

BÀI 4

HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN RỜI RẠC

Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

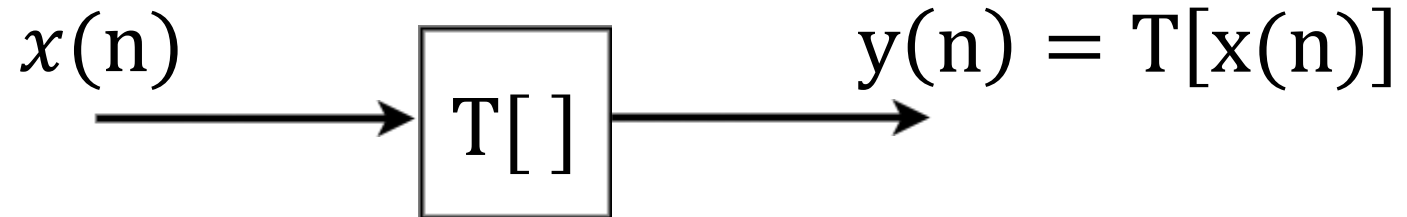
1. Định nghĩa hệ thống rời rạc
2. Hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc
3. Tổng chập và các tính chất của tổng chập

❏ Mục tiêu bài học

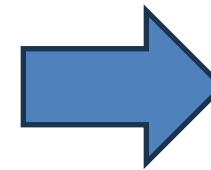
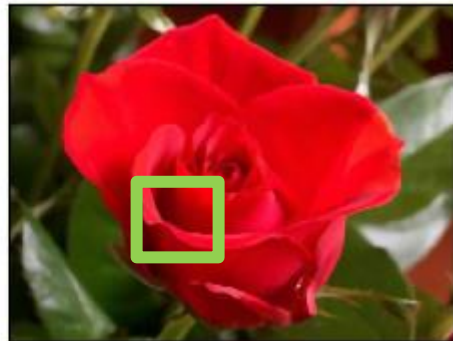
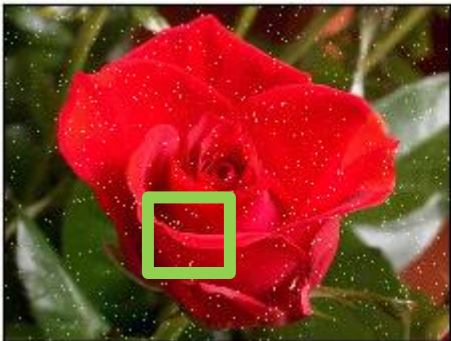
Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Khái niệm về hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc.
- Tính tuyến tính và bất biến của hệ thống rời rạc.
- Đáp ứng xung của hệ tuyến tính bất biến rời rạc.
- Phép tổng chập và các tính chất.

1. Hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc



- $x(n)$: tín hiệu vào (tác động)
- $y(n)$: tín hiệu ra (đáp ứng)
- Ví dụ: bộ lọc nhiễu trong ảnh, âm thanh



2. Hệ thống tuyến tính

- Định nghĩa

$$\begin{array}{ll} x_1(n) \rightarrow y_1(n) & T[\mathbf{a} \cdot x_1(n) + \mathbf{b} \cdot x_2(n)] = \mathbf{a} \cdot T[x_1(n)] + \mathbf{b} \cdot T[x_2(n)] \\ x_2(n) \rightarrow y_2(n) & = \mathbf{a} \cdot y_1(n) + \mathbf{b} \cdot y_2(n) \end{array}$$

- Ưu điểm của hệ tuyến tính: cho phép xác định đáp ứng của các tín hiệu đầu vào phức tạp dựa trên các đáp ứng thành phần đơn giản đã biết
- Kiểm tra tính tuyến tính của hệ thống
 - Tỷ lệ: $T[ax_1(n)] = aT[x_1(n)] = ay_1(n)$
 - Tổ hợp: $T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$
- **Bài tập 4.1.** Kiểm tra hệ thống là tuyến tính?

$$\text{a. } y(n) = 2x(n)$$

$$\text{b. } y(n) = x^2(n)$$

$$\text{c. } y(n) = 2x(n) + 3$$

Kỹ thuật phân tích hệ tuyến tính

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k(n) \xrightarrow{T} y(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k(n)$$

$$y_k(n) = T[x_k(n)] \quad k = 1, 2, \dots, M - 1$$



Chọn $x_k(n)$ là xung đơn vị $\delta(n-k)$

Phân tích tín hiệu thành tổ hợp các xung đơn vị

- Nguyên lý:

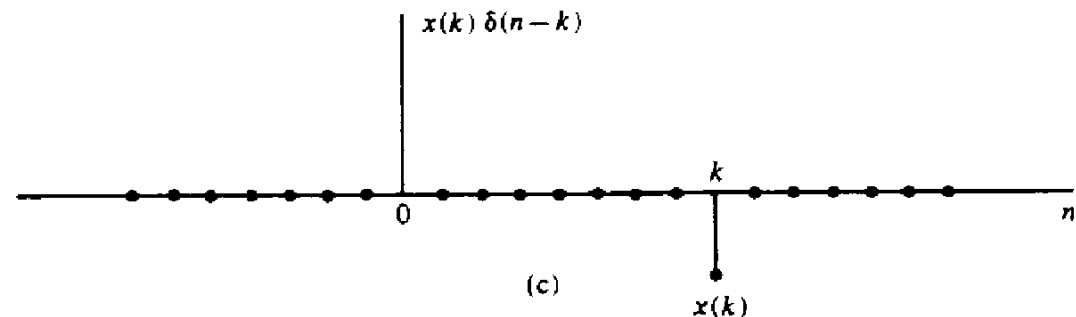
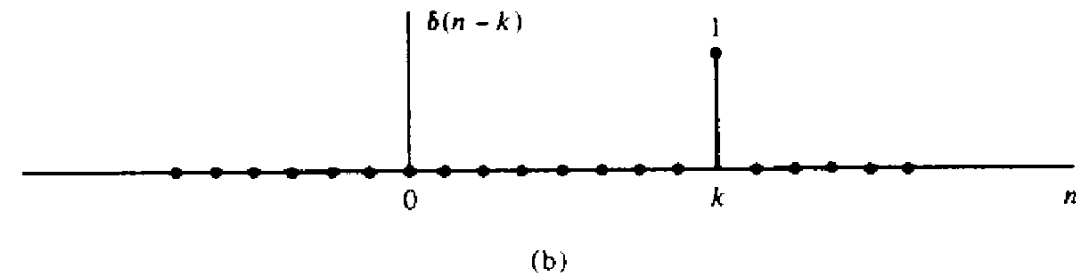
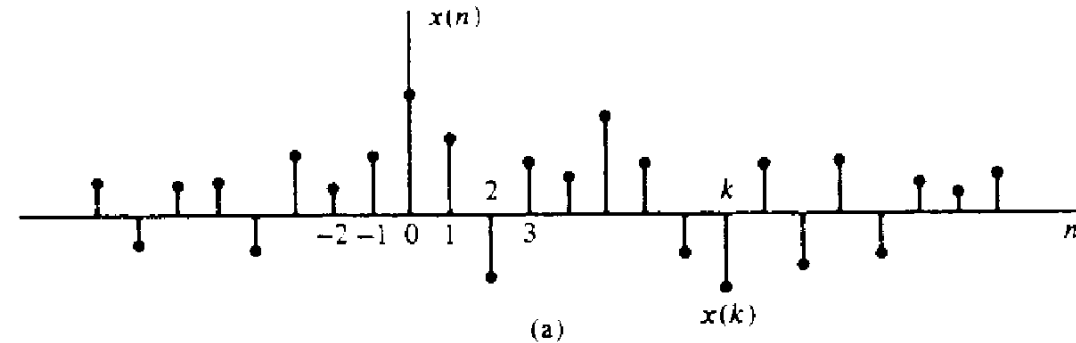
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- Ví dụ:

$$x(n) = \{2, 4, 3\}$$

↑


$$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$



Đáp ứng của hệ tuyến tính

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$


$$h(n,k) = h_k(n) = T[\delta(n-k)]$$

- Cần phải các định $h(n,k) = h_k(n)$ với mọi $-\infty \leq k \leq \infty$
- Cần cắt giảm số hàm $h_k(n)$

$$x(n) = \{2, 4, 3\}$$

↑


$$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$


$$y(n) = 2h_0(n) + 4h_1(n-1) + 3h_2(n-2)$$

Hệ thống tuyến tính bất biến

- Nếu hệ bất biến theo thời gian
 - Tác động $\delta(n)$ cho đáp ứng $h(n)$
 - Tác động $\delta(n - k)$ cho đáp ứng $h(n - k)$
- Với hệ tuyến tính bất biến (TTBB)

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n - k)] \quad \longrightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$$

