現代数理統計学の基礎
～第 2 章 問 7～

担当：???

2021 年 5 月 6 日

概要

累積分布関数の式変形ちゃんとできますか、みたいな問いだった印象です。(1) を 30 分くらい考えましたが、普通に難しくて解けなかったので解答を見ました。(2) もそのまま答えを見ましたが、こっちの方が簡単でした。(2) から取り掛かった方が良かったと思います。

1 問題文

問 7. X を実数直線上の連続な確率変数とし，その分布関数を $F(x)$ とする。このとき X の期待値が次のように表されることを示せ。

(1) $E[X] = \int_0^\infty \{1 - F(x)\}dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx$
(2) $E[X] = \int_0^1 F^{-1}(t)dt$

2 準備

2.1 広義二重積分について

姫野先生の解析学の資料より引用 (定理 2.4)

定理 2.4
二変数関数 $f(x, y)$ が非負であるとする ($f(x, y) \geq 0$)。このとき、領域 R に近づくある領域の列 $R_n(n = 1, 2, ...)$ に対して $\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x, y)dxdy$ が収束すると、二変数関数 $f(x, y)$ は R 上で広義重積分可能であり、その収束値が広義重積分の値となる。

3 回答

(1)
与式の左辺を最終的に右辺の形に持っていく。確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると、

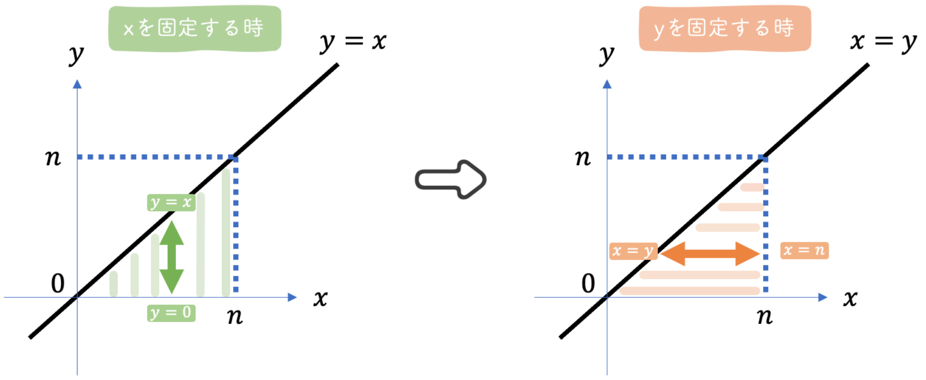
$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx
\end{aligned}
$$

ここで、$x<0$ のとき、$x=-\int_x^0 dy$ であり、$x>0$ のとき $x=\int_0^x dy$ であるから、

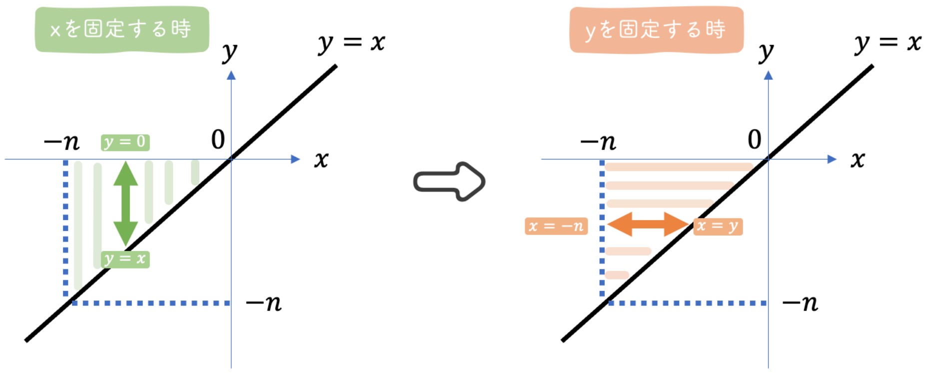
$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left\{-\int_{x}^{0} dy\right\} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} \left\{\int_{0}^{x} dy\right\} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \left\{\int_{0}^{x} dy\right\} f(x)dx + \int_{-\infty}^{0} \left\{-\int_{x}^{0} dy\right\} f(x)dx \qquad \text{(順番変えただけ)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_{0}^{n} \left\{\int_{0}^{x} dy\right\} f(x)dx - \int_{-n}^{0} \left\{\int_{x}^{0} dy\right\} f(x)dx\right] \qquad \text{(常に } p.d.f \text{ の } f(x)\geq 0)
\end{aligned}$$

