể tổ chức lại thuật toán FFT chia theo tần số sao cho dãy số liệu đầu vào có trật tự bị đảo ngược trong khi đó đầu ra DFT có trật tự bình thường. Hơn nữa, nếu chúng ta không quan tâm đến việc tính toán cần phải thực hiện tại chỗ thì chúng ta có thể cho phép cả hai dãy số liệu đầu vào và đầu ra DFT theo trật tự bình thường.

4.5.3. Các dạng khác của thuật toán

Thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo tần số có thể nhận được bằng việc lựa chọn $l = N/4, M = 4, l; p = 0, 1, \dots, N/4 - 1; m, q = 0, 1, 2, 3; n = (N/4)m + l$ và $k = 4p + q$. Với việc lựa chọn các tham số này biểu thức tổng quát có thể viết là :

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G(l, q) W_{N/4}^{lp} \quad (4.41)$$



Hình 4.28 Thuật toán phân chia theo tần số cơ sở 4 cho biến đổi 16 điểm

trong đó :

$$G(l, q) = W_N^{lq} F(l, q) \quad \begin{matrix} q = 0, 1, 2, 3 \\ l = 0, 1, \dots, (N/4) - 1 \end{matrix} \quad (4.42)$$

$$\text{và :} \quad F(l, q) = \sum_{m=0}^3 x(l, m) W_4^{mq} \quad q = 0, 1, 2, 3 \quad (4.43)$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, (N/4) - 1$$

Ta chú ý rằng $X(p, q) = X(4p + q)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Kết quả là DFT N điểm được chia nhỏ thành 4 DFT $N/4$ điểm và như vậy là ta đã có một thuật toán chia theo tần số. Các tính toán trên định ra lưu đồ cánh bướm cơ sở 4 cơ sở của thuật toán chia theo tần số. Chú ý rằng tương tự như thuật toán FFT cơ sở 2 chia theo tần số, các phép nhân với hệ số W_N^{lq} xảy ra sau việc kết hợp các điểm số liệu $x(l, m)$.

Một thuật toán cơ sở 4 chia theo tần số thực hiện với 16 điểm được trình bày trong hình vẽ trên đây. Trong đó đầu vào của thuật toán này có trật tự bình thường còn đầu ra của nó có trật tự đảo ngược. Thuật toán này cũng có cùng độ phức tạp như với thuật toán chia theo thời gian.

4.6. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP

Trong chương này, chúng ta đã làm quen với phép biến đổi Fourier rời rạc DFT, đây là một trong những nội dung quan trọng của xử lý tín hiệu số vì nó là nền tảng cho các thuật toán tính toán nhanh như biến đổi Fourier nhanh FFT giúp cho tốc độ tính toán của các chip DSP cải thiện đáng kể.

Các kiến thức trong chương này cần lưu ý bao gồm:

1. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N .

Biến đổi DFT

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

Biến đổi ngược IDFT

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Lưu ý:

- $\tilde{X}(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N .

- Đặc điểm nổi bật của DFT là biến đổi xuôi và ngược tương đương như nhau, chỉ khác nhau về hệ số $1/N$ và dấu ở số mũ, hay nói cách khác biến đổi xuôi và ngược là cùng thuật toán.

2. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N.

Đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N (ký hiệu là $x(n)_N$), để biến đổi được DFT người coi nó là 1 chu kỳ của 1 dãy tuần hoàn, do vậy thực hiện được biến đổi DFT và sau đó lấy kết quả trong một chu kỳ. Cụ thể biến đổi DFT đối với dãy có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

Biến đổi DFT

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

Biến đổi IDFT

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

3. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc DFT

Trong phần này chúng ta nên lưu ý để phân biệt một số khái niệm:

Các ký hiệu:

- $x(n)_N$: tín hiệu $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N.
- $\tilde{x}(n)_N$: tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N.
- Phân biệt rõ $x(n)_N \neq x(n)$.

Các tính chất:

Phân biệt rõ các khái niệm trễ tuyến tính, trễ tuần hoàn, trễ vòng đặc biệt là phân biệt 3 khái niệm:

- Phép chập tuyến tính $x_1(n) * x_2(n)$
- Phép chập tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)_N (\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n)_N$
- Phép chập vòng $x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$

Từ đây ta thấy, kết quả của phép chập tuyến tính giữa hai tín hiệu có chiều dài hữu hạn $x_1(n)$ có chiều dài N_1 , $x_2(n)$ có chiều dài N_2 đã học trong chương 1 có thể tính được thông qua biến đổi DFT nếu chiều dài thực hiện DFT $N \geq N_1 + N_2 - 1$. Như vậy việc thực hiện phép chập sẽ dễ dàng hơn vì biến đổi DFT và IDFT được thực hiện cùng một thuật toán.

4. Thực hiện phép chập nhanh và các thuật toán FFT

Chúng ta lưu ý rằng, trên thực tế các dãy tín hiệu đầu vào bao giờ cũng có chiều dài lớn hơn nhiều so với chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ cho nên để tính toán xác định đầu ra của hệ thống với hiệu năng tính toán cao ta có thể chia tín hiệu vào $x(n)$ thành các dãy con $x_i(n)$ có chiều dài phù hợp với đáp ứng xung của hệ thống.

$$x(n) = \sum_i x_i(n)$$

Tiếp theo, ta thực hiện phép chập $x_i(n) * h(n)$ thông qua biến đổi DFT thu được kết quả $y_i(n)$, ở đây, thông thường ta chọn chiều dài thực hiện DFT có dạng cơ số 2, 2^r để tính toán nhanh. Sau đó, đầu ra của hệ thống $y(n)$ sẽ là hợp của các $y_i(n)$

$$y(n) = \sum_i y_i(n)$$

Bằng các thuật toán FFT theo n và k ta có thể thực hiện công việc tính DFT nhanh hơn với độ phức tạp thuật toán tối ưu hơn. Các thuật toán FFT phân tần số và FFT phân thời gian theo đồ hình cánh bướm có số lượng các bước giống hệt nhau, vì vậy số phép toán bao gồm phép nhân và cộng là như nhau dẫn đến hiệu quả của thuật toán là như nhau.

Đối với thuật toán FFT phân tần số đầu vào của đồ hình cánh bướm sẽ sắp xếp thứ tự theo mã nhị phân tự nhiên, còn đầu ra của nó sẽ sắp xếp theo luật đảo bit của đầu vào. Còn đối với thuật toán FFT phân thời gian thì ngược lại, dãy ra thì sắp xếp theo quy luật mã nhị phân tự nhiên, còn dãy vào sắp xếp theo quy luật đảo bit.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 4. 1

Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & 6 \leq n \leq 11 \end{cases} \quad \text{chu kỳ } N = 12.$$

Hãy xác định $\tilde{X}(k)$.

Bài 4. 2

Cho dãy tuần hoàn chu kỳ 4 như sau:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 4 & n=2 \\ 3 & n=4 \end{cases} \quad \text{hãy xác định } \tilde{X}(k)$$

Bài 4. 3

Cho:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 4 & n=0 \\ 3 & n=1 \\ 2 & n=2 \\ 1 & n=4 \end{cases} \quad \text{hãy xác định } \tilde{X}(k)$$

Bài 4. 4

Cho tín hiệu có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy tính biến đổi DFT của dãy $x(n)$ có chiều dài N với $N \geq L$

Bài 4. 5

Hãy chứng minh:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n.r} = \begin{cases} N & r = l.N \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

l : nguyên

Bài 4. 6

Cho hai dãy

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy xác định phép chập vòng của 2 dãy trên

Bài 4. 7

Biến đổi DFT của một tín hiệu tuần hoàn chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ sẽ là:

$$a) \tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$b) \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$c) \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$d) \tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Bài 4. 8

Biến đổi ngược IDFT của một tín hiệu $\tilde{X}(k)$ chu kỳ N sẽ là:

$$a) \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$b) \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$c) \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$d) \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Bài 4. 9

Cặp biến đổi xuôi, ngược DFT đối với dãy có chiều dài $x(n)_N$ sẽ là:

$$a) X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$b) X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$c) X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$d) X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Bài 4. 10

Ta có thể tính phép chập tuyến tính hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ có chiều dài $L[x_1(n)] = N_1$ và $L[x_2(n)] = N_2$ thông qua biến đổi DFT nếu ta chọn chiều dài thực hiện biến đổi DFT là:

$$a) N \geq N_1 + N_2 - 1$$

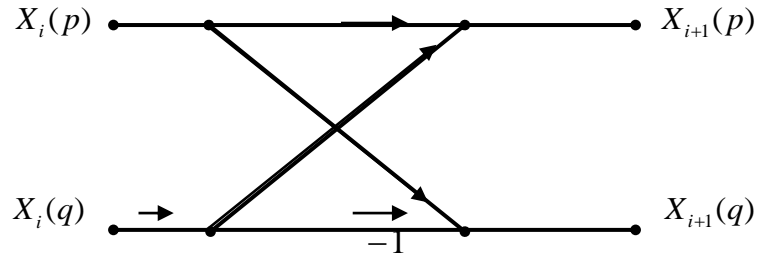
$$b) N \leq N_1 + N_2 - 1$$

c) $N < N_1 + N_2 - 1$

d) $N > N_1 + N_2 - 1$

Bài 4.11

Hãy chứng minh rằng với đồ hình dạng cánh bướm như sau:



Hình 4.29 Hình bài 4.11

Ta có: $\text{Re}|X_{i+1}(p)| < 1;$ $\text{Re}|X_{i+1}(p+1)| < 1$
 $\text{Re}|X_{i+1}(q)| < 1;$ $\text{Re}|X_{i+1}(q+1)| < 1$

Nếu: $|X_i(p)| < \frac{1}{2}$ và $|X_i(q)| < \frac{1}{2}$

CHƯƠNG 5. BỘ LỌC SỐ

5.1. MỞ ĐẦU

Lọc số là một trong những kỹ thuật phổ biến của xử lý tín hiệu số. Cùng với sự phát triển rực rỡ của công nghệ vi mạch điện tử số đã làm tăng hiệu quả của các bộ lọc số, các hệ thống số, giúp tối ưu được các tham số của bộ lọc. Ta hãy xem xét khái niệm của về lọc số và bộ lọc số:

- **Định nghĩa Bộ lọc số:** Một hệ thống dùng làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.

- **Khái niệm về lọc số:** Các thao tác của xử lý dùng để biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho nhờ một hệ thống số được gọi là sự lọc số.

Trong chương này chúng ta tìm hiểu về các bộ lọc số lý tưởng có đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài vô hạn và không nhân quả tức là các bộ lọc số lý tưởng là các hệ thống không nhân quả cho nên nó không thể thực hiện được trong thực tế.

Vì vậy, chúng ta sẽ xét các phương pháp tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn FIR (Finite Impulse Response) với mục đích là dựa trên các bộ lọc số lý tưởng để xây dựng các bộ lọc số thực tế có đáp ứng xung là nhân quả và có chiều dài hữu hạn, ở đây ta giới hạn các bộ lọc này có pha tuyến tính.

Cũng giống như bộ lọc FIR, người ta thường dùng một số phương pháp tổng hợp bộ lọc IIR có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn (IIR: Infinite Impulse Response). Phương pháp sẽ được trình bày ở chương này là biến đổi từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số theo các phép ánh xạ.

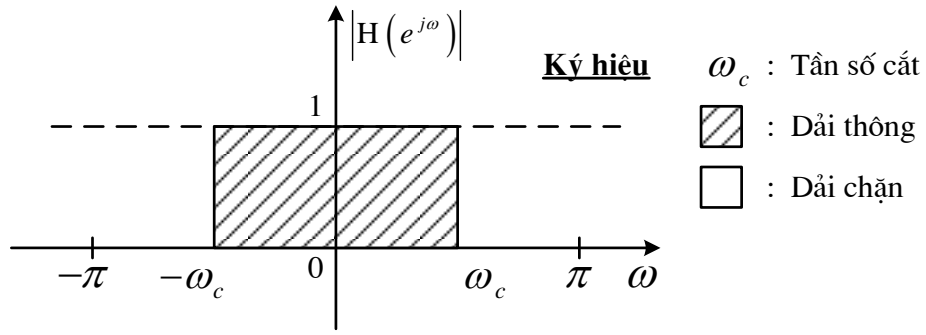
5.2. BỘ LỌC SỐ LÝ TƯỞNG

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu các bộ lọc số lý tưởng: thông thấp, thông cao, thông dải, chắn dải, đây là những nội dung quan trọng làm tiền đề cho việc tổng hợp các bộ lọc số trên thực tế sẽ học ở các chương sau. Việc định nghĩa các bộ lọc số lý tưởng sẽ dựa vào đáp ứng biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ mà không cần quan tâm đến pha.

5.2.1. Bộ lọc thông thấp lý tưởng (Low pass Filter)

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:



Hình 5.1 Bộ lọc thông thấp lý tưởng

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (5.1)$$

Sau đây ta sẽ xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thông thấp pha 0.

Ví dụ 5.1

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không ($\theta(\omega) = 0$):

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Hãy tìm $h(n)$ và vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{3}$.

Giải:

Ta thấy rằng $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$ đây là bộ lọc pha 0 (tức $\theta(\omega) = 0$)

Sử dụng biến đổi Fourier ngược ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n$$

Dạng $\frac{0}{0}$ nên biến đổi tiếp thành dạng:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad \text{Vẽ với } \omega_c = \frac{\pi}{3}, \text{ ta có:} \quad h(n) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n}$$

$$n = 0: \quad h(0) = \frac{1}{3}$$

$$n = 1: \quad h(1) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = h(-1)$$

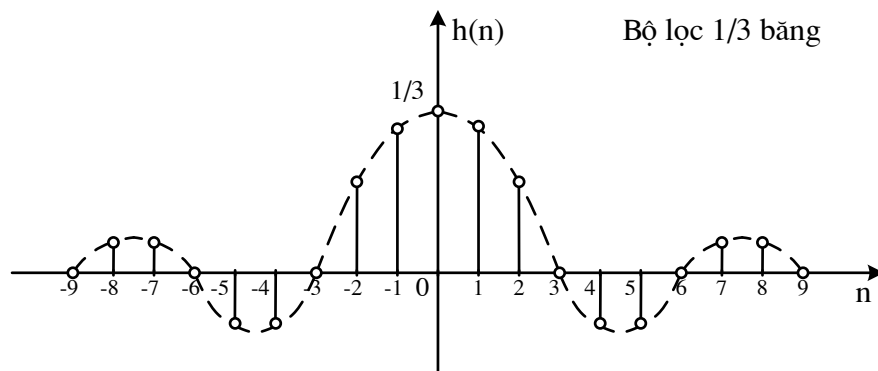
$$n = 2: \quad h(2) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 2}{\frac{\pi}{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = h(-2)$$

$$n = 3: \quad h(3) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 3}{\frac{\pi}{3} \cdot 3} = 0 = h(-3)$$

$$n = 4: \quad h(4) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 4}{\frac{\pi}{3} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} = h(-4)$$

$$n = 5: \quad h(5) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 5}{\frac{\pi}{3} \cdot 5} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi} = h(-5)$$

$$n = 6: \quad h(6) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 6}{\frac{\pi}{3} \cdot 6} = 0 = h(-6)$$



Hình 5.2 Đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp lý tưởng

Nhận xét:

Tất cả các bộ lọc có tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ (M: nguyên dương) gọi là bộ lọc Nyquist vì tại các điểm là bội của M các mẫu đều bằng 0.

