

**SULIT**

---

**UNIVERSITI MALAYSIA PERLIS**

Peperiksaan Akhir Semester Kedua  
Sidang Akademik 2018/2019

Jun 2019

**ENT342 – Computational Fluid Dynamics**  
**[Pengiraan Dinamik Bendalir]**

Masa: 3 Jam

---

Please make sure that this question paper has **SEVEN (7)** printed pages including this front page before you start the examination.

*[Sila pastikan kertas soalan ini mengandungi **TUJUH (7)** muka surat yang bercetak termasuk muka hadapan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

This question paper has **FIVE (5)** questions. Answer **ALL** questions in **PART A** and any **ONE (1)** questions in **PART B**. Each question contributes 25 marks.

*[Kertas soalan ini mengandungi **LIMA (5)** soalan. Jawab **semua** soalan di **BAHAGIAN A** dan mana-mana **SATU (1)** soalan di **BAHAGIAN B**. Markah bagi setiap soalan adalah 25 markah.]*

**SULIT**

**Part A: Answer all questions***[Bahagian A: Jawab semua soalan]***Question 1***[Soalan 1]*

The governing equations for inviscid compressible flow is the Euler equations. The equations can be derived from three conservations principle which are the mass conservation, momentum conservation and energy conservation. The principles can be easily demonstrated for one-dimensional flow. Answer the questions below regarding the one-dimensional Euler equations.

*[Persamaan menakluk untuk aliran tidak likat boleh mampat adalah persamaan Euler. Persamaan ini boleh diterbitkan daripada tiga prinsip keabadian iaitu prinsip keabadian untuk jisim, momentum dan tenaga. Prinsip-prinsip ini dapat ditunjukkan dengan mudah untuk aliran satu dimensi. Jawab soalan-solan dibawah berkaitan dengan persamaan Euler satu dimensi.]*

- (a) Explain the three principle of conservations and their relations to the control volume analysis. Sketch a suitable control volume for your explanation.

*[Jelaskan tiga prinsip keabadian itu dan hubungannya dalam analisa isipadu kawalan. Lakarkan rajah isipadu kawalan yang sesuai untuk penjelasan anda.]*

(10 Marks /Markah)

- (b) Using the information from Q1(a), prove that the one-dimensional Euler equations can be written in the form below. Here,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $e$  are density, x-axis velocity, pressure and total energy, respectively.

*[Dengan menggunakan maklumat daripada Q1(a),buktikan bahawa persamaan Euler satu dimensi boleh ditulis dalam bentuk dibawah. Disini,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $e$  adalah masing-masingnya ketumpatan, halaju pada paksi-x, tekanan dan tenaga keseluruhan. ]*

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{bmatrix}$$

(10 Marks /Markah)

- (c) There are **four (4)** unknown variables in the equations from Q1(b) but only **three (3)** equations, meaning that the system needs another equation to close it. The pressure  $p$  and total energy  $e$  are linked together by the state equation of ideal gas. Demonstrate the relation between the two quantities.

*[Terdapat empat (4) anu dalam kesemua persamaan daripada Q1(b) tetapi cuma tiga (3) persamaan, bermakna sistem persamaan ini memerlukan satu lagi persamaan untuk dipenuhi. Tekanan  $p$  dan tenaga keseluruhan  $e$  adalah berkaitan dengan persamaan keadaan untuk gas unggul. Tunjukkan hubungan antara kedua-dua kuantiti itu.]*

(5 Marks /Markah)

....3/-

**Question 2***[Soalan 2]*

The Marker-and-Cell (MAC) algorithm belongs to a group of solution algorithm called *pressure correction* method for incompressible Navier-Stokes equations. The incompressible Navier-Stokes equations are given below in differential form where  $\mathbf{u}$ ,  $p$  and  $\nu$  are velocity vector, pressure and dynamic viscosity coefficient, respectively. The MAC algorithm closes the system equations by using the mass conservation equation or divergence equation to link the pressure with velocity gradients. Answer the questions below regarding the MAC algorithm.

