

SULIT

UNIVERSITI MALAYSIA PERLIS

Peperiksaan Akhir Semester Pertama
Sidang Akademik 2018/2019

Januari 2019

ENT241 – Fluid Mechanics 1
[Mekanik Bendalir 1]

Masa: 3 Jam

Please make sure that this question paper has **SEVENTEEN (17)** printed pages including this front page before you start the examination.

*[Sila pastikan kertas soalan ini mengandungi **TUJUH BELAS (17)** muka surat yang bercetak termasuk muka hadapan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

This question paper has **SIX (6)** questions. Answer **ALL** questions in **PART A** and **ONE (1)** question in **PART B**. Each question contributes 20 marks.

*[Kertas soalan ini mengandungi **ENAM (6)** soalan. Jawab **semua** soalan di **BAHAGIAN A** dan mana-mana **SATU (1)** soalan di **BAHAGIAN B**. Markah bagi setiap soalan adalah 20 markah.]*

Note: Tables and equations are given in the Appendix.

[Nota: Jadual dan persamaan diberi dalam Lampiran.]

SULIT

Part A: Answer all questions*[Bahagian A: Jawab semua soalan]***Question 1***[Soalan 1]*

- (a) Sketch an appropriate figure and elaborate the difference between gage pressure and absolute pressure.

[Lukiskan gambarajah yang sesuai dan terangkan perbezaan antara tekanan tolok dan tekanan mutlak.]

(5 Marks /Markah)

- (b) What is the effect of increasing the pressure of water during a boiling process will be to the saturated temperature? Explain your answer.

[Apakah kesan peningkatan tekanan air semasa proses pendidihan terhadap suhu tepu? Terangkan jawapan anda.]

(2 Marks /Markah)

- (c) Dam's walls are purposely designed to be thicker at the bottom than at the top. Using appropriate equations, elaborate why the walls are designed that way.

[Dinding empangan direkabentuk supaya lebih tebal di dasar daripada di bahagian permukaan. Menggunakan persamaan-persamaan yang sesuai, huraikan mengapa dinding itu direka sedemikian.]

(3 Marks /Markah)

- (d) Pressure is often given in terms of a liquid column and is expressed as pressure head. Express the standard atmospheric pressure in terms of fluid column height for mercury (SG = 13.6), water (SG = 1.0) and glycerine (SG = 1.26). Based on your answer, explain which is the most suitable for manometer's application.

[Tekanan biasanya diberikan dari segi ketinggian bendalir dan dinyatakan sebagai turus tekanan. Nyatakan piawai tekanan atmosfera dalam bentuk ketinggian bendalir bagi raksa (SG = 13.6), air (SG = 1.0) dan gliserin (SG = 1.26). Berdasarkan jawapan anda, terangkan bendalir mana yang paling sesuai untuk kegunaan manometer.]

(5 Marks /Markah)

- (e) Viscosity of a fluid is to be measured by a viscometer constructed of two 75 cm long concentric cylinders as shown in **Figure 1**. The outer diameter of the inner cylinder is 15 cm and the gap between the two cylinders is 1 mm. The inner cylinder is rotated at 300 rpm. The torque is measured to be 0.8 Nm. Determine the viscosity of the fluid.

[Kelikatan sesuatu bendalir akan diukur menggunakan meter kelikatan yang dibuat daripada dua silinder sepanjang 75 cm seperti Rajah 1. Diameter luar untuk silinder dalaman adalah 15 cm dan jurang antara kedua-dua silinder itu adalah 1 mm. Silinder dalaman berputar pada 300 rpm. Tork yang diukur didapati 0.8 Nm. Tentukan nilai kelikatan bendalir tersebut.]

