CHƯƠNG 2: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

2.1. Mở đầu

2.2. Biến đổi Z

2.3. Biến đổi Z ngược

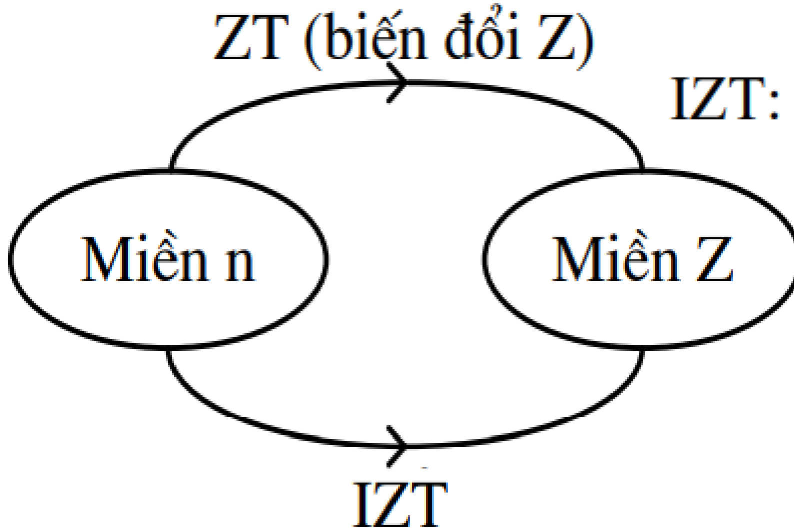
2.4. Các tính chất của biến đổi Z

2.5. Biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền Z

2.1. MỞ ĐẦU

ZT: Z Transform

IZT: Inverse Z Transform



2.2. BIẾN ĐỔI Z

2.2.1. Định nghĩa biến đổi Z

Định nghĩa 1

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

- Miền xác định là các giá trị của z để chuỗi trên hội tụ
- Ký hiệu như sau $ZT[x(n)] = X(z)$ hay $x(n) \xrightarrow{ZT} X(z)$

- Ví dụ:

a. $ZT[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = 1$ xác định với mọi z.

b. $ZT[\delta(n-k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k).z^{-n} = z^{-k}$ xác định với mọi z khác 0

c. $ZT[\delta(n+k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+k).z^{-n} = z^{k}$ xác định với mọi z khác vô cùng

d. $ZT[u(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \dfrac{1}{(1-z^{-1})} = \dfrac{z}{(z-1)} \qquad |z| > 1$

Định nghĩa 2 $$X^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} = ZT^1[x(n).u(n)]$$

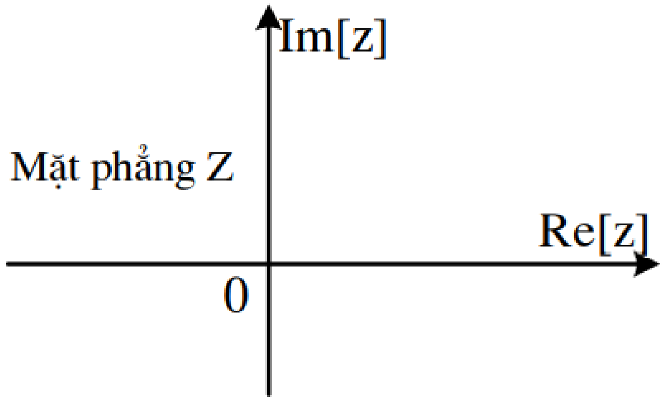
- Miền xác định của hàm $X^1(z)$ là các giá trị của z để chuỗi trên hội tụ

$$ZT^1[x(n)] = X^1(z) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{ZT^1} X^1(z)$$

- Ví dụ:

