BÀI 7

PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

1. Định nghĩa phép biến đổi Z
2. Miền hội tụ của biến đổi Z

❑ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Định nghĩa và ý nghĩa của phép biến đổi Z trong xử lý tín hiệu.
- Phương pháp xác định miền hội tụ cho biến đổi Z của các tín hiệu rời rạc.

1. Định nghĩa biến đổi Z

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(z) = \cdots + x(-2)z^{2} + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

- Biến đổi Z chỉ tồn tại với các giá trị của Z làm cho chuỗi hội tụ
- Miền hội tụ (region of convergence – ROC) của $X(z)$ là tập các giá trị của Z làm cho $X(z)$ có giá trị hữu hạn

Ví dụ

- Tính biến đổi Z và miền hội tụ với tín hiệu sau:

$$x_1(n) = \{\mathbf{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

ROC là toàn bộ mặt phẳng Z ngoại trừ điểm $z = 0$

Ví dụ

- Tính biến đổi Z và miền hội tụ với tín hiệu sau:

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$1 + A + A^2 + A^3 + \cdots = \frac{1}{1 - A}, |A| < 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{Z}{Z - \frac{1}{2}} \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

Nhận xét

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Biến đổi Z đơn giản chỉ là một biểu diễn khác của tín hiệu.
- Hệ số của z^{-n} trong phép biến đổi là giá trị của tín hiệu tại thời điểm n.
- Giá trị mũ của Z chứa thông tin về thời gian chúng ta cần để xác định các mẫu của tín hiệu.
- Nhờ biến đổi Z, ta có thể biểu diễn tín hiệu có chiều dài vô hạn trên miền thời gian ở dạng hữu hạn.

2. Miền hội tụ của biến đổi Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Region of Convergence – ROC: miền giá trị của z để chuỗi luỹ thừa trong định nghĩa biến đổi Z hội tụ
- Áp dụng tiêu chuẩn Caushy để xác định miền hội tụ. Cụ thể, chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

sẽ hội tụ nếu thoả mãn điều kiện $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1$

Xác định miền hội tụ

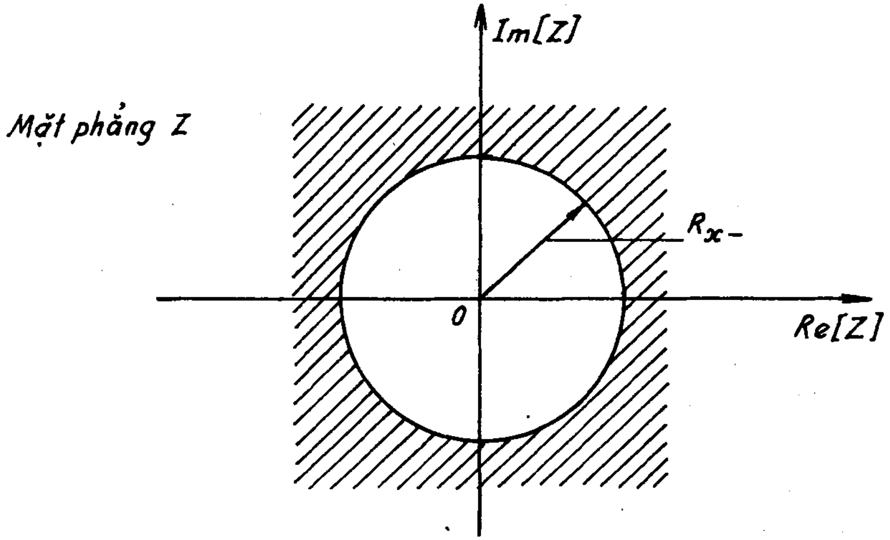
$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Áp dụng tiêu chuẩn Caushy cho

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)z^{-n}|^{1/n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}|z^{-1}| < 1$$

- Giả thiết $\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} = R_{x-}$
- Vậy $X_2(z)$ hội tụ với các giá trị của z thoả mãn

