

Câu 2.1.

- a. Nêu biểu thức định nghĩa biến đổi Fourier (phổ) của tín hiệu rời rạc, ví dụ minh họa.

Biến đổi Fourier của 1 tín hiệu  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{j\omega n}$$

Ví dụ:  $x(n) = \{ 2, 1, 3, 4 \}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{j\omega n} = 2e^{j\omega} + 1 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-2j\omega}$$

- b. Tính và vẽ biên độ, phổ pha của tín hiệu  $x(n) = (\frac{1}{2})^n \cdot u(n)$ .

$$X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) = \frac{1}{1-0,5e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-0,5(\cos\omega - j\sin\omega)} = \frac{1}{1-0,5\cos\omega + 0,5j\sin\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-0,5\cos\omega)^2 + (0,5\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,25-\cos\omega}}$$

$$\angle X(\omega) = 0 - \arctan \frac{0,5\sin\omega}{1-0,5\cos\omega}$$

Vẽ phổ biên độ:

$$|X(\omega)| \text{ có cực đại } \cos\omega = 1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\max} = 2 \Leftrightarrow \omega = k2\pi.$$

$$|X(\omega)| \text{ có cực tiểu } \cos\omega = -1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\min} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \omega = -\pi + k2\pi.$$

Vẽ phổ pha:

Câu 2.2.

- a. Nêu khái niệm phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu  
➤ Phổ biên độ:  $A(\omega) = |X(e^{j\omega})|$  thỏa mãn

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

- Phổ pha:  $\arg[X(e^{j\omega})]$

b. Tính và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu:

$$x(n) = \delta(n) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$X(z) = 1 - 4z^{-1} + z^{-2}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) = 1 + 4e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 4 + e^{-j\omega})$$

$$= e^{-j\omega}(\cos\omega + j\sin\omega + 4 + \cos\omega - j\sin\omega) = e^{-j\omega}(2\cos\omega + 4)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

$$|X(\omega)| = 2\cos\omega + 4$$

$$\angle X(\omega) = -\omega$$

Vẽ phổ biên độ:

$$|X(\omega)| \text{ có cực đại } \cos\omega = 1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\max} = 6 \Leftrightarrow \omega = k2\pi.$$

$$|X(\omega)| \text{ có cực tiểu } \cos\omega = -1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\min} = 2 \Leftrightarrow \omega = \pi + k2\pi.$$

Vẽ phổ pha:

Câu 2.3.

a. Nêu biểu thức biến đổi Fourier ngược của tín hiệu rời rạc, ví dụ minh họa.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$\text{Ví dụ: } X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{với } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{nếu } \omega \neq \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{n\pi} \sin(\omega_c n)$$

b.

$X(e^{j\omega}) = \frac{0,4}{1-0,6e^{-j\omega}}$ . Tính và vẽ phổ biên độ và phổ pha, tìm các điểm cực trị trên phổ biên độ.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{0,4}{1-0,6e^{-j\omega}} = \frac{0,4}{1-0,6\cos\omega + 0,6j\sin\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{0,4}{\sqrt{(1-0,6\cos\omega)^2 + (0,6\sin\omega)^2}} = \frac{0,4}{\sqrt{1,36-1,2\cos\omega}}$$

$$\angle X(\omega) = -\arctan \frac{0,6\sin\omega}{1-0,6\cos\omega}$$

Vẽ phổ biên độ:

$$|X(\omega)| \text{ có cực đại } \cos\omega = 1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\max} = 1 \Leftrightarrow \omega = k2\pi.$$

$$|X(\omega)| \text{ có cực tiểu } \cos\omega = -1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\min} = 0,25 \Leftrightarrow \omega = \pi + k2\pi.$$

Vẽ phổ pha:

Câu 2.4. Nêu khái niệm và viết biểu thức đáp ứng tần số của 1 HTTTBB được mô tả bởi phương trình sai phân ? Ví dụ