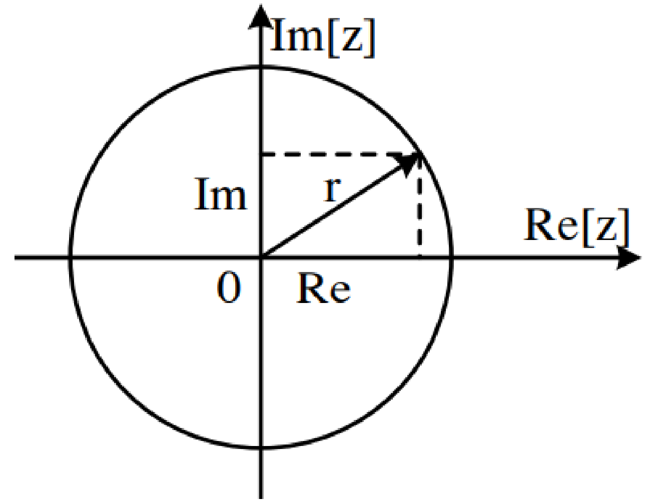
a. $ZT^1[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = 1$

phần thực, phần ảo Re[z], Im[z]



$$z = \text{Re}[z] + j.\text{Im}[z]$$

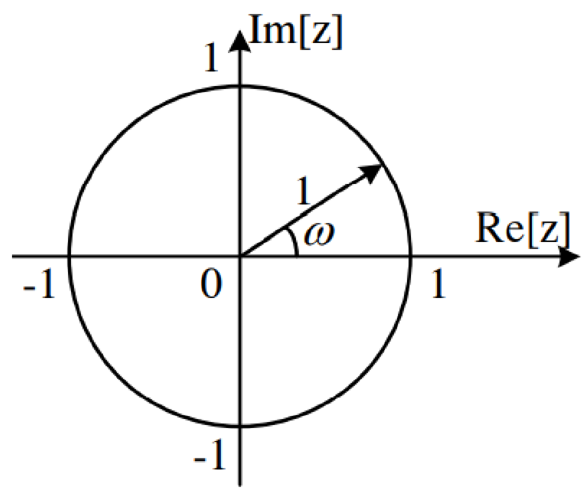
Biểu diễn theo tọa độ cực



$$z = re^{j\omega} = r(\cos\omega + j\sin\omega) = r\cos\omega + j\sin\omega = \text{Re}[z] + \text{Im}[z]$$

Trường hợp đặc biệt: $|z| = r = 1$

có vòng tròn đơn vị



- Ví dụ:

a. $ZT^1[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = 1$

b. $ZT^1[\delta(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-k).z^{-n} = z^{-k}$

c. $ZT^1[\delta(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n+k).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.z^{-n} = 0$

d. $ZT^1[u(n-3)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n-3).z^{-n} = \sum_{n=3}^{\infty} z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-3} = z^{-3}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z^2(z-1)}$

2.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Z

Miền hội tụ của biến đổi *Z*

- Tập hợp tất cả các giá trị của biến số phức z mà tại đó các chuỗi X(Z) hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z.
- Ký hiệu là : *RoC[X(z)]* hoặc *RC*
- Để tìm miền hội tụ của chuỗi trên cần sử dụng tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số.

$$x_1(n)=\delta(n)\,;\,x_2(n)=\delta(n-1)\,;\,x_3(n)=\delta(n+1)\,;\,x_4(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\,;\,x_5(n)=2^n u(n)$$

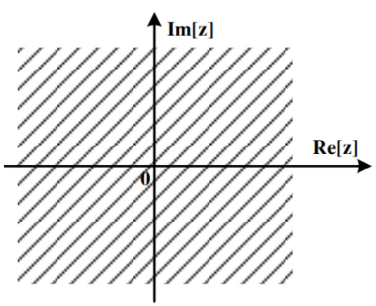
$$X_1(z)=ZT\left[x_1(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1.z^0=1$$

$$X_2(z)=ZT\left[x_2(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-1)z^{-n}=1.z^{-1}=z^{-1}$$

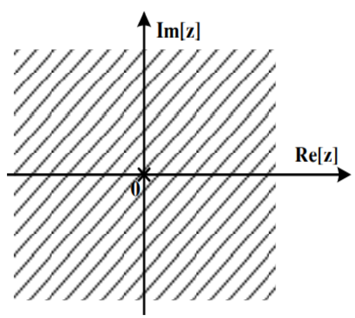
$$X_3(z)=ZT\left[x_3(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}=1.z^{1}=z$$

$$X_4(z)=ZT\left[x_4(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad \text{Với } |z|>\frac{1}{2}$$

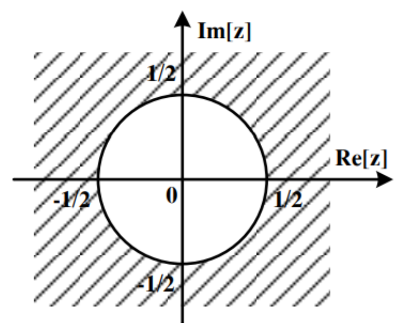
$$X_5(z)=ZT\left[x_5(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^n z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(2z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-2z^{-1}}\quad \text{với } |z|>2$$