(5 Marks /Markah)

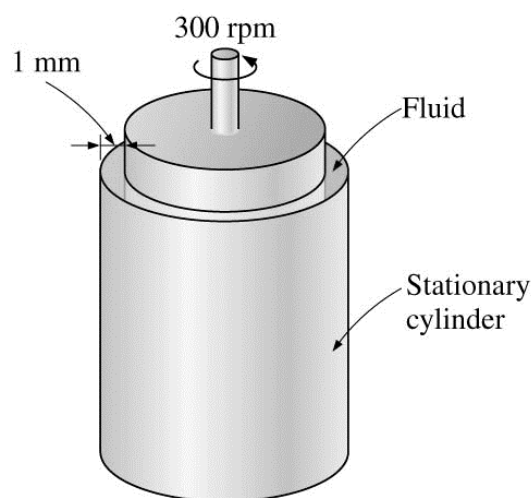


Figure 1

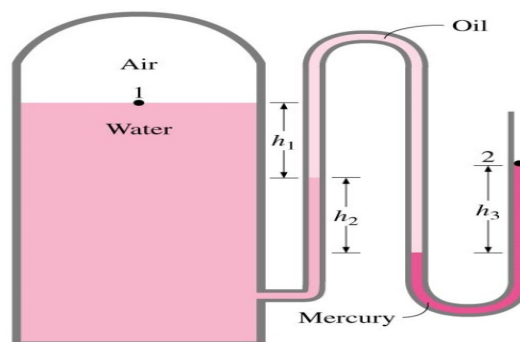
[Rajah 1]

Question 2*[Soalan 2]*

- (a) Water in a tank is pressurized by air and the pressure is measured by a multi-fluid manometer as shown in **Figure 2**. Analyze the gage pressure of air in the tank if $h_1 = 0.4$ m, $h_2 = 0.6$ m, and $h_3 = 0.8$ m. The densities of water, oil and mercury are given as 1000 kg/m^3 , 850 kg/m^3 and $13,600 \text{ kg/m}^3$, respectively.

[Air dalam satu tangki diberi tekanan udara dan tekanan tersebut diukur dengan manometer berbilang bendalir seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2. Nilai tekanan tolak bagi air sekiranya $h_1 = 0.4$ m, $h_2 = 0.6$ m, and $h_3 = 0.8$ m. Ketumpatan bagi air, minyak dan raksa adalah 1000 kg/m^3 , 850 kg/m^3 dan $13,600 \text{ kg/m}^3$.]

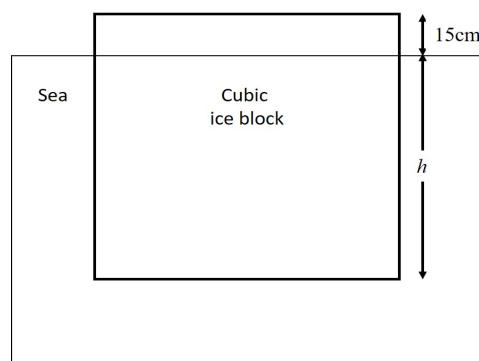
(5 Marks /Markah)

**Figure 2***[Rajah 2]*

- (b) A large cubic ice block floating in seawater is shown in **Figure 3**. The specific gravity of ice and seawater are 0.92 and 1.025, respectively. If a 25 cm high portion of the ice block extends above the surface water, determine the height of the ice block below the surface.

[Satu kiub ais besar terapung di laut seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 3. Graviti tentu ais dan air laut masing-masing adalah 0.92 dan 1.025. Jika sebanyak 25 cm dari ais kiub tersebut terkeluar melebihi permukaan air laut, tentukan ketinggian kiub ais tersebut yang berada di bawah permukaan air laut.]

(5 Marks /Markah)

**Figure 3***[Rajah 3]*

....5/-

- (c) An 80 cm high aquarium with cross-section $2\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ is partially filled with water as shown in **Figure 4**. The aquarium is to be transported on the back of a truck. The truck accelerates from 0 to 90 km/h in 10s. Assume that acceleration remains constant and horizontal. If it is desired that no water spills during acceleration, analyze the allowable initial water height in the tank.

[Satu akuarium setinggi 80 cm yang mempunyai keratan rentas $2\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ diisi air separa penuh seperti dalam Rajah 4. Akuarium tersebut diletakkan di atas lori. Lori tersebut memecut dari 0 sehingga 90 km/j dalam masa 10s. Anggapkan pecutan adalah kekal dan dalam keadaan mengufuk. Sekiranya tumpahan air tidak boleh berlaku semasa pecutan, analisis ketinggian mula air dalam tangki yang dibenarkan.]