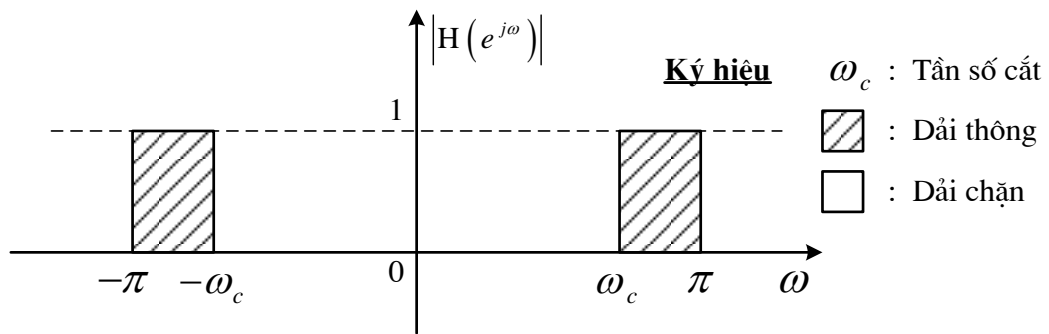
Nhưng bộ lọc này không thực hiện được trên thực tế vì đáp ứng xung $h(n)$ không nhân quả và có chiều dài vô hạn.

Khi thiết kế bộ lọc số thực tế, người ta phải rời đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng theo tâm đối xứng sang bên phải sau đó cắt đi phần âm (phần không nhân quả) để $h(n)$ lúc này thành nhân quả và có chiều dài hữu hạn. Lưu ý khi cắt đi sẽ gây hiện tượng gợn sóng trong miền tần số, gây nên hiện tượng Gibbs.

5.2.2. Bộ lọc thông cao lý tưởng (High pass Filter)

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:



Hình 5.3 Bộ lọc thông cao lý tưởng

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (5.2)$$

Ví dụ 5.2

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Hãy tìm $h(n)$ và vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{3}$.

Giải:

Áp dụng công thức IFT ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\sin \pi n}{\pi n}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}}$$

Ta thấy:

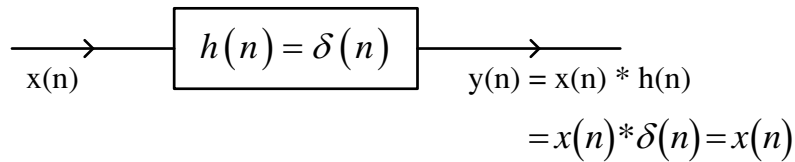
$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} = \delta(n) \text{ vì giá trị tại } n=0 \text{ thì bằng } 1, \text{ còn với các giá trị } n \text{ khác thì bằng } 0.$$

Do vậy ta xác định được

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n},$$

Ở đây, $\delta(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc thông tắt pha 0 (ví dụ như một dây dẫn tín hiệu) vì chúng cho tất cả các tín hiệu đi qua với mọi tần số. Lưu ý rằng $\delta(n)$ chập với một tín hiệu nào thì cũng chính bằng tín hiệu đó. $\delta(n) * x(n) = x(n)$.

Như vậy ta thấy rằng, đáp ứng xung của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không bằng đáp ứng xung của bộ lọc thông tắt trừ đi đáp ứng xung bộ lọc thông thấp với điều kiện pha không.



Hình 5.4 Mô hình hệ thống tuyến tính bất biến

$$h_{Hp}(n) = h_{Ap}(n) - h_{Lp}(n)$$

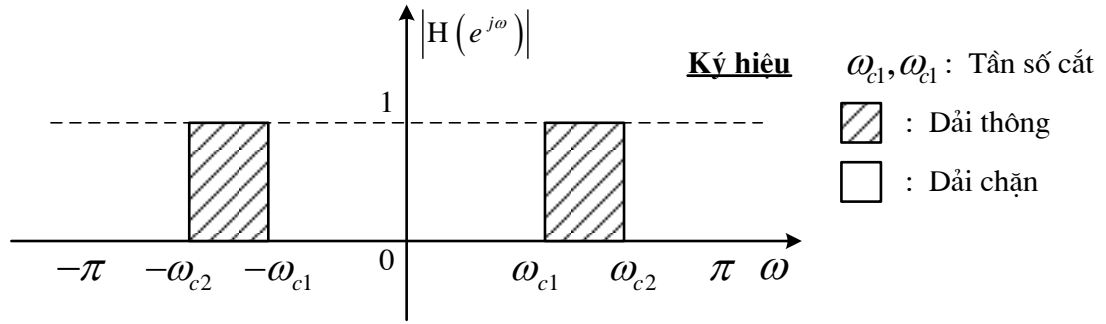
High pass = All pass – Low pass (Thông cao = Thông tắt – Thông thấp).

5.2.3. Bộ lọc thông dải lý tưởng (Band pass Filter)

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ 0 & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \text{ , } \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (5.3)$$



Hình 5.5 Bộ lọc thông dải lý tưởng

Ví dụ 5.3

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases}, \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Hãy xác định $h(n)$.

Giải:

Ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n}} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}}$$

$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

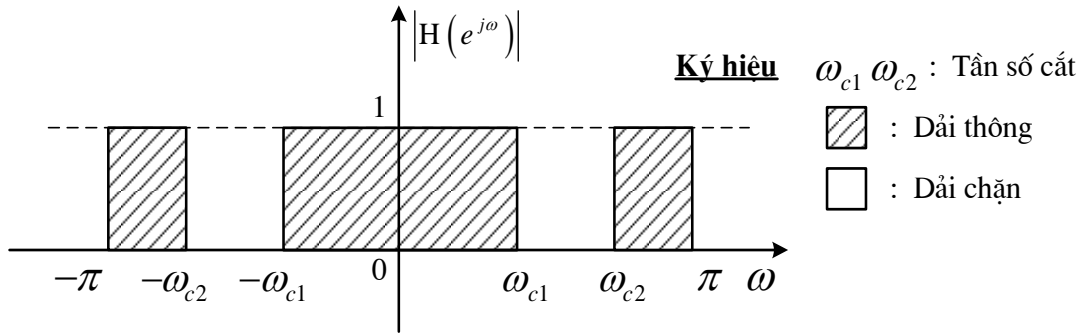
Ta thấy $h_{BP}(n) = h_{AP}(n) - h_{LP}(n) - h_{HP}(n)$

5.2.4. Bộ lọc chặn dải lý tưởng (Band stop Filter)

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chặn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (5.4)$$



Hình 5.6 Bộ lọc chặn dải lý tưởng

Ví dụ 5.4

Cho:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases}, \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Tìm $h(n)$. Vẽ $h(n)$ với $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$.

Giải:

Áp dụng các kết quả đã tính của các bộ lọc lý tưởng trên đây, ta có:

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$\text{Ta thấy } h_{BS}(n) = h_{LP}(n) + h_{HP}(n)$$

5.2.5. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế

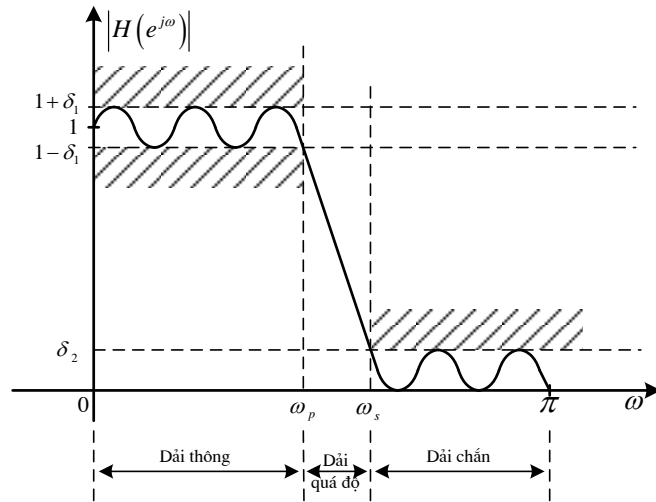
Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế được thể hiện trong hình vẽ sau, ta lưu ý ở đây ta lấy bộ lọc số thông thấp làm ví dụ (các bộ lọc khác cũng tương tự) và thể hiện đáp ứng biên độ của nó trong dải từ 0 đến π , dải từ $-\pi$ đến 0 lấy đối xứng tương tự sang.

Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

- + Tần số giới hạn dải thông ω_P + Độ gợn sóng dải thông δ_1
- + Tần số giới hạn dải thông ω_S + Độ gợn sóng dải thông δ_2

Về mặt lý tưởng các độ gợn sóng dải thông, dải chặn càng nhỏ càng tốt, tần số giới hạn dải thông và dải chặn càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt. Tuy nhiên trên thực

tế đây là các tham số nghịch nhau (độ gợn sóng nhỏ thì dải quá độ phải lớn và ngược lại) nên việc giải quyết bài toán cho các tham số cùng nhỏ gặp nhiều khó khăn, ta phải áp dụng tính tối ưu với từng yêu cầu cụ thể của bài toán thiết kế bộ lọc.



Hình 5.7 Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế thông thấp và các tham số

5.3. BỘ LỌC SỐ FIR

5.3.1. Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Ta có khi bộ lọc số FIR có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn nghĩa là:

$$L[h(n)] = [0, N-1] = N \quad (5.5)$$

Nếu biểu diễn trong miền z ta có hàm truyền đạt của bộ lọc số pha tuyến tính theo định nghĩa biến đổi z sẽ có dạng:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (5.6)$$

Nếu biểu diễn trong miền tần số ω theo biến đổi Fourier ta có đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (5.7)$$

Mặt khác trong miền tần số ω khi biểu diễn đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ theo độ lớn và pha ta có:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \quad (5.8)$$

Do pha $\theta(\omega)$ tuyến tính nên ta giả sử pha có dạng theo phương trình tuyến tính như sau

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (5.9)$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có nghĩa là xác định đáp ứng biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc số và xét xem với đáp ứng biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ tìm được có thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật bộ lọc số đặt ra hay không.

Đối với bộ lọc số FIR pha tuyến tính, căn cứ vào dạng pha đã cho ở (5.5) ta sẽ nghiên cứu hai trường hợp:

$$1. \text{ Trường hợp 1. } \beta = 0 \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$2. \text{ Trường hợp 2. } \beta \neq 0 \Rightarrow \theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\text{Trường hợp 1: } \beta = 0 \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Ta có theo (5.3):

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) (\cos \omega n + j \sin \omega n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n + j \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mặt khác theo sự biểu diễn (5.4) và thay $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ ta có:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) (\cos \alpha\omega - j \sin \alpha\omega) \\ &= A(e^{j\omega}) \cos \alpha\omega - j A(e^{j\omega}) \sin \alpha\omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

Đồng nhất (5.6) và (5.7) ta thấy đây là 2 số phức, muốn bằng nhau thì phần thực phải bằng phần thực và phần ảo phải bằng phần ảo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n &= A(e^{j\omega}) \cos \alpha\omega \\ \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n &= A(e^{j\omega}) \sin \alpha\omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Từ (5.8) ta chia hai biểu thức cho nhau khử $A(e^{j\omega})$ rồi áp dụng các biến đổi lượng giác rút ra được kết luận:

Trong trường hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có pha ở dạng $\theta(\omega) = -\alpha\omega$, bộ lọc sẽ có quan hệ sau:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{N-1}{2} \\ h(n) &= h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)\end{aligned}\tag{5.13}$$

- Ở đây $\alpha = \frac{N-1}{2}$ được gọi là tâm đối xứng của bộ lọc FIR.
- Khi $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại I, $h(n)$ đối xứng.
- Khi $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại II, $h(n)$ đối xứng.

Trường hợp 2. $\beta \neq 0 \Rightarrow \theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

Tiến hành phân tích tương tự như trường hợp 1 ta rút ra được kết luận:

Trong trường hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có pha ở dạng $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$, bộ lọc sẽ có quan hệ sau:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{N-1}{2} \\ \beta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) &= -h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)\end{aligned}\tag{5.14}$$

- Ở đây $\alpha = \frac{N-1}{2}$ được gọi là tâm phản đối xứng của bộ lọc FIR..
- Khi $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại III, $h(n)$ phản đối xứng
- Khi $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại IV, $h(n)$ phản đối xứng.

5.3.2. Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR pha tuyến tính

Điểm cực: bộ lọc FIR chỉ có 1 điểm cực tại $Z=0$.

Điểm không: tùy theo loại bộ lọc FIR pha tuyến tính mà ta có các tính chất đối xứng đảo liên hợp:

- Các điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị thì không có cặp đảo ($Z = \pm 1$).
- Các điểm không thực không nằm trên vòng tròn đơn vị đều có điểm không nghịch đảo tương ứng $(Z, \frac{1}{Z})$.

- Các điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị sẽ có điểm không tương ứng là liên hợp của nó ($Z = \cos\omega \pm j.\sin\omega$).

- Các điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị sẽ có bốn điểm không là đảo liên hợp tương ứng $Z, Z^*, \frac{1}{Z}, \frac{1}{Z^*}$.

Vậy nếu quan sát điểm không và điểm cực của một dãy có chiều dài hữu hạn xem có pha tuyến tính hay không thì ta cần đối chiếu với tính chất đối xứng, đảo, liên hợp của nó.

5.3.3. Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR

Các khái niệm về tâm đối xứng, tâm phản đối xứng, chiều dài bộ lọc số FIR N chẵn hay lẻ sẽ hình thành nên các đặc điểm của bộ lọc số. Căn cứ vào các đặc điểm của bộ lọc, chúng ta sẽ đi tổng hợp các bộ lọc số FIR. Thông thường có 3 phương pháp chính như sau:

- **Phương pháp cửa sổ:** Dùng các cửa sổ để hạn chế chiều dài đáp ứng xung của bộ lọc số lý tưởng và đưa về nhân quả.

- **Phương pháp mẫu tần số:** Trong vòng tròn tần số lấy các điểm khác nhau để tổng hợp bộ lọc.

- **Phương pháp lập tối ưu (phương pháp tối ưu - MINIMAX):** phương pháp gần đúng Tchebyshev, tìm sai số cực đại E_{\max} của bộ lọc thiết kế với bộ lọc lý tưởng, rồi làm cực tiểu hoá đi sai số này: $\min|E_{\max}|$. Các bước cực tiểu sẽ được máy tính lặp đi lặp lại.

Các thủ tục thiết kế bộ lọc số FIR được thực hiện qua các bước sau:

- Đưa ra chỉ tiêu kỹ thuật $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$ trong miền tần số ω .

- Tính toán các hệ số: xác định các chỉ số của hàm truyền đạt $H(Z)$ theo các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho.

- Thực hiện: từ kết quả tính toán ta cấu trúc thành bộ lọc thích hợp.

- Thử lại xem các chỉ tiêu có thỏa mãn hay không, nếu không thỏa mãn thì ta quay lại bước 2 ở trên.