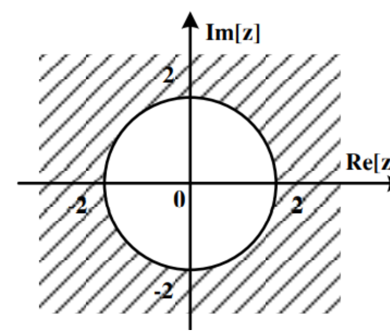
RC $X_1(z)$, $X_3(z)$



$RC\left[X_2(z)\right]$



$RC\left[X_4(z)\right]$



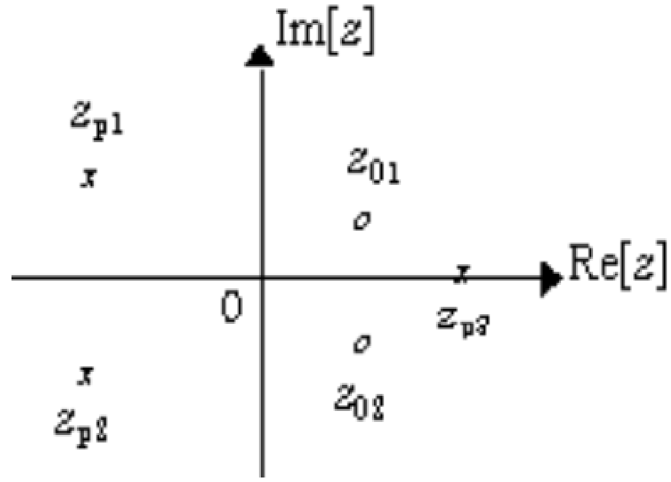
$RC\left[X_5(z)\right]$

2.2.3. Điểm cực và điểm không

$$N(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_M z^M$$

$$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^{N}(z - z_{pk})}$$



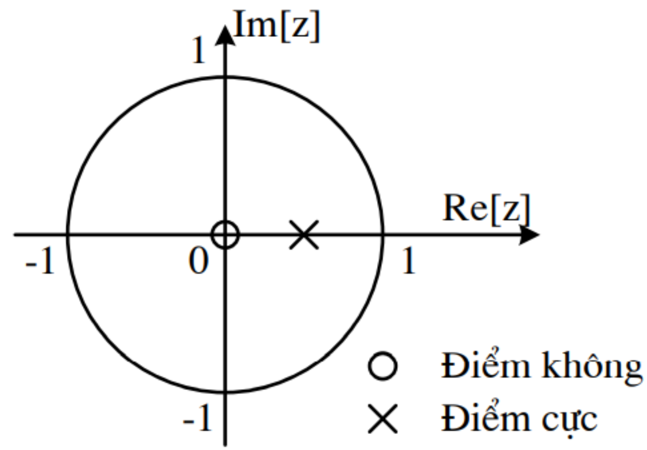
- Phương trình $N(z) = 0$ có M nghiệm là z_{0k} gọi là điểm không của hàm *X(z)*
- $D(z) = 0$ có N nghiệm z_{pr} là gọi là điểm cực của *X(z)*

Ví dụ

Cho $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$. Tìm điểm cực và điểm không?

Biến đổi:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}};N(z)=z\to z_{01}=0;D(z)=z-\frac{1}{2}\to z_{p1}=\frac{1}{2}$$



2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

2.3.1. Định nghĩa IZT

$$x(n)=IZT[X(Z)]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{(n-1)}dz$$

$$IZT[X(z)]=x(n) \qquad X(z)\xrightarrow{IZT}x(n)$$

2.3.2. Các phương pháp tính IZT

Các phương pháp tìm biến đổi *Z* ngược :

- Phương pháp thặng dư.
- Phương pháp khai triển *X(z)* thành chuỗi lũy thừa
- Phương pháp phân tích *X(z)* thành tổng các phân thức đơn giản.

