CHƯƠNG 4: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1. Mở đầu

4.2. DFT của dãy tuần hoàn

4.3. DFT của dãy có chiều dài hữu hạn

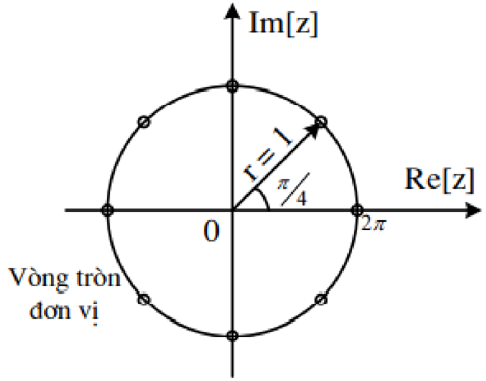
4.4. FFT phân thời gian

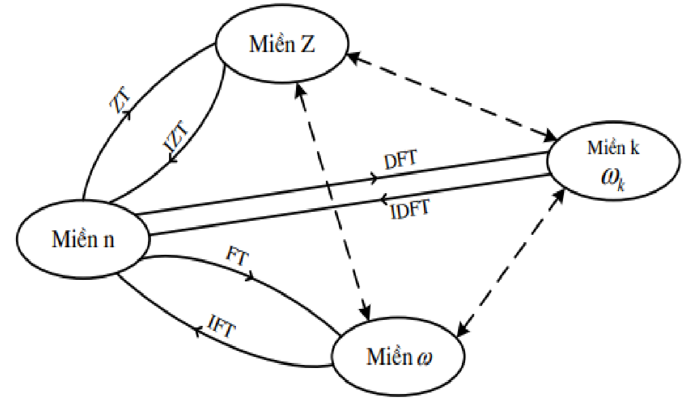
4.5. FFT phân tần số

4.6. Tổng kết chương và bài tập

4.1. MỞ ĐẦU

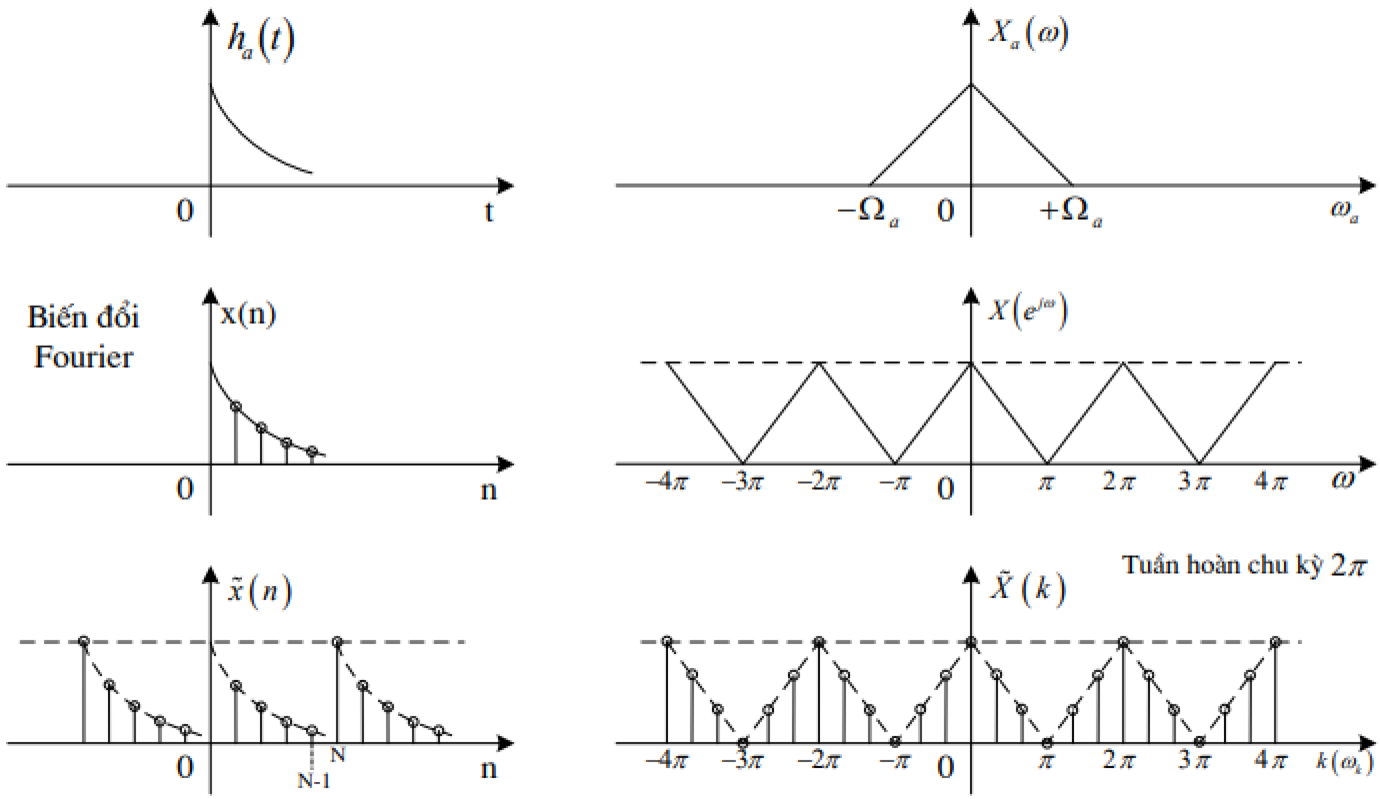
Ý nghĩa:





Ví dụ: Chia 8 phần, tức là thay $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, N = 8 $\rightarrow$ $\omega_k = \frac{2\pi}{8}k = \frac{\pi}{4}k$, $k = 0 \div 7$

Miền biến số **Miền tần số**



4.2. DFT CỦA DÃY TUẦN HOÀN

3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n).e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n).e^{-j\omega_k n}$$

Trong đó: $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ **với** $\begin{cases}k=0\div N-1\\ n=0\div N-1\end{cases}$

Đặt: $W_N^{kn}=e^{-j\omega_k n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$; $W_N^{-kn}=e^{-j\omega_k n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}};\ W_N^{-1}=e^{j\frac{2\pi}{N}};\ W_N^{0}=1$$

Ta có: $\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n).W_N^{kn}$

Ký hiệu: $\mathrm{DFT}\left[\tilde{x}(n)\right]=\tilde{X}(k)$; $\quad \tilde{x}(n)\xrightarrow{\mathrm{DFT}}\tilde{X}(k)$

4.2.2. Định nghĩa biến đổi IDFT của dãy tuần hoàn

Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k).e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Hay viết lại cho gọn:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k).W_N^{-kn}$$

Ký hiệu: $\mathrm{IDFT}\left[\tilde{X}(k)\right] = \tilde{x}(n)$

Toán tử: $\tilde{X}(k) \xrightarrow{\mathrm{IDFT}} \tilde{x}(n)$

4.2.3. Dạng ma trận của DFT

$$\tilde{X}(k) = \tilde{x}(n).W_N$$

$$\tilde{X}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$W_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

4.2.4. Các tính chất cơ bản

Tích chập tuần hoàn (lấy cùng một chu kỳ)

$$\tilde{x}_3(n)_N = \tilde{x}_1(n)_N \left(\tilde{*}\right)_N \tilde{x}_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)_N \, \tilde{x}_2(n-m)_N$$

Miền n	Miền k
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$	$\tilde{X}(k) = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$
$a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$	$a\tilde{X}_1(k)_N + b\tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0}\tilde{X}(k)$
$W_N^{ln}\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+l)$
$\tilde{x}_1(n)_N (\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\tilde{X}_1(k)_N \tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}_1(n)_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)_N \tilde{X}_1(k-l)_N$ $\tilde{X}_1(k)_N (\tilde{*}) \tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n)$ thực	$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$
	$\mathrm{Re}[\tilde{X}(k)] = \mathrm{Re}[\tilde{X}(-k)]$
	$\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)] = \mathrm{Im}[\tilde{X}(-k)]$
	$\lvert\tilde{X}(k)\rvert = \lvert\tilde{X}(-k)\rvert$
	$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$

4.3. DFT CỦA DÃY CHIỀU DÀI HỮU HẠN

4.3.1. Định nghĩa

Biến đổi xuôi DFT

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \ne \end{cases}$$

Ký hiệu: $\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k); x(n) \xrightarrow{\mathrm{DFT}} X(k)$

Biến đổi ngược IDFT

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Ký hiệu: $\mathrm{IDFT}[X(k)] = x(n); X(k) \xrightarrow{\mathrm{IDFT}} x(n)$

4.3.2. Tính chất: Nếu coi dãy có chiều dài hữu hạn là 1 chu kỳ của dãy tuần hoàn thì DFT của dãy có chiều dài hữu hạn có mọi tính chất của DFT của dãy tuần hoàn.

4.4. FFT phân thời gian

- Vào những năm thập kỷ 60, khi công nghệ vi xử lý phát triển chưa mạnh thì thời gian xử lý phép tóan DFT trên máy tương đối chậm, do số phép nhân phức tương đối lớn.
- DFT của x(n) có độ dài N: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} : \; 0 \le k \le N-1$
- Để tính **X(k)**, với mỗi giá trị **k** cần có **N** phép nhân và (**N-1**) phép cộng, vậy với **N** giá trị **k** thì cần có **N**^{2} phép nhân và **N(N-1)** phép cộng.
- Để khắc phục về mặt tốc độ xử lý của phép tính DFT, nhiều tác giả đã đưa ra các thuật tóan riêng dựa trên DFT gọi là FFT (Fast Fourier Transform).

4.4. FFT phân thời gian

- Giả thiết dãy x(n) có độ dài $N=2^M$, nếu không có dạng lũy thừa 2 thì thêm vài mẫu 0 vào sau dãy x(n).

- Thuật tóan dựa trên sự phân chia dãy vào x(n) thành các dãy nhỏ, do biến n biểu thị cho trục thời gian nên gọi là phân chia theo thời gian.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0,2,4\ldots}^{N-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

- Thay n=2r với n chẵn và n=2r+1 với n lẻ:

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r) W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)}$$

4.4. FFT phân thời gian

Do: $$W_N^{k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N}k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}kr} = W_{N/2}^{kr}$$

$$\Rightarrow \quad X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k \cdot \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