*[Algoritma Penanda-dan-Sel (MAC) termasuk didalam satu kumpulan algoritma solusi yang dipanggil kaedah pembetulan tekanan untuk persamaan tidak mampat Navier-Stokes. Persamaan tidak mampat Navier-Stokes diberikan seperti dibawah dimana  $\mathbf{u}$ ,  $p$  dan  $\nu$  masing-masing adalah vektor halaju, tekanan dan pekali kelikatan dinamik. Algoritma MAC menutup sistem persamaan ini dengan menggunakan persamaan keabadian jisim atau persamaan mencapah yang dikaitkan dengan tekanan dan kecerunan halaju. Jawab soalan-soalan dibawah berkenaan algoritma MAC]*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

- (a) Explain the step-by-step of MAC algorithm using the incompressible Navier-Stokes equations given. Give the supporting mathematical argument for each step.

*[Terangkan langkah-langkah penyelesaian persamaan tidak mampat Navier-Stokes menggunakan algoritma MAC. Berikan sokongan matematik bagi setiap langkah-langkah tersebut.]*

(10 Marks /Markah)

- (b) The staggered grid configuration is very effective in removing checkerboard pressure field solution. For this reason, the MAC algorithm applied the staggered grid configuration in its early inception. Construct the staggered grid configuration for two-dimensional structure and propose how to discretize the differential terms  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  and  $\frac{\partial p}{\partial x}$  for the given grid.

*[Konfigurasi grid tidak serentak sangat berkesan untuk menyahkan solusi medan tekanan berkotak. Oleh sebab itu, pada awal-awalnya algoritma MAC telah menggunakan konfigurasi grid tidak serentak ini. Bina grid tidak serentak untuk struktur dua dimensi dan berikan cadangan bagaimana terma-terma pembezaan  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  dan  $\frac{\partial p}{\partial x}$  boleh didiskretkan untuk grid tersebut.]*

(10 Marks /Markah)

- (c) Can the checkerboard pressure field solution be avoided using normal grid? Analyze the problem to determine the cause.

*[Bolehkah penyelesaian medan tekan berpetak dielak menggunakan grid normal? Analisa masalah itu untuk menentukan puncanya.]*

(5 Marks /Markah)

**Part B: Answer TWO (2) questions ONLY***[Bahagian B: Jawab DUA (2) soalan SAHAJA]***Question 3***[Soalan 3]*

The one-dimensional linear advection equation is the canonical example of transport phenomena. The equation is an excellent model equation to test the behavior of numerical method. The equation is given as below.

*[Persamaan adveksi linear satu dimensi merupakan satu contoh persamaan berkanun bagi fenomena pengangkutan. Persamaan ini juga merupakan satu persamaan model yang sangat cemerlang untuk menguji sifat-sifat kaedah berangka. Persamaan ini diberikan seperti dibawah.]*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0$$

- (a) The finite volume method can be applied to numerically solve the linear advection equation. Answer the question below regarding the finite volume method. *[Kaedah isipadu terhingga boleh digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi linear secara berangka. Jawab soalan-soalan dibawah berkenaan kaedah isipadu terhingga.]*

- (i) Apply the finite volume method to derive the semi-discrete form of the advection equation.

*[Gunakan kaedah isipadu terhingga untuk menerbitkan persamaan separa-diskrit untuk persamaan adveksi tersebut.]*

(5 Marks /Markah)

- (ii) Considering a uniform control volume, analyze the possible discretization method for the semi-discrete equation in Q3(a)(i).

*[Dengan menganggap isipadu kawalan yang sekata, analisa kaedah diskrit yang mungkin digunapakai untuk persamaan separuh diskrit Q3(a).]*

(5 Marks /Markah)

- (b) From the discrete equation in Q3(a), analyze the numerical stability condition using complex Fourier analysis.