5.3.4. Phương pháp cửa sổ

5.3.4.1. Nguyên lý chung

Phương pháp cửa sổ là một phương pháp đơn giản nhất. Mục tiêu chính của phương pháp này là dùng các hàm cửa sổ cho sẵn để tổng hợp bộ lọc số FIR sao cho thực hiện được về mặt vật lý, nghĩa là các đáp ứng xung phải có chiều dài hữu hạn và nhân quả.. Các thủ tục thiết kế bộ lọc số FIR được thực hiện qua các bước sau:

- Đưa ra chỉ tiêu kỹ thuật $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$ trong miền tần số ω .
- Chọn loại cửa sổ và chiều dài cửa sổ N , nghĩa là xác định $w(n)_N$.
- Chọn loại bộ lọc số lý tưởng(thông thấp, thông cao, thông dải, chặn dải) tức là chọn $h(n)$.
- Để hạn chế chiều dài thì nhân cửa sổ với $h(n)$: $w(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$

Chiều dài $L[w(n)_N] = N$, $L[h(n)] = \infty$, nên $L[h_d(n)] = N$.

Sau bước này tìm được $h_d(n)$ tức là hệ số của bộ lọc số thực tế, nhưng hệ số này có đáp ứng được các chỉ tiêu kỹ thuật đặt ra hay không thì phải thử lại.

- Thử lại xem có thỏa mãn $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$ hay không bằng cách chuyển sang miền tần số

$$H_d(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})_N * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\omega'}) H(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \quad (5.15)$$

Nếu không thỏa mãn ta sẽ tăng chiều dài N của cửa sổ.

Lưu ý:

- Trong miền tần số ω , cửa sổ và bộ lọc phải có pha trùng nhau, tâm đối xứng của cửa sổ và bộ lọc cũng phải trùng nhau.

- Khi dùng cửa sổ thao tác vào bộ lọc số lý tưởng, do vậy đáp ứng xung $h(n)$ bị cắt bớt chiều dài cho nên ở miền tần số ω , đáp ứng của bộ lọc số FIR $H(e^{j\omega})$ vừa thiết kế sẽ có hiện tượng gợn sóng tức là hiện tượng Gibbs, làm cho chất lượng của bộ lọc bị ảnh hưởng

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu các loại cửa sổ và các bước thiết kế.

5.3.4.2. Phương pháp cửa sổ chữ nhật

Cửa sổ chữ nhật là cửa sổ đơn giản nhất.

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

$$w_R(n)_N = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.16)$$

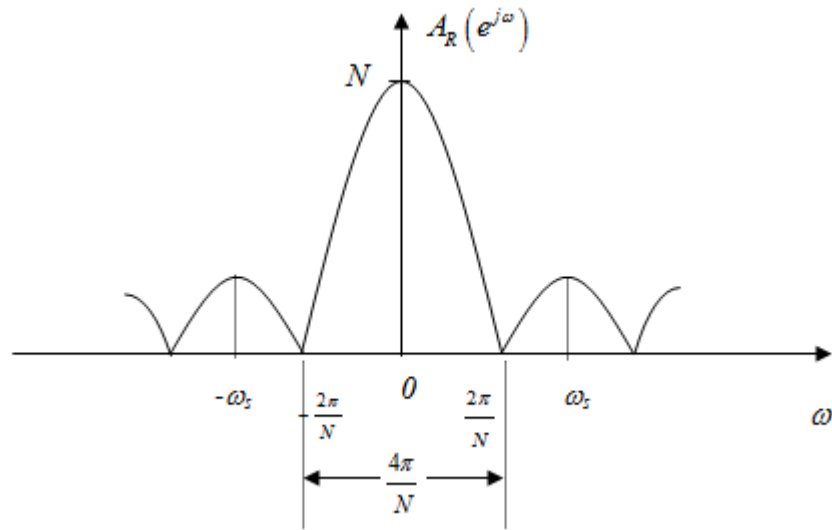
Nhận xét: $w_R(n)_N = \text{rect}_N(n)$

Xét cửa sổ chữ nhật trong miền tần số ta có:

$$\begin{aligned}
 W_R(e^{j\omega})_N &= \text{FT}[w_R(n)]_7 = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}} (e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}})}{e^{-j\omega \frac{1}{2}} (e^{j\omega \frac{1}{2}} - e^{-j\omega \frac{1}{2}})} \\
 &= e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = e^{j\theta_R(\omega)} A_R(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

Vì có dạng $\frac{0}{0}$ nên ta biến đổi tiếp:

$$A_R(e^{j\omega}) = \frac{\omega \frac{N}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\omega \frac{N}{2}}}{\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}} = N \frac{\frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\omega \frac{N}{2}}}{\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}} \quad (5.17)$$



Hình 5.8 Biểu diễn $A_R(e^{j\omega})$

Có hai tham số đánh giá cửa sổ là:

- Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$.
- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$$

Hai chỉ tiêu đánh giá chất lượng của cửa sổ.

Đối với cửa sổ chữ nhật ta có:

- Bề rộng đỉnh trung tâm: $\Delta\omega_R = \frac{4\pi}{N}$

- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda_R = 20 \lg \frac{|W_R(e^{j\omega_s})|}{|W_R(e^{j0})|} (dB) \approx -13dB.$$

Các thông số được minh họa trên hình vẽ 5.8.

Lưu ý:

- Chất lượng của cửa sổ sẽ được đánh giá là tốt nếu 2 tham số bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ và tỷ số biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên đỉnh trung tâm λ cùng nhỏ.

- Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ nhỏ thì dải quá độ giữa dải thông và dải chắn của bộ lọc sẽ nhỏ, nghĩa là tần số ω_p và ω_s gần nhau.

- Tỷ số biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên đỉnh trung tâm λ nhỏ dẫn đến độ gợn sóng δ_1, δ_2 nhỏ.

- Nhưng đây là 2 tham số nghịch nhau, bề rộng đỉnh trung tâm muốn nhỏ thì tỷ số λ sẽ lớn và ngược lại. Do vậy tùy từng điều kiện bài toán chúng ta sẽ đưa ra các tiêu chuẩn kỹ thuật riêng để chọn loại cửa sổ.

Để đánh giá cửa sổ có tính đến thông số chiều dài N của cửa sổ thì người ta còn dùng tham số sau:

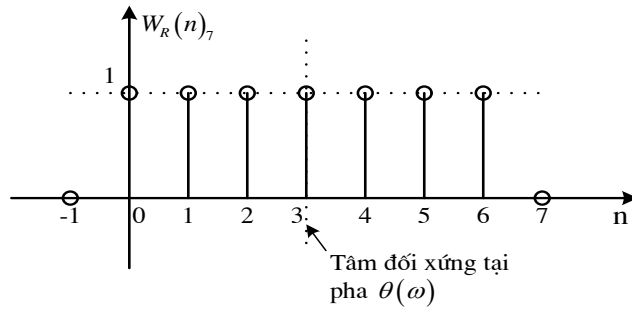
$$G(e^{j\omega}) = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega})|_N}{|W(e^{j0})|_N} (dB)$$

Ví dụ về tham số này sẽ được thể hiện trong hình 5.9

Ví dụ 5.5

Vẽ cửa sổ chữ nhật với $N = 7$

Giải: Ta có $w_R(n)_7 = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

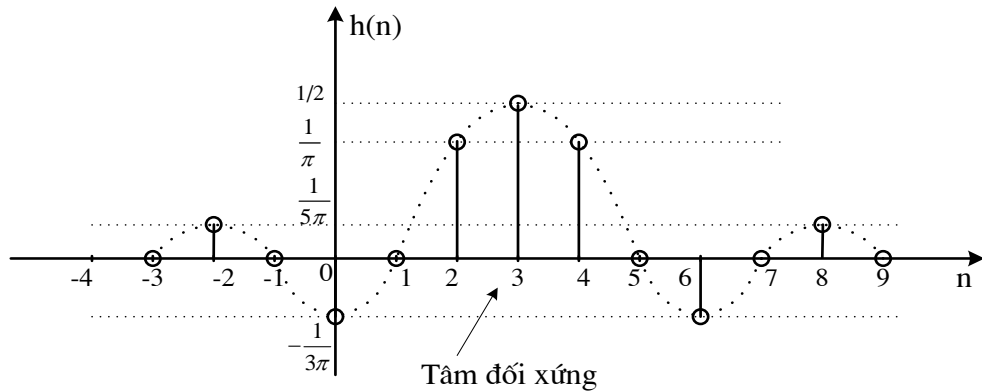


Hình 5.9 Cửa sổ chữ nhật với \$N=7\$

Ví dụ 5.6

Hãy thiết kế bộ lọc số thông thấp FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ chữ nhật: $\omega_c = \frac{\pi}{2}; N = 7$.

Giải: Trong chương 3, ta đã xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha 0 $\theta(\omega) = 0$ như sau:
$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad (\text{tâm đối xứng: } n = 0)$$



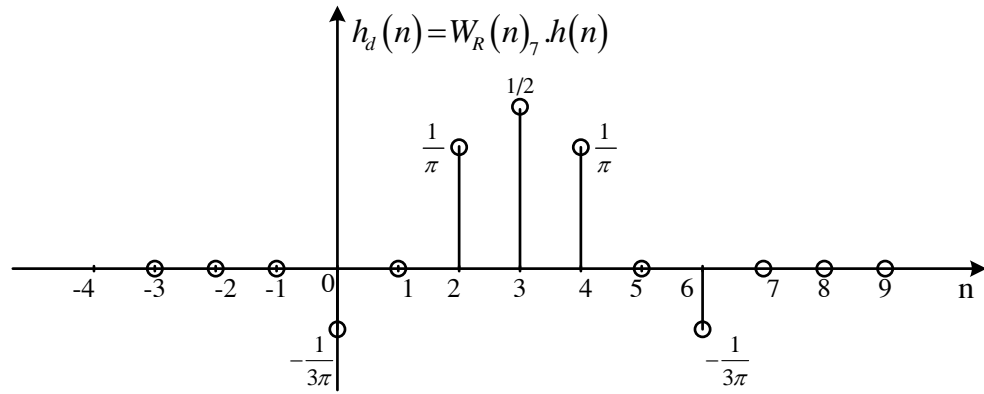
Hình 5.10 Dịch phải đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng

Nhưng trong ví dụ này ta có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$, do vậy ta phải dịch

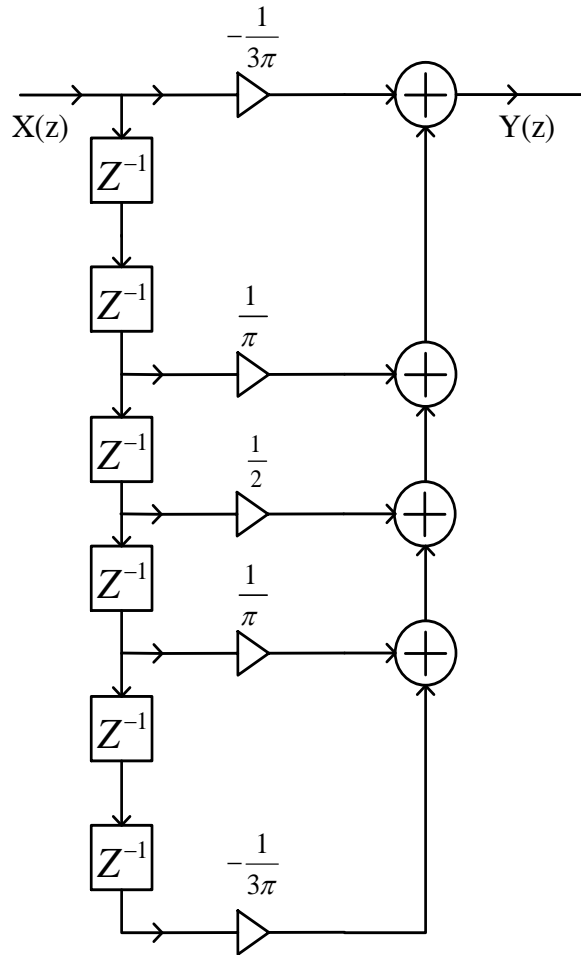
chuyển $h(n)$ sang phải $\frac{N-1}{2}$ mẫu:
$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}; N = 7$ ta được:
$$h_{LP}(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (n-3)}{\frac{\pi}{2} (n-3)}$$

Sau đó ta thực hiện nhân $h(n)$ với cửa sổ chữ nhật $N=7$ như ở hình 5.2 để tìm $h_d(n)$



Hình 5.11 Xác định $w_R(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$ với $N=7$

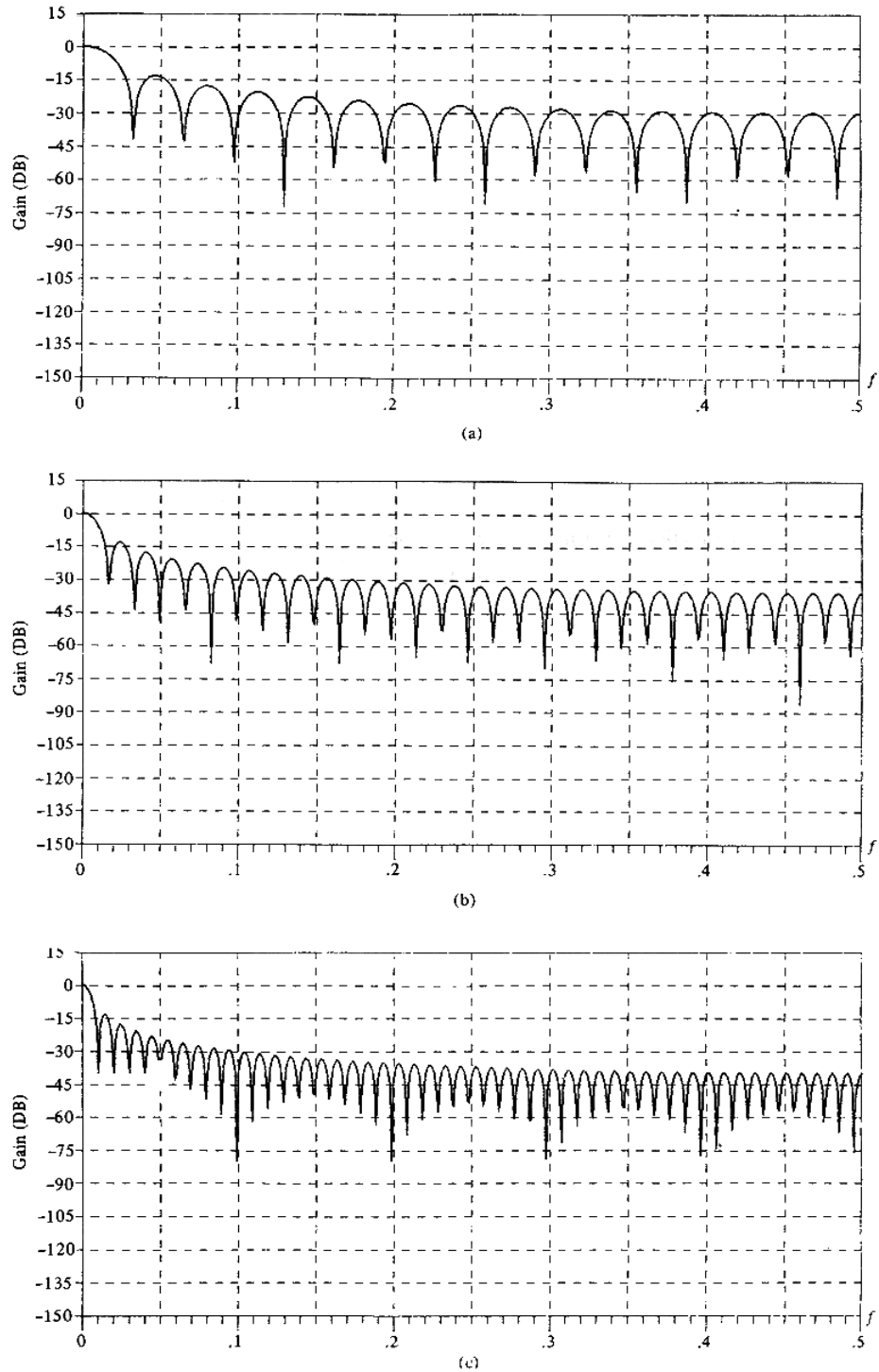


Hình 5.12 Sơ đồ bộ lọc FIR thông thấp với $N=7$

$h_d(n)$ đối xứng tại tâm đối xứng $n = 3$ nên ta có các giá trị sau:

$$h_d(0) = -\frac{1}{3\pi} = h_d(6); h_d(1) = 0 = h_d(5)$$

$$h_d(2) = \frac{1}{\pi} = h_d(4); h_d(3) = \frac{1}{2}$$



Hình 5.13 Đồ thị $G_R(e^{j\omega})$ với a) $N=31$; b) $N=61$, c) $N=101$

Hàm truyền đạt của bộ lọc:

$$H_d(z) = \sum_{n=0}^6 h_d(n) z^{-n} = -\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3} + \frac{1}{\pi} z^{-4} - \frac{1}{3\pi} z^{-6}$$

$$\text{Hay } y(n) = -\frac{1}{3\pi}x(n) + \frac{1}{\pi}x(n-2) + \frac{1}{2}x(n-3) + \frac{1}{\pi}x(n-4) - \frac{1}{3\pi}x(n-6)$$

Kết quả được sơ đồ bôk lọc FIR như hình 5.12.

$$\text{Chúng ta sẽ xem xét đồ thị biểu diễn } G(e^{j\omega}) = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega})|_N}{|W(e^{j0})|_N} (dB) \text{ của cửa sổ chữ nhật}$$

với các chiều dài N khác nhau như hình 5.13.