Đặt: $$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} \qquad X_1(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

$$\Rightarrow \quad X(k) = X_0(k) + W_N^k . X_1(k)$$

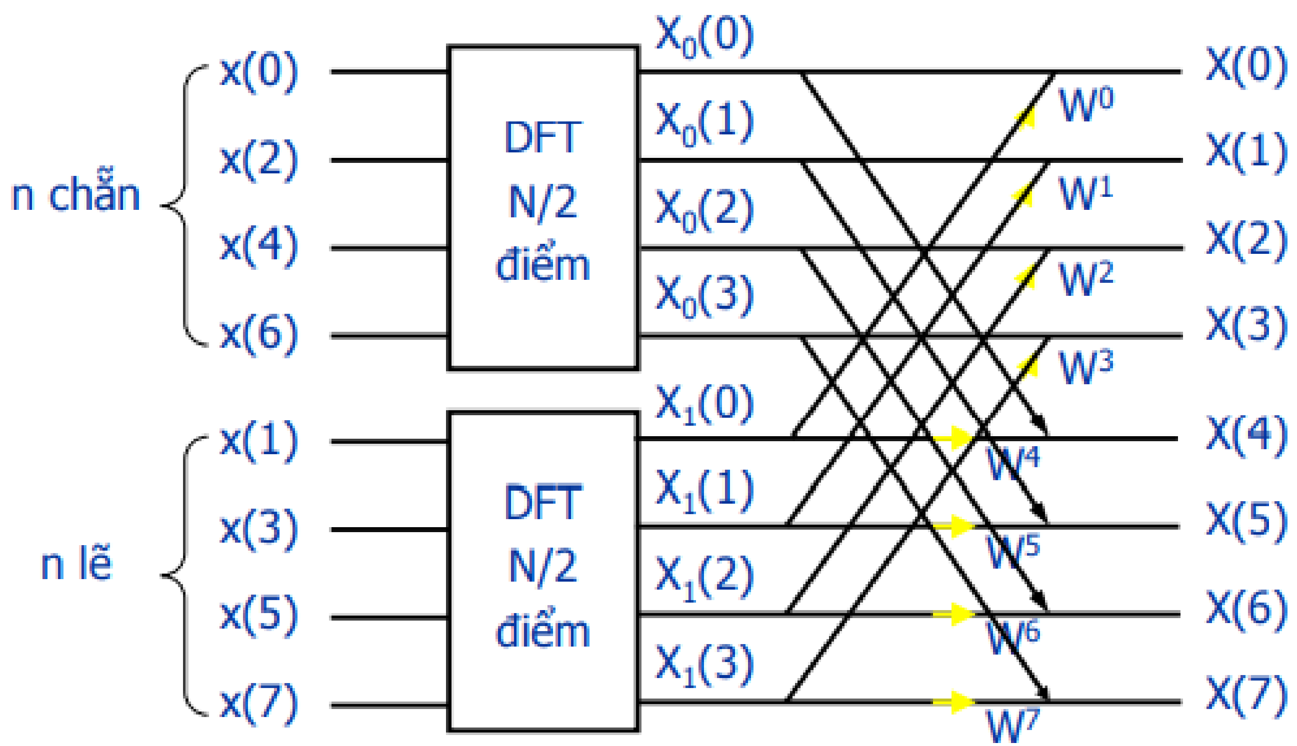
$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_0(k) - W_N^k . X_1(k)$$

- $X_0(k)$ – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n chẵn
- $X_1(k)$ – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n lẽ

4.4. FFT phân thời gian

- Lấy ví dụ minh họa cho x(n) với N=8

Phân chia DFT- N điểm -> 2 DFT- N/2 điểm



- Qui ước cách tính X(k) theo lưu đồ:

- Nhánh ra của 1 nút bằng tổng các nhánh vào nút đó
- Giá trị mỗi nhánh bằng giá trị nút xuất phát nhân hệ số

4.4. FFT phân thời gian

- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu x(n), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số n chẵn và lẽ và cứ thế tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.
- Ví dụ **$X_0(k)$** được phân chia:

$$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

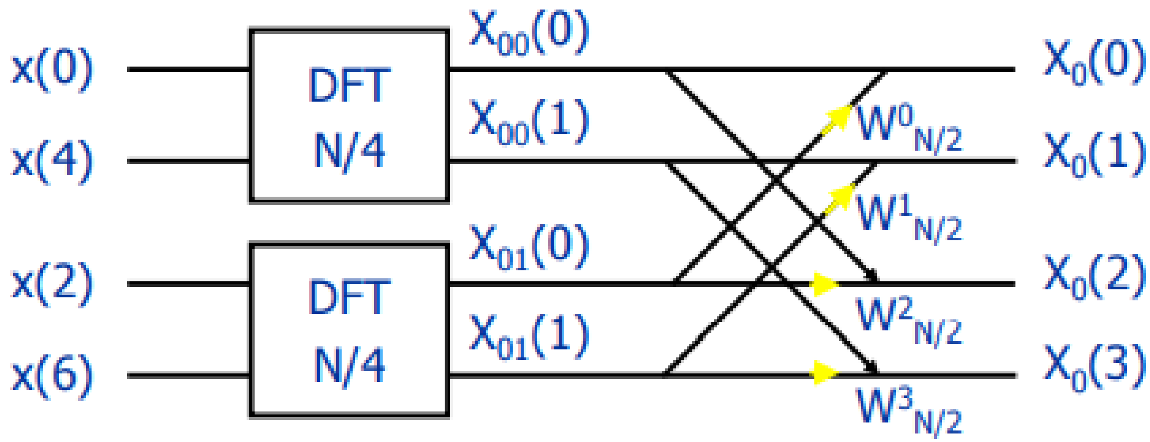
$$= \sum_{r=0,2,4...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr} + \sum_{r=1,3,5...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

$$= \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^{k} \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/4}^{kl}$$