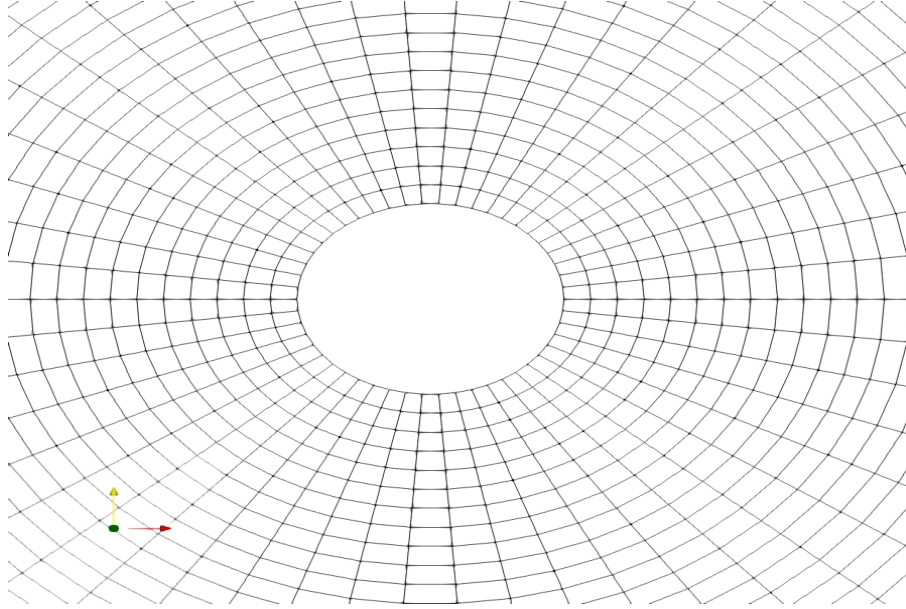
*[Daripada persamaan diskrit Q3(a), analisa syarat kestabilan berangka menggunakan nombor kompleks Fourier.]*

(10 Marks /Markah)

- (c) What is the conclusion from Q3(b)? Is the method stable? Propose a solution if the method is not stable.

*[Apakah kesimpulan daripada Q3(b)? Adakah kaedah ini stabil? Cadangkan satu penyelesaian jika kaedah ini tidak stabil.]*

(5 Marks /Markah)

**Question 4***[Soalan 4]***Figure 1***[Rajah 1]*

The curvilinear boundary fitted grid as shown in **Figure 1** is generated analytically using the equations below with  $r_0$  as the radius of the cylinder. Answer the questions below regarding coordinate transformation.

*[Grid melengkung padanan sempadan yang ditunjukkan pada Rajah 1 dijana secara analitik menggunakan persamaan dibawah dimana  $r_0$  merupakan jejari silinder tersebut. Jawab soalan-soalan dibawah berkaitan transformasi kordinat.]*

$$x(r, \theta) = (r_0 + r) \cos \theta$$

$$y(r, \theta) = (r_0 + r) \sin \theta$$

- (a) For each coordinate, the metrics are given as  $x_r$ ,  $y_r$ ,  $x_\theta$  and  $y_\theta$ , where the subscript refers to partial derivatives. These metrics are required to transform any physical quantity derivative, for example  $u_x$ , into the computational domain derivatives of  $u_r$  and  $u_\theta$ . Construct the projection of  $u_x$  into domain  $(r, \theta)$  using the metrics and  $(u_r, u_\theta)$ .

*[Untuk setiap koordinat, metrik-metrik diberikan sebagai  $x_r$ ,  $y_r$ ,  $x_\theta$  dan  $y_\theta$ , dimana subskrip merujuk kepada terbitan separa. Metrik-metrik ini diperlukan untuk mengubah apa-apa terbitan kuantiti fizik seperti  $u_x$  untuk terma terbitan di domain pengiraan  $u_r$  dan  $u_\theta$ . Binakan unjuran  $u_x$  ke domain  $(r, \theta)$  menggunakan metrik-metrik dan  $(u_r, u_\theta)$ .]*

(10 Marks /Markah)

- (b) **Table 1** shows a sample coordinate of a cell from the grid in **Figure 1**. The Jacobian metric, **J** of any cell in the grid is given as the equation below. Calculate the area of the cell and interpret its relation to the Jacobian metric.

