

XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Tuần 10

Giảng viên: Lê Ngọc Thúy

Nội dung

CHƯƠNG 3: BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

- ☐ Biến đổi Fourier của dãy tuần hoàn
- ☐ DFT của dãy có chiều dài hữu hạn
- ☐ Giải thuật FFT

Độ phức tạp tính toán của DFT

Độ phức tạp tính toán của DFT

✓ Công thức tính DFT N điểm:

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

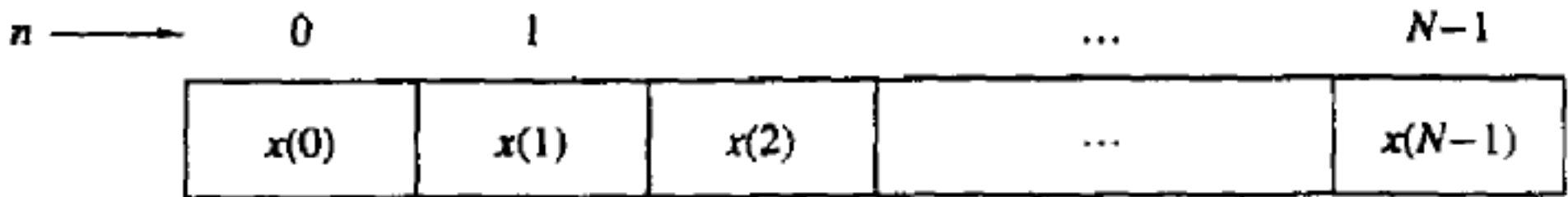
✓ Độ phức tạp tính toán:

- $2 N^2$ phép tính lượng giác.
- $4 N^2$ phép nhân.
- $4N(N - 1)$ phép cộng.

Các giải thuật FFT

Phương pháp “chia để trị”

- ✓ Phân tích DFT N điểm thành các DFT với số điểm ít hơn để tính toán hiệu quả hơn.
- ✓ Giả sử: $N = L.M$
- ✓ Sắp xếp dãy N xung tín hiệu $x(n)$ thành mảng 2 chiều $x(l, m)$:
 - Theo chiều hàng: $n = M l + m$
 - Theo chiều cột: $n = l + m L$



Xếp dãy xung theo hàng

	0	1	2	...	$M - 1$
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$...	$x(M - 1)$
1	$x(M)$	$x(M + 1)$	$x(M + 2)$...	$x(2M - 1)$
2	$x(2M)$	$x(2M + 1)$	$x(2M + 2)$...	$x(3M - 1)$
	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
$L - 1$	$x((L - 1)M)$	$x((L - 1)M + 1)$	$x((L - 1)M + 2)$...	$x(LM - 1)$

Xếp dãy xung theo cột

	0	1	2	...	$M - 1$
0	$x(0)$	$x(L)$	$x(2L)$...	$x((M - 1)L)$
1	$x(1)$	$x(L + 1)$	$x(2L + 1)$...	$x((M - 1)L + 1)$
2	$x(2)$	$x(L + 2)$	$x(2L + 2)$...	$x((M - 1)L + 2)$
...
$L - 1$	$x(L - 1)$	$x(2L - 1)$	$x(3L - 1)$...	$x(LM - 1)$

Phương pháp “chia để trị”

- ✓ Phân tích DFT N điểm thành các DFT với số điểm ít hơn để tính toán hiệu quả hơn.
- ✓ Giả sử: $N = L.M$
- ✓ Sắp xếp dãy N xung tín hiệu $x(n)$ thành mảng 2 chiều $x(l, m)$:
 - Theo chiều hàng: $n = M l + m$
 - **Theo chiều cột: $n = l + m L$**
- ✓ Sắp xếp dãy giá trị DFT $X(k)$ thành mảng 2 chiều $X(p, q)$:

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)}$$

Phương pháp “chia để trị”

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)}$$

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)} = W_N^{MLmp} W_N^{mLq} W_N^{Mpl} W_N^{lq}$$

$$W_N^{Nmp} = 1, W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}, W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$$

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp}$$

So sánh độ phức tạp tính toán

✓ Độ phức tạp tính toán DFT:

- $2 N^2$ phép tính lượng giác.
- $4 N^2$ phép nhân.
- $4N(N - 1)$ phép cộng.