(5 Marks /Markah)

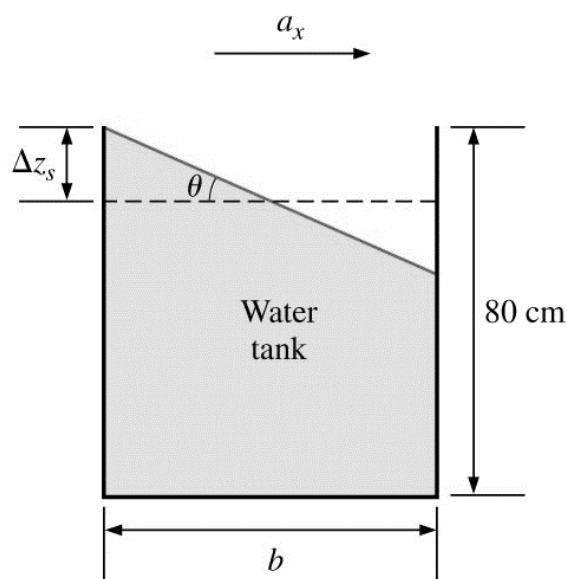


Figure 4

[Rajah 4]

- (d) A steady, incompressible two-dimensional velocity field is given below by the following components in the xy -plane. Derive the acceleration component a_x and a_y and calculate the acceleration at point $(x,y) = (2.0, 1.5)$.

[Satu medan halaju yang mantap, tidak boleh mampat dua dimensi diberi di bawah berdasarkan komponen satah xy . Terbitkan komponen pecutan a_x dan a_y dan kirakan pecutan di titik $(x,y) = (2.0, 1.5)$.]

$$u = 0.205 + 0.97x + 0.851y$$

$$v = -0.509 + 0.953x - 0.97y$$

(5 Marks /Markah)

Question 3*[Soalan 3]*

- (a) The Bernoulli equation is a very useful tool in fluid mechanics. It is a simplified version of the Navier-Stokes equations for certain conditions. The simplification is what made the equation useful as a design tool in fluid mechanics.

[Persamaan Bernoulli adalah satu persamaan yang sangat berguna dalam mekanik bendalir. Persamaan ini merupakan satu persamaan yang dimudahkan daripada persamaan Navier-Stokes dalam keadaan-keadaan tertentu. Permudahan inilah yang membuatkan persamaan ini sangat berguna dalam rekabentuk melibatkan mekanik bendalir.]

- (i) The Bernoulli equation is derived from basic mechanics principles together with a few assumptions for simplification. Explain and describe the steps.

[Persamaan Bernoulli ditakkulkan daripada prinsip-prinsip asas mekanik dengan menggunakan beberapa anggapan untuk memudahkan persamaan. Jelaskan dan terangkan langkah-langkahnya.]

(5 Marks /Markah)

- (ii) Demonstrate the step-by-step of deriving the Bernoulli equation by applying the methodology stated in Q3(a)(i). Use the incompressible and steady flow assumptions.

[Tunjukkan satu per satu langkah-langkah untuk mendapatkan persamaan Bernoulli menggunakan metodologi daripada Q3(a)(i). Gunakan anggapan aliran tidak boleh mampat dan aliran mantap.]

(5 Marks /Markah)

- (b) Torricelli's law describes the flow velocity of fluid discharging from a reservoir. The law is a canonical example of the Bernoulli equation's application. **Figure 5** shows a typical water reservoir, with D_{tank} as the diameter of the reservoir, D_{jet} as the diameter of discharging water jet and h_0 as the maximum water level. The water level reference axis is given as h . For this question, your solution should be in the algebraic form only.

[Hukum Torricelli menyatakan bagaimana halaju bendalir yang mengalir keluar dari takungan. Hukum ini adalah satu contoh bersejarah mengenai aplikasi persamaan Bernoulli. Rajah 5 menunjukkan contoh kebiasaan takungan air, dimana D_{tank} adalah diameter tangki, D_{jet} adalah diameter jet air yang mengalir dan h_0 adalah tinggi maksima takungan air. Paksi rujukan ketinggian air diberikan sebagai h . Untuk soalan ini, solusi anda hanya akan berbentuk algebra.]

