現代数理統計学の基礎
～第 1 章 問 6～

担当：???

2021 年 4 月 15 日

概要

ベイズの定理を用いた基本的な問題です。後半には自分でもあんまり良く分かってない所を書いていますが、実際どうなんだろうと思っていることです。ご了承ください。

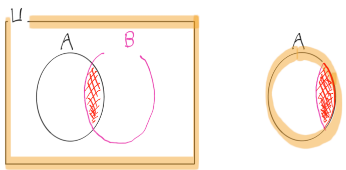
1　準備

1.1　条件付き確率

定義 1.3（p.4）より、2 つの事象 A と B があって $P(B) > 0$(分母に持ってきたいから) のとき、

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を、B を与えた時の A の条件付き確率という。



$P(A \cap B)$　　$P(B|A)$

自分がつまづいたベン図。同じ所に注目してるけど、分母が違う。

1.2　ベイズの定理

命題 1.6（p.5）より、$B_1, B_2, \ldots$ を互いに背反な事象の列として、$P(B_k) > 0, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$ を満たすとする。この時任意の事象 A に対して、A を与えた時の B_j の条件付き確率 $P(B_j|A)$ は、

$$
\begin{aligned}
P(B_j|A) &= \frac{P(A\cap B_j)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P((\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap B_k)))} \\
&= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{\infty}P(A\cap B_k)}(\because A\cap B_k, k=1,...\text{は互いに背反}) \\
&= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{\infty}P(A|B_k)P(B_k)}
\end{aligned}
$$

これが Bayes の定理である。

2 回答

まず、「真に疾患がある」という事象を A、「検査で陽性反応がでる」という事象を B とする。このとき、A^c は「真に疾患がない」という事象を表し、B^c は「検査で陰性反応がでる」という事象を表す。

与えられた問題の情報より、

$$P(B|A^c) = 0.2 \Rightarrow P(B^c|A^c) = 0.8$$

$$P(B^c|A) = 0.1 \Rightarrow P(B|A) = 0.9$$

$$P(A) = 0.1 \Rightarrow P(A^c) = 0.9$$

よって、求める確率 $P(A|B)$ は、Bayes の定理より、

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P((B\cap A)\cup(B\cap A^c))} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B\cap A)+P(B\cap A^c)} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{0.9\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.1+0.2\cdot 0.9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$