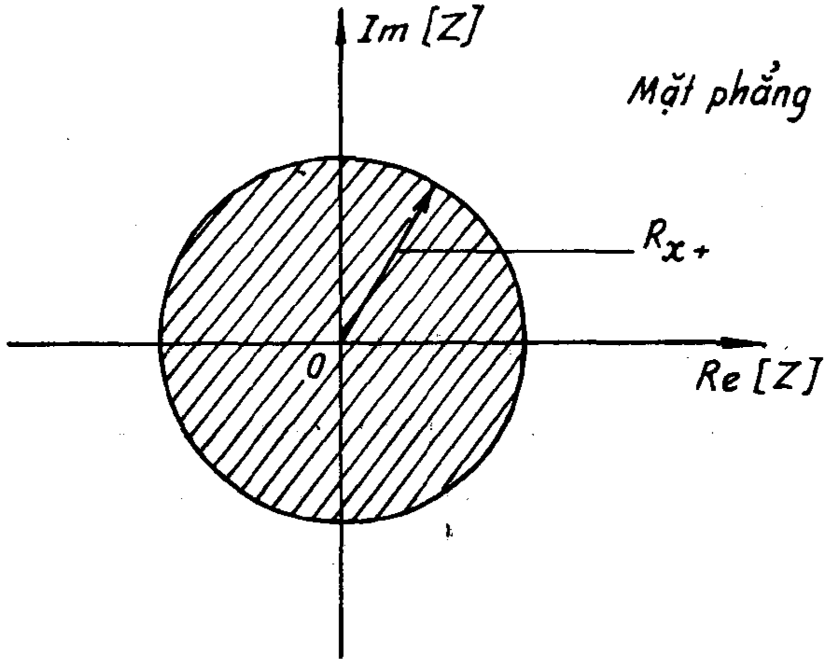
$$|z| > R_{x-}$$



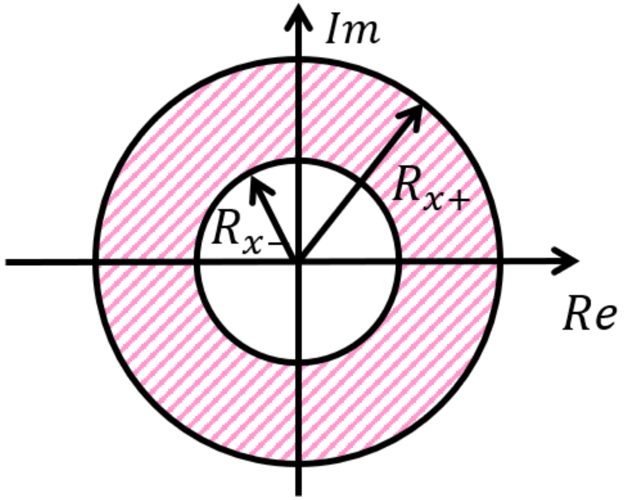
Miền hội tụ của $X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$

- Tín hiệu phản nhân quả
- $X_1(z)$ hội tụ với các giá trị của z thoả mãn $|z| < R_{x+}$ với

$$R_{x+} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}}$$



Miền hội tụ của biến đổi Z



- Trong trường hợp tổng quát, miền hội tụ của biến đổi Z là

$$0 \leq R_{x-} < |z| < R_{x+} \leq \infty$$

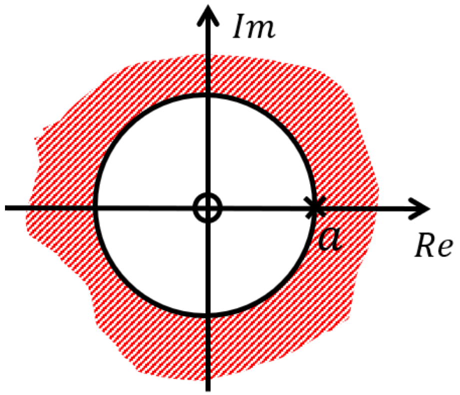
- Ví dụ: cho tín hiệu $x(n) = a^n u(n)$. Hãy xác định biến đổi z và miền hội tụ.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

  - MHT: $|z| > |a|, R_{x-} = |a|, R_{x+} = \infty$
  - Điểm không: $z = 0$
  - Điểm cực: $z = a$
  - Miền hội tụ không chứa điểm cực