Khái niệm: Đáp ứng tần số của 1 HTTTBB ổn định chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung  $h(n)$  hay còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

➤ Ví dụ:  $h(n) = u(n)$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

➤  $X(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{1+0,8e^{-j\omega}}$ . Tính và vẽ phổ biên độ và phổ pha, tìm các điểm cực trị trên phổ biên độ.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{1+0,8e^{-j\omega}} = \frac{0,2}{1+0,8\cos\omega - 0,8j\sin\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{0,4}{\sqrt{(1+0,8\cos\omega)^2 + (0,8\sin\omega)^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{1,65+1,6\cos\omega}}$$

$$\angle X(\omega) = -\arctan \frac{0,6\sin\omega}{1-0,6\cos\omega}$$

Vẽ phổ biên độ:

Vẽ phổ pha:

Câu 2.5. Cho tín hiệu  $x(n) = (\frac{1}{2})^n \cdot u(n)$ .

Tìm phở  $X(e^{j\omega})$

Biến đổi z của  $x(n)$  ta được  $X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

- Tìm phở của  $\begin{cases} y_1(n) = 2x(n) + \delta(n) \\ y_2(n) = nx(n) \end{cases}$

$$Y_1(z) = \frac{2}{1-0,5z^{-1}} + 1$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = Y_1(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{2}{1-0,5e^{-j\omega}} + 1$$

$$Y_2(z) = -z \left( \frac{1}{1-0,5z^{-1}} \right)' = \frac{0,5z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})^2}$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{0,5e^{-j\omega}}{(1-0,5e^{-j\omega})^2}$$

Câu 2.6.  $x(n) = (-0,6)^n \cdot u(n)$ .

Tìm phở  $X(e^{j\omega})$  của  $x(n)$

Biến đổi z của  $x(n)$  ta được  $X(z) = \frac{1}{1+0,6z^{-1}}$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{1}{1+0,6e^{-j\omega}}$$

- Tìm phở của  $\begin{cases} y_1(n) = 2x(n-6) \\ y_2(n) = nx(n) + \delta(n) \end{cases}$

$$Y_1(z) = \frac{2z^{-6}}{1+0,6z^{-1}}$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = Y_1(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{2e^{-6j\omega}}{1+0,6e^{-j\omega}}$$

$$Y_2(z) = -z \left( \frac{1}{1+0,6z^{-1}} \right)' + 1 = \frac{-0,6z^{-1}}{(1+0,6z^{-1})^2} + 1$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{-0,6e^{-j\omega}}{(1+0,6e^{-j\omega})^2} + 1$$

Câu 2.7.  $x(n) = (-0,8)^n \cdot u(n)$ .

Tìm phở  $X(e^{j\omega})$  của  $x(n)$

Biên đổi  $z$  của  $x(n)$  ta được  $X(z) = \frac{1}{1+0,8z^{-1}}$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{1}{1+0,8e^{-j\omega}}$$

- Tìm phở của  $\begin{cases} y_1(n) = e^{j\omega_0 n} \cdot x(n) \\ y_2(n) = x(n) \end{cases}$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+0,8e^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+0,8e^{j\omega}}$$

Câu 2.8. a. Khái niệm đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống ?

Nêu ảnh hưởng của chúng tới mối quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống.

- Đáp ứng biên độ là biên độ của đáp ứng tần số  $A(\omega) = |H(\omega)|$
- Đáp ứng pha là pha của đáp ứng tần số  $\varphi(\omega) = \arg[H(\omega)]$

Ảnh hưởng

. Biên độ tín hiệu ra tăng đáp ứng biên độ ( lần ) so với tín hiệu vào.