- (i) Using Bernoulli equation, construct the exiting water's velocity from the tank as a function of height h . Derive the special case of Torricelli's law by using the assumption $D_{\text{tank}} \gg D_{\text{jet}}$.

[Menggunakan persamaan Bernoulli, binakan persamman untuk halaju aliran air yang keluar dari tangki sebagai fungsi kepada ketinggian h . Takkulkan kes istimewa untuk hukum Torricelli dengan menggunakan andaian $D_{\text{tank}} \gg D_{\text{jet}}$.]

(5 Marks /Markah)

- (ii) Estimate the time required for the water level of the tank to reach the height of h_2 .

[Anggarkan masa yang diperlukan untuk ketinggian air mencapai h_2 .]

(5 Marks /Markah)

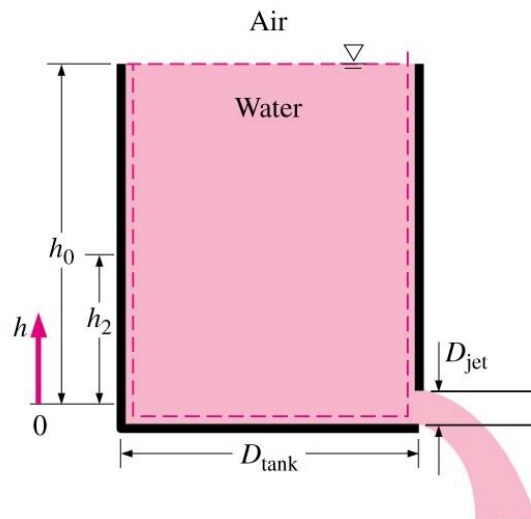


Figure 5

[Rajah 5]

Question 4*[Soalan 4]*

- (a) The relationship between the time rates of change of an extensive quantity for a control volume can be expressed by the Reynolds transport theorem.

[Hubungan antara kadar perubahan pada masa untuk kuantiti yang meluas untuk sesuatu isipadu kawalan dapat dijelaskan melalui teorem pengangkutan Reynolds.]

- (i) Define the extensive quantity for the Reynolds transport theorem. Give two examples.

[Definisikan kuantiti meluas untuk teorem pengangkutan Reynolds. Berikan dua contoh.]

(3 Marks /Markah)

- (ii) The mathematical expression of the Reynolds transport theorem is given as in equation below with ρ , \mathcal{V} , \vec{V} , \vec{n} as density, volume of the control volume, velocity vector and the normal vector outfacing the control volume, respectively. Given B_{sys} as the extensive quantity, define b in the equation given.

[Ekspresi matematik untuk teorem pengangkutan Reynolds diberikan oleh persamaan dibawah dimana ρ , \mathcal{V} , \vec{V} , \vec{n} adalah ketumpatan, isipadu kepada isipadu kawalan, vektor halaju dan vektor normal yang menghadap keluar isipadu kawalan, masing-masingnya. Diberikan B_{sys} sebagai kuantiti meluas, definisikan b dalam persamaan tersebut.]

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

(2 Marks /Markah)

- (iii) Demonstrate the interpretation of force acting on a fluid from the Reynolds transport theorem.

[Tunjukkan demonstrasi yang menginterpretasikan daya yang bertindak keatas bendalir daripada teorem pengangkutan Reynolds.]

(2 Marks /Markah)

- (iv) A water jet striking a stationary plate is a good example of momentum analysis and Reynolds transport theorem application. Referring to **Figure 6**, the value of \vec{V}_1 is 30 m/s and the mass flow rate is given as 10 kg/s. The outflow \vec{V}_2 is given as 30 m/s. Determine the force needed to keep the plate stationary.

[Jet air menembak plat tetap merupakan satu contoh baik untuk aplikasi analisa momentum dan teorem pengangkutan Reynolds. Merujuk kepada Rajah 6, nilai \vec{V}_1 diberikan 30 m/s dan kadar aliran jisim diberikan sebagai 10 kg/s. Aliran keluar \vec{V}_2 diberikan sebagai 30 m/s. Tentukan daya yang diperlukan untuk mengekalkan kedudukan plat itu.]

