第四章 贝叶斯分类器

1. 简述朴素贝叶斯的优缺点.

优点：

（1）朴素贝叶斯模型发源于古典数学理论，有稳定的分类效率。

（2）对小规模的数据表现很好，能个处理多分类任务，适合增量式训练，尤其是数据量超出内存时，我们可以一批批的去增量训练。

（3）对缺失数据不太敏感，算法也比较简单，常用于文本分类。

缺点：

（1）理论上，朴素贝叶斯模型与其他分类方法相比具有最小的误差率。但、是实际上并非总是如此，这是因为朴素贝叶斯模型给定输出类别的情况下,假设属性之间相互独立，这个假设在实际应用中往往是不成立的，在属性个数比较多或者属性之间相关性较大时，分类效果不好。而在属性相关性较小时，朴素贝叶斯性能最为良好。对于这一点，有半朴素贝叶斯之类的算法通过考虑部分关联性适度改进。

（2）需要知道先验概率，且先验概率很多时候取决于假设，假设的模型可以有很多种，因此在某些时候会由于假设的先验模型的原因导致预测效果不佳。

（3）由于我们是通过先验和数据来决定后验的概率从而决定分类，所以分类决策存在一定的错误率。

（4）对输入数据的表达形式很敏感。

2. 试由下表的训练数据学习一个朴素贝叶斯分类器并确定 $x=(2,S)^T$ 的类标记 y. 表中$X^{(1)}$ ，$X^{(2)}$ 为特征,取值的集合分别为$A_1=\{1,2,3\}$， $A_2=\{S,M,L\}$, Y 为类标记，$\mathbf{Y}\in C=\{1,-1\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$X^{(1)}$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
$X^{(2)}$	S	M	M	S	S	S	M	M	L	L	L	M	M	L	L
Y	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1

$P(Y=1)=\frac{9}{15}$, $P(Y=-1)=\frac{6}{15}$

$P(X^{(1)}=1|Y=1)=\frac{2}{9}$, $P(X^{(1)}=2|Y=1)=\frac{3}{9}$, $P(X^{(1)}=3|Y=1)=\frac{4}{9}$

$P(X^{(2)}=S|Y=1)=\frac{1}{9}$, $P(X^{(2)}=M|Y=1)=\frac{4}{9}$, $P(X^{(2)}=L|Y=1)=\frac{4}{9}$

$P(X^{(1)}=1|Y=-1)=\frac{3}{6}$, $P(X^{(1)}=2|Y=-1)=\frac{2}{6}$, $P(X^{(1)}=3|Y=-1)=\frac{1}{6}$

$P(X^{(2)}=S|Y=-1)=\frac{3}{6}$, $P(X^{(2)}=M|Y=-1)=\frac{2}{6}$, $P(X^{(2)}=L|Y=-1)=\frac{1}{6}$

对于给定的$x=(2,S)^T$计算：

$$P(Y=1)P(X^{(1)}=2|Y=1)P(X^{(2)}=S|Y=1)=\frac{9}{15}*\frac{3}{9}*\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

$$P(Y=-1)P(X^{(1)}=2|Y=-1)P(X^{(2)}=S|Y=-1)=\frac{6}{15}*\frac{2}{6}*\frac{3}{6}=\frac{1}{15}$$

因为$P(Y=-1)P(X^{(1)}=2|Y=-1)P(X^{(2)}=S|Y=-1)$最大，所以$y=-1$

3. 考虑下表中的数据集

Record	A	B	C	Class
1	0	0	0	+
2	0	0	1	−
3	0	1	1	−
4	0	1	1	−
5	0	0	1	+
6	1	0	1	+
7	1	0	1	−
8	1	0	1	−
9	1	1	1	+
10	1	0	1	+

(a) 估计条件概率 P(A|+)，P(B|+)，P(C|+)，P(A|-)，P(B|-)和 P(C|-).