. Pha tín hiệu ra dịch đi đáp ứng pha (đơn vị) so với tín hiệu vào.

b. Cho  $H(e^{j\omega}) = (2 - \cos\omega)e^{-j3\omega}$

Tìm  $y(n)$  khi  $x(n) = 3 + 4 \sin(\frac{n\pi}{4} + 1) + 2 \cos(\frac{n\pi}{2} + 2)$

$$A(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| = 2 - \cos\omega$$

$$\varphi(\omega) = -3\omega$$

$$\text{Ta có : } A(0) = 1, A(\frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, A(\frac{\pi}{2}) = 2, \varphi(\frac{\pi}{4}) = \frac{-3\pi}{4}, \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{-3\pi}{2}$$

$$y(n) = 3A(0) + 4A(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{n\pi}{4} + 1 + \varphi(\frac{\pi}{4})) + 2A(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{n\pi}{2} + 2 + \varphi(\frac{\pi}{2}))$$

$$y(n) = 3 + 4.(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sin(\frac{(n-3)\pi}{4} + 1) + 4 \cos(\frac{(n-3)\pi}{2} + 2)$$

Câu 2.9. HTTTBB rời rạc  $h(n) = (\frac{1}{2})^n \cdot u(n)$ .

- a. Tính  $H(e^{j\omega})$  đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống ? Vẽ định tính đáp ứng biên độ của hệ thống ?

Thực hiện biến đổi z, ta có  $H(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-0,5e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{1-0,5\cos\omega+0,5j\sin\omega}$$

$$A(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(1-0,5\cos\omega)^2+(0,5\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,25-\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{0,5\sin\omega}{1-0,5\cos\omega}$$

Vẽ phổ biên độ:

$$A(e^{j\omega}) \text{ có cực đại } \cos\omega = 1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\max} = 2 \Leftrightarrow \omega = k2\pi.$$

$$A(e^{j\omega}) \text{ có cực tiểu } \cos\omega = -1 \Rightarrow |X(\omega)|_{\min} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \omega = -\pi + k2\pi.$$

Vẽ phổ pha:

b. Tìm  $y(n)$  khi  $x(n) = 2 + 3 \sin(\frac{n\pi}{4} + 1) + 4 \cos(\frac{n\pi}{2} - 1)$

$$y(n) = 2A(0) + 3A(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{n\pi}{4} + 1 + \varphi(\frac{\pi}{4})) + 4A(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{n\pi}{2} - 1 - \varphi(\frac{\pi}{2}))$$

$$y(n) = 4 + \frac{3}{\sqrt{2,5-\sqrt{2}}} \sin(\frac{n\pi}{4} + 1 - \arctan \frac{0,5\sqrt{2}}{2-0,5\sqrt{2}}) + \frac{8}{\sqrt{5}} \cos(\frac{n\pi}{2} - 1 - \arctan 0,5)$$

Câu 2.10. HTTTBB có phương trình sai phân:  $y(n) + 0,8 y(n-1) = 0,2x(n)$

Biến đổi z 2 vế:  $Y(z) + 0,8z^{-1}Y(z) = 0,2X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,2}{1+0,8z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{(1+0,8\cos\omega)-0,8j\sin\omega}$$

$$A(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{\sqrt{(1+0,8\cos\omega)^2 + (0,8\sin\omega)^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{1,64+1,6\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{0,8\sin\omega}{1+0,8\cos\omega}$$

Tìm y(n) khi x(n) = 2 + 3 sin( $\frac{n\pi}{4}$  + 1) + 4 cos( $\frac{n\pi}{4}$  - 1)

$$y(n) = 2A(0) + 3A(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{n\pi}{4} + 1 + \varphi(\frac{\pi}{4})) + 4A(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{n\pi}{4} - 1 - \varphi(\frac{\pi}{4}))$$

$$A(0) = \frac{1}{9}, A(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{11+20\sqrt{2}}}, A(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \arctan \frac{8-10\sqrt{2}}{17}, \varphi(\frac{\pi}{2}) = -\arctan(-\frac{4}{5})$$

$$y(n) = \frac{2}{9} + \frac{3}{\sqrt{11+20\sqrt{2}}} \sin(\frac{n\pi}{4} + 1 + \arctan \frac{8-10\sqrt{2}}{17}) + \frac{4}{\sqrt{11}} \cos(\frac{n\pi}{2} - 1 - \arctan \frac{4}{5})$$

Câu 2.11. HTTTBB có phương trình sai phân: y(n) = 0,2x(n)+0,8 y(n-1)

a..Biến đổi z 2 vế: Y(z) - 0,8z<sup>-1</sup>Y(z) = 0,2X(z)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{(1-0,8\cos\omega)+0,8j\sin\omega}$$

$$A(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{\sqrt{(1-0,8\cos\omega)^2 + (0,8\sin\omega)^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{1,64-1,6\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{0,8\sin\omega}{1-0,8\cos\omega}$$

b..Tìm y(n) khi x(n) = 1 + 7 sin(nπ + 1) + 11 cos( $\frac{n\pi}{2}$  + 1)

$$y(n) = A(0) + 7A(\pi) \sin(n\pi + 1 + \varphi(\pi)) + 11A(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{n\pi}{2} + 1 + \varphi(\frac{\pi}{2}))$$

$$A(0) = 1, A(\pi) = \frac{1}{9}, A(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{41}}$$

$$\varphi(\pi) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = \arctan(\frac{4}{5})$$

$$y(n) = \frac{2}{9} + \frac{7}{9} \sin(n\pi + 2) + \frac{11}{\sqrt{41}} \cos(\frac{n\pi}{2} + 1 + \arctan \frac{4}{5})$$

Câu 2.12. Cho bộ lọc FIR: h(n) = {1, 2,3,4,5,4,3,2,1}

a..Viết biểu thức tính H(e<sup>jω</sup>), A(ω), φ(ω)

$$H(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega} + 4e^{-3j\omega} + 5e^{-4j\omega} + 4e^{-5j\omega} + 3e^{-6j\omega} + 2e^{-7j\omega} + e^{-8j\omega}$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-8j\omega} + 2(e^{-j\omega} + e^{-7j\omega}) + 3(e^{-2j\omega} + e^{-6j\omega}) + 4(e^{-3j\omega} + e^{-5j\omega}) + 5e^{-4j\omega}$$

$$H(\omega) = e^{-4j\omega} [(e^{4j\omega} + e^{-4j\omega}) + 2(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}) + 3(e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}) + 4(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 5]$$

$$H(\omega) = e^{-4j\omega} [2\cos(4\omega) + 4\cos(3\omega) + 6\cos(2\omega) + 8\cos(\omega) + 5]$$

$$A(\omega) = 2\cos(4\omega) + 4\cos(3\omega) + 6\cos(2\omega) + 8\cos(\omega) + 5.$$

$$\varphi(\omega) = -4\omega$$

$$b..x(n) = 2 + 5 \sin\left(\frac{n\pi}{3} - 2\right) + 9 \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$y(n) = 2.A(0) + 5A\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{3} - 2 + \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 9A\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 1 + \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$y(n) = 50 + 5 \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{3} + 1\right) + 4\cos\left(\left(\frac{n}{2} - 2\right)\pi + 2\right)$$

**Câu 2.13.** Cho bộ lọc FIR:  $h(n) = \{\vec{1}, -2, -3, 4, 4, -3, -2, 1\}$

a.. Viết biểu thức tính  $H(e^{j\omega})$ ,  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$

b..Tìm  $y(n)$  khi biết  $x(n) = 1 + 6 \sin\left(\frac{n\pi}{3} - 2\right) + 9 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 1\right)$

**Câu 2.14.** Cho bộ lọc FIR:  $h(n) = \{\vec{1}, 2, 3, 1, 0, -4, -3, -2, -1\}$

a.. Viết biểu thức tính  $H(e^{j\omega})$ ,  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$

b.Tìm  $y(n)$  khi biết  $x(n) = 1 + 7 \sin\left(\frac{n\pi}{6} + 1\right) + 11 \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 3\right)$