✓ Độ phức tạp tính toán theo phương pháp “chia để trị”:

- $N (M + L + 1)$ phép nhân.
- $N (M + L - 2)$ phép cộng.

Thuật toán FFT theo thời gian

- ✓ Sử dụng thuật toán chia để trị
- ✓ Sắp xếp dãy N xung tín hiệu $x(n)$ theo chiều cột
- ✓ Mảng sắp xếp có $M=N/2$ cột, $L=2$ hàng

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo thời gian

$$F_1(k + N/2) = F_1(k)$$

$$F_2(k + N/2) = F_2(k)$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

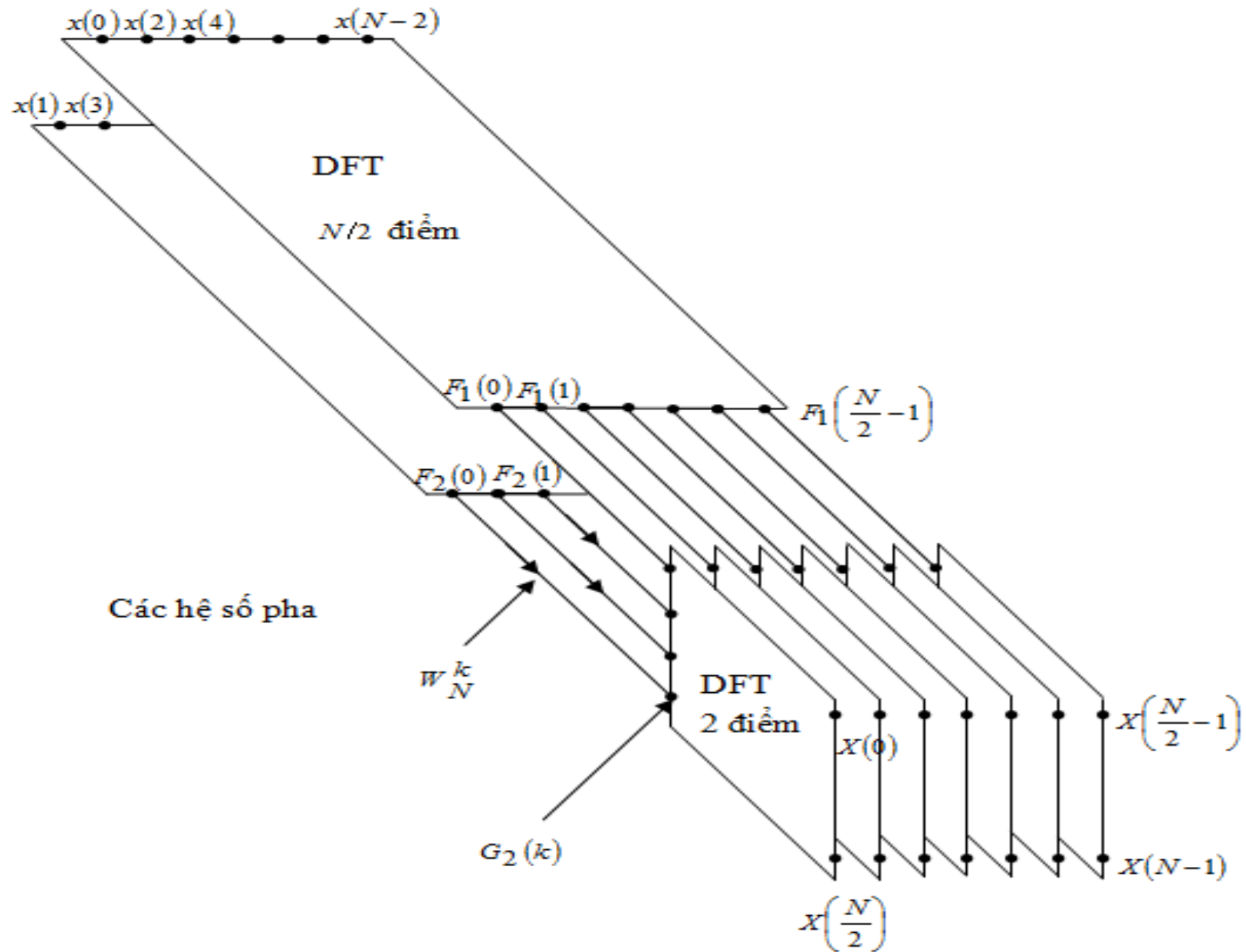
$$G_1(k) = F_1(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$G_2(k) = W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

