BÀI 8

CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

1. Tính chất tuyến tính của biến đổi Z
2. Tính chất trễ
3. Tính chất scaling
4. Tính chất đảo trục
5. Tính chất vi phân
6. Tính chất tổng chập

❑ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Các tính chất của phép biến đổi Z
- Qua đó ứng dụng các tính chất này để xác định biến đổi Z của các tín hiệu phức tạp một cách hiệu quả.

1. Tính tuyến tính

Nếu

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

Thì

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{z} X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Miền hội tụ của $X(z)$ sẽ là giao của 2 miền hội tụ của $X_1(z)$ và $X_2(z)$

$$R_{x-} = \max[R_{x1-}, R_{x2-}]$$

$$R_{x+} = \min[R_{x1+}, R_{x2+}]$$

Ví dụ

- Tìm biến đổi Z và miền hội tụ của tín hiệu

$$x(n) = [3(2^n) + 4(3^n)]u(n)$$

- Áp dụng

$$\alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{Z-\alpha} \quad \text{và} \quad \text{ROC: } |z| > \alpha$$

- Kết quả

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{4}{1-3z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > 3$$

$$X(z) = \frac{3z}{z-2} + \frac{4z}{z-3} = \frac{7z^2 - 17z}{z^2 - 5z + 6}$$

2. Biến đổi Z của tín hiệu trễ

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z) \quad \Longrightarrow \quad x(n-n_0) \xrightarrow{z} z^{-n_0}X(z)$$

- Ví dụ

$$x(n) = rect_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

$$X(z) = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\} = \left(1 - z^{-N}\right)Z\{u(n)\}$$

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{và} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

$$\Longrightarrow \quad X(z) = \begin{cases} N & if\ z = 1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & if\ z \neq 1 \end{cases}$$

3. Scaling trên miền Z

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

$$a^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(a^{-1}z) \qquad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

$$\begin{matrix} a = r_0 e^{j\omega_0} \\ z = re^{j\omega} \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \omega = a^{-1}z = \left(\frac{r}{r_0}\right) e^{j(\omega-\omega_0)}$$

- Ý nghĩa của tính chất scaling
  - Thu hẹp ROC (nếu $r_0 > 1$) trên mặt phẳng phức
  - Mở rộng ROC (nếu $r_0 < 1$) trên mặt phẳng phức
  - Kết hợp với phép quay (nếu $\omega_0 \neq 2k\pi$) trên mặt phẳng phức

4. Đảo trục thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

$$x(-n) \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

- Ví dụ: Tìm biến đổi Z của tín hiệu $x(n) = u(-n)$

$$u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

$$\Rightarrow \quad u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z} \qquad \text{ROC: } |z| < 1$$

5. Vi phân của biến đổi Z

$$-z\frac{\partial X(z)}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n} = Z\{nx(n)\}$$

- Ví dụ: Tìm biến đổi Z của tín hiệu $x(n) = n\alpha^{n}u(n)$

$$\alpha^{n}u(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{và} \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad n\alpha^{n}u(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = -z\frac{\partial X_1(z)}{\partial z} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} \quad \text{và} \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

6. Biến đổi Z của tổng chập

$$y(n) = x(n) * h(n) \Longrightarrow Y(z) = X(z).H(z)$$

- Tính tổng chập của hai tín hiệu sử dụng biến đổi Z
  - Bước 1. Tính biến đổi Z của từng tín hiệu.
  - Bước 2. Nhân hai biến đổi Z.
  - Bước 3. Tìm biến đổi Z ngược
- Nhận xét: phương pháp này trong nhiều trường hợp cho phép dễ thực hiện hơn so với việc tính tổng chập trực tiếp.

Ví dụ

- Tính tổng chập $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ với

$$x_1(n) = \{\mathbf{1}, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$x_1(n) = \{1, -2, 1\} \longrightarrow X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \longrightarrow X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

$$\Rightarrow \quad x(n) = \{\mathbf{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

4. Tổng kết

- Biến đổi Z có các tính chất như tính chất tuyến tính, trễ, đảo trục thời gian, vi phân trên miền Z. Các tính chất này cho phép tính biến đổi Z của một số tín hiệu phức tạp trở nên thuận tiện hơn.
- Đặc biệt, tính chất của biến đổi Z với tổng chập cho phép tính tổng chập của hai tín hiệu trở nên dễ dàng hơn trong nhiều trường hợp.

5. Bài tập

- Bài tập 1
  - Tính biến đổi Z và miền hội tụ đối với các tín hiệu sau:

a. $x_1(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$

b. $x_2(n) = (\sin \omega_0 n)u(n)$

c. $x_3(n) = (3^{n+1} - 1)u(n)$

d. $x_4(n) = 2^{-n}u(n) + 3^{n+1}u(n)$

Bài tập về nhà

- Bài tập 2
  - Tính biến đổi Z và ROC của các tín hiệu sau. Sau đó nhận xét về sự thay đổi của ROC:

    a. $x(n) = 2^n u(n)$

    b. $y_1(n) = 3^n x(n)$

    c. $y_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x(n)$

    d. $y_3(n) = e^{j\pi n/2} x(n)$

Bài tập về nhà

- Bài tập 3
  - Tính biến đổi Z và ROC của các tín hiệu sau:

    a. $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n)$

    b. $x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)u(n)$

    c. Dãy dốc đơn vị $u_r(n)$

Bài học tiếp theo. BÀI 9

PHÉP BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Tài liệu tham khảo:

- ***Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.***
- ***J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.***

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!