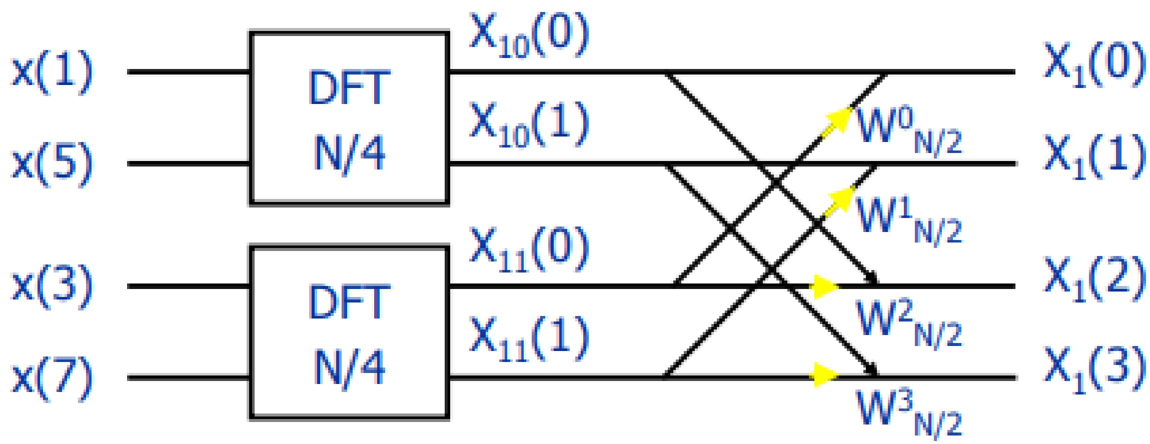
$$= X_{00}(k) + W_{N/2}^{k}.X_{01}(k)$$

4.4. FFT phân thời gian

Phân chia DFT- N/2 điểm -> 2 DFT- N/4 điểm của $X_0(k)$

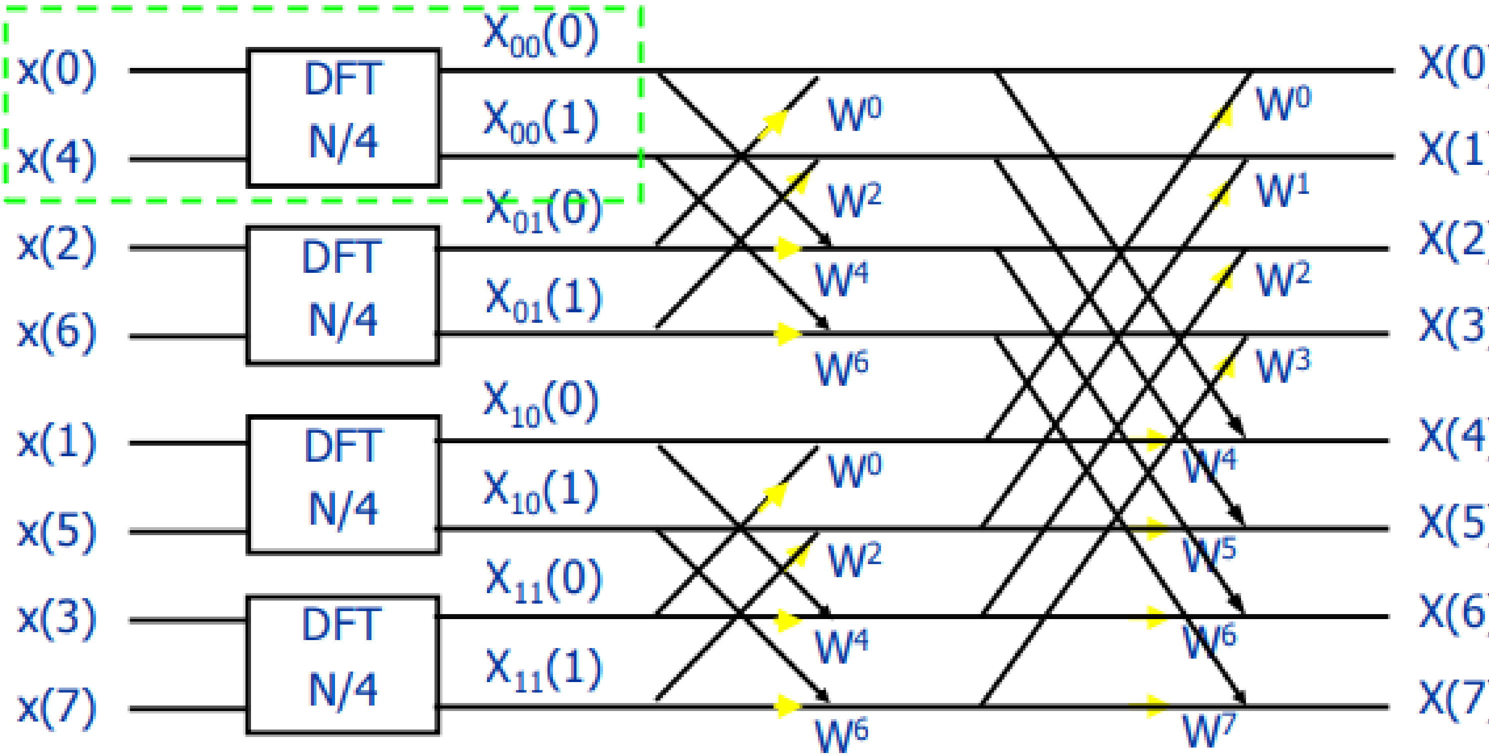


Phân chia $X_1(k)$ tương tự: $X_1(k) = X_{10}(k) + W^k_{N/2}.X_{11}(k)$