Phương pháp phân tích X(z) thành phân thức tối giản

$X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$; Bậc của N(z) là M, bậc của D(z) là N

* M ≥ N: Để phân thức tối giản thì: $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)} = S(z) + \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

* M < N: $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)} \equiv \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

- Trường hợp 1: X(z) chỉ có các cực đơn $X(z) = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{A_k}{z - z_{pk}}$

$$A_k = (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \bigg|_{z=z_{pk}}$$

z_{pk} : điểm cực của Q(z), có N cực

- Trường hợp 2: X(z) có một cực bội, còn lại là đơn

X(z) có một cực bội là z_{pl} bậc s $\quad X(z) = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{j=1}^{s} \frac{C_j}{(z - z_{pl})^j}$

z_{pl} : Cực bội bậc s; z_{pk} : Cực đơn

$$A_k = (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \bigg|_{z=z_{pk}} \qquad C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} \left[(z - z_{pl})^s \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \bigg|_{z=z_{pl}}$$

- Trường hợp 3: X(z) có L cực bội

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N'} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{C_{js_i}}{(z - z_{pl_i})^j}$$

Ví dụ

Cho $X(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 3z + 2}$, hãy tìm x(n).

phân tích X(z)/z thành phân thức tối giản:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+2}{\left(z^2-3z+2\right)z}$$ có 3 điểm cực $z_{p1}=1,\ z_{p2}=2,\ z_{p3}=0$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+2}{(z-1)(z-2)z}=\frac{A_1}{(z-1)}+\frac{A_2}{z-2}+\frac{A_3}{z}$$

$$A_1=\cancel{(z-1)}\left.\frac{z+2}{\cancel{(z-1)}(z-2)z}\right|_{z=1}=-3$$

$$A_2=\cancel{(z-2)}\left.\frac{z+2}{(z-1)\cancel{(z-2)}z}\right|_{z=2}=2 \qquad A_3=\cancel{z}\left.\frac{z+2}{(z-1)(z-2)\cancel{z}}\right|_{z=0}=1$$

Vậy: $$\frac{X(z)}{z}=\frac{-3}{(z-1)}+\frac{2}{z-2}+\frac{1}{z} \qquad X(z)=\frac{-3z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}+1$$

Vì $$\frac{z}{z-\alpha}\leftrightarrow \alpha^n u(n)$$

$$x(n)=(-3).(1)^n u(n)+2.2^n u(n)+\delta(n)$$

2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

TT	Tính chất	Miền n	Miền z
1	Định nghĩa	$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{-1}dz$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$
2	Tuyến tính	$ax_1(n)+bx_2(n)$; a,b là hằng số	$aX_1(z)+bX_2(z)$
3	Trễ thời gian n	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
4	Thay đổi tỷ lệ trong miền Z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
5	Vi phân trong miền Z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$
6	Dãy liên hợp phức	x*(n) ; (*: liên hợp phức)	X*(z*)
7	Đảo biến	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
8	Tích chập trong miền n	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z).X_2(z)$
9	Tích chập trong miền Z	$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$
10	Tương quan tín hiệu	$x_1(n)*x_2(-n)$	$X_1(z).X_2\left(\frac{1}{z}\right)$

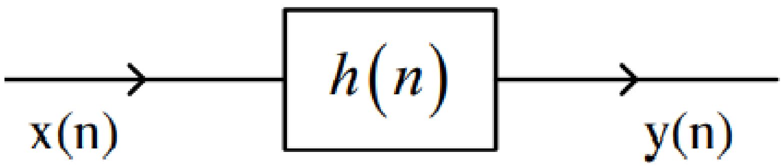
Biến đổi Z của các dãy nhân quả thường gặp

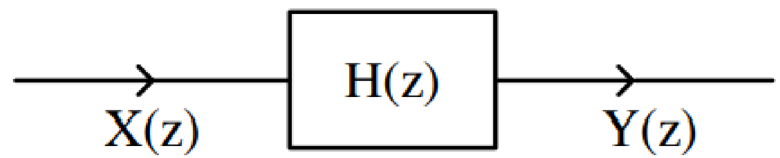
Dãy hàm gốc	**Hàm ảnh Z**	**Miền hội tụ**
$\delta(n)$	1	Toàn bộ mặt phẳng z
$\delta(n-k)$	z^{-k}	$\lvert z \rvert \neq 0 \quad$ (với $k > 0$)
$u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)} = \dfrac{1}{(1-z^{-1})}$	$\lvert z \rvert > 1$
$u(n-k)$	$\dfrac{1}{z^{(k-1)}(z-1)} = \dfrac{z^{-k}}{(1-z^{-1})}$	$\lvert z \rvert > 1$
$rect_N(n)$	$\dfrac{z^N - 1}{z^{(N-1)}(z-1)} = \dfrac{1-z^{-N}}{(1-z^{-1})}$	$\lvert z \rvert > 1$