- $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ
- $y(n) = x(n) * h(n)$, trong đó $*$ là phép tổng chập

Hệ bất biến

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

$$x(n - k) \xrightarrow{T} y(n - k)$$

$$\forall x(n) \text{ và } \forall k$$

Bài tập 4.2a. Tính đáp ứng xung

- Hãy xác định và vẽ đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến có phương trình vào – ra như sau:

$$y(n) = 2.x(n) + 3.x(n-1)$$

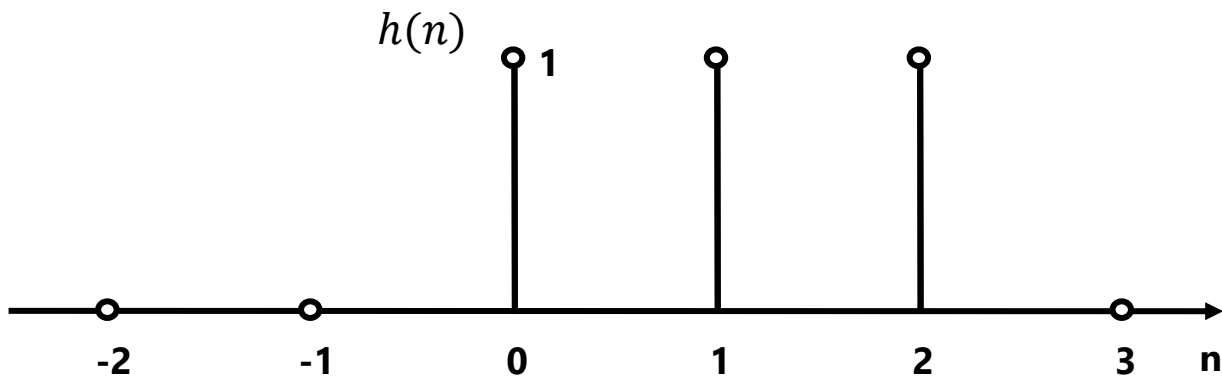
Bài tập 4.2b. Tính đáp ứng xung

- Hãy xác định và vẽ đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến có phương trình vào – ra như sau:

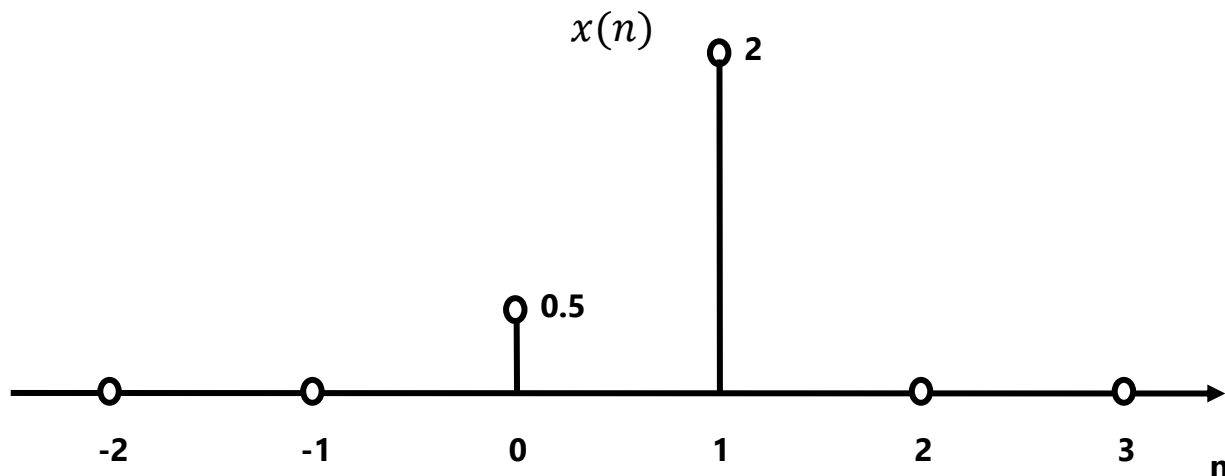
$$y(n) - a.y(n-1) = x(n)$$

Bài tập 4.3. Tính tổng chập

- Tín hiệu vào $x(n]$ và đáp ứng xung $h(n]$ của hệ TTBB như hình vẽ. Hãy tính tín hiệu ra $y(n]$