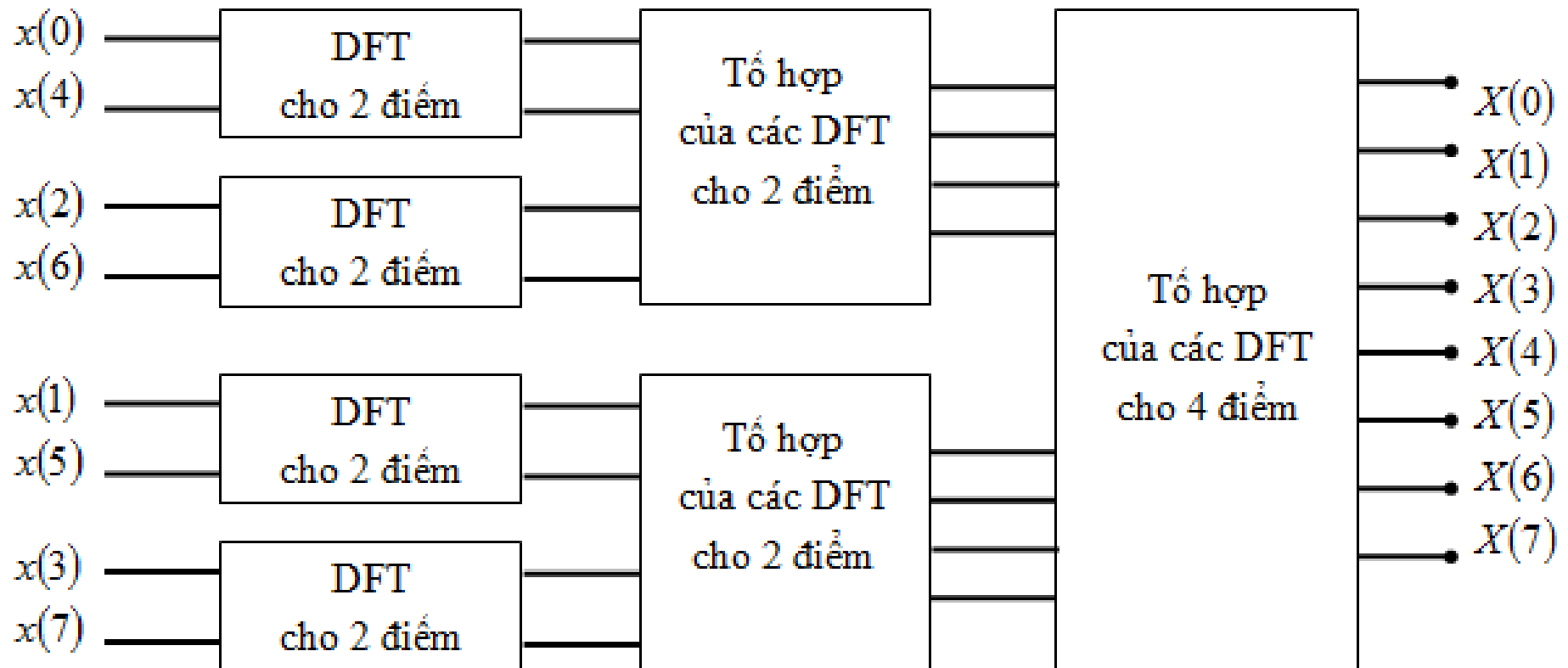
$$X(k) = G_1(k) + G_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = G_1(k) - G_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