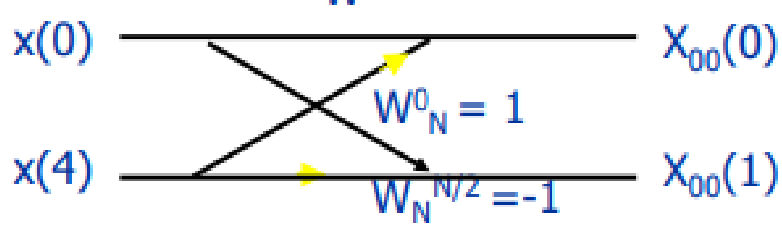


4.4. FFT phân thời gian

Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 2 lần phân chia với N=8

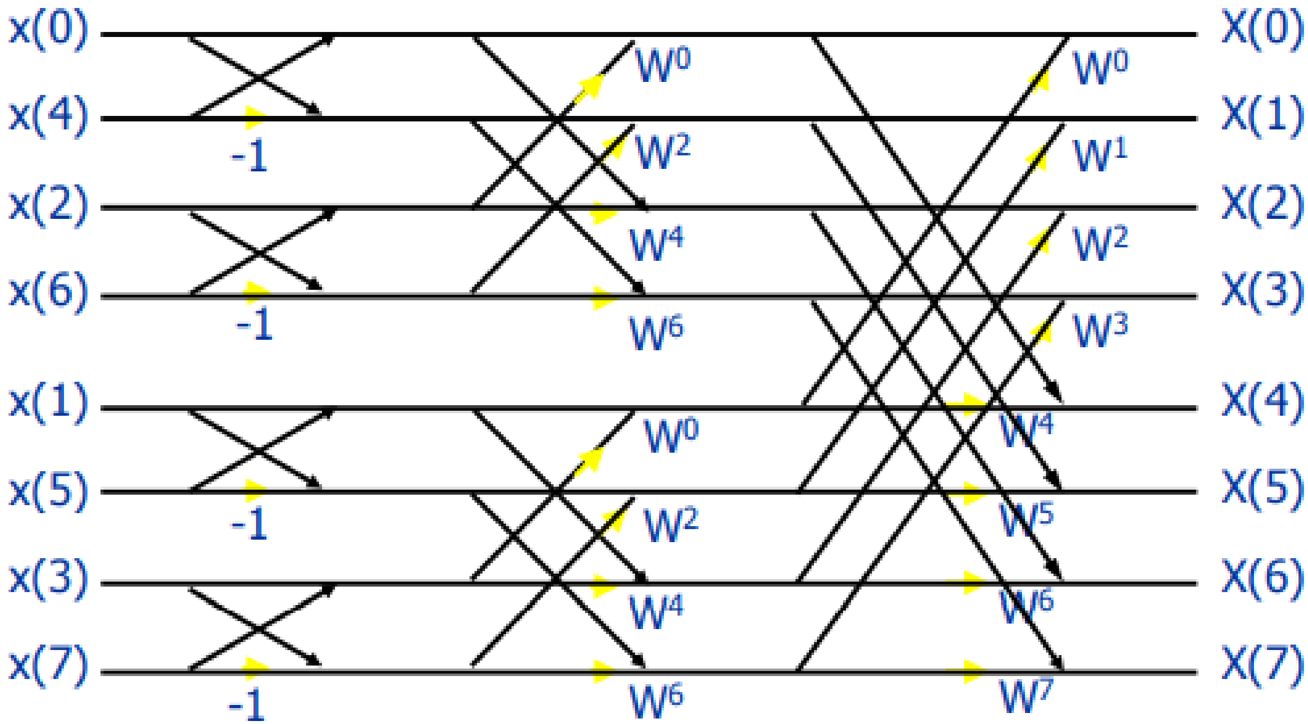


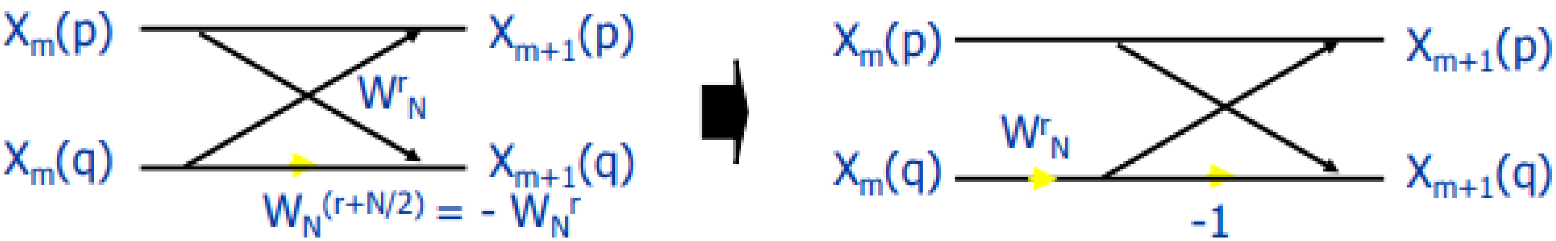
Lưu đồ DFT 2 điểm:



4.4. FFT phân thời gian

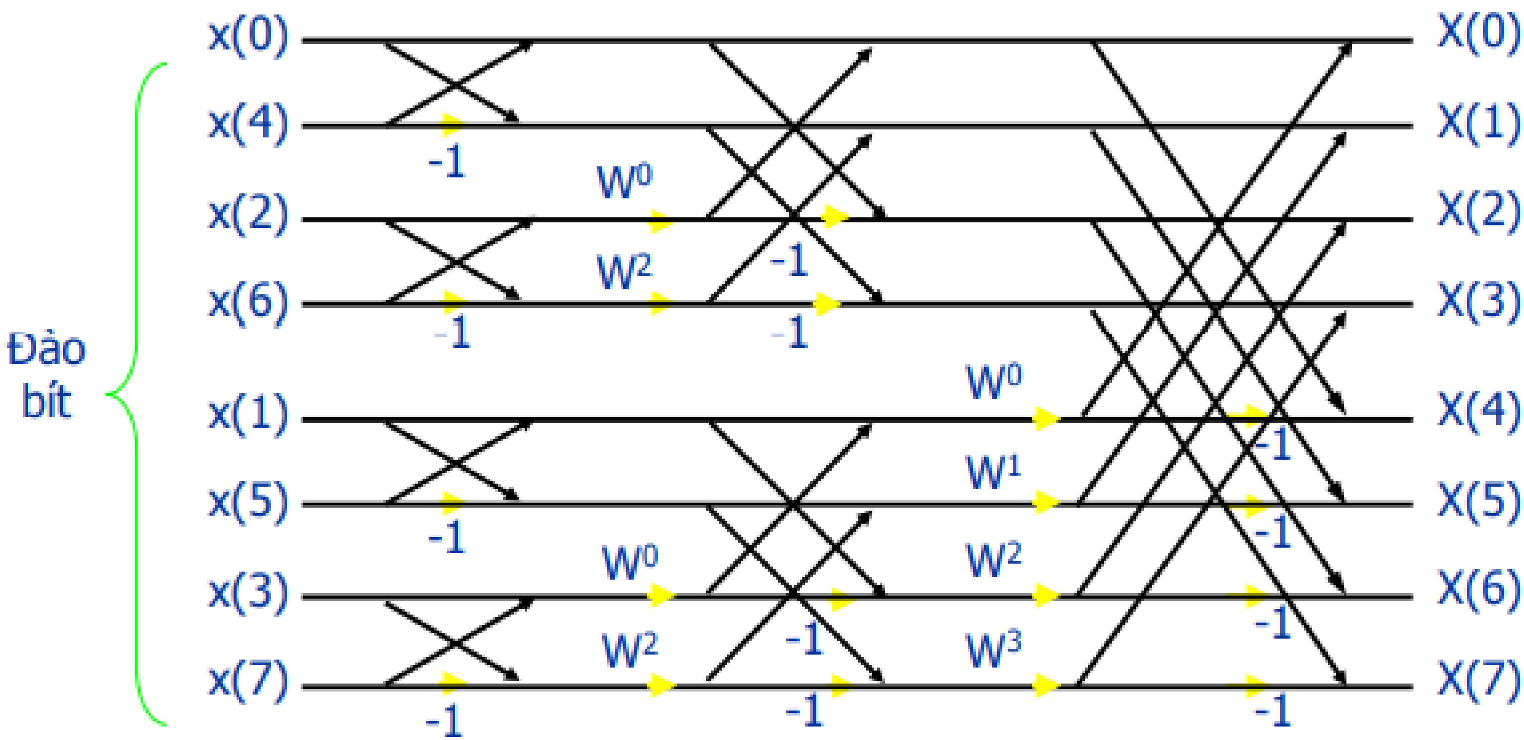
Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8