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$$



3. Các tính chất của tổng chập

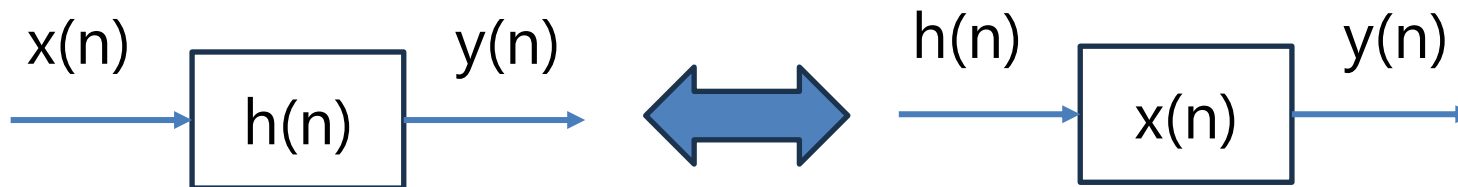
- Tổng chập

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Tính chất giao hoán (Commutative law)

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

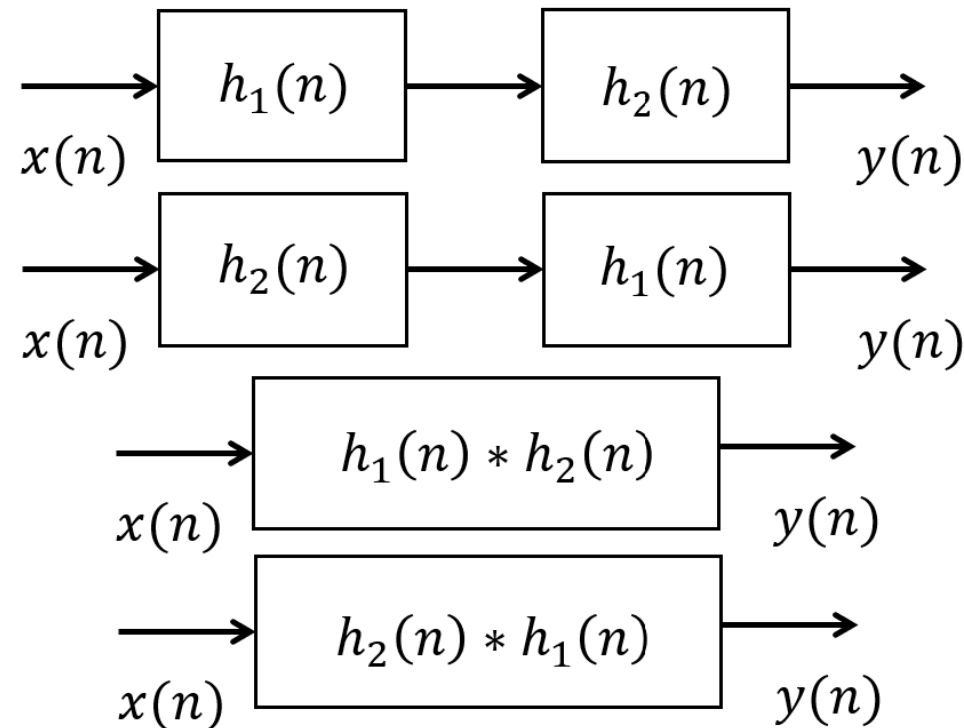


Tính chất kết hợp (Associative law)