Dãy hàm gốc	Hàm ảnh Z	Miền hội tụ
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{(z-a)} = \dfrac{1}{(1-a.z^{-1})}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n.u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$n.a^n u(n)$	$\dfrac{a.z}{(z-a)^2} = \dfrac{a.z^{-1}}{(1-a.z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$u(n).\cos(\omega_0 n)$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{(z^2-2z\cos\omega_0+1)}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n).\sin(\omega_0 n)$	$\dfrac{z\sin\omega_0}{(z^2-2z\cos\omega_0+1)}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\delta(n+k)$	z^k	$\lvert z\rvert < \infty$ (với $k>0$)
$u(-n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(z^{-1}-1)} = \dfrac{1}{(1-z)}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^{-n}u(-n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(z^{-1}-a)} = \dfrac{1}{(1-a.z)}$	$\lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
$a^n u(-n)$	$\dfrac{a.z^{-1}}{(a.z^{-1}-1)} = \dfrac{a}{(a-z)}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n.u(-n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(z^{-1}-1)^2} = \dfrac{z}{(1-z)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$

2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.5.1. Hàm truyền đạt *H(z)*





$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

$$h(n) = IZT\,[H(z)]$$

2.5.2. Hệ thống tuyến tính bất biến trong miền Z

Xét phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$ZT\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right] = ZT\left[\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)\right]$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

Ta rút ra:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Nếu $a_0 = 1$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

2.5.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z

Như vậy, về nguyên tắc nếu có x(n) ta tìm được X(Z), Y(Z) và tìm lại y(n)

Ví dụ Cho phương trình sai phân: $y(n)-5y(n-1)=x(n)$

Tìm y(n) khi $x(n)=5^n.u(n)$ và điều kiện đầu y(-1)=0?

Ta có: $x(n)=5^n.u(n)$ nên $X(Z)=\dfrac{1}{1-5Z^{-1}}$

$y(n)-5y(n-1)=x(n)$ nên $H(Z)=\dfrac{1}{1-5Z^{-1}}$

Vậy: $Y(Z)=X(Z).H(Z)=\dfrac{1}{(1-5Z^{-1})^2}$

$$y(n)=IZT[Y(Z)]=IZT[\frac{1}{(1-5Z^{-1})^2}]=5^n(n+1).u(n)$$

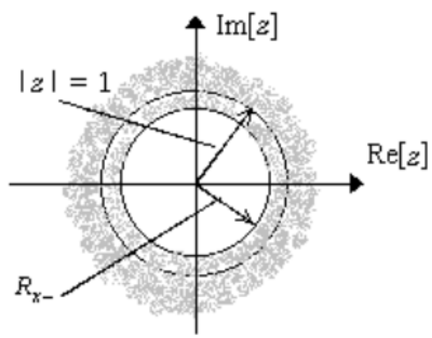
2.5.4. Độ ổn định

Điều kiện ổn định trong miền thời gian rời rạc n:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

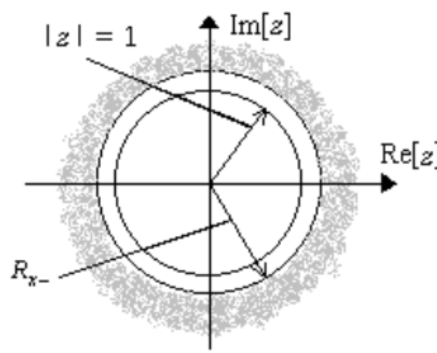
Điều kiện ổn định trong miền z:

- Điều kiện đủ để hệ xử lý số TTBBNQ ổn định là tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt H(z) đều nằm trong vòng tròn đơn vị |z|= 1
- Điều kiện đủ để hệ xử lý số TTBBNQ ổn định là vòng tròn đơn vị |z|= 1 nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt H(z) .



$$R_{x-} < |z| = 1$$

Hệ ổn định



$$R_{x-} \geq |z| = 1$$

Hệ không ổn định

Ví dụ Cho HTTTBB được mô tả bởi phương trình sai phân

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm hàm truyền đạt H(z), tìm h(n) và xét ổn định trong miền z

