OFDM

K. Khawam

Cours M1

Université de Versailles

INTRODUCTION

- OFDM est une technique de modulation multi-porteuse qui a trouvé récemment un large engouement dans une variété de systèmes de communication à grand débit, à savoir le DSL, les LANs sans fil (802.11a/g/n), le broadcasting de vidéo numérique, WiMAX et surtout 3G LTE ainsi que les systèmes cellulaires de quatrième génération.

- La popularité de l'OFDM provient de sa capacité à fournir des applications à hauts débits ainsi qu'une gestion efficace et flexible de l'interférence inter-symboles (ISI) en présence de canaux très dispersifs.

MOTIVATION

- Plus le retard de diffusion du canal τ est grand par rapport au temps symbole T_s, plus l'ISI sera sévère.
  - Par définition, un système à large bande a généralement $\tau >> T_s$, puisque le nombre de symboles envoyé par seconde est élevé.
  - D'où la nécessité d'une solution pour combattre l'ISI.

- Pour avoir un canal sans ISI, le temps symbole T_s doit être plus grand —souvent nettement plus grand— que le retard de diffusion du canal.
  - Les systèmes de communication numérique ne peuvent pas fonctionner en présence d'ISI.

- Pour vaincre ce problème, la modulation multi-porteuse divise le large débit de transmission en sous-débits de moindre intensité, de sorte que chaque sous-débit vérifie $L \times T_s >> \tau$ et donc ne souffre pas d'ISI.