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

$$[x(n) * h_2(n)] * h_1(n) = x(n) * [h_2(n) * h_1(n)]$$

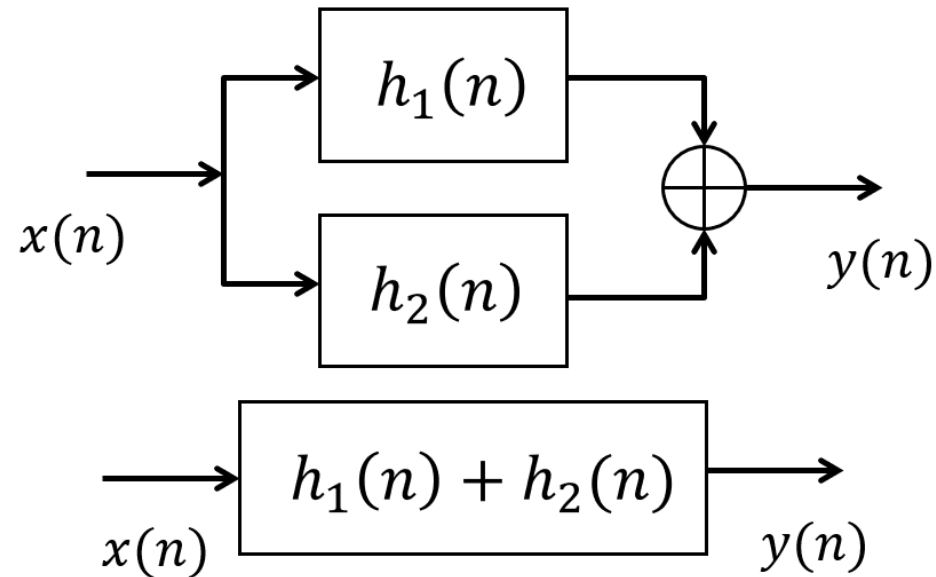
- Các hệ tương đương



Tính chất phân phối (Distributive law)

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

- Các hệ tương đương



4. Tổng kết

- Hệ thống rời rạc nhận vào tín hiệu rời rạc, xử lý và tạo ra một tín hiệu rời rạc ở đầu ra theo mong muốn.
- Hệ thống tuyến tính bất biến là hệ thống thoả mãn cả hai tính chất tuyến tính và bất biến theo thời gian.
- Tổng chập cho phép xác định đáp ứng của hệ TTBB với một tín hiệu vào cho trước khi biết đáp ứng xung của hệ.
- Phép tổng chập có tính giao hoán, kết hợp và phân phối.

5. Bài tập

- Bài tập 1: Tính đáp ứng của các hệ thống sau với tín hiệu vào $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

a) $y(n) = x(n)$

b) $y(n) = x(n - 1)$

c) $y(n) = x(n + 1)$

d) $y(n) = \frac{1}{3} [x(n + 1) + x(n) + x(n - 1)]$

e) $y(n) = \max[x(n + 1), x(n), x(n - 1)]$

f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) + x(n - 1) + x(n - 2) + \dots$

Bài tập 2

□ Cho các hệ thống biểu diễn bằng phương trình vào-ra như sau:

(a) $y(n) = n \cdot x(n)$

(b) $y(n) = x(n^2)$

(c) $y(n) = x^2(n)$

(d) $y(n) = A \cdot x(n) + B$

(e) $y(n) = e^{x(n)}$

□ Hãy kiểm tra tính chất tuyến tính của các hệ thống này

Bài tập 3

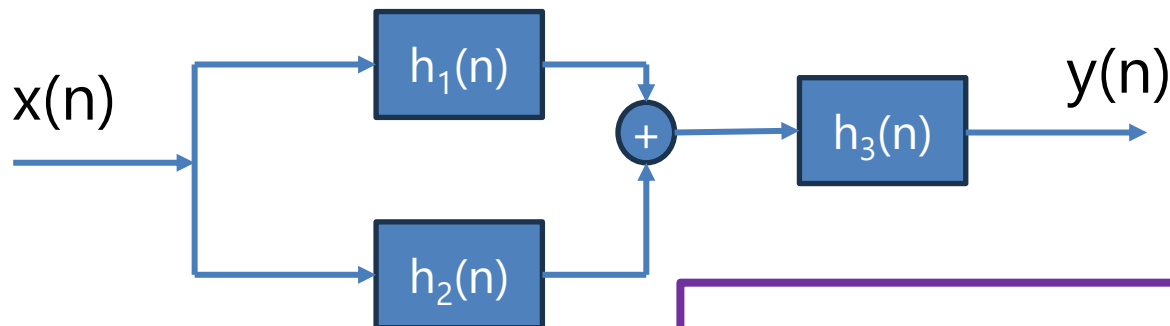
- Biết một hệ thống tuyến tính bất biến có hàm đáp ứng xung như sau

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

- Biết $x(n) = \text{rect}_3(n)$. Hãy tính $y(n)$?

Bài tập 4

Một hệ thống tuyến tính bất biến biểu diễn bằng sơ đồ sau:



$$h_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$$h_2(n) = \frac{1}{2} \delta(n-1) + u(n-2) - u(n-4)$$

$$h_3(n) = \text{rect}_3(n)$$

Câu 1. Hãy xác định và vẽ các đáp ứng xung thành phần $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$

Câu 2. Tìm và đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống

Câu 3. Tìm đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $\delta(n)$ và $u(n)$

Bài học tiếp theo. BÀI **5**

TÍNH NHÂN QUẢ VÀ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG RỜI RẠC

Tài liệu tham khảo:

- **Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.**
- **J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.**



TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG
TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!