Nhận xét: Khi chiều dài cửa sổ N tăng lên thì tham số tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm λ là không đổi đều bằng -13db, chỉ có các búp là hẹp đi tức là bề rộng đỉnh trung tâm sẽ nhỏ đi khi ta tăng chiều dài N của cửa sổ, điều này dẫn đến chất lượng của cửa sổ sẽ tăng lên.

5.3.4.3. Phương pháp cửa sổ Bartlett (tam giác)

Định nghĩa: Trong miền n, cửa sổ Bartlett được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.18)$$

Ví dụ 5.7

Hãy vẽ cửa sổ Bartlett với N = 7

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 3 \\ 2 - \frac{n}{3} & 3 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Lưu ý:

- Đối với cửa sổ tam giác thiết kế giống cửa sổ chữ nhật nhưng dạng hàm khác nhau.

$$+ \text{ Ở miền } n: \quad h_d(n) = w_T(n)_N h(n)$$

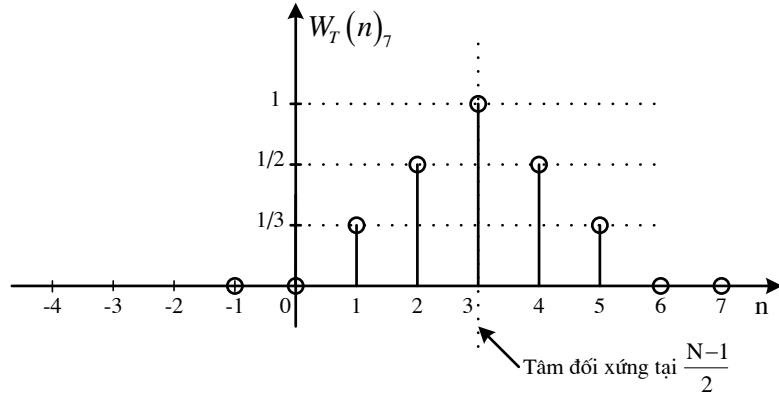
$$+ \text{ Ở miền } \omega: \quad H_d(e^{j\omega}) = W_T(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

- Các tham số của cửa sổ tam giác:

$$+ \Delta\omega_T = \frac{8\pi}{N}$$

$$+ \lambda_T \approx -26dB$$

Khi dùng cửa sổ tam giác hiện tượng Gibbs giảm rất nhiều so với dùng cửa sổ chữ nhật vì $\lambda_T < \lambda_R$, nhưng dải quá độ lại lớn hơn của sổ chữ nhật $\Delta_T\omega > \Delta_R\omega$.



Hình 5.14 Cửa sổ tam giác với N=7

Ví dụ 5.8

Hãy thiết kế bộ lọc thông cao FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ Bartlett với $\omega_c = \frac{\pi}{2}; N = 7$.

Giải:

Ta xét bộ lọc thông cao pha 0 $\theta(\omega) = 0$: (pha không, tâm đối xứng nằm tại điểm 0)

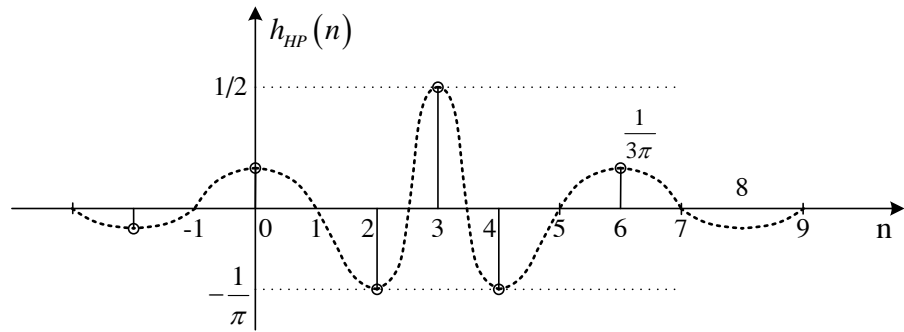
$$h_{HP}(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

Theo đầu bài bộ lọc cần thiết kế có pha: $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$ vậy ta dịch chuyển $h_{HP}(n)$ như sau:

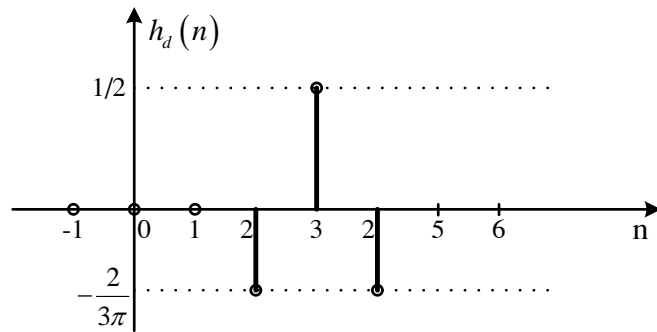
$$h_{HP}(n) = \delta\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \quad \text{Thay } N=7 \quad \omega_c = \frac{\pi}{2} \text{ ta có:}$$

$$h_{HP}(n) = \delta(n-3) - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-3)}{\frac{\pi}{2}(n-3)}$$

Nhân $h_{HP}(n)$ với cửa sổ tam giác về $w_T(n)_7$ trong hình 5.6 ta có $h_d(n)$ cần tìm

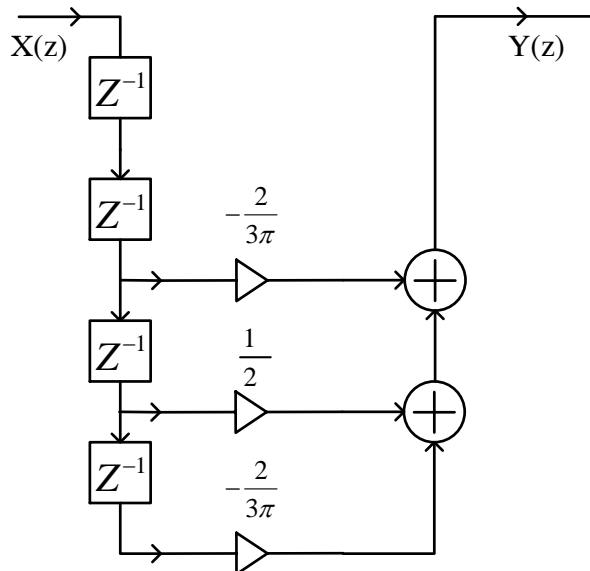


Hình 5.15 Dịch phải đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng



Hình 5.16 Xác định $w_T(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$ với $N=7$

Cuối cùng tương tự như ví dụ 5.2 ta có sơ đồ bộ lọc thông cao cần thiết kế như sau



Hình 5.17 Sơ đồ bộ lọc FIR thông cao với $N=7$

5.3.4.4. Cửa sổ Hanning và Hamming

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n)_N = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.19)$$

Phân loại khác nhau theo hệ số α ta được:

$\alpha = 0,5$: cửa sổ Hanning

$$w_{Han}(n)_N = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.20)$$

$\alpha = 0,54$: cửa sổ Hamming

$$w_{Ham}(n)_N = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.21)$$

Ta có các tham số của bộ lọc Hanning:

$$\begin{aligned} + \Delta\omega_{Han} &= \frac{8\pi}{N} \\ + \lambda_{Han} &\approx -32dB \end{aligned}$$

Các tham số của bộ lọc Hamming:

$$\begin{aligned} + \Delta\omega_{Ham} &= \frac{8\pi}{N} \\ + \lambda_{Ham} &\approx -43dB \end{aligned}$$

Như vậy, ta thấy: $\Delta\omega_T = \Delta\omega_{Han} = \Delta\omega_{Ham} = \frac{8\pi}{N}$, $\lambda_T > \lambda_{Han} > \lambda_{Ham}$ vậy trong 3 cửa sổ bề rộng đỉnh trung tâm là như nhau nhưng biên độ của độ gợn sóng dải thông và dải chắn sẽ nhỏ nhất khi thiết kế bằng cửa sổ Hamming.

5.3.4.5. Phương pháp cửa sổ Blackman

Định nghĩa: Trong miền n , cửa sổ Blackman được định nghĩa như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^m a_m \cos \frac{2\pi}{N-1} mn & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.22)$$

Với điều kiện: $\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a_m = 1$

Các tham số của cửa sổ: $\Delta\omega_B = \frac{12\pi}{N} \quad + \lambda_B \approx -57dB$

Ví dụ 5.9

Hãy tìm cửa sổ Blackman trong các trường hợp sau đây:

- 1, $a_0 = 0,5; a_1 = 0,5; a_m = 0$
- 2, $a_0 = 0,54; a_1 = 0,46; a_m = 0; m \neq 0,1$
- 3, $a_0 = 0,42; a_1 = 0,5; a_3 = 0,08; a_m = 0; m \neq 0,1,2$

Giải:

1. Với các hệ số trên đây chính là cửa sổ Hanning $w_{Han}(n)_N$
2. Với các hệ số trên đây chính là cửa sổ Hamming $w_{Ham}(n)_N$
3. Ta có đây là bộ tham số thông dụng nhất của cửa sổ Blackman

$$w_B = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1} n + 0,08 \cos \frac{4\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

5.3.4.6. Phương pháp cửa sổ Kaiser

Định nghĩa: Trong miền n cửa sổ Kaiser được định nghĩa như sau:

$$w_K(n)_N = \begin{cases} \frac{I_0 \left[\beta \left(\frac{n-1}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0 \left[\beta \left(\frac{n-1}{2} \right) \right]} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.23)$$

$I_0(x)$ là hàm Bessel biến dạng loại 1 bậc 0

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2$$

Trong định nghĩa (5.18), tham số β đặc trưng cho việc trao đổi năng lượng giữa đỉnh trung tâm và các đỉnh thứ cấp, để đạt hiệu quả cao khi thiết kế, người ta thường chọn: $4 \leq \beta \leq 9$

Trong cửa sổ Kaiser ta có thể thay đổi tham số β để thay đổi tỷ lệ giữa λ_K và $\Delta\omega_K$

5.3.5. Phương pháp lấy mẫu tần số

5.3.5.1. Cơ sở của phương pháp lấy mẫu tần số

Phương pháp lấy mẫu tần số sử dụng phép biến đổi *Fourier* rời rạc (DFT). Cơ sở của phương pháp lấy mẫu tần số là xấp xỉ đặc tính biên độ tần số $|H_N(e^{j\omega})|$ của bộ lọc số cần tổng hợp theo đặc tính biên độ tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc số lý tưởng cùng loại.

Việc xấp xỉ được thực hiện bằng cách lấy mẫu tần số qua DFT, tức là làm cho các mẫu của $|H_N(e^{j\omega})|$ và $H(e^{j\omega})$ bằng nhau tại các tần số rời rạc $\omega_k = k\omega_1 = (k \cdot 2\pi/N)$:

$$H_N(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=k\omega_1} = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=k\omega_1}$$

$$\text{Hay :} \quad H_N(e^{jk\omega_1}) = H(e^{jk\omega_1}) \quad (5.24)$$

Bằng cách như vậy, tại các điểm tần số rời rạc $\omega_k = k\omega_1$, sai số xấp xỉ giữa $|H_N(e^{j\omega})|$ và $|H(e^{j\omega})|$ bằng 0, còn tại các tần số ở giữa khoảng $k\omega_1$ và $(k+1)\omega_1$ thì sai số xấp xỉ là hữu hạn. Sai số xấp xỉ sẽ giảm nhỏ nếu giảm tần số lấy mẫu cơ bản $\omega_1 = (2\pi/N)$, điều đó tương ứng với tăng độ dài N của đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số được tổng hợp.

Trong miền k của DFT, biểu thức [5.3-9] có dạng :

$$H(k)_N = H(k)$$

$$\text{Hay :} \quad A(k)_N e^{j\theta(k)} = A(k) e^{j\theta(k)} \Leftrightarrow A(k)_N = A(k) \Leftrightarrow |H(k)_N| = |H(k)|$$

Trong đó, $|H(k)_N|$ được lấy mẫu tần số từ đặc tính biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc số lý tưởng cùng loại, tức là :

$$|H(k)_N| = |H(k)| = \begin{cases} 1 & \text{Khi } \omega \text{ thuộc dải thông của bộ lọc lý tưởng.} \\ 0 & \text{Khi } \omega \text{ thuộc dải chặn của bộ lọc lý tưởng.} \end{cases}$$

Hình 5.18 mô tả cách lấy mẫu đặc tính biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc dải thông lý tưởng có các tần số cắt :

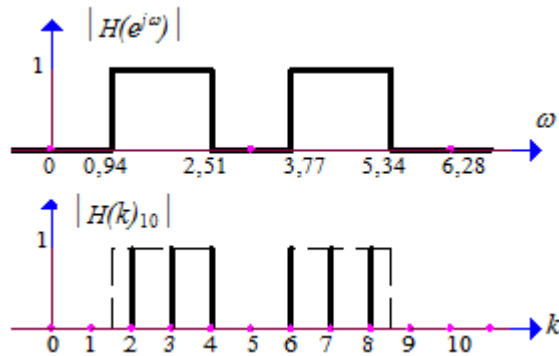
$$\omega_{c1} = 3\pi/10 = 0,94$$

$$\omega_{c2} = 8\pi/10 = 2,51$$

Việc lấy mẫu tần số được thực hiện trong một chu kỳ $0 \leq \omega < 2\pi$, ứng với $0 \leq k \leq 9$ và $N = 10$.