Lấy biến đổi z cả hai vế $Y(z) = Az^{-1}Y(z) + X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - Az^{-1}} = \frac{z}{z - A}$$, điểm cực z = A

$$h(n) = \text{IZT}\left[H(z)\right] = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Xét ổn định: $D(z) = z - A \rightarrow z_{p1} = A$

$A < 1 \rightarrow$ Hệ thống ổn định

$A \geq 1 \rightarrow$ Hệ thống không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Jury

gọi $D(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}$

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Từ các hệ số a_k của D(z) lập bảng Jury có 2N – 3 hàng

Hàng	Hệ số							
1	1	a_1	a_2	a_3	$\ldots$		a_{N-1}	a_N
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	a_{N-3}	$\ldots$		a_1	1
3	c_0	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{N-2}	c_{N-1}	
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	c_{N-4}	$\ldots$	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	d_3	$\ldots$			
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	d_{N-5}	$\ldots$			
$\vdots$	$\vdots$							
$2N-3$	r_0	r_1	r_2					

$$c_i = \det\begin{bmatrix} 1 & a_{N-1} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = a_i - a_N . a_{N-i} ; \qquad i: 0 \to \mathrm{N}-1$$

$$d_i = \det\begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = c_0 c_i - c_{N-1} . c_{N-1-i} ; \qquad i: 0 \to \mathrm{N}-2$$

Một hệ thống là ổn định nếu và chỉ nếu

1. $\mathrm{D(z)}\big|_{z=1} > 0$

2. $\mathrm{D(z)}\big|_{z=-1} > 0$ với N chẵn

   $\mathrm{D(z)}\big|_{z=-1} < 0$ với N lẻ

3. $1 > |\mathrm{a_N}|$

   $|\mathrm{c_0}| > |\mathrm{c_{N-1}}|$

   $|\mathrm{d_0}| > |\mathrm{d_{N-2}}|$

   ....

   $|\mathrm{r_0}| > |\mathrm{r_2}|$

Chỉ cần không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên là hệ thống không ổn định

Ví dụ Cho HTTTBB $y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=x(n)$

Tìm H(z) Xét ổn định theo tiêu chuẩn Jury

Lấy biến đổi z cả 2 vế $Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)=X(z)$

$$Y(z)\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\right)=X(z) \qquad H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