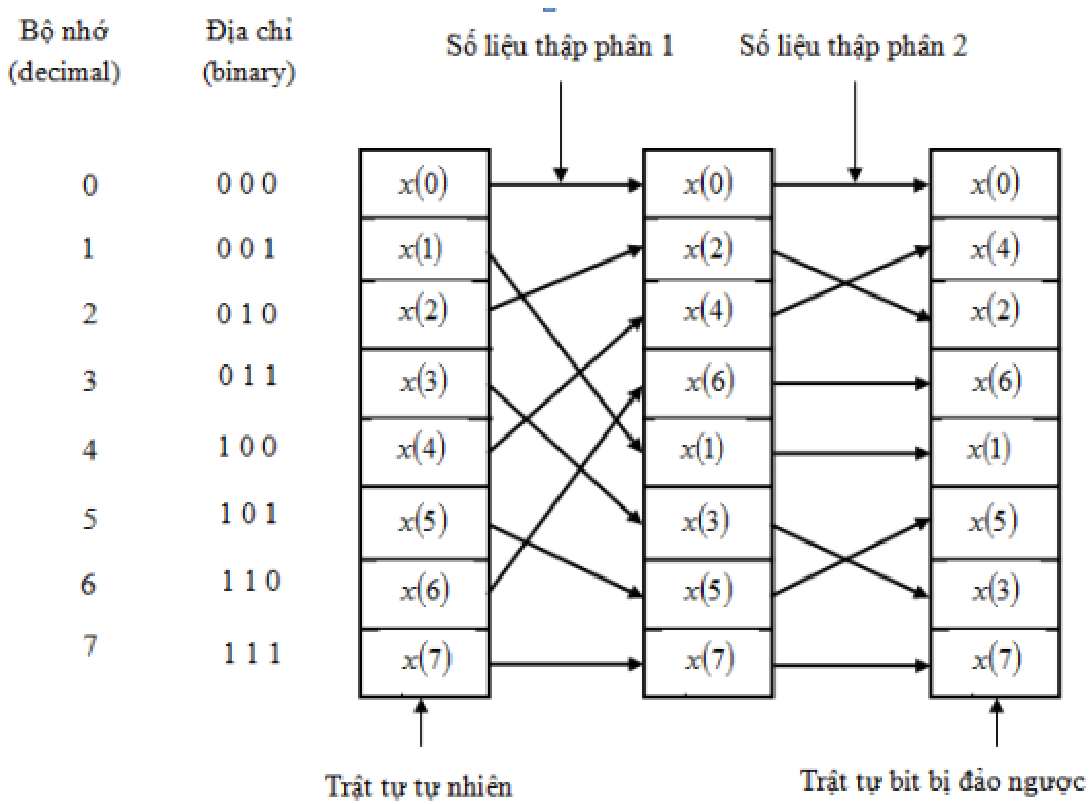
4.4. FFT phân thời gian

Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8



- Với $N=2^M$ -> M lần phân chia
- Số phép nhân = số phép cộng = $NM/2=(N/2)\log_2 N$

4.4. FFT phân thời gian



$(n_2n_1n_0)$	$\to$	$(n_0n_2n_1)$	$\to$	$(n_0n_1n_2)$
(000)	$\to$	(000)	$\to$	(000)
(001)	$\to$	(100)	$\to$	(100)
(010)	$\to$	(001)	$\to$	(010)
(011)	$\to$	(101)	$\to$	(110)
(100)	$\to$	(010)	$\to$	(001)
(101)	$\to$	(110)	$\to$	(101)
(110)	$\to$	(011)	$\to$	(011)
(111)	$\to$	(111)	$\to$	(111)

Bảng mô tả qui luật đảo bít:

4.5. FFT phân theo tần số

- Thuật toán dựa trên sự phân chia dãy ra X(k) thành các dãy nhỏ, do biến k biểu thị cho trục tần số nên gọi là phân chia theo tần số.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n+N/2)W_N^{k(n+N/2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+W_N^{kN/2}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n+N/2)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+(-1)^k x(n+N/2)\right]W_N^{kn}$$

4.5. FFT phân theo tần số

- Với k chẵn, thay k=2r:

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x(n+N/2)\right] W_{N/2}^{rn}$$

- Với k lẽ, thay k=2r+1

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{\left[x(n) - x(n+N/2)\right] W_N^{n}\right\} W_{N/2}^{rn}$$

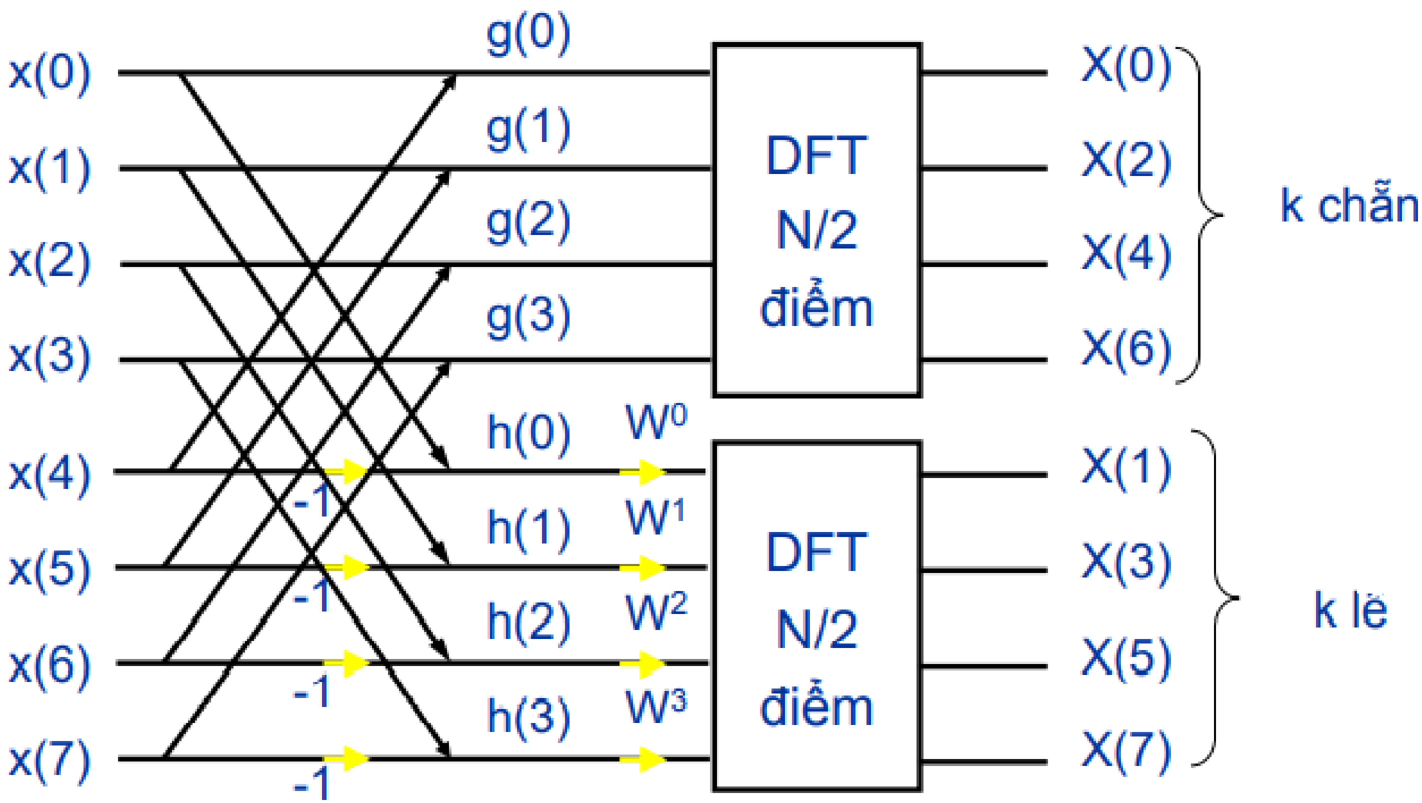
- Đặt: $g(n) = x(n) + x(n+N/2); \quad h(n) = x(n) - x(n+N/2)$