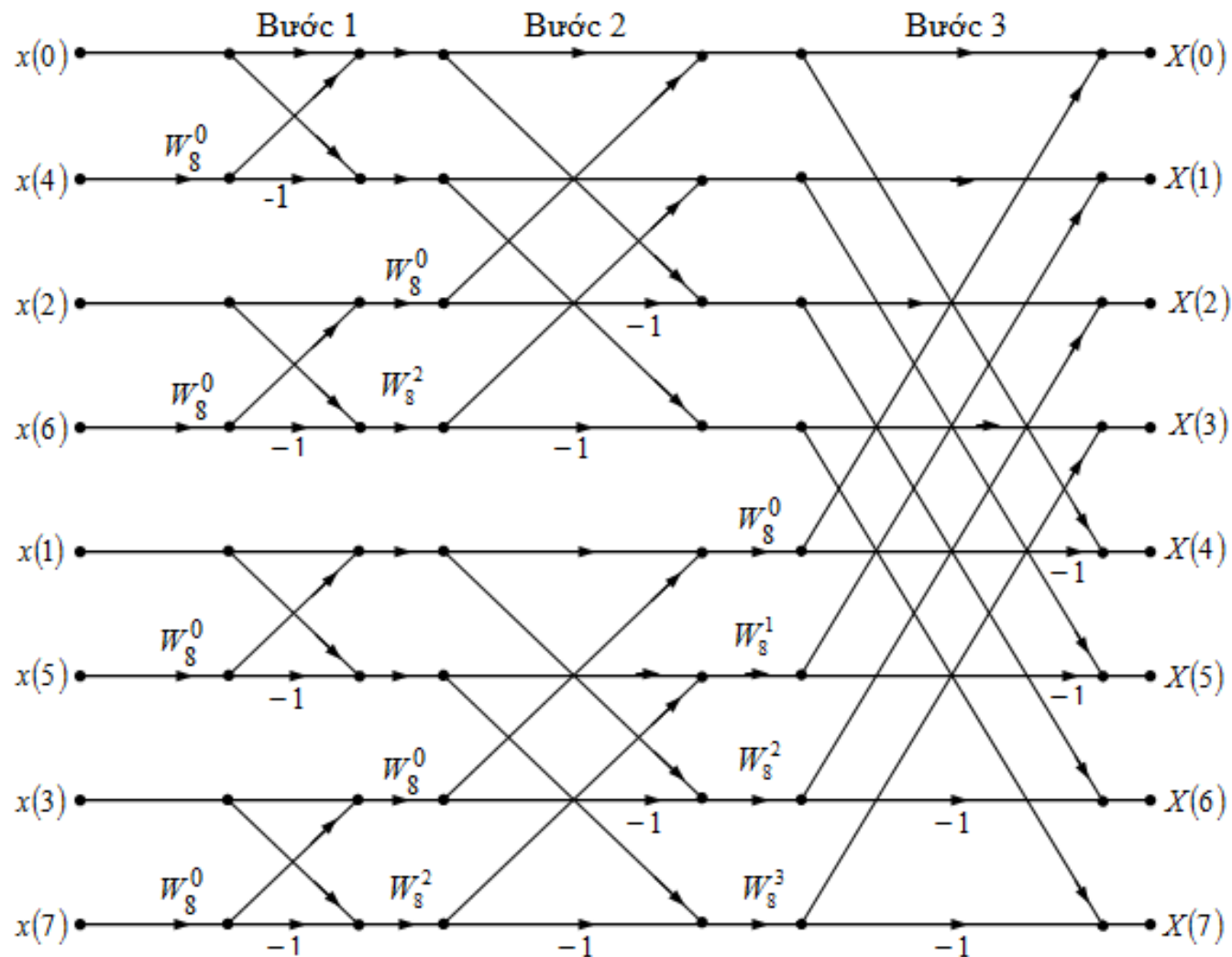
Nguyên tắc tính FFT N điểm cơ số 2 theo thời gian