Ta có: $D(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$

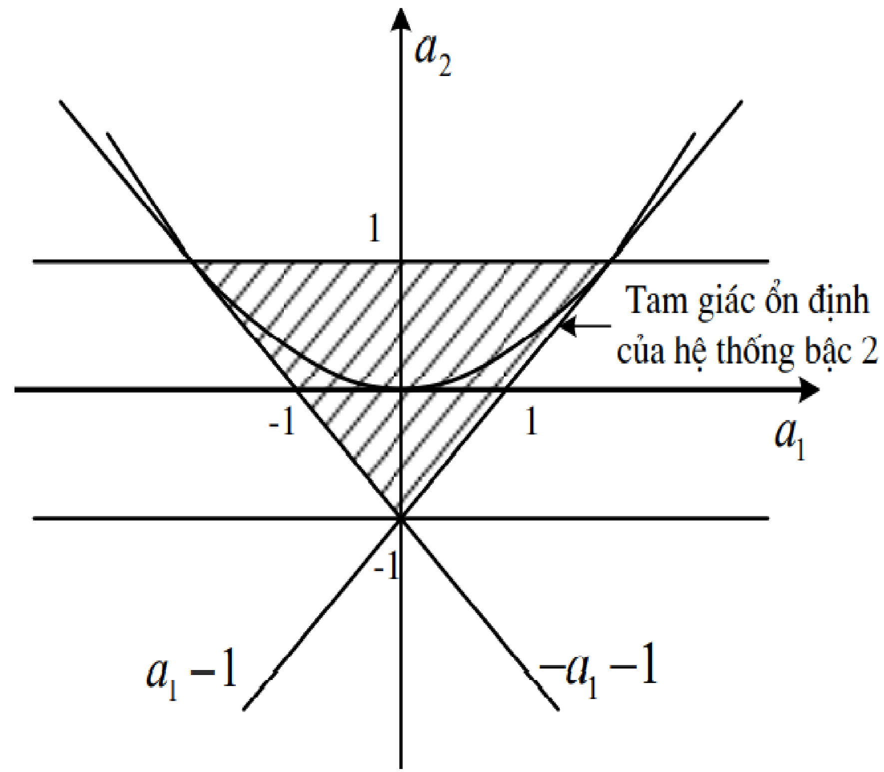
1. $D(z)\big|_{z=1}=1+a_1+a_2>0$

   $\Rightarrow a_2>-(1+a_1)$

2. $D(z)\big|_{z=-1}=1-a_1+a_2>0$

   $\Rightarrow a_2>-(1-a_1)$ N chẵn

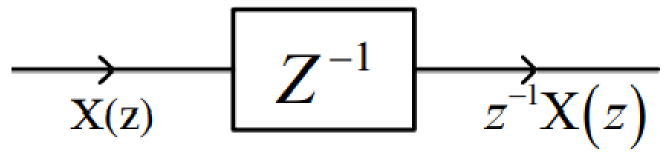
3. $1>|a_2|\Rightarrow -1<a_2<1$



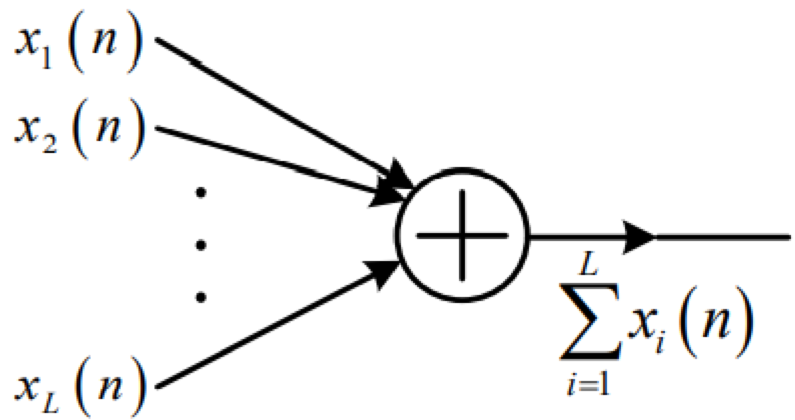
2.5.5. Thực hiện hệ thống trong miền Z

Các phần tử thực hiện

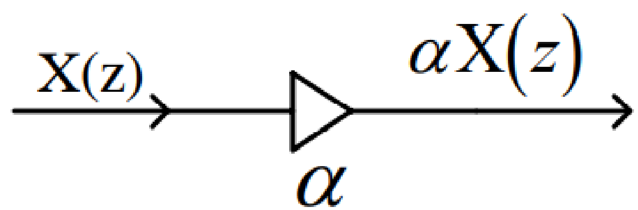
Phần tử trễ:



Phần tử cộng:



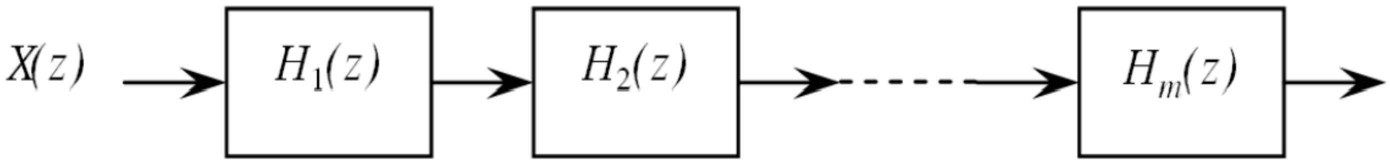
Phần tử nhân với hằng số:



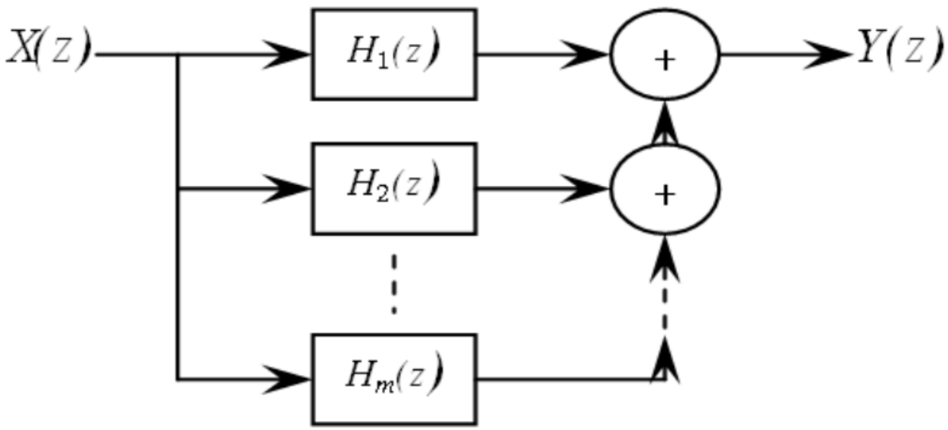
Hàm hệ thống *H(z)* của các khối liên kết nối tiếp