$$R_{x-} = \lim_{n \to \infty} |x(n)|^{1/n}$$

$$R_{x+} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} |x(-n)|^{1/n}}$$



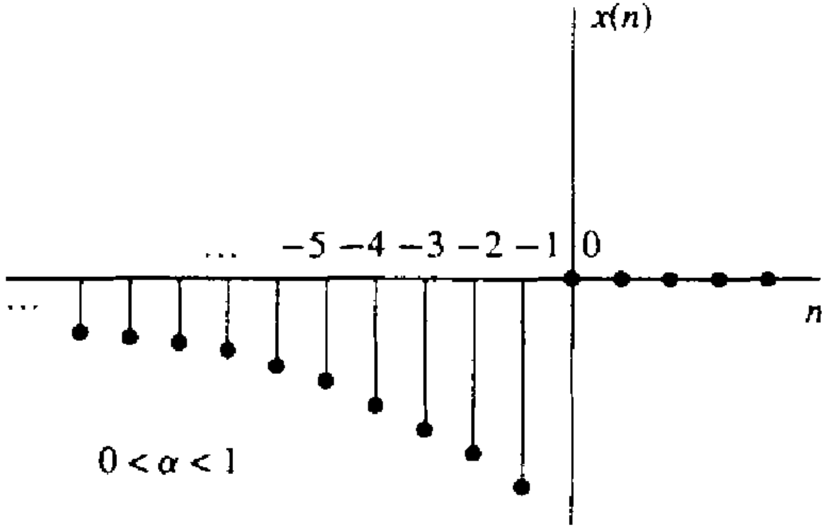
Ví dụ

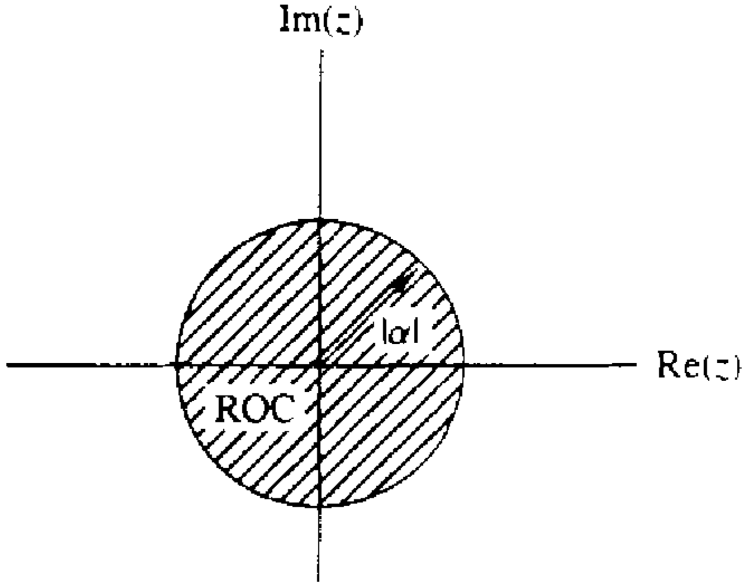
- Xác định biến đổi Z của tín hiệu

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\alpha^n & n \leq -1 \end{cases}$$