(3 Marks /Markah)

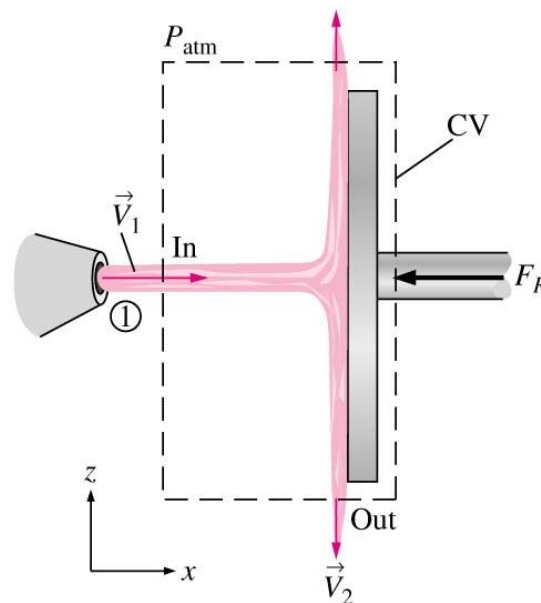


Figure 6

[Rajah 6]

- (b) **Figure 7** shows a wind generator with a 10 m-diameter blade span which is specified to a minimum wind speed of 10 km/h at which it will generate 0.5 kW of electric power. Air density is given as 1.217 kg/m^3 . Answer the questions below regarding the wind turbine.

[Rajah 7 menunjukkan satu penjana angin dengan bilah berdiameter 10 m berspesifikasikan untuk minimum halaju angin 10 km/h dimana ia akan menjanakan elektrik sebanyak 0.5 kW. Ketumpatan udara diberikan sebagai 1.217 kg/m^3 . Jawab soalan-soalan dibawah berkaitan turbin angin tersebut.]

- (i) Estimate the efficiency and the horizontal force exerted by the wind on the supporting mast of the wind turbine.

[Anggarkan berapa kecekapan dan berapa daya mengufuk yang dikenakan oleh angin kepada tiang yang menyokong turbin angin itu.]

(5 Marks /Markah)

- (ii) Assuming that efficiency remains the same, evaluate the effect of doubling the wind speed on power generation and the force acting on the mast.

[Dengan menganggap kecekapan pada kadar yang sama, nilaikan kesan akibat peningkatan halaju angin sebanyak dua kali ganda keatas penjanaan kuasa dan daya yang bertindak keatas tiang.]

(5 Marks /Markah)

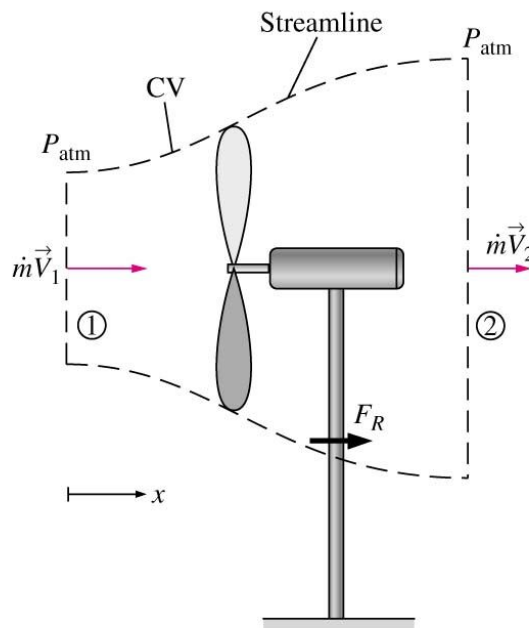


Figure 7

[Rajah 7]

Part B: Answer all questions*[Bahagian B: Jawab semua soalan]***Question 5***[Soalan 5]*

- (a) **Figure 8** shows a free-body diagram of a ring-shaped differential fluid element of radius r , thickness dr and length dx oriented coaxially with a horizontal pipe in a fully developed laminar flow. Answer the following questions related to the figure.