Đặc tính biên độ tần số được lấy mẫu $|H(k)_{10}|$ trên hình vẽ có dạng đối xứng khi $k \in [1, 9]$. Trong dải thông của bộ lọc lý tưởng, $|H(k)_{10}|$ có sáu mẫu giá trị 1, năm mẫu ở ngoài dải thông giá trị 0 :

$$|H(k)_{10}| = \{ \vec{0}, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0 \}$$



Hình 5.18 Lấy mẫu trong miền tần số

Sau khi xác định được $|H(k)_N| = |A(k)_N|$, ta có :

$$H(k)_N = A(k)_N e^{j\theta(k)} \quad (5.25)$$

Từ các mẫu DFT $H(k)_N$ có thể tìm được đặc tính tần số $H_N(e^{j\omega})$ của bộ lọc số cần tổng hợp theo công thức nội suy :

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)_N \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-j\left[\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{k\pi}{N}\right]} \quad (5.26)$$

Từ đó đối với bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 1 và loại 2 có :

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k)_N e^{-jk\pi\left(\frac{N-1}{N}\right)} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-j\frac{k\pi}{N}} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

Trong đó :
$$e^{-jk\pi\left(\frac{N-1}{N}\right)} e^{-j\frac{k\pi}{N}} = e^{-jk\pi\left(\frac{N}{N}\right)} e^{j\frac{k\pi}{N}} e^{-j\frac{k\pi}{N}} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

Do đó có đặc tính tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính loại 1 và loại 2 :

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{\sin(0,5N\omega)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{A(k)_N}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \quad (5.27)$$

Tương tự, đặc tính tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính loại 3 và loại 4 :

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{\sin(0,5N\omega)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{A(k)_N}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]} \quad (5.28)$$

Từ đó ta có biểu thức xác định đặc tính biên độ tần số của cả bốn loại bộ lọc số FIR pha tuyến tính cần tổng hợp :

$$\left|H_N(e^{j\omega})\right| = \left| \frac{\sin(0,5N\omega)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{A(k)_N}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} \right| \quad (5.29)$$

Đặc tính pha $\theta(\omega)$ của bộ lọc FIR pha tuyến tính loại 1 và loại 2 :

$$\varphi_N(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega = -\alpha\omega ; \quad \text{với } \alpha = \left(\frac{N-1}{2}\right)\omega \quad (5.30)$$

Đặc tính pha $\theta(\omega)$ của bộ lọc FIR pha tuyến tính loại 3 và loại 4 :

$$\varphi_N(\omega) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\right)\omega = \beta - \alpha\omega ; \quad \text{với } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ và } \alpha = \left(\frac{N-1}{2}\right)\omega \quad (5.31)$$

Khi đặc tính tần số $H_N(e^{j\omega})$ của bộ lọc cần tổng hợp thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho, thì bước tiếp theo có thể xác định đặc tính xung $h(n)_N$ của các bộ lọc số cần tổng hợp theo IDFT :

$$h(n)_N = IDFT[H(k)_N] \quad (5.32)$$

Các bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 1 và loại 2 có đặc tính xung $h(n)_N$ đối xứng khi $0 \leq n \leq (N-1)$, và $\theta(k)$ có dạng:

$$\theta(k) = -\frac{(N-1)\pi}{N} \cdot k \quad (5.33)$$

Hơn nữa, bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 1 có N lẻ, nên $A(k)_N$ đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N-1)$ và đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số cần tổng hợp được xác định theo biểu thức:

$$h_1(n)_N = \frac{A(0)_N}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^k A(k)_N \cdot \cos\left[\frac{k\pi}{N}(2n+1)\right] \quad (5.34)$$

Còn bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 2 có N chẵn thì $A(k)_N$ phản đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N-1)$ và đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số cần tổng hợp được xác định theo biểu thức:

$$h_2(n)_N = \frac{A(0)_N}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k A(k)_N \cdot \cos\left[\frac{k\pi}{N}(2n+1)\right] \quad (5.35)$$

Các bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 3 và loại 4 có đặc tính xung $h(n)_N$ phản đối xứng khi $0 \leq n \leq (N-1)$, $\theta(k)$ có dạng:

$$\theta(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{(N-1)\pi}{N} \cdot k \quad (5.36)$$

Hơn nữa, bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 3 có N lẻ thì $A(k)_N$ phản đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N-1)$ và đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc cần tổng hợp được xác định theo biểu thức:

$$h_3(n)_N = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^{(k+1)} A(k)_N \cdot \sin\left[\frac{k\pi}{N}(2n+1)\right] \quad (5.37)$$

Còn bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 4 có N chẵn thì $A(k)_N$ đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N-1)$ và đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số cần tổng hợp được xác định theo biểu thức:

$$h_4(n)_N = \frac{(-1)^n}{N} A\left(\frac{N}{2}\right)_N - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k A(k)_N \cdot \sin\left[\frac{k\pi}{N}(2n+1)\right] \quad (5.38)$$

5.3.5.2. Các bước tổng hợp bộ lọc số theo phương pháp lấy mẫu tần số

Các bước tổng hợp đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính theo phương pháp lấy mẫu tần số như sau :

Bước 1 : Chọn số điểm lấy mẫu N [chính là độ dài của đặc tính xung $h(n)_N$]. Thực hiện lấy mẫu đặc tính biên độ tần số $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc lý tưởng cùng loại trong một chu kỳ $0 \leq \omega < 2\pi$ để nhận được đặc tính biên độ tần số rời rạc $|H(k)_N|$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính cần tổng hợp.

Bước 2 : Xác định đặc tính biên độ tần số $H_N(e^{j\omega})$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính cần tổng hợp bằng biểu thức nội suy.

Để tìm $H_N(e^{j\omega})$, trước hết cần xác định $A(k)_N$:

- Bộ lọc loại 1 có $A(k)_N$ đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N - 1)$.
- Bộ lọc loại 2 có $A(k)_N$ phản đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N - 1)$.
- Bộ lọc loại 3 : $A(k)_N$ phản đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N - 1)$, $A(0)_N = 0$.
- Bộ lọc loại 4 có $A(k)_N$ đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq (N - 1)$, và $A(0)_N = 0$.

Bước 3 : Kiểm tra đặc tính biên độ tần số $|H_N(e^{j\omega})|$ có đạt các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho $\delta_1, \delta_2, \omega_c, \Delta\omega$ hay không ?

Nếu đạt tất cả các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho thì giảm số điểm lấy mẫu N và thực hiện lại các bước trên cho đến khi chọn được N_{min} đảm bảo đạt tất cả các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho.

Nếu không đạt thì tăng số điểm lấy mẫu N và thực hiện lại các bước trên cho đến khi chọn được N_{min} để $|H_N(e^{j\omega})|$ của bộ lọc cần tổng hợp đạt được tất cả các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho.

Bước 4 : Xác định đặc tính xung $h(n)_N$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính cần tổng hợp :

$$h(n)_N = IDFT[H(k)_N] \quad (5.39)$$

5.3.6. Phương pháp lặp tối ưu

Phương pháp lặp tối ưu (phương pháp tối ưu - MINIMAX): phương pháp gần đúng Tchebyshev, tìm sai số cực đại E_{max} của bộ lọc thiết kế với bộ lọc lý tưởng, rồi làm cực tiểu hoá đi sai số này: $\min|E_{max}|$. Các bước cực tiểu sẽ được máy tính lặp đi lặp lại.

Ta có thể tóm tắt lại các bước tính hệ số của bộ lọc FIR bằng phương pháp lặp tối ưu như sau:

- Bước 1: Xác định các thông số kỹ thuật của bộ lọc: dải thông, dải chắn, độ gợn... và tần số lấy mẫu.
- Bước 2: Chuẩn hóa các tần số và xác định độ rộng dải chuyển tiếp.
- Bước 3: Ước lượng độ dài N theo các tham số đã cho.
- Bước 4: Tính $W(\omega)$ trong mỗi dải tần số và biểu diễn dưới dạng số nguyên.
- Bước 5: Đưa các tham số đã tính được vào chương trình tính toán theo phương pháp lặp.
- Bước 6: Kiểm tra các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc nhận được.
- Bước 7: Nếu không đạt chỉ tiêu thì tăng N và lặp lại các bước 5, 6 cho đến khi thỏa mãn yêu cầu.

5.4. BỘ LỌC SỐ IIR

5.4.1. Các tính chất tổng quát của bộ lọc IIR

Các bộ lọc số IIR nhân quả được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính đệ quy:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k) \text{ hay } y(n) = \sum_{l=0}^M b_l x(n-l) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Từ đó dùng biến đổi Z ta có hàm truyền đạt của bộ lọc IIR:

$$H(Z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l Z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}}$$

Khi thiết kế bộ lọc IIR ta cần tìm các hệ số a, b sao cho bộ lọc thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật yêu cầu. Như vậy, bộ lọc IIR yêu cầu ít tham số hơn so với FIR nếu cùng yêu cầu chỉ tiêu kỹ thuật. Tuy nhiên ta cần phải xét thêm tính ổn định của hệ thống.

5.4.2. Tổng hợp bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự

5.4.2.1. Nguyên lý chung

Khi tổng hợp bộ lọc số IIR ta sẽ bắt đầu việc tổng hợp bộ lọc trong miền tương tự tức là xác định hàm truyền đạt $H_a(s)$ và sau đó biến đổi sang miền số.

Có thể mô tả bộ lọc tương tự bằng hàm hệ thống của nó:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \quad (5.40)$$

ở đây $\{\alpha_k\}$ và $\{\beta_k\}$ là các hệ số lọc, hoặc bằng đáp ứng xung liên quan với $H_a(s)$ thông qua biến đổi Laplace:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (5.41)$$

Bộ lọc tương tự có hàm hệ thống hữu tỷ $H_a(s)$ cũng có thể được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M \beta_r \frac{d^r x(t)}{dt^r} \quad (5.42)$$

ở đây $x(t)$ là tín hiệu vào và $y(t)$ tín hiệu ra của bộ lọc.

Một trong ba đặc trưng tương đương của bộ lọc tương tự sẽ tạo ra phương pháp biến đổi bộ lọc sang miền số khác nhau như sẽ được xét dưới đây. Ta biết rằng, hệ thống tuyến tính bất biến tương tự với hàm hệ thống $H_a(s)$ là ổn định, nếu tất cả các điểm cực phân bố toàn bộ bên trái của mặt phẳng s (s : là biến số phức, $s = \sigma + j\Omega$). Do đó, nếu phép biến đổi là có kết quả, nó sẽ có các tính chất sau:

1. Trục $j\Omega$ trong mặt phẳng s sẽ ánh xạ lên đường tròn đơn vị trong mặt phẳng z . Như vậy sẽ có quan hệ trực tiếp giữa hai biến tần số trong hai miền.

2. Nửa trái của mặt phẳng s sẽ ánh xạ vào phía trong đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng z . Như vậy một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được biến đổi thành bộ lọc số ổn định.

Ta lưu ý rằng thể hiện vật lý bộ lọc IIR ổn định không thể có pha tuyến tính vì nếu hàm hệ thống của bộ lọc pha tuyến tính phải thoả mãn điều kiện sau:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1}) \quad (5.43)$$

ở đây z^{-N} biểu diễn độ trễ N đơn vị thời gian, bộ lọc sẽ có điểm cực ánh xạ gương ngoài đường tròn đơn vị ứng với mỗi điểm cực trong đường tròn này. Vì thế bộ lọc sẽ là không ổn định. Do đó, một bộ lọc IIR nhân quả và ổn định không thể có pha tuyến tính.

Đặc điểm của bộ lọc IIR là chiều dài đáp ứng xung $L[h(n)] = \infty$

Có 3 phương pháp chính để chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số tương đương

- Phương pháp bất biến xung
- Phương pháp biến đổi song tuyến
- Phương pháp tương đương vi phân

Với điều kiện đã tổng hợp được $H_a(s)$

Để tìm được hàm truyền đạt tương tự $H_a(s)$, người ta có 3 phương pháp tổng hợp là:

- Butterworth
- Chebyshev
- Elip hay Cauer

5.4.2.2. Phương pháp bất biến xung

Trong phương pháp bất biến xung, mục đích của ta là tổng hợp bộ lọc IIR có đáp ứng xung đơn vị $h(n)$ là phiên bản được lấy mẫu của đáp ứng xung bộ lọc tương tự. Nghĩa là

$$h(n) \equiv h(nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

ở đây T là khoảng lấy mẫu.

Được biểu diễn trong phạm vi của việc lấy mẫu đáp ứng xung một bộ lọc tương tự với đáp ứng tần số $H_a(F)$, bộ lọc số với đáp ứng xung đơn vị $h(n) \equiv h_a(nT)$ có đáp ứng tần số

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f - k)F_s] \quad (5.45)$$

hoặc

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (5.46)$$

Rõ ràng, bộ lọc số với đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ có đặc tuyến đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng nếu khoảng lấy mẫu (hiện tượng alias). T được chọn đủ nhỏ để tránh hoàn toàn hoặc tối thiểu hoá ảnh hưởng của lẫn mẫu. Điều rõ ràng là phương pháp bất biến xung không phù hợp đối với bộ lọc thông cao vì sự lẫn phổ khi xử lý lấy mẫu.

Muốn tìm hiểu sự ánh xạ giữa mặt phẳng z và mặt phẳng s được biểu thị bởi quá trình lấy mẫu, ta dựa vào công thức tổng quát hoá trên để có mối liên hệ giữa biến đổi z của $h(n)$ và biến đổi Laplace của $h_a(t)$. Mối quan hệ này là:

$$H(z)|_{z=e^{st}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (5.47)$$

ở đây

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (5.48)$$

$$H(z)|_{z=e^{st}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-sTn}$$

Chú ý rằng, khi $s = j\Omega$, (5.48) trở thành (5.47), ở đây thừa số j trong $H_a(\omega)$ đã bị bỏ đi trong ký hiệu của ta.

Đặc tính chung của ánh xạ

$$z = e^{sT} \quad (5.49)$$

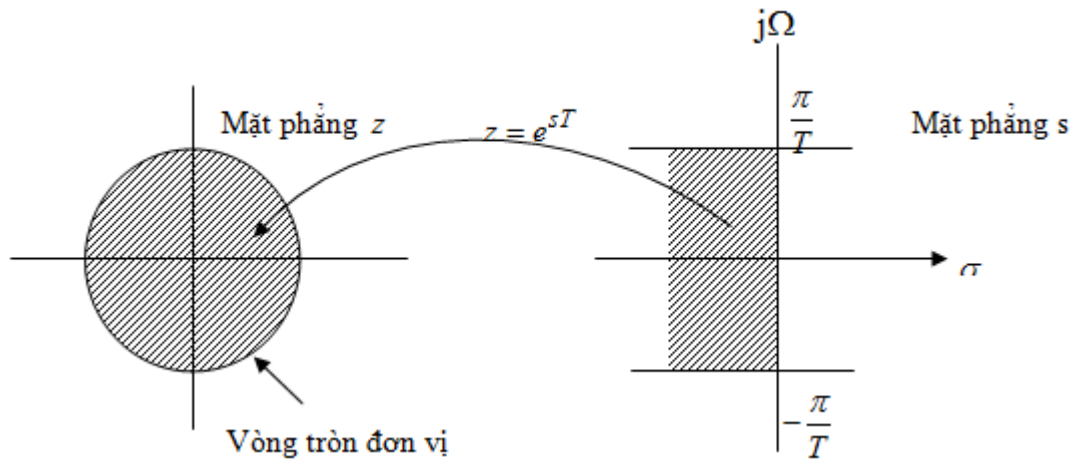
có thể đạt được bằng cách thay $s = \sigma + j\Omega$ và biểu diễn biến phức z theo toạ độ cực $z = re^{j\omega}$. Với sự thay thế này (5.49) trở thành:

$$re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

$$\begin{aligned} \text{Rõ ràng, ta phải có:} \quad r &= e^{\sigma T} \\ \omega &= \Omega T \end{aligned} \quad (5.50)$$

Do đó, $\sigma < 0$ nói lên rằng $0 < r < 1$ và $\sigma > 0$ nói lên rằng $r > 1$. Khi $\sigma = 0$, ta có $r = 1$. Như vậy nửa trái mặt phẳng s được ánh xạ vào trong đường tròn đơn vị thuộc z và nửa phải mặt phẳng s được ánh xạ thành các điểm ngoài đường tròn đơn vị thuộc z . Đây là một trong các tính chất có lợi của ánh xạ đang xét.

