現代数理統計学の基礎
～第 2 章 問 18～

担当：???

2021 年 5 月 13 日

概要

あまり時間がなかったので少し省略しました。。

1　問題文

問 18.　確率密度関数が $f_X(x) = (m+1)x^m, 0 \le x \le 1,$ で与えられる確率変数 X の積率母関数が $e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!}$ を用いると，

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k$$

と書けることを示せ。これを用いて，$E[X] = \frac{m+1}{m+2}, Var(X) = \frac{m+1}{(m+2)^2(m+3)}$ を示せ。

2　準備

2.1　積率母関数の定義

ある $h > 0$ がとれて、$|t| < h$ なる全ての t に対して、

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

が存在する時、$M_X(t)$ を X の積率母関数という。存在しないときは特性関数を代わりに使う。

2.2　積率母関数と期待値の関係

積率母関数の 1 次微分、2 次微分などを見てみると、

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= \frac{d}{dt}E[e^{tX}] = E[Xe^{tX}] \\
M''_X(t) &= \frac{d^2}{dt^2}E[e^{tX}] = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}E[e^{tX}]\right) = \frac{d}{dt}E[Xe^{tX}] = E[X^2e^{tX}] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

よって一般化すると、

$$M_X^{(k)}(t) = E[X^k e^{tX}]$$

ゆえに、t=0 を代入してみると、

$$M_X^{(k)}(0) = E[X^k e^{0X}] = E[X^k \times 1] = E[X^k]$$

まとめると、

$$M_X^{(k)}(0) = E[X^k]$$

3 回答

積率母関数の定義より、

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(tx)^k}{k!} \right\} (m+1) x^m dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(m+1) \int_0^1 t^k x^k x^m dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)t^k}{k!} \int_0^1 x^{m+k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)t^k}{k!} \left[\frac{1}{m+k+1} x^{m+k+1} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)t^k}{k!} \frac{1}{m+k+1} (1-0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)t^k}{k!(m+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k
\end{aligned}$$

よって $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k$ は示された。
次に、積率母関数の 1 次微分、2 次微分を考える。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k \right\} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m+1}{(m+0+1)0!} + \frac{m+1}{(m+1+1)1!} t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k \right\} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{m+1}{m+1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{m+1}{m+2} t \right) + \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k \right) \\
&= 0 + \frac{m+1}{m+2} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)k!} t^k \right) \\
&= \frac{m+1}{m+2} + t \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m+1}{(m+k+1)(k-1)!} t^{k-2} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{m+1}{m+2} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}t^k\right)\right\} \\
&= 0 + \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}t^k\right)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{m+1}{(m+2+1)2!}t^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}t^k\right)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{m+1}{(m+3)2} \times 2t + \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}t^k\right)\right\} \\
&= \frac{m+1}{m+3} + \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}t^k\right\} \\
&= \frac{m+1}{m+3} + t\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)(k-2)!}t^{k-3}\right)
\end{aligned}
$$

ただし、以下の考えを用いた。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^i}{dt^i}\left\{\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\right\} &= \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{k!}(k)(k-1)\cdots(k-i+1)t^{k-i} \\
&= \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{(k-i)!}t^{k-i} \\
&= t\left(\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{(k-i)!}t^{k-i-1}\right)
\end{aligned}
$$

以上より、X の原点周りの 1 次モーメントと 2 次モーメントを考える。
まず、X の原点周りの 1 次モーメントは、

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} \\
&= \frac{m+1}{m+2} + 0 \\
&= \frac{m+1}{m+2}
\end{aligned}
$$

よって、$E[X] = \frac{m+1}{m+2}$

次に、X の原点周りの 2 次モーメントは、

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} \\
&= \frac{m+1}{m+3} + 0 \\
&= \frac{m+1}{m+3}
\end{aligned}
$$

ゆえに、分散は、

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^2 \\
&= \frac{(m+1)(m+2)^2 - (m+3)(m+1)^2}{(m+3)(m+2)^2} \\
&= \frac{(m+1)\left\{(m+2)^2 - (m+3)(m+1)\right\}}{(m+3)(m+2)^2} \\
&= \frac{(m+1)\left\{m^2 + 4m + 4 - (m^2 + 4m + 3)\right\}}{(m+3)(m+2)^2} \\
&= \frac{(m+1) \times 1}{(m+3)(m+2)^2} \\
&= \frac{(m+1)}{(m+3)(m+2)^2}
\end{aligned}
$$

したがって、題意は全て示された。