*[Jadual 1 menunjukkan sampel koordinat satu sel daripada grid seperti di Rajah 1. Metrik Jacobian **J** bagi mana-mana sel dalam grid diberikan seperti persamaan di bawah. Kirakan luas kawasan sel tersebut dan interpretasikan hubungannya dengan metrik Jacobian.]*

$$\mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{pmatrix} = x_r y_\theta - x_\theta y_r$$

- (i) Calculate the area of the cell.

*[Kirakan keluasan sel tersebut.]*

(5 Marks /Markah)

- (ii) What is the interpretation of the Jacobian metric for the cell area?

*[Apakan interpretasi metrik Jacobian terhadap keluasan sel tersebut.]*

(5 Marks /Markah)

- (c) Sketch the cell in Q4(b) roughly and analyze the outward pointing unit normal vector on each of the cell's side.

*[Lakarkan secara kasar sel daripada Q4(b) dan analisisan vektor unit normal di setiap sisi sel.]*

(5 Marks /Markah)

**Table 1**

*[Jadual 1]*

<b>x</b>	<b>y</b>
0.927051	2.85317
0.562144	2.94686
0.988854	3.04338
0.59962	3.14332

**Question 5***[Soalan 5]*

The time-dependent one-dimensional heat equation is a second-order partial differential equation. The second-order term infers that the solution propagation will be restricted to the order of  $O(1/\Delta h^2)$ , where  $\Delta h$  is the mesh spacing. This put a severe stability restriction to explicit numerical scheme when solving this equation. Answer the questions referring to the time-dependent one-dimensional heat equation below.

*[Persamaan haba satu-dimensi bersandar masa merupakan persamaan kebezaan separa darjah kedua. Terma darjah kedua bererti propagasi solusi disekat pada darjah  $\mathcal{O}(1/\Delta h^2)$ , dimana  $\Delta h$  adalah jarak antara grid. Ini menyebabkan penyekatan syarat kestabilan yang teruk bagi kaedah berangka tersurat ketika menyelesaikan persamaan ini. Jawab soalan-soalan berkaitan dengan persamaan haba satu-dimensi bersandar masa dibawah.]*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

- (a) Construct the discretized equation for the heat equation using *forward* Euler time integration and centered difference scheme for the spatial term. Analyze the discrete equation to derive the numerical stability condition.

*[Bina persamaan diskrit untuk persamaan haba itu menggunakan kaedah integrasi masa Euler ke hadapan dan kaedah pembezaan pertengahan untuk terma ruang. Analisis persamaan diskrit itu untuk menerbitkan syarat kestabilan berangka.]*

(10 Marks /Markah)

- (b) From the discrete equation obtained in Q5(a) the time integration scheme can be modified by setting the time step forward or backward. Answer the questions below regarding backward time step method.

*[Daripada persamaan diskrit yang diperolehi oleh Q5(a) kaedah integrasi masa boleh diubahsuai dengan menetapkan langkah masa ke hadapan atau mundur. Jawab soalan-soalan dibawah berkenaan kaedah mundur langkah masa.]*

- (i) Apply the *backward* Euler time integration to the discrete equation obtained in Q5(a) and rearrange the equation.

*[Applikasikan kaedah integrasi masa mundur Euler keatas persamaan diskrit yang diperolehi daripada Q5(a) dan susun semula persamaan itu.]*

(5 Marks /Markah)

- (ii) Analyze the stability condition for the backward Euler time integration.

*[Analiskan syarat kestabilan kaedah integrasi masa mundur Euler.]*

(5 Marks /Markah)

- (c) The discrete equation from Q5(b) contains more unknown at the next time step than at the previous time step. This condition necessitates the construction of simultaneous linear equations. Construct the matrix-vector form for the simultaneous linear equations.

*[Persamaan diskrit daripada Q5(b) mengandungi lebih banyak terma di masa seterusnya daripada masa sebelumnya. Keadaan ini memerlukan pembinaan persamaan linear serentak. Bina persamaan linear serentak itu dalam bentuk matriks-vektor.]*

(5 Marks /Markah)

-oooOooo-