Như đã chỉ ở trên, trục $j\Omega$ cũng được ánh xạ lên đường tròn đơn vị trong z . Tuy nhiên, sự ánh xạ này là không một-một. Vì ω là duy nhất trên khoảng $(-\pi, \pi)$, nên sự ánh xạ $\omega = \Omega T$ hàm ý rằng khoảng $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ ánh xạ lên các giá trị tương ứng của $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Ngoài ra, khoảng tần số $\pi/T \leq \Omega \leq 3\pi/T$ cũng ánh xạ vào khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$ và nói chung, khoảng $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$ đều thế, khi k là số nguyên. Như vậy việc ánh xạ từ tần số tương tự Ω vào biến tần số ω trong miền tần số là nhiều lên một, nó là sự phản ánh ảnh hưởng sự chồng phổ khi lấy mẫu. Hình vẽ dưới đây mô tả sự ánh xạ từ mặt phẳng s lên mặt phẳng z .



Hình 5.19 Sự ánh xạ $z = e^{sT}$ của khoảng $2\pi/T$ (với $\sigma < 0$) trong mặt phẳng s lên các điểm trong đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng z

Để tìm hiểu tiếp ảnh hưởng của phương pháp bất biến xung đến đặc tuyến bộ lọc thu được, ta hãy biểu diễn hàm hệ thống của bộ lọc tương tự dưới dạng phân thức tối giản. Với giả thiết rằng các cực của bộ lọc tương tự là phân biệt, ta có thể viết:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad (5.51)$$

ở đây $\{s_{pk}\}$ là các cực của bộ lọc tương tự và $\{A_k\}$ là các hệ số của khai triển phân thức. Bởi vậy:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \quad t \geq 0 \quad (5.52)$$

Nếu lấy mẫu $h_a(t)$ một cách tuần hoàn tại $t = nT$, ta có

$$\begin{aligned} h(n) &= h_a(nT) \\ &= \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}Tn} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Thay vào biểu thức trên ta có hàm hệ thống bộ lọc số IIR sẽ là

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}Tn} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_{pk}T} z^{-1} \right)^n \end{aligned} \quad (5.54)$$

Tổng phía trong của (5.54) là hội tụ, vì $s_{pk} < 0$ và có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_{pk}T} z^{-1} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}} \quad (5.55)$$

Do đó, hàm hệ thống bộ lọc số là:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}} \quad (5.56)$$

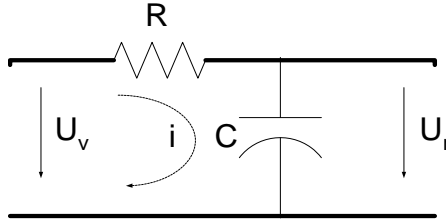
Ta nhận thấy rằng bộ lọc số có các cực trị

$$z_k = e^{s_{pk}T} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.57)$$

Với hàm hệ thống $H(z)$ này, bộ lọc số IIR dễ được thực hiện nhờ một dãy các bộ lọc đơn cực song song.

Ví dụ 5.10

Cho mạch điện tương tự như sau:



Hình 5.20 Mạch điện RC

Hãy chuyển sang mạch điện số bằng phương pháp bất biến xung ?

Giải:

$$H_a(s) = \frac{u_{ra}}{u_{vào}} \text{ với: } u_{ra} = i \frac{1}{s.C}, u_{vào} = i \left(R + \frac{1}{s.C} \right)$$

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{s.C}}{\left(R + \frac{1}{s.C} \right)} = \frac{1}{(s.RC + 1)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Điểm cực: $s_{p_1} = -\frac{1}{RC}$; $A_1 = \frac{1}{RC}$

Biến đổi:

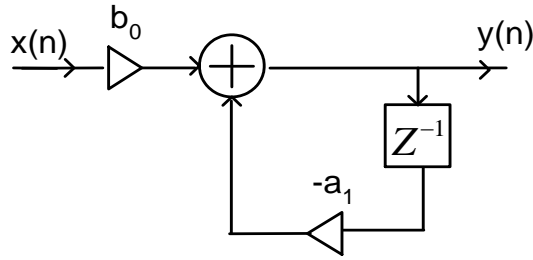
$$H(z) = \frac{A_1}{1 - e^{s_{p_1}T} \cdot z^{-1}} = \frac{\frac{1}{RC}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}T} \cdot z^{-1}}$$

$$M = 0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{RC}$$

$$N = 1 \Rightarrow a_1 = -e^{-\frac{1}{RC}T}$$

Thay vào công thức ta được:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}; \quad \text{hay } y(n) = b_0 x(n) + (-a_1) y(n-1), \text{ ta có sơ đồ sau:}$$



Hình 5.21 Sơ đồ cấu trúc ứng với mạch RC

5.4.2.3. Phương pháp biến đổi song tuyến

Trong mục này ta sẽ trình bày sự ánh xạ mặt phẳng s vào mặt phẳng z , được gọi là biến đổi song tuyến tính. Biến đổi song tuyến tính là phép ánh xạ biến đổi trục $j\Omega$ thành đường tròn đơn vị trong mặt phẳng z chỉ một lần, như vậy tránh được sự lẫn lộn của các thành phần tần số. Hơn nữa, tất cả các điểm trong nửa trái mặt phẳng s , được ánh xạ vào phía trong đường tròn đơn vị và tất cả các điểm cực ở nửa phải mặt s được ánh xạ vào các điểm tương ứng ngoài đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng z .

Biến đổi song tuyến tính có thể liên kết với công thức hình thang để lấy tích phân bằng số. Ví dụ, ta hãy xét bộ lọc tương tự tuyến tính với hàm hệ thống:

$$H(s) = \frac{b}{s + a} \quad (5.58)$$

Hệ thống này cũng được đặc trưng bởi phương trình vi phân.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (5.59)$$

Tránh sự thay thế phép đạo hàm bằng phép sai phân hữu hạn, giả sử rằng ta tích phân đạo hàm và lấy gần đúng nó bằng công thức hình thang. Như vậy.

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0) \quad (5.60)$$

ở đây $y'(t)$ là ký hiệu của đạo hàm $y(t)$. Việc lấy gần đúng tích phân (5.60) bằng công thức hình thang tại $t = nT$ và $t_0 = nT - T$ cho:

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y'(nT) + y'(nT - T)] + y(nT - T) \quad (5.61)$$

Đánh giá phương trình vi phân (5.61) tại $t = nT$ sẽ có:

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT) \quad (5.62)$$

Ta dùng (5.62) để thay cho đạo hàm trong tín hiệu tương tự thì sẽ có được phương trình sai phân của hệ thống rời rạc tương đương. Với $y(n) \equiv y(nT)$ và $x(n) \equiv x(nT)$, ta có kết quả:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y(n-1) = \frac{bT}{2}[x(n) + x(n-1)] \quad (5.63)$$

Biến đổi z của phương trình sai phân này là:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

Do đó, hàm hệ thống của bộ lọc số tương đương là:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1 + z^{-1})}{1 + aT/2 - (1 - aT/2)z^{-1}}$$

hoặc tương đương:
$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + a} \quad (5.64)$$

Rõ ràng, ánh xạ từ mặt phẳng s vào mặt phẳng z là:

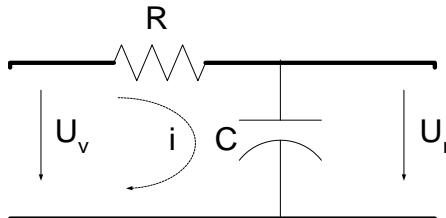
$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (5.65)$$

Đây được gọi là biến đổi song tuyến tính.

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (5.66)$$

Ví dụ 5.11

Cho mạch điện tương tự:



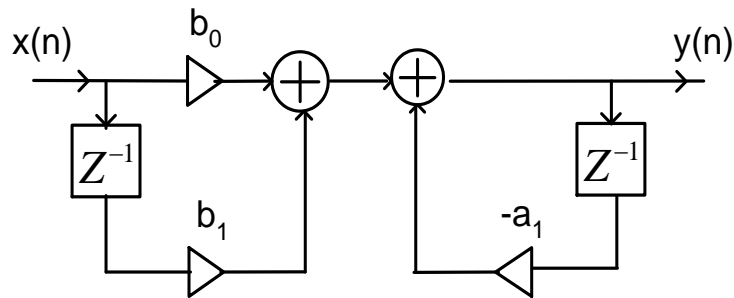
Hình 5.22 Mạch điện RC

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến?

Giải:

$$\begin{aligned}
 H_a(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \\
 \Rightarrow H(z) &= \frac{1}{RC \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} \\
 &= \frac{T(1+z^{-1})}{2RC(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})} = \frac{T + Tz^{-1}}{2RC + T + (T - 2RC)z^{-1}} \\
 H(z) &= \frac{\frac{T}{A} + \frac{T}{A}z^{-1}}{1 + \frac{T - 2RC}{A}z^{-1}}; \quad A = 2RC + T \\
 M = 1 &\Rightarrow b_0 = \frac{T}{A}, b_1 = \frac{T}{A} \\
 N = 1 &\Rightarrow a_1 = \frac{T - 2RC}{A}
 \end{aligned}$$

Vẽ sơ đồ



Hình 5.23 Sơ đồ cấu trúc ứng với mạch RC

5.4.2.4. Phương pháp tương đương vi phân

Một trong những phương pháp đơn giản nhất để biến đổi bộ lọc tương tự sang bộ lọc số là lấy gần đúng phương trình vi phân bằng một phương trình sai phân tương đương. Phép gần đúng này thường được dùng để giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng nhờ máy tính.

Đối với đạo hàm $dy(t)/dt$ tại $t = nT$ ta thay bằng phép sai phân lùi $[y(nT) - y(nT - T)]/T$. Như vậy:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} &= \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} \\
 &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T}
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Ở đây T là khoảng lấy mẫu và $y(n) \equiv y(nT)$. Bộ vi phân tương tự với tín hiệu ra $dy(t)/dt$ có hàm hệ thống $H(s) = s$, trong khi đó hệ thống số tạo ra tín hiệu ra $[y(n) - y(n-1)]/T$ lại có hàm hệ thống là $H(z) = (1 - z^{-1})/T$. Do đó:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (5.68)$$

Do đó, hàm hệ thống của bộ lọc số IIR đạt được nhờ lấy gần đúng phép đạo hàm bằng phép sai phân hữu hạn là:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = (1 - z^{-1})/T} \quad (5.69)$$

$H_a(s)$ là hàm hệ thống của bộ lọc tương tự.

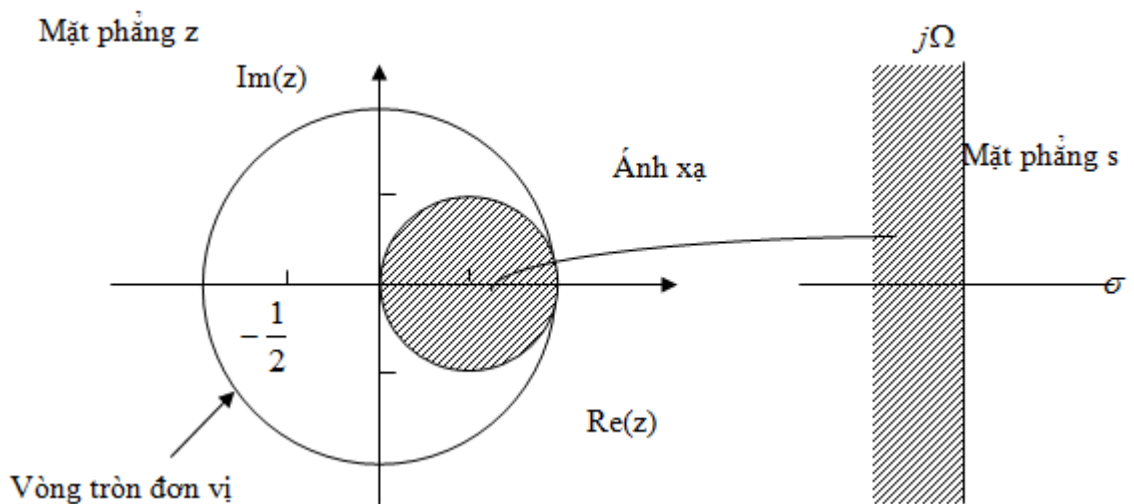
Ta hãy khảo sát phép nội suy của ánh xạ từ mặt phẳng s vào mặt phẳng z với

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (5.70)$$

Nếu thay $s = j\Omega$, ta tìm thấy:

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \quad (5.71)$$

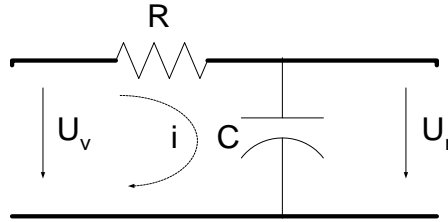
Khi Ω biến thiên từ $-\infty$ đến ∞ , quỹ tích tương ứng của các điểm trong mặt phẳng z là một đường tròn bán kính $\frac{1}{2}$ và có tâm tại $z = \frac{1}{2}$, như minh họa ở hình dưới đây.



Hình 5.24 Ánh xạ $s = (1 - z^{-1})/T$ biến LHP trong mặt phẳng s thành các điểm nằm bên trong đường tròn bán kính $1/2$ và tâm $1/2$ trong mặt phẳng z

Ví dụ 5.12

Cho mạch điện tương tự:



Hình 5.25 Mạch điện RC

Hãy chuyển sang mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân?

Giải:

$$H(z) = \frac{1}{RC \frac{1-z^{-1}}{T} + 1} = \frac{T}{RC - RCz^{-1} + T} = \frac{T}{RC + T - RCz^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{T}{A}}{1 - \frac{RC}{A}z^{-1}}; \quad A = RC + T_s$$

$$M = 0 \Rightarrow b_0 = \frac{T_s}{A} \quad N = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{RC}{A}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + (-a_1) y(n-1)$$

Sơ đồ hệ thống giống như ví dụ trên.