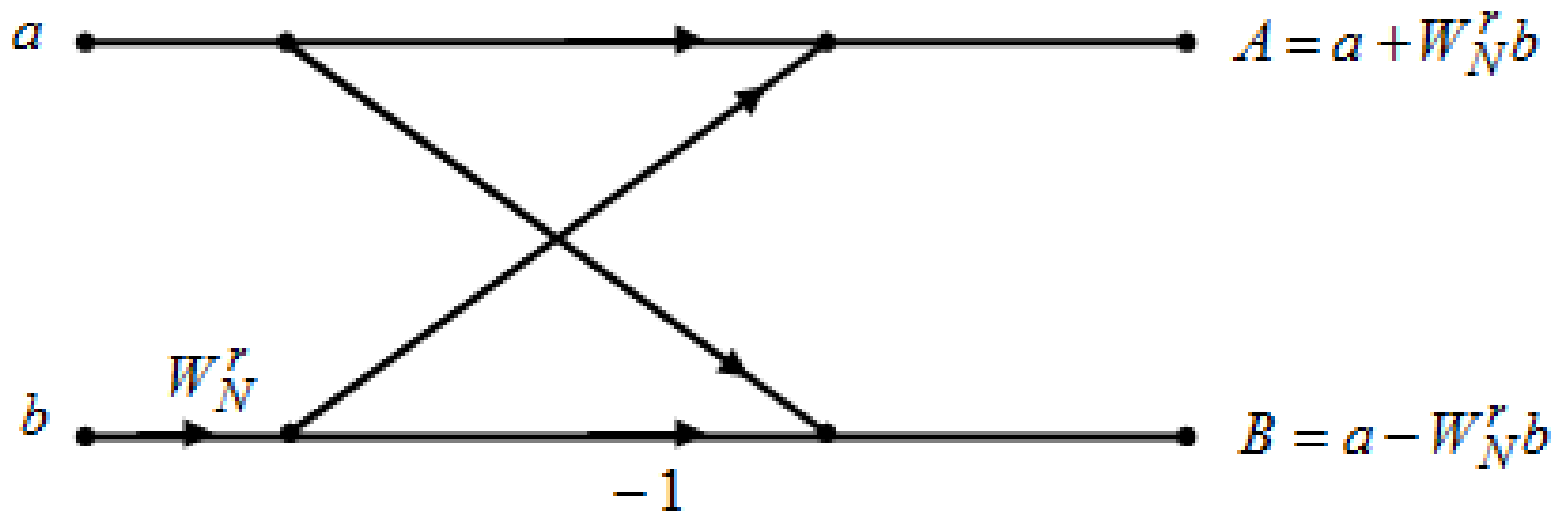
Nguyên tắc FFT 8 điểm theo thời gian



Sơ đồ FFT 8 điểm theo thời gian



Sơ đồ cánh bướm FFT cơ số 2 theo thời gian



Với $N = 2^v$ thì có :