ROC: $|z| < |\alpha|$

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}$$





Nhận xét

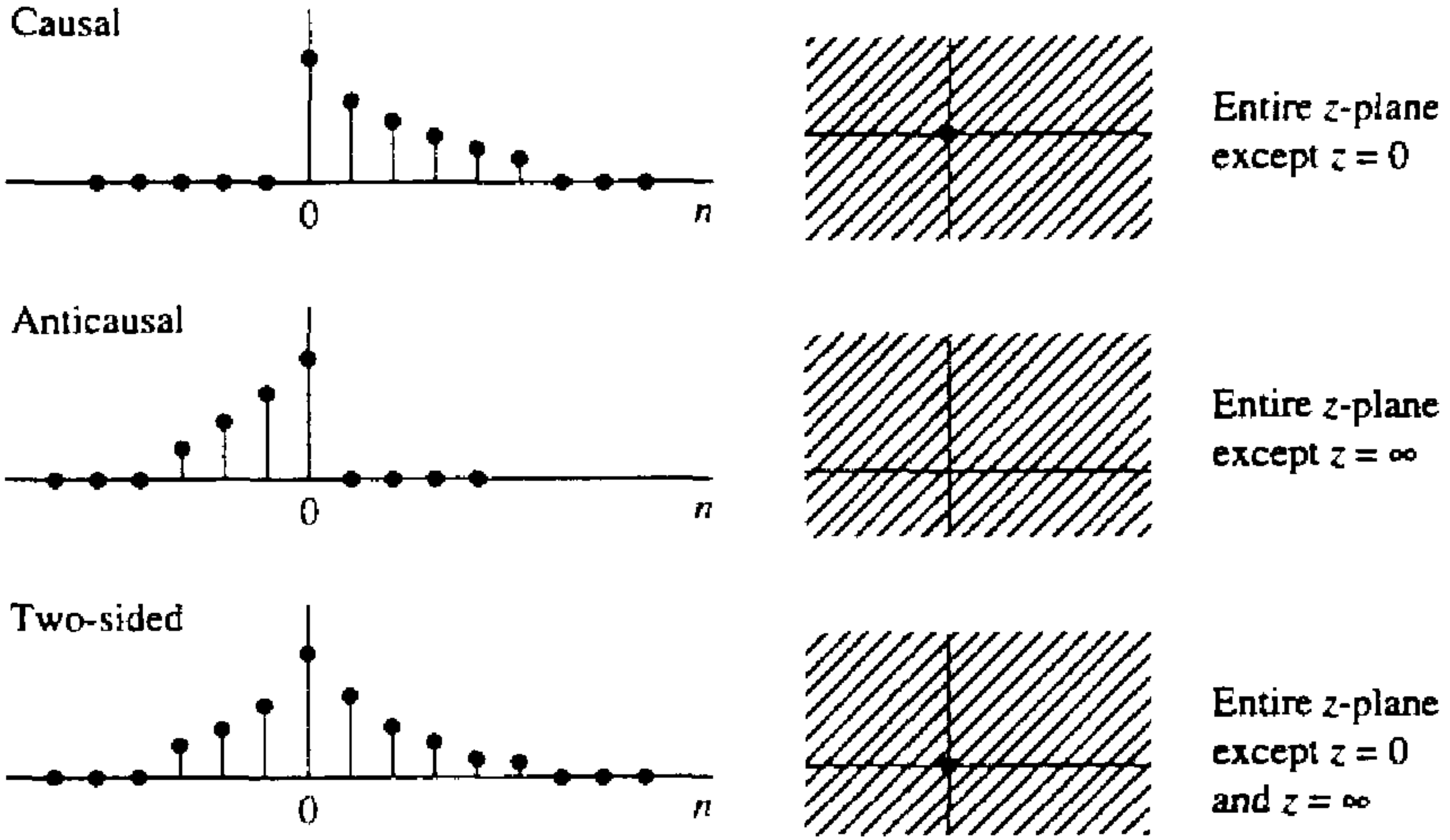
- Tín hiệu nhân quả $\alpha^{n}u(n)$ và tín hiệu phản nhân quả $-\alpha^{n}u(-n-1)$ có cùng biểu thức biến đổi Z.
- Như vậy chỉ riêng biểu thức biến đổi Z sẽ không đủ để xác định tín hiệu trên miền thời gian.

Một tín hiệu rời rạc $x(n)$ chỉ được xác định duy nhất bởi hai thành phần:

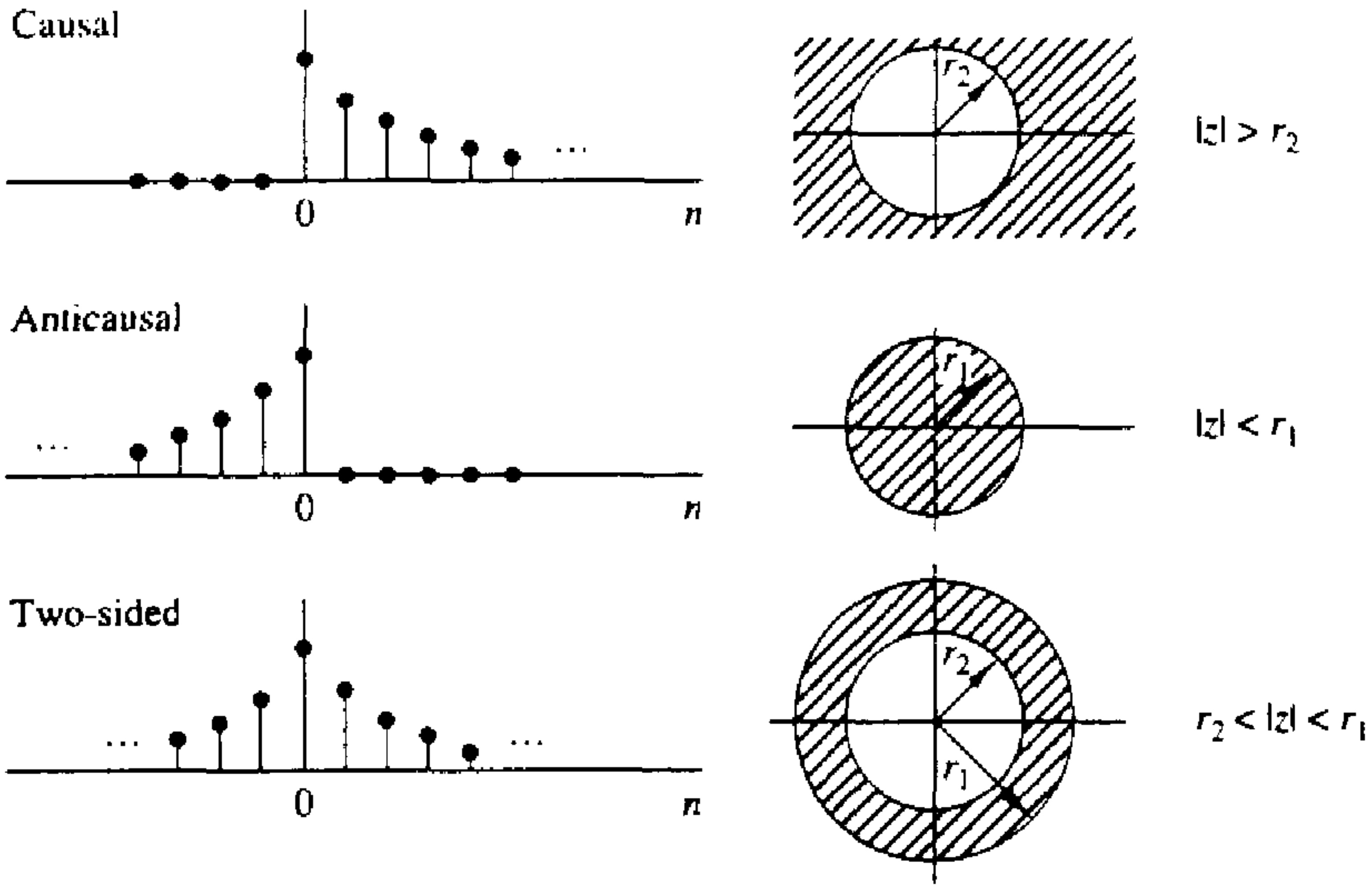
❖ $X(z)$

❖ **Miền hội tụ** $X(z)$

Tổng kết : tín hiệu có chiều dài hữu hạn



Tổng kết : tín hiệu có chiều dài vô hữu hạn



4. Tổng kết

- Biến đổi Z cho phép biểu diễn lại tín hiệu trên miền biến số phức. Ưu điểm quan trọng của biến đổi Z là cho phép biểu diễn tín hiệu có chiều dài vô hạn về dạng hữu hạn.
- Miền hội tụ của biến đổi Z là miền giá trị của Z để chuỗi luỹ thừa trong định nghĩa biến đổi Z hội tụ. Cùng với biểu thức biến đổi Z, miền hội tụ giúp xác định duy nhất tín hiệu rời rạc $x(n)$ tương ứng trên miền thời gian.

5. Bài tập

- Bài tập 1
  - Tính biến đổi Z và miền hội tụ đối với các tín hiệu sau:

$$a.\ \ x_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 5, 7, 0, 1\}$$

$$b.\ \ x_2(n) = \delta(n)$$

$$c.\ \ x_3(n) = \delta(n - k),\ \ k > 0$$

$$d.\ \ x_4(n) = \delta(n + k),\ \ k > 0$$

Bài tập về nhà

- Bài tập 2
  - Tính biến đổi Z và tìm miền hội tụ của các tín hiệu sau:

a. $x(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$

b. $x(n) = (\sin \omega_0 n)u(n)$

c. $x(n) = (3^{n+1} - 1)u(n)$

d. $x(n) = 2^{-n}u(n) + 3^{n+1}u(n)$

Bài tập về nhà

- Bài tập 3
  - Tính biến đổi Z và ROC của các tín hiệu sau. Sau đó nhận xét về sự thay đổi của ROC:

    a. $x(n) = 2^n u(n)$

    b. $y_1(n) = 3^n x(n)$

    c. $y_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x(n)$

    d. $y_3(n) = e^{j\pi n/2} x(n)$

Bài tập về nhà

- Bài tập 4
  - Tính biến đổi Z và ROC của các tín hiệu sau:

    a. $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n)$

    b. $x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)u(n)$

    c. Dãy dốc đơn vị $u_r(n)$

Bài học tiếp theo. BÀI 8

CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Tài liệu tham khảo:

- ***Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.***
- ***J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.***

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!