Sau đây chúng ta sẽ tổng hợp các bộ lọc tương tự theo các phương pháp sau. Mục đích là để xác định được hàm truyền đạt tương tự $H_a(s)$, người ta có 3 phương pháp tổng hợp là:

- Butterworth
- Chebyshev
- Elip hay Cauer

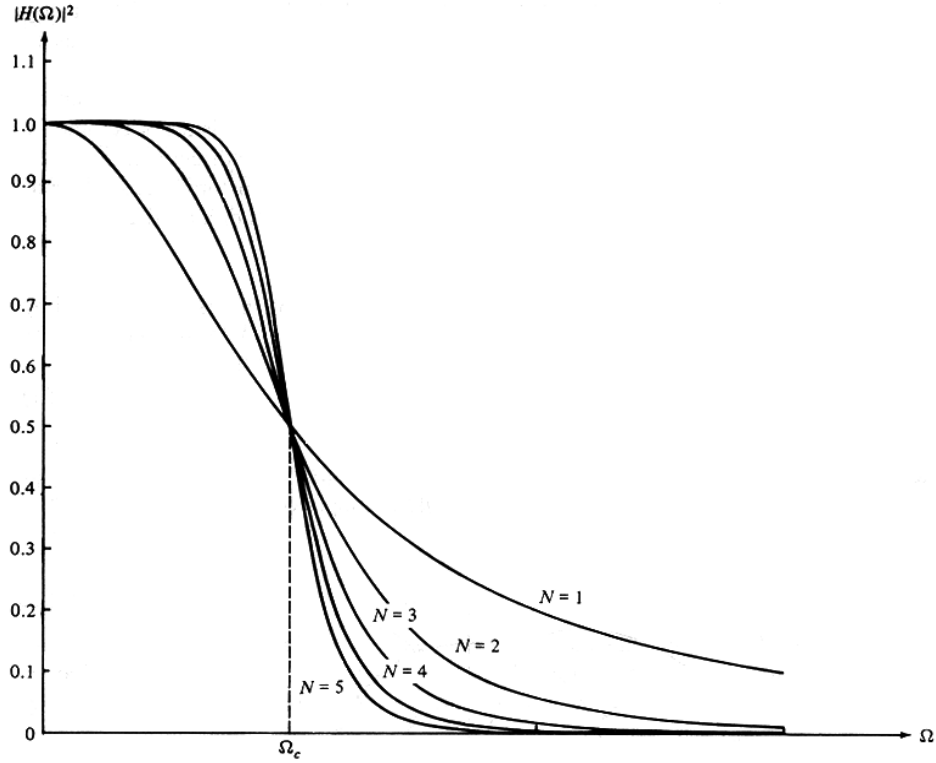
5.4.2.5. Bộ lọc tương tự Butterworth

Định nghĩa bộ lọc Butterworth: Bộ lọc thông thấp Butterworth là loại toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng bình phương biên độ tần số.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (5.72)$$

ở đây N là cấp bộ lọc và Ω_c là tần số ứng với mức -3dB của nó (thường gọi là tần số cắt). Vì $H(s)H(-s)$ ước lượng tại $s = j\Omega$ là đúng bằng $|H(\Omega)|^2$, nên

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2/\Omega_c^2)^N} \quad (5.73)$$



Hình 5.26 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc

Các cực của $H(s)H(-s)$ xuất hiện trên đường tròn bán kính Ω_c tại các điểm cách đều. Từ (5.72), ta tìm được.

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

và từ đó:

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.74)$$

Đặc tuyến đáp ứng biên độ tần số của một lớp bộ lọc Butterworth được trình bày ở hình sau đây với một vài giá trị N . Ta lưu ý rằng $|H(\Omega)|^2$ là đơn điệu trong cả băng thông và băng

chấn. Cấp bộ lọc, cần để đạt suy giảm δ_2 tại tần số đã định Ω_s , được xác định một cách dễ dàng nhờ (5.74). Như vậy, tại $\Omega = \Omega_s$ ta có:

$$\frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = \delta_2^2$$

và vì thế:

$$N = \frac{\log_{10}[(1/\delta_2^2) - 1]}{2\log_{10}(\Omega_s / \Omega_c)} \quad (5.75)$$

Nh vậy các tham số N , δ_2 và tỷ số Ω_s / Ω_c là đặc trưng đầy đủ cho bộ lọc Butterworth.

$$N = \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2\log_{10} 2} = 6,64.$$

5.4.2.6. Bộ lọc tương tự Chebyshev

Có hai loại bộ lọc Chebyshev. Loại I là bộ lọc toàn cực, nó biểu lộ độ gợn sóng đồng đều trong băng thông và có đặc tuyến đơn điệu trong băng chấn. Ngược lại, bộ lọc Chebyshev loại II gồm cả cực không, thể hiện tính đơn điệu trong băng thông và độ gợn sóng đều nhau trong băng chấn. Các điểm không của loại bộ lọc này nằm trên trục ảo thuộc mặt phẳng s .

Bình phương đặc tuyến đáp ứng biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại I là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_c)} \quad (5.75)$$

ở đây ϵ là một tham số của bộ lọc, có liên quan đến gợn sóng trong băng thông; $T_N(x)$ là đa thức Chebyshev bậc N và được định nghĩa như sau:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(Nchx) & |x| > 1 \end{cases} \quad (5.76)$$

Có thể tổng quát hoá đa thức Chebyshev bằng phương trình đệ quy.

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad N = 1, 2, \dots \quad (5.77)$$

ở đây $T_0(x) = 1$ và $T_1(x) = x$. Từ (8.2.57), ta có $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ và vân vân.

Các đa thức này có một số tính chất sau:

$$1. |T_N(x)| \leq 1 \text{ với mọi } |x| \leq 1.$$

$$2. T_N(1) = 1 \text{ với mọi } N$$

$$3. \text{Tất cả các nghiệm của đa thức } T_N(x) \text{ xuất hiện trong khoảng } -1 \leq x \leq 1.$$

Tham số lọc ϵ liên quan tới độ gợn sóng trong băng thông, như minh hoạ ở hình 8.48, với N lẻ và chẵn. Đối với N lẻ, $T_N(0) = 0$ và do đó $|H(0)|^2 = 1$. Mặt khác, với N chẵn, $T_N(0) = 1$ và do đó $|H(0)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$. Tại tần số biên băng $\Omega = \Omega_c$, ta có $T_N(1) = 1$, bởi vậy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

hoặc tương đương

$$\epsilon^2 = \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \quad (5.78)$$

ở đây δ_1 là giá trị gợn sóng trong băng thông

Các cực của bộ lọc Chebyshev loại I nằm trên một elíp thuộc mặt phẳng s với trục chính là:

$$r_1 = \Omega_c \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad (5.79)$$

và trục đối xứng là:

$$r_2 = \Omega_c \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad (5.80)$$

ở đây β quan hệ với ϵ theo phương trình

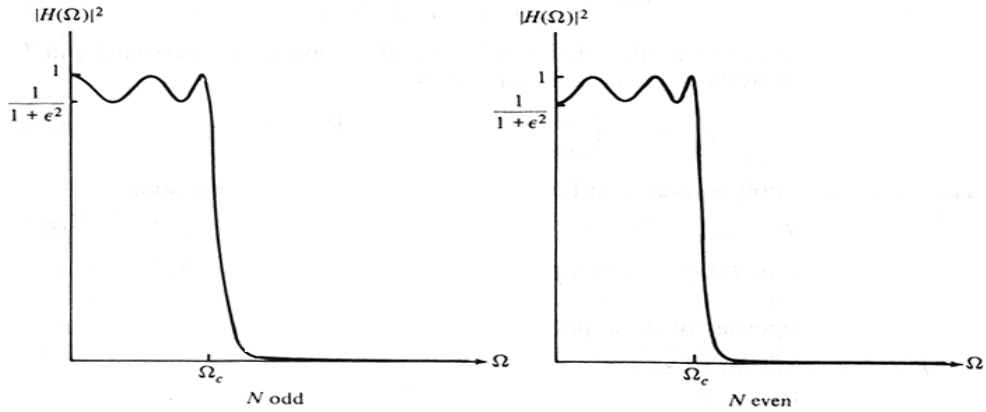
$$\beta = \left[\frac{\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{\epsilon} \right]^{1/N} \quad (5.81)$$

Nếu ký hiệu vị trí góc của các cực bộ lọc Butterworth là:

$$\Phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.82)$$

thì các vị trí cực của bộ lọc Chebyshev sẽ nằm trên elíp tại các toạ độ (x_k, y_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, với

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos \Phi_k & k &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ y_k &= r_1 \sin \Phi_k & k &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.83)$$



Hình 5.27 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại I

Bộ lọc Chebyshev loại II gồm cả các điểm không và các điểm cực.

Bình phương của đáp ứng biên độ tần số là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[T_N^2(\Omega_S / \Omega_c) / T_N^2(\Omega_S / \Omega) \right]} \quad (5.84)$$

ở đây $T_N(x)$ cũng là đa thức Chebyshev bậc N và Ω_S là tần số băng chặn như chỉ ở hình vẽ.

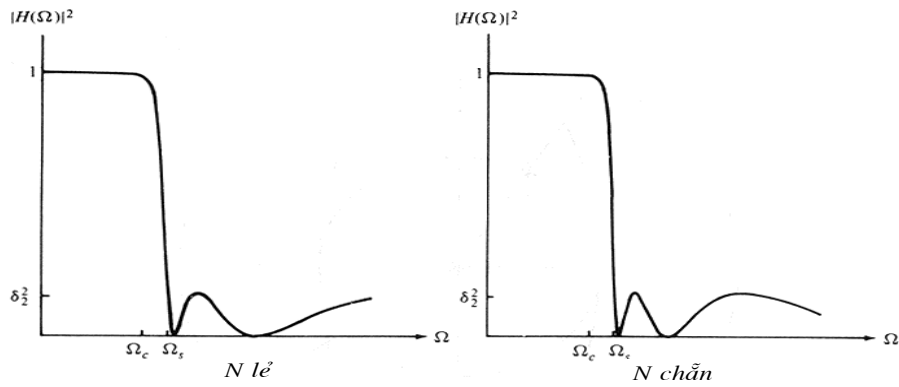
Các không được đặt trên trục ảo, tại các điểm:

$$s_k = j \frac{\Omega_S}{\sin \Phi_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.85)$$

Các điểm cực được đặt tại các toạ độ (v_k, w_k) , ở đây:

$$v_k = \frac{\Omega_S x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.86)$$

$$w_k = \frac{\Omega_S y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.87)$$



Hình 5.28 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại II

5.4.2.7. Bộ lọc tương tự ELIP (Cauer)

Bộ lọc elíp (hay Cauer) có gợn sóng đồng đều trong cả dải thông và dải chặn như minh họa ở hình 8.51 đối với cả N lẻ và chẵn. Loại bộ lọc này bao gồm cả điểm cực, điểm không và được đặc trưng bởi bình phương đáp ứng biên độ tần số như sau:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)} \quad (5.88)$$

ở đây $U_N(x)$ là hàm elíp Jacobian bậc N , nó đã được Zverev tính theo phương pháp lập bảng năm 1967 và ϵ là tham số liên quan tới độ gợn sóng dải thông. Các điểm không nằm trên trục $j\Omega$.

Như đã biết khi thảo luận về bộ lọc FIR, việc tổng hợp có hiệu quả nhất xuất hiện nếu ta trải đều sai số gần đúng suốt băng thông và băng chặn. Bộ lọc elíp thực hiện được mục tiêu này và chính vì thế là hiệu quả nhất theo quan điểm lấy bộ lọc cấp nhỏ nhất của tập chỉ tiêu đã cho. Nói khác đi, với một cấp và một tập chỉ tiêu đã cho, bộ lọc elíp có độ rộng băng chuyển tiếp nhỏ nhất.

Cấp bộ lọc cần thiết để đạt tập chỉ tiêu đã cho theo độ gợn sóng băng thông δ_1 , gợn sóng băng chặn δ_2 , tỷ số chuyển tiếp Ω_c/Ω_s được xác định nh sau:

$$N = \frac{K(\Omega_c/\Omega_s) K \sqrt{1 - \delta_2^2 (1 + \epsilon^2)} / \sqrt{1 - \delta_2^2}}{K(\epsilon \delta_2 / \sqrt{1 - \delta_2^2}) K(\sqrt{1 - (\Omega_c/\Omega_s)^2})} \quad (5.89)$$

ở đây $K(x)$ là tích phân elíp đầy đủ loại một và được tính theo:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.90)$$

Theo quan điểm bộ lọc elíp là tối ưu, người đọc có thể hỏi tại sao lại còn phải xét bộ lọc Butterworth hay Chebyshev trong các ứng dụng thực tiễn. Một lý do quan trọng là các loại bộ lọc này trong một số ứng dụng sẽ cho đặc tuyến đáp ứng pha tốt hơn. Trong băng thông đáp ứng pha của bộ lọc elíp không tuyến tính bằng bộ lọc Butterworth hoặc Chebyshev.

5.4.3. Tổng hợp bộ lọc số IIR bằng biến đổi tần số

Khi thiết kế bộ lọc IIR ta thường bắt đầu bằng bộ lọc thông thấp mẫu rồi sau đó biến đổi bộ lọc này thành các bộ lọc theo yêu cầu.

5.4.3.1. Biến đổi số-số

Từ bộ lọc thông thấp LPF số mẫu nhận được nhờ các phép biến đổi từ các bộ lọc tương tự, ta có thể thực hiện biến đổi các bộ lọc này thành các bộ lọc HPF, BPF và BSF theo yêu cầu. Quá trình biến đổi này đảm bảo tính ổn định của bộ lọc không thay đổi do vòng tròn đơn vị được biến đổi thành chính nó.

Quá trình biến đổi LP2BP, LP2BS sẽ nhận được bộ lọc số có bậc lớn hơn hai lần bậc của bộ lọc LP.

Bảng 5.1 Bảng biến đổi số-số:

Dạng	Tần số cắt	Biến đổi Z	Tham số biến đổi
LP2LP	Ω_c	$\frac{Z - a}{1 - aZ}$	$a = \frac{\sin[0.5(\Omega_D - \Omega_C)]}{\sin[0.5(\Omega_D + \Omega_C)]}$
LP2HP	Ω_c	$\frac{-Z + a}{1 + aZ}$	$a = -\frac{\cos[0.5(\Omega_D + \Omega_C)]}{\cos[0.5(\Omega_D - \Omega_C)]}$
LP2BP	Ω_1, Ω_2	$\frac{-(Z^2 - A_1Z + A_2)}{A_2^2 + A_1Z + 1}$	$K = \frac{\operatorname{tg}[0.5\Omega_D]}{\operatorname{tg}[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]} \quad a = -\frac{\cos[0.5(\Omega_1 + \Omega_2)]}{\sin[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]}$ $A_1 = \frac{2aK}{K+1}; A_2 = \frac{K-1}{K+1}$

Trong đó Ω_D là tần số cắt của bộ lọc thông thấp LP mẫu và tất cả các tần số mẫu đều được tính dưới dạng chuẩn hóa $\Omega = \frac{2\pi f}{f_s}$.