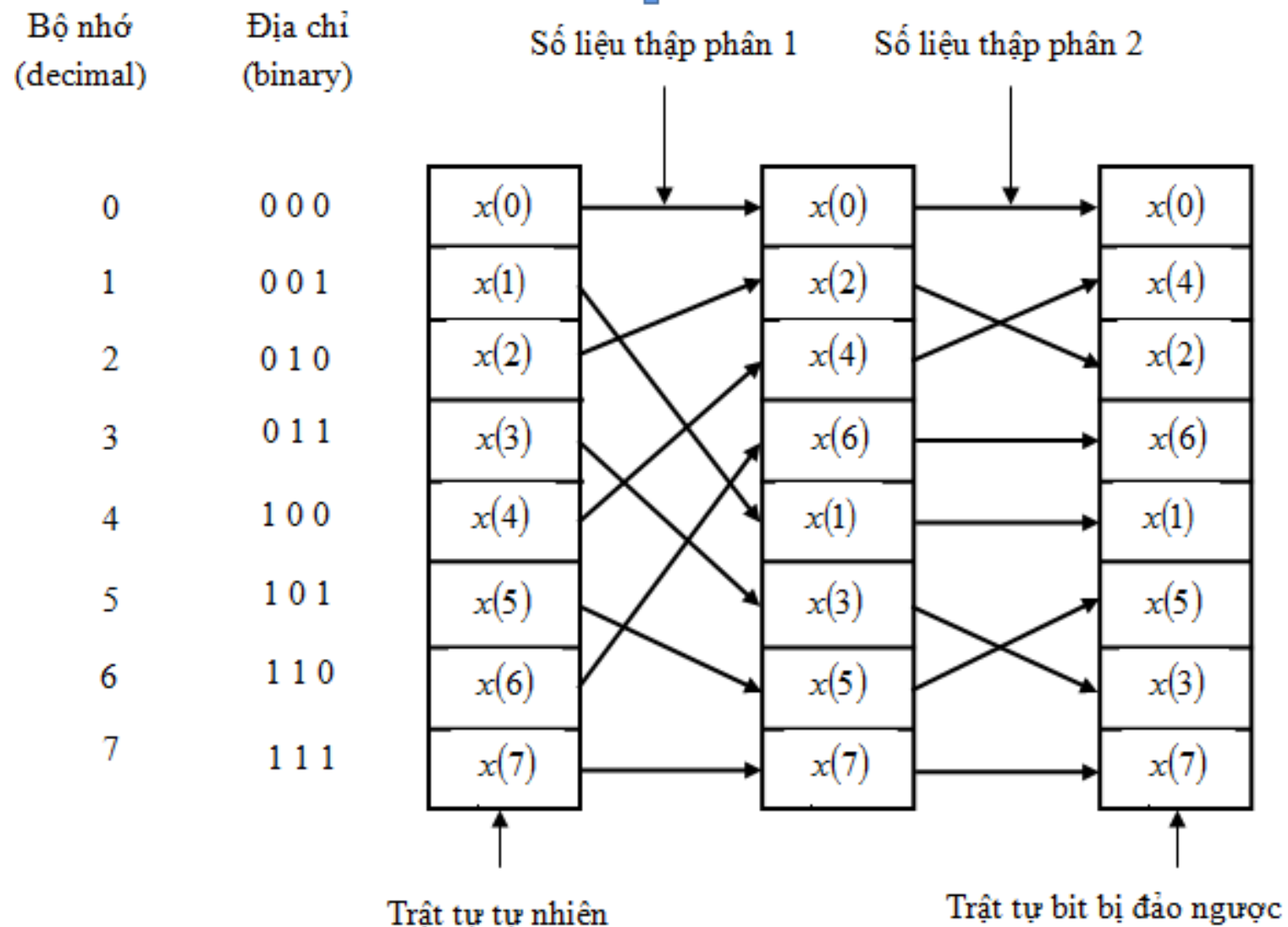
+ $N/2$ cánh bướm cho mỗi bước tính

+ $\log_2 N$ bước

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo thời gian

Number of Points, N	Complex Multiplications in Direct Computation, N^2	Complex Multiplication in FFT Algorithm, $(N/2) \log_2 N$
4	16	4
8	64	12
16	256	32
32	1,024	80
64	4,096	192
128	16,384	448
256	65,536	1,024
512	262,144	2,304
1,024	1,048,576	5,120

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo thời gian



Thuật toán FFT theo tần số

- ✓ Sử dụng thuật toán chia để trị
- ✓ Sắp xếp dãy N xung tín hiệu $x(n)$ theo chiều cột
- ✓ Mảng sắp xếp có $M=2$ cột, $L=N/2$ hàng

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo tần số

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + W_N^{Nk/2} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right)W_N^{kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn}$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \right\} W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

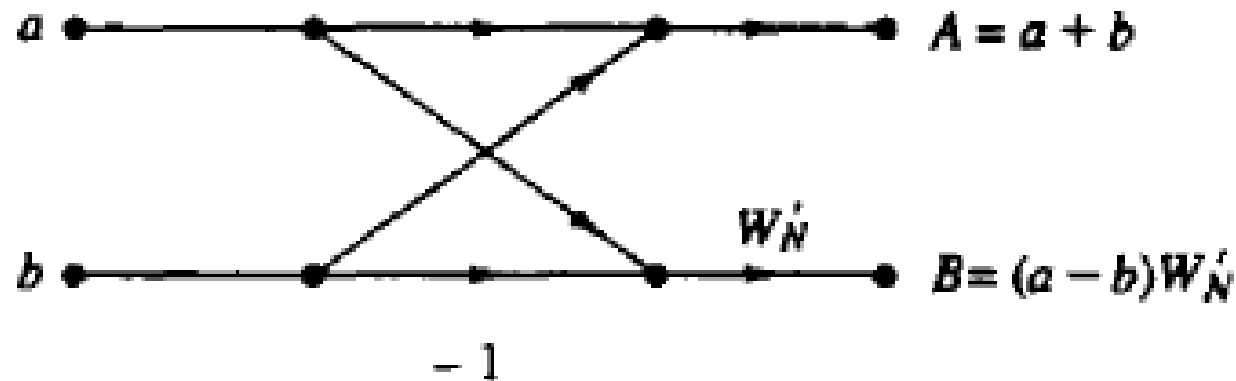
$$g_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$g_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo tần số

$$g_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$g_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \frac{N}{2}$$