$$\Rightarrow X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(n) W_{N/2}^{rn} \quad X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[h(n) W_N^{n}\right] W_{N/2}^{rn}$$

- X(2r) – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k chẵn
- X(2r+1) – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k lẽ

4.5. FFT phân theo tần số

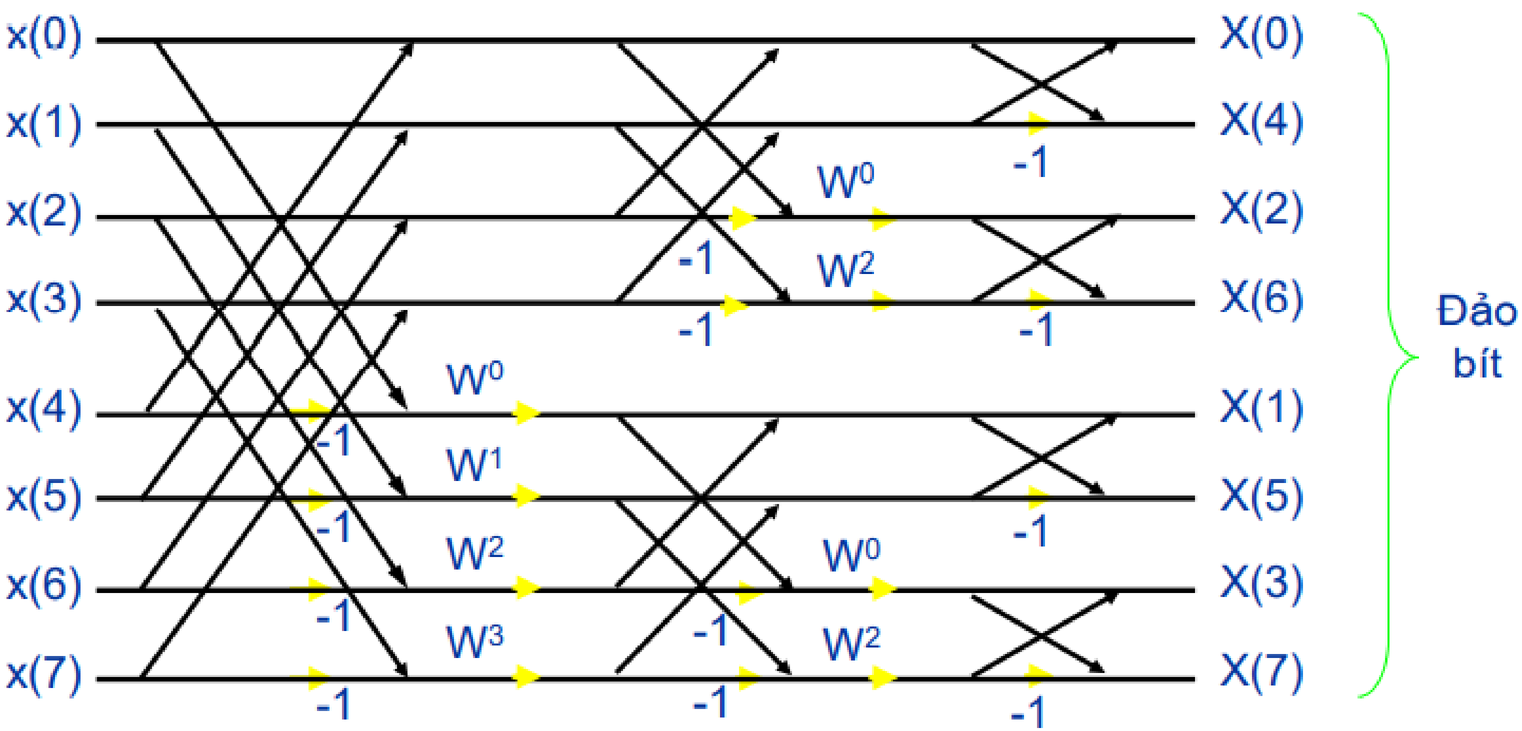
Phân chia DFT N=8 điểm -> 2 DFT N/2= 4 điểm



- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu X(k), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số k chẵn và lẽ. Tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.

4.5. FFT phân theo tần số

- Dữ liệu ra X(k) được sắp xếp theo thứ tự đảo bít, còn dữ liệu vào được sắp theo thứ tự tự nhiên.
- Số phép nhân và phép cộng trong lưu đồ phân theo tần số bằng với số phép nhân và cộng trong lưu đồ phân theo thời gian.



Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8