5.4.3.2. Biến đổi trực tiếp đối với thiết kế song tuyến

Ta có thể kết hợp phương pháp song tuyến với biến đổi số-số (D2D) để biến đổi trực tiếp bộ lọc LP mẫu (tần số cắt 1 rad/s) thành các bộ lọc theo yêu cầu bằng phương pháp song tuyến theo bảng sau:

Dạng	Tần số cắt	Ánh xạ S	Tham số biến đổi
LP2LP	Ω_c	$\frac{Z-1}{C(Z+1)}$	$C = \operatorname{tg}(0.5\Omega_c)$
LP2HP	Ω_c	$\frac{C(Z+1)}{Z-1}$	$C = \operatorname{tg}(0.5\Omega_c)$
LP2BP	Ω_1, Ω_2	$\frac{Z^2 - 2\beta Z + 1}{C(Z^2 - 1)}$	$C = \operatorname{tg}[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]$ $\beta = \cos \Omega_0$ Hoặc $\beta = \frac{\cos[0.5(\Omega_1 + \Omega_2)]}{\cos[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]}$
LP2BS	Ω_1, Ω_2	$\frac{C(Z^2 - 1)}{Z^2 - 2\beta Z + 1}$	$C = \operatorname{tg}[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]$ $\beta = \cos \Omega_0$ Hoặc $\beta = \frac{\cos[0.5(\Omega_1 + \Omega_2)]}{\cos[0.5(\Omega_2 - \Omega_1)]}$

Bảng 5.2 Bảng biến đổi trực tiếp với thiết kế song tuyến

5.5. TỔNG KẾT CHƯƠNG VÀ BÀI TẬP

Trong chương này chúng ta tìm hiểu về bộ lọc số. Các nội dung kiến thức cần nhớ trong chương này sẽ được đề cập sau đây:

1. Các bộ lọc số lý tưởng

Trong phần này, chúng ta phải nắm được bốn bộ lọc số lý tưởng thông qua các đáp ứng biên độ của chúng.

Bộ lọc thông thấp:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc thông cao:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc thông dải:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc chắn dải:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Một số vấn đề của bộ lọc số lý tưởng cần lưu ý:

- Đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng có chiều dài vô hạn, và đáp ứng xung này là không nhân quả. Do vậy các bộ lọc số lý tưởng này không thực hiện được trong thực tế.

- Đối với bộ lọc số lý tưởng pha 0 ta có đáp ứng biên độ trùng với đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$$

- Đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng pha 0 đối xứng qua trục tung, đối xứng Helmitte.

- Các đáp ứng xung $h(n)$ của các bộ lọc số lý tưởng pha 0 có quan hệ như sau:

$$\begin{aligned} + h_{HP}(n) &= h_{AP}(n) - h_{LP}(n) \\ + h_{BP}(n) &= h_{AP}(n) - h_{LP}(n) - h_{HP}(n) \\ + h_{BS}(n) &= h_{LP}(n) + h_{HP}(n) \end{aligned}$$

2. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số

Chúng ta phải nắm vững các thông số chỉ tiêu của bộ lọc số thực tế:

+ Tần số giới hạn dải thông ω_P + Độ gợn sóng dải thông δ_1

+ Tần số giới hạn dải thông ω_S + Độ gợn sóng dải thông δ_2

3. Đặc điểm bộ lọc số FIR

Ta chỉ xét bộ lọc số pha tuyến tính, cho nên các bộ lọc số FIR được chia ra làm 4 loại:

- Khi $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại I, $h(n)$ đối xứng.

- Khi $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại II, $h(n)$ đối xứng.
- Khi $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại III, $h(n)$ phản đối xứng
- Khi $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại IV, $h(n)$ phản đối xứng.

Bộ lọc FIR loại I, loại II ta có:

- Tâm đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$ tại : $\alpha = \frac{N-1}{2}$
- $h(n) = h(N-n-1)$

Bộ lọc FIR loại I, loại II ta có:

- Tâm phản đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$ tại : $\alpha = \frac{N-1}{2}$
- $h(n) = -h(N-n-1)$

4. Phương pháp cửa sổ để thiết kế bộ lọc FIR

Nội dung của phương pháp này là dùng cửa sổ để biến đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng thành nhân quả và có chiều dài hữu hạn.

Khi tổng hợp bộ lọc số ta phải lưu ý các tham số:

- Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$.
- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$$

Đây là hai chỉ tiêu đánh giá chất lượng của cửa sổ.

Sau đây ta phải lưu ý bảng tổng kết các tham số và các hàm cửa sổ:

Bảng 5.3 Các tham số quan trọng của một số hàm cửa sổ

Loại cửa sổ	Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$.	Tỷ số λ (dB)
Chữ nhật	$4\pi/N$	-13
Tam giác (Bartlett)	$8\pi/N$	-27

Hanning	$8\pi/N$	-32
Hamming	$8\pi/N$	-43
Blackman	$12\pi/N$	-58

Bảng 5.4 Một số hàm cửa sổ để tổng hợp bộ lọc FIR

Tên cửa sổ	Hàm trong miền n với $0 \leq n \leq N-1$
Bartlett (Tam giác)	$1 - \frac{2\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha - \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}$

5. Bộ lọc số FIR

Ta nhớ rằng bộ lọc này được xây dựng từ bộ lọc tương tự, tức là ta phải xác định được hàm truyền đạt tương tự $H_a(s)$, người ta có 3 phương pháp tổng hợp để xác định $H_a(s)$:

- Butterworth
- Chebyshev
- Elip hay Cauer

Khi có được $H_a(s)$ ta sẽ ánh xạ tương đương sang miền số để có được bộ lọc số IIR bằng 3 phương pháp sau:

- Phương pháp bất biến xung

- Phương pháp biến đổi song tuyến tính
- Phương pháp tương đương vi phân

Các nội dung chính chúng ta cần nhớ trong chương này là:

6. Phương pháp bất biến xung

Khi ta xác định được hàm truyền đạt tương tự của bộ lọc $H_a(s)$, ta sẽ đưa về dạng:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Sau đó hàm truyền đạt $H(z)$ bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp bất biến xung như sau:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}}$$

7. Phương pháp biến đổi song tuyến tính

Hàm truyền đạt $H(z)$ bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp biến đổi song tuyến tính từ $H_a(s)$ theo ánh xạ sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

8. Phương pháp tương đương vi phân

Hàm truyền đạt $H(z)$ bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp biến đổi tương đương vi phân từ $H_a(s)$ theo ánh xạ sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

9. Bộ lọc Butterworth

Bộ lọc thông thấp Butterworth là loại toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng bình phương biên độ tần số.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

ở đây N là cấp bộ lọc và Ω_c là tần số ứng với mức -3dB của nó (thường gọi là tần số cắt).

10. Bộ lọc Chebyshev

Bộ lọc Chebyshev loại I: Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại I là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ở đây ϵ là một tham số của bộ lọc, có liên quan đến gợn sóng trong băng thông; $T_N(x)$ là đa thức Chebyshev bậc N và được định nghĩa như sau:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(Nchx) & |x| > 1 \end{cases}$$

Bộ lọc Chebyshev loại II gồm cả các điểm không và các điểm cực. Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại II là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_c)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]}$$

ở đây $T_N(x)$ cũng là đa thức Chebyshev bậc N và Ω_s là tần số băng chặn.

11. Bộ lọc Elip hay Cauer

Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Elip là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ở đây $U_N(x)$ là hàm elíp Jacobian bậc N ,

Lưu ý: Vì biến đổi tần số có thể được thực hiện trong miền tương tự hoặc trong miền số, nên khi tổng hợp bộ lọc số IIR ta phải chọn phương án hợp lý và cân nhắc đến loại bộ lọc cần tổng hợp. Cụ thể, phương pháp bất biến xung và ánh xạ đạo hàm là không thích hợp trong việc tổng hợp bộ lọc thông cao và nhiều bộ lọc thông dải, vì vấn đề lẫn mẫu. Thay vào đó, cần phải thực hiện ánh xạ từ bộ lọc tương tự vào bộ lọc số thông thấp bằng một trong hai phép ánh xạ này và sau đó thực hiện biến đổi tần số trong miền số. Làm như thế sẽ tránh được sự lẫn mẫu. Khi dùng biến đổi song tuyến tính, việc lẫn mẫu là không thành vấn đề và do đó việc thực hiện phép biến đổi tần số trong miền tương tự hay miền số là không quan trọng.

12. Phương pháp biến đổi tần số

Khi thiết kế bộ lọc IIR ta thường bắt đầu bằng bộ lọc thông thấp mẫu rồi sau đó biến đổi bộ lọc này thành các bộ lọc theo yêu cầu.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 5.1

Cho bộ lọc FIR loại 1 với $N=7$ có đáp ứng xung $h(n)$ được xác định $h(0)=1$, $h(1)=2$, $h(2)=3$, $h(3)=4$.

Tìm α và đáp ứng xung $h(n)$

Bài 5.2

Cho bộ lọc FIR loại 2 với $N=6$ có đáp ứng xung $h(n)$ được xác định $h(0)=1$, $h(1)=2$, $h(2)=3$. Tìm α và đáp ứng xung $h(n)$.

Bài 5.3

Cho bộ lọc FIR loại 3 với $N=7$ có đáp ứng xung $h(n)$ được xác định $h(0)=1$, $h(1)=2$, $h(2)=3$. Tìm α và đáp ứng xung $h(n)$.

Bài 5.4

Cho bộ lọc FIR loại 4 với $N=6$ có đáp ứng xung $h(n)$ được xác định $h(0)=1$, $h(1)=2$, $h(2)=3$. Tìm α và đáp ứng xung $h(n)$.

Bài 5.5

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông cao pha tuyến tính, dùng cửa sổ Barlett với $N = 9$,
 $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.

Bài 5.6

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông cao pha tuyến tính, dùng cửa sổ chữ nhật với $N = 9$,
 $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.

Bài 5.7

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông dải pha tuyến tính, dùng cửa sổ chữ nhật với $N = 9$,
 $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{3}$

Bài 5.8

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR chắn dải pha tuyến tính, dùng cửa sổ tam giác Barlett với $N = 9$,
 $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$

Bài 5.9

Chất lượng của sổ sẽ tốt khi nào:

- a) Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ hẹp và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm: $\lambda = 20\lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$ phải nhỏ.
- b) Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ lớn và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm: $\lambda = 20\lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$ phải nhỏ.
- c) Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ lớn và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm: $\lambda = 20\lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$ lớn.
- d) Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ hẹp và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm: $\lambda = 20\lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$ lớn.

Bài 5. 10

Cửa sổ Hanning có chất lượng kém hơn cửa sổ Hamming vì:

- a) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning lớn hơn cửa sổ Hamming
- b) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning nhỏ hơn cửa sổ Hamming
- c) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning lớn hơn cửa sổ Hamming.
- d) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning nhỏ hơn cửa sổ Hamming.

Bài 5. 11

Cửa sổ Blackman có độ gọn sóng thấp nhất so với các cửa sổ Hanning, Hamming, tam giác và chữ nhật vì:

- a) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman nhỏ nhất.
- b) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman lớn nhất.
- c) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman lớn nhất.

d) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman nhỏ nhất.

Bài 5. 12

Khi thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính thực chất là chúng ta xác định:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| a) Các hệ số của bộ lọc | b) Loại cấu trúc bộ lọc |
| c) Chiều dài của bộ lọc | d) Đặc tính pha của bộ lọc |

Bài 5. 13

Khi thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp cửa sổ, nếu bộ lọc chưa đáp ứng được các chỉ tiêu kỹ thuật thì ta phải:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| a) Thay đổi loại cửa sổ | b) Tăng chiều dài của cửa sổ |
| c) Dùng cả phương pháp a) và b) | d) Thay cấu trúc bộ lọc |

Bài 5. 14

Khi thiết kế, nếu ta tăng chiều dài N của cửa sổ, ta thấy:

- a) Độ gợn sóng ở cả dải thông và dải chắn tăng theo.
- b) Độ gợn sóng ở cả dải thông và dải chắn giảm đi.
- c) Tần số giới hạn dải thông ω_p và tần số giới hạn chắn ω_s gần nhau hơn.
- d) Tần số giới hạn dải thông ω_p và tần số giới hạn chắn ω_s xa nhau hơn.

Bài 5. 15

Cho hàm truyền đạt bộ lọc tương tự: $H_a(s) = \frac{1}{s+1}$

Hãy chuyển sang bộ lọc số bằng phương pháp tương đương vi phân với thời gian lấy mẫu T=0.1

Bài 5. 16

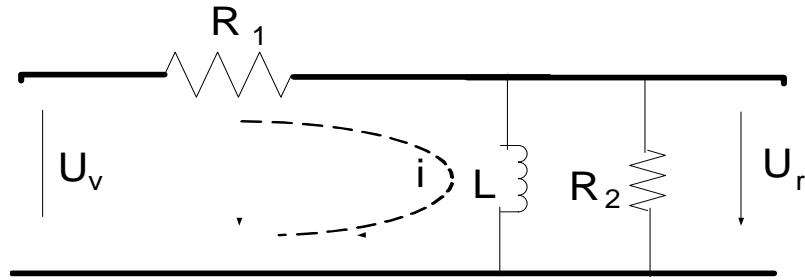
Biến đổi bộ lọc tương tự có hàm hệ thống:

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 9}$$

thành bộ lọc số IIR nhờ phương pháp bất biến xung.

Bài 5. 17

Cho mạch điện sau đây:

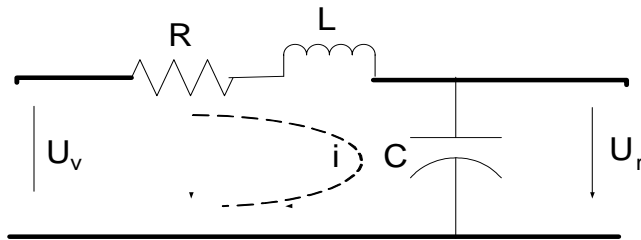


Hình 5.29 Hình bài tập 5.17

Hãy chuyển mạch này thành mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân

Bài 5. 18

Hãy chuyển bộ lọc tương tự sau sang bộ lọc số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.



Hình 5.30 Hình bài tập 5.18

Bài 5. 19

Xác định cấp và các cực của bộ lọc Butterworth thông thấp có độ rộng băng -3dB là 500Hz và độ suy giảm 40dB tại 1000Hz.

Bài 5. 20

Bộ lọc Butterworth được mô tả ở dạng như sau

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}; \quad \text{với các điểm cực } s_{pk} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}$$

Trong đó $H_0 = \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = 1$ (chuẩn hóa)

Hãy xác định hàm truyền đạt $H_a(s)$ khi $n=3$?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Quốc Trung, Giáo trình Xử lý tín hiệu và lọc số tập 1,2, NXB KHKT HN 2001.
- [2]. Hà Thu Lan, Bài giảng Xử lý tín hiệu số, HVCNBCVT 2010
- [3]. Hồ Anh Túy, Xử lý tín hiệu số, NXB KH&KT 1996.
- [4]. Quách Tuấn Ngọc, Xử lý tín hiệu số, NXB Giáo dục 1999.
- [5]. Dương Tử Cường, Xử lý tín hiệu số, NXB KH&KT 2002
- [6]. J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Introduction to digital signal Processing, Macmillan 1989.
- [7]. J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing-Principles, Algorithms and Applications, 3rd Ed, Prentice Hall 1996.
- [8]. V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, Discrete Time Signal Processing, Prentice Hall 1999.
- [9]. Trần Thực Linh, Đặng Hoài Bắc, Giải bài tập Xử lý tín hiệu số và Matlab, NXB Thông tin và Truyền thông 2010.