[Rajah 8 menunjukkan diagram jasad bebas yang berbentuk cincin pembezaan elemen bendalir dimana r adalah jejari kepada elemen bendalir, dr adalah ketebalan dan dx adalah panjang elemen bendalir yang selari dengan paksi mengufuk paip dimana aliran mantap terbentuk. Jawab soalan-soalan berikut berdasarkan rajah tersebut.]

- (i) Given the shear stress as $\tau = -\mu(du/dr)$ and the pressure gradient as constant, construct the solution for the velocity profile $u(r)$.

[Diberikan tekanan ricih sebagai $\tau = -\mu(du/dr)$ dan kecerunan tekanan sebagai pemalar, bina solusi untuk profil halaju $u(r)$.]

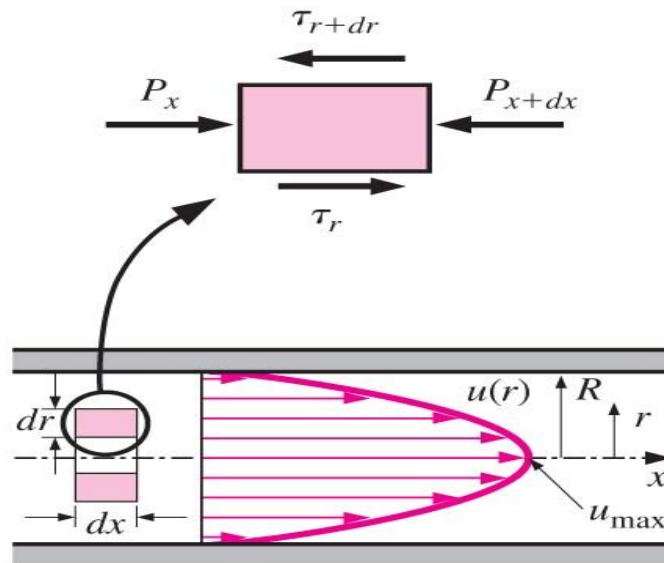
(5 Marks /Markah)

- (ii) The average velocity of flow in a circular pipe is given as the equation below. Solve the equation using $u(r)$ obtained from Q5(a)(i).

[Halaju purata untuk aliran dalam paip bulat diberikan seperti persamaan dibawah. Selesaikan persamaan ini menggunakan $u(r)$ yang diperolehi daripada Q5(a)(i).]

$$V_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr$$

(5 Marks /Markah)

**Figure 8***[Rajah 8]*

- (b) Pressure drop ΔP is an important quantity in designing piping system because it is directly related to the power requirement of pump or fan to maintain the flow. Using **Figure 9** as a reference, answer the questions below.

[Kejatuhan tekanan ΔP merupakan satu kuantiti yang penting dalam rekabentuk sistem perpaipan kerana ia melibatkan keperluan kuasa untuk pam atau kipas bagi mengekalkan aliran. Dengan menggunakan Rajah 9 sebagai rujukan, jawab soalan-soalan dibawah.]

- (i) Define the pressure drop ΔP using the notations from **Figure 9**. Analyze the relation between pressure drop, average velocity of the flow and the volume flow rate for laminar flow in the pipe.

[Berikan definisi kejatuhan tekanan ΔP menggunakan notasi daripada Rajah 9. Analisis hubungan antara kejatuhan tekanan, halaju purata aliran dan kadar aliran isipadu untuk aliran mantap di dalam paip.]

(5 Marks /Markah)

- (ii) Given a horizontal pipe of 40 m long and 5 cm in diameter, a laminar flow for a given volume flow rate of $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ is flowing inside the pipe. Estimate the inlet pressure required to maintain the volume flow rate where the exit pressure is 97 kPa. The fluid density and viscosity are given as 888 kg/m^3 and $0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, respectively.

[Diberikan satu paip sepanjang 40 m dan berdiameter 5 cm, dimana aliran mantap pada kadar aliran isipadu sebanyak 0.1 m^3 sedang mengalir di dalam paip. Anggarkan tekanan masuk yang diperlukan untuk mengekalkan kadar aliran isipadu ini dimana tekanan keluaranya adalah 97 kPa. Ketumpatan bendalir dan kelikatannya diberikan sebagai 888 kg/m^3 dan $0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, masing-masingnya.]

(5 Marks /Markah)

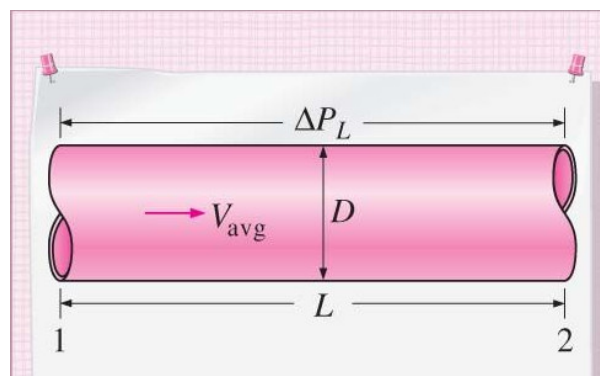


Figure 9

[Rajah 9]

Question 6*[Soalan 6]*

- (a) There are many non-dimensional parameters in fluid mechanics. For example, the Reynolds number, which measure the ratio of inertial force compared to viscous force. The non-dimensional parameters offer a standardized way to interpret the physics of fluid mechanics. Answer the questions below regarding non-dimensional parameters.

[Ada banyak parameter tidak berdimensi didalam mekanik bendalir. Sebagai contoh, nombor Reynolds, dimana nombor ini mengukur nisbah daya inertia berbanding daya kelikatan. Parameter tidak berdimensi memberikan cara untuk menginterpretasikan fizik mekanik bendalir secara berpiawai. Jawab soalan-soalan dibawah berkenaan parameter tidak berdimensi.]

- (i) The equation of motion for an object falling in a vacuum space is given as the equation below. Propose a suitable non-dimensional parameter for the equation and solve for both the dimensional parameter and non-dimensional parameter equations.

[Persamaan gerakan untuk objek yang jatuh di dalam ruang vakum diberikan seperti persamaan di bawah. Cadangkan satu parameter tidak berdimensi untuk persamaan tersebut dan selesaikan untuk kedua-dua persamaan berdimensi dan tidak berdimensi.]

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

(5 Marks /Markah)

- (ii) A practical non-dimensional parameter will give an insight of the ratio of significance for the physical phenomena that is being investigated. In this case, what is the interpretation of your non-dimensional parameter and its utility? Give the supporting arguments.

[Parameter tidak berdimensi yang praktikal akan memberikan gambaran mengenai nisbah kepentingan sesuatu fenomena fizikal yang dikaji. Dalam kes ini, apakah intepretasi parameter tidak berdimensi dan kegunaannya? Berikan hujah-hujah sokongan anda.]

(5 Marks /Markah)

...

- (b) **Figure 10** shows an airfoil that is used in an experiment to predict its lift characteristic. The chord length of the airfoil L_c is 1.0 m and the platform area A , which is an area viewed from the top of the airfoil when the attack angle $\alpha = 0$ is 10.0 m^2 . To test the airfoil, a model of 1/10 in size is built and tested in a wind tunnel.

[Rajah 10 menunjukkan satu aerofoil yang digunakan dalam satu eksperimen untuk meramalkan karakter angkat. Panjang kod aerofoil itu L_c adalah 1.0 m dan luas platform A , iaitu kawasan yang dilihat dari atas aerofoil itu ketika sudut serangan $\alpha = 0$ adalah 10.0 m^2 . Untuk menguji aerofoil itu, satu model bersaiz 1/10 telah dibina dan diuji dalam terowong angin.]

- (i) The suitable non-dimensional parameter for this experiment is the lift coefficient. Define the lift coefficient and give the physical interpretation of the lift coefficient. Prove that the lift coefficient is a function of Reynolds number, Mach number and attack angle α .

