

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 () .

- (A) 不连续; (B) 连续, 但不可导; (C) 可导, 但导函数不连续; (D) 可导, 且导函数连续.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列 x^3 高阶无穷小的是 () .

- (A) $1 - e^x$; (B) $\ln(1 - x^3)$; (C) $\arcsin(3x^2)$; (D) $1 - \cos(x^2)$.

3. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的第一类间断点为 () .

- (A) $x=1$; (B) $x=-1$; (C) $x=0$; (D) 以上都不是.

4. 设 $f(x) \in C^{(2)}$, 且 $f'(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|}=1$, 则 () 成立.

- (A) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

- (C) $(0, f(0))$ 是曲线的拐点;

- (D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

5. 设 $f(x) \in C$, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)dt$, 则 $F'(x) =$ () .

- (A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$; (B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$;

- (C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$; (D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$ 则 ().

- (A) $N < P < M$; (B) $M < P < N$; (C) $N < M < P$; (D) $P < M < N$.

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[-r, r]$ ($r > 0$) 有定义, 且 $\forall x \in (-r, r)$, 有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $f'(0) =$ _____.

2. 计算积分 $\int_{-1}^2 x e^{|x|} dx =$ _____.

3. 设 $F(x) = \sin(x^2) \int_0^1 f(t \sin(x^2)) dt$, 则 $\frac{dF}{dx} =$ _____.

4. 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y''|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 曲线 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$ (C 为任意常数), 则 $\int \frac{dx}{f(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题: 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(e^x - \sqrt{1+2x})}{\ln(1+x)(1-\cos x)}$.

四、计算题: 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算定积分 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

五、计算题: 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

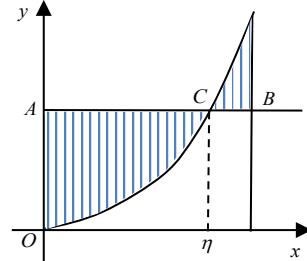
设曲线方程为 $\begin{cases} x = 2(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t), \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, 求 (1) $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; (2) 曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率.

六、计算题: 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

如图所示, 曲线 $y = x^2$ 在 $[0,1]$ 的一段与平行于 x 轴

的直线 AB 交于 C , C 的横坐标为 η ($\eta \in [0,1]$).

问 η 为何值时, 阴影部分面积 S 最小? 并求最小值.



七、计算题: 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

八、证明题: 满分 8 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$.

证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 1$.

九、证明题: 满分 6 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $0 < x_n < 1, (1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}, n \in N_+$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.