$$Y(z) = X(z).H_1(z).H_2(z)......H_m(z) = X(z).H(z)$$

$$H(z) = \prod_{i=1}^{m} H_i(z)$$



Hàm hệ thống *H(z)* của các khối liên kết song song

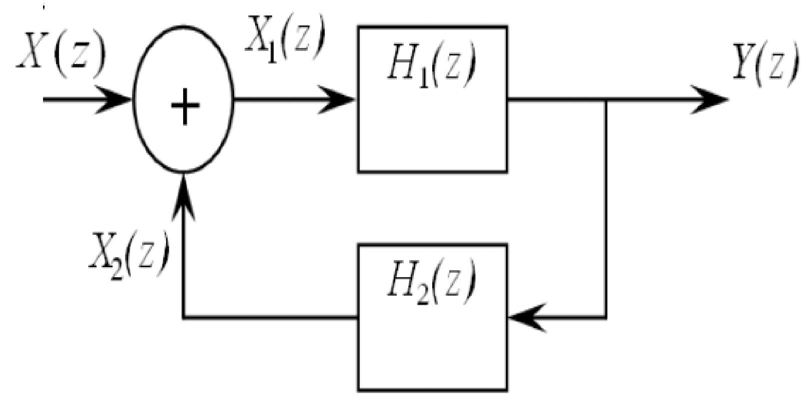


$$Y(z) = X(z).H_1(z) + X(z).H_2(z) + \ldots + X(z).H_m(z)$$

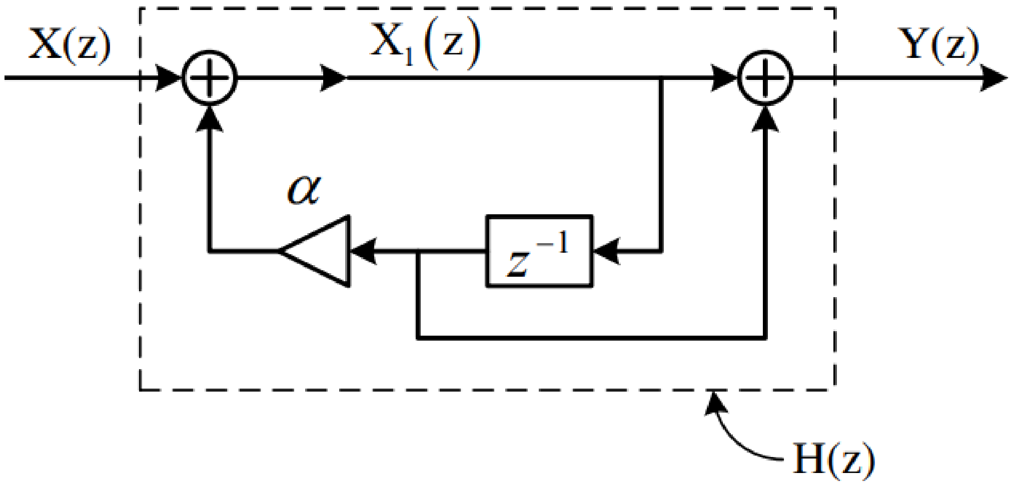
$$Y(z) = X(z).\left[H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_m(z)\right] = X(z).H(z)\,; H(z) = \sum_{i=1}^{m} H_i(z)$$

Hàm hệ thống *H(z)* của vòng phản hồi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z).H_2(z)}$$



Ví dụ Cho hệ thống rời rạc



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \underbrace{\frac{z}{z-\alpha}}_{\alpha^n u(n)} + z^{-1}\underbrace{\frac{z}{z-\alpha}}_{\alpha^{n-1}u(n-1)}$$

$$\mathrm{h}(n) = \alpha^n u(n) + \alpha^{n-1} u(n-1)$$