ここで、積分の順序を変えたい。

$$\int_0^n \left\{\int_0^x dy\right\} f(x)dx = \int_0^n \left\{\int_y^n f(x)dx\right\} dy$$



$$\int_{-n}^0 \left\{\int_x^0 dy\right\} f(x)dx = \int_{-n}^0 \left\{\int_{-n}^y f(x)dx\right\} dy$$



よって、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n\left\{\int_0^x f(x)dy\right\}dx-\int_{-n}^0\left\{\int_x^0 f(x)dy\right\}dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n\left\{\int_y^n f(x)dx\right\}dy-\int_{-n}^0\left\{\int_{-n}^y f(x)dx\right\}dy\right]\\
&=\int_0^\infty\left\{\int_y^\infty f(x)dx\right\}dy-\int_{-\infty}^0\left\{\int_{-\infty}^y f(x)dx\right\}dy\\
&=\int_0^\infty\left\{F(\infty)-F(y)\right\}dy-\int_{-\infty}^0\left\{F(y)\right\}dy\\
&=\int_0^\infty\left\{1-F(y)\right\}dy-\int_{-\infty}^0\left\{F(y)\right\}dy\\
&=\int_0^\infty\left\{1-F(x)\right\}dx-\int_{-\infty}^0 F(x)dx
\end{aligned}
$$

ただし、題意より $F(x)$ は確率変数 X の累積分布関数であり、累積分布関数の性質

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(x)dx,\quad F(-\infty)=0,\quad F(\infty)=1$$

を用いた。

故に題意は示された。

(2)

与式の右辺を最終的に左辺の形に持っていく。確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ として、$x=F^{-1}(t)$ とおく。

(問題文に書かれているし、関係はないが、分布関数 $F(t)$ は確率変数が連続確率変数の場合には単調増加関数となって 1 対 1 の関数となるため、$F^{-1}(t)$ が存在する。)

さて、$x=F^{-1}(t)$ とおくと、$t=F(x)$ と書ける。ここで、両辺を x で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{dx}&=\frac{d}{dx}F(x)\\
&=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x f(x)dx\\
&=f(x)
\end{aligned}
$$

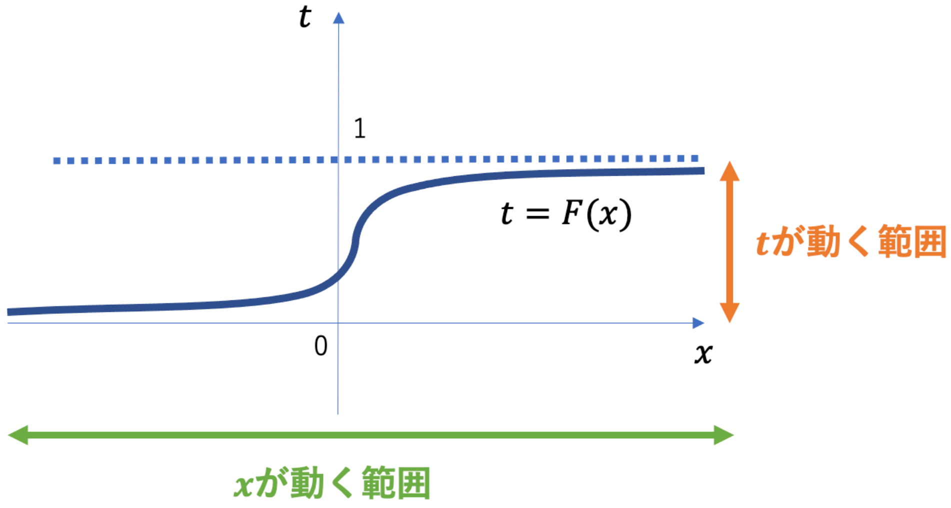
$$\therefore dt=f(x)dx$$

よって、与式の右辺は、

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 F^{-1}(t)dt&=\int_{-\infty}^\infty\{x\}\{f(x)dx\}\\
&=E[X]
\end{aligned}
$$

ただし、$t=F(x)$ より、積分区間の変更は以下のようにした。

t	0	$\to$	1
x	$-\infty$	$\to$	∞



故に題意は示された。