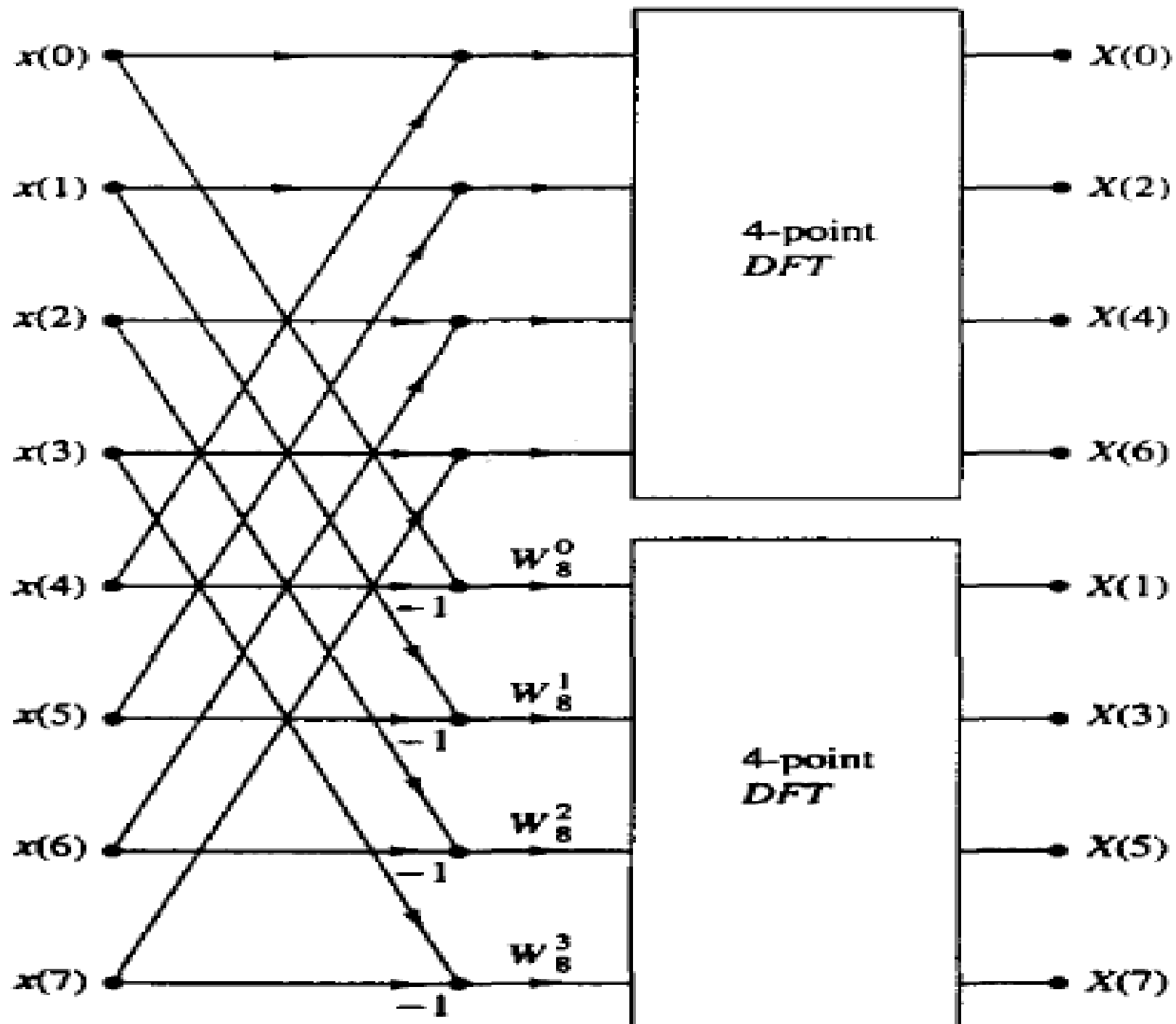


Thuật toán FFT cơ số 2 theo tần số

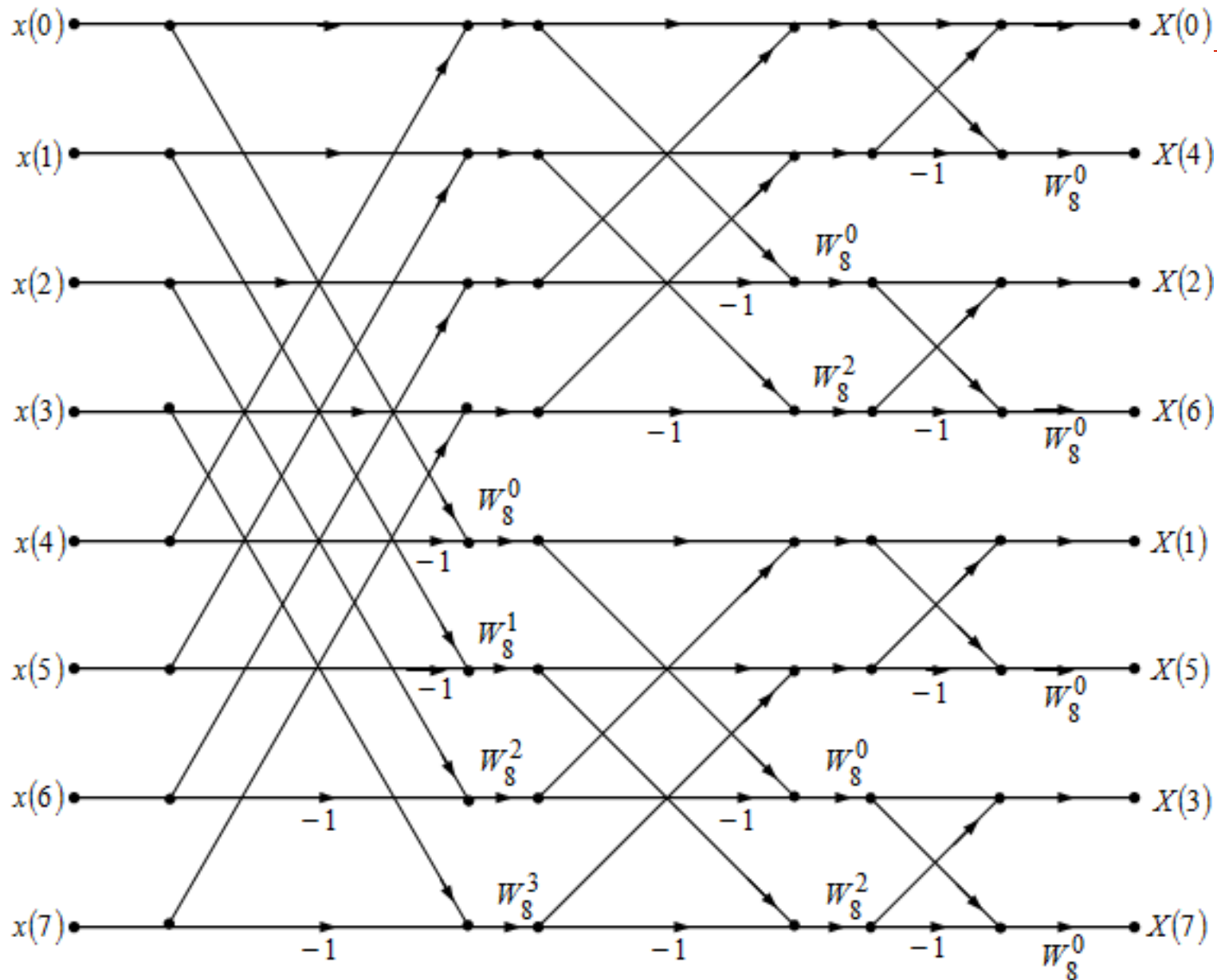
$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n) W_{N/2}^{kn}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n) W_{N/2}^{kn}$$

Thuật toán FFT cơ sở 2 theo tần số



Thuật toán FFT cơ sở 2 theo tần số



Tổng kết

- ❑ Biến đổi Fourier của dãy tuần hoàn
- ❑ DFT của dãy có chiều dài hữu hạn
- ❑ Giải thuật FFT
- ❑ Bài tập: 2.27 – 2.30