① $P(A=1\mid +)=\frac{3}{5}$　② $P(B=1\mid +)=\frac{1}{5}$　③ $P(C=1\mid +)=\frac{4}{5}$

④ $P(A=1\mid -)=\frac{2}{5}$　⑤ $P(B=1\mid -)=\frac{2}{5}$　⑥ $P(C=1\mid -)=1$

⑦ $P(A=0\mid +)=\frac{2}{5}$　⑧ $P(B=0\mid +)=\frac{4}{5}$　⑨ $P(C=0\mid +)=\frac{1}{5}$

⑩ $P(A=0\mid -)=\frac{3}{5}$　⑪ $P(B=0\mid -)=\frac{3}{5}$　⑫ $P(C=0\mid -)=0$

(b) 根据(a)中的条件概率，使用朴素贝叶斯方法预测测试样本(A=0，B=1，C=0)的类标号

假设$P(A=0,B=1,C=0)=K$，则 K 属于两个类的概率为：

贝叶斯公式$P(类别|特征)=\frac{P(特征|类别)*P(类别)}{P(特征)}$

① $P(+\mid A=0,B=1,C=0)=P(A=0,B=1,C=0)*P(+)/K$

$=P(A=0\mid +)P(B=1\mid +)P(C=0\mid +)\times P(+)\ /K$

$=0.4*0.2*0.2*0.5/K=0.008/K$

② $P(-\mid A=0,B=1,C=0)=P(A=0,B=1,C=0)*P(-)/K$

$=P(A=0\mid -)P(B=1\mid -)P(C=0\mid -)\times P(-)\ /K$

$=0.4*0.2*0*0.5/K=0/K$

因此可以得到，此样本的类标号是：+

(c) 使用 m 估计方法(p=1/2 且 m=4)估计条件概率

M-估计公式：$P=(r+P_a*m)/(n+m)$

① $P(A=1\mid +)=\frac{3+2}{5+4}=\frac{5}{9}$ ② $P(B=1\mid +)=\frac{1+2}{5+4}=\frac{1}{3}$ ③ $P(C=1\mid +)=\frac{4+2}{5+4}=\frac{2}{3}$

④ $P(A=1\mid -)=\frac{2+2}{5+4}=\frac{4}{9}$ ⑤ $P(B=1\mid -)=\frac{2+2}{5+4}=\frac{4}{9}$ ⑥ $P(C=1\mid -)=\frac{5+2}{5+4}=\frac{7}{9}$

⑦ $P(A=0 \mid +)=\frac{4}{9}$ ⑧ $P(B=0 \mid +)=\frac{2}{3}$ ⑨ $P(C=0 \mid +)=\frac{1}{3}$

⑩ $P(A=0 \mid -)=\frac{5}{9}$ ⑪ $P(B=0 \mid -)=\frac{5}{9}$ ⑫ $P(C=0 \mid -)=\frac{2}{9}$

(d) 同(b)，使用(c)中的条件概率

假设 $P(A=0,\ B=1,\ C=0)=K$，则 K 属于两个类的概率为：

① $P(+ \mid A=0,\ B=1,\ C=0)=P(A=0,\ B=1,\ C=0)*P(+)/K$

$=P(A=0 \mid +)P(B \mid +)P(C=0 \mid +)\times P(+)\ /K$

$=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 0.5/K=0.0247/K$

② $P(- \mid A=0,\ B=1,\ C=0)=P(A=0,\ B=1,\ C=0)*P(-)/K$

$=P(A=0 \mid -)P(B \mid -)P(C=0 \mid -)\times P(-)\ /K$

$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{9}\times 0.5/K=0.0274/K$

因此可以得到，此样本的类标号是：-

(e) 比较估计概率的两种方法。哪一种更好？为什么？

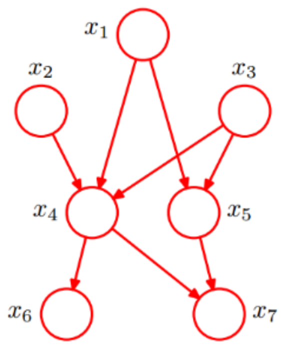
当条件概率有为 0 的时候，用 M-估计的方法比条件概率的贝叶斯更好，因为我们不想整个概率计算结果为 0，这样一般是不符合实际的。M-估计可以避免概率计算结果为 0 的情况