[Parameter tidak berdimensi yang sesuai untuk eksperimen ini adalah pekali daya angkatan. Berikan definisi pekali daya angkatan dan berikan interpretasi fizikalnya. Buktikan bahawa pekali daya angkatan adalah fungsi kepada nombor Reynolds, nombor Mach dan sudut serangan α .]

(5 Marks /Markah)

- (ii) The airfoil is designed to cruise at a velocity of $V=50 \text{ m/s}$ close to the ground where the temperature is 25°C . At this temperature, the speed of sound is approximately 346 m/s . What is the required wind speed inside the wind tunnel for the airfoil design to achieve dynamic similarity? Analyze the problems in achieving dynamic similarity and propose a solution.

[Aerofoil ini direka untuk halaju pelayaran $V=50 \text{ m/s}$ pada berhampiran permukaan dimana suhu udara adalah 25°C . Pada suhu ini, halaju bunyi adalah lebih kurang 346 m/s . Apakah halaju angin yang diperlukan didalam terowong angin supaya rekabentuk aerofoil itu mencapai kesamaan dinamik? Analisis masalah-masalah yang dihadapi untuk mencapai kesamaan dinamik ini dan cadangkan satu penyelesaian.]

(5 Marks /Markah)

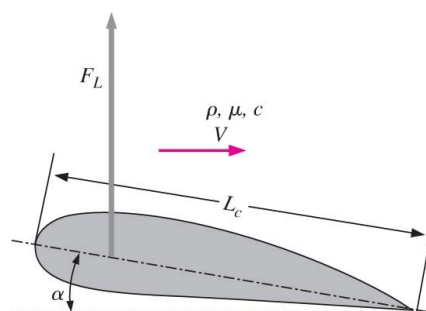


Figure 10

[Rajah 10]

-oooOooo-

....16/-

Appendices

Gravity acceleration, $g=9.81\text{m/s}^2$
 Density of water, $\rho=1000\text{kg/m}^3$ @ 1kg/L

Properties of air:

Gas constant $R=0.2870\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$, $R=0.2870\text{kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K}$
 Specific heat $c_p=1.005\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$, $c_v=0.7180\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$, $k=c_p/c_v=1.400$

Bernoulli Equations:

Steady, incompressible flow:
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constant (along a streamline)} \quad P_{\text{stag}} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (\text{kPa})$$

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{\text{stag}} - P)}{\rho}}$$

Momentum analysis (angular):

$$V = r\omega \quad \text{and} \quad a_t = r\alpha \quad \vec{M} = I\vec{\alpha} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (\text{rad/s}) \quad T_{\text{shaft}} = \dot{m}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t})$$

$$T_{\text{shaft}} = \dot{m}(r_2 V_2 \sin \alpha_2 - r_1 V_1 \sin \alpha_1)$$

$$V_{1,t} = \omega r_1 \quad V_{2,t} = \omega r_2$$

$$T_{\text{shaft, ideal}} = \dot{m}\omega(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \omega T_{\text{shaft}} = 2\pi n \dot{T}_{\text{shaft}}$$

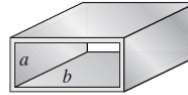
Internal Flows:

$$\text{Re} = \frac{\text{Inertial forces}}{\text{Viscous forces}} = \frac{V_{\text{avg}} D}{\nu} = \frac{\rho V_{\text{avg}} D}{\mu}$$

$\text{Re} \lesssim 2300$	laminar flow
$2300 \lesssim \text{Re} \lesssim 10,000$	transitional flow
$\text{Re} \gtrsim 10,000$	turbulent flow

$$D_h = \frac{4A_c}{P}$$

Rectangular duct:



$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$u(r) = 2V_{\text{avg}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{avg}}^2}{2}$$

$$f = \frac{64\mu}{\rho D V_{\text{avg}}} = \frac{64}{\text{Re}}$$

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{\text{avg}}^2}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{avg}}^2}{2g}$$

$$\dot{V} = V_{\text{avg}} A_c = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8\mu L} \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2) \pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L$$

Colebrook equation

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (\text{turbulent flow})$$

Haaland Equation

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

Minor Losses:

$$K_L = \frac{h_L}{V^2/(2g)}$$

$$h_L = \Delta P_L / \rho g$$

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$