4. 给定如下图所示的一个贝叶斯网络

(a) 请写出 $x_1, x_2, \ldots, x_7$ 的联合概率分布

(b) x_1 和 x_2 是否相互独立？

(c) x_6 和 x_7 在给定 x_4 的条件下是否相互独立？



(a) 由上图可以看出 x1, x2, x3, …, x7 的联合概率分布为：

$P(x_1)\cdot P(x_2)\cdot P(x_3)\cdot P(x_4|x_1,x_2,x_3)\cdot P(x_5|x_1,x_3)\cdot P(x_6|x_4)\cdot P(x_7|x_4,x_5)$

(b) X1 和 x2 独立（对应 head-to-head），因为 x1 和 x2 都是两个 head，head-head 之间是相互独立的

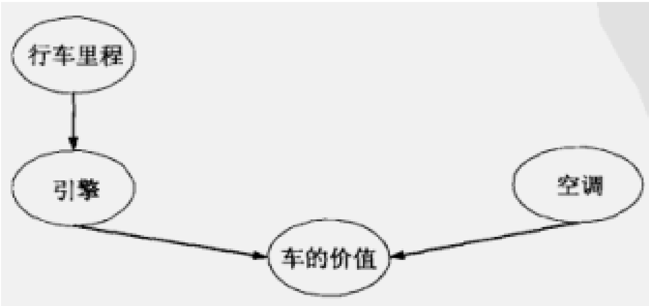
(c) x6 和 x7 在 x4 给定的条件下独立（对应 tail-to-tail）；因为 x6 的概率只与 x4 的概率有关，x7 的概率与 x4，x5 有关，若给定 x4 的条件下，显

然此时 x7 的概率取决于 x5，与 x6 无关，x6-x7 等价于 tail-tail，二者相互独立

5. 下图给出了表中的数据集对应的贝叶斯信念网络（假设所有的属性都是二元的）。

(a) 画出网络中每个结点对应的概率表。

(b) 使用贝叶斯网络计算 P(引擎=差，空调=不可用)。



贝叶斯信念网络

行车里程	引擎	空调	车的价值=高的记录数	车的价值=低的记录数
高	好	可用	3	4
高	好	不可用	1	2
高	差	可用	1	5
高	差	不可用	0	4
低	好	可用	9	0
低	好	不可用	5	1
低	差	可用	1	2
低	差	不可用	0	2

数据集

①行车里程

行车里程=高	行车里程=低
0.5	0.5

②空调

空调=可用	空调=不可用
5/8	3/8

③引擎

	引擎=好	引擎=差
行车里程=高	0.5	0.5
行车里程=低	0.75	0.25

④车的价值

引擎	空调	车的价值=高	车的价值=低

好	**可用**	12/16=0.75	4/16=0.25
好	**不可用**	6/9=2/3	3/9=1/3
差	**可用**	2/9	7/9
差	**不可用**	0	1

(b) 计算过程如下：

$$P(\text{引擎}=\text{差},\text{空调}=\text{不可用})=P(\text{引擎}=\text{差})*P(\text{空调}=\text{不可用})$$
$$=\{P(\text{引擎}=\text{差}|\text{行车里程}=\text{高})\times P(\text{行车里程}=\text{高})+$$
$$P(\text{引擎}=\text{差}|\text{行车里程}=\text{低})\times P(\text{行车里程}=\text{低})\}$$
$$\times P(\text{空调}=\text{不可用})$$
$$=(0.5*0.5+0.25*0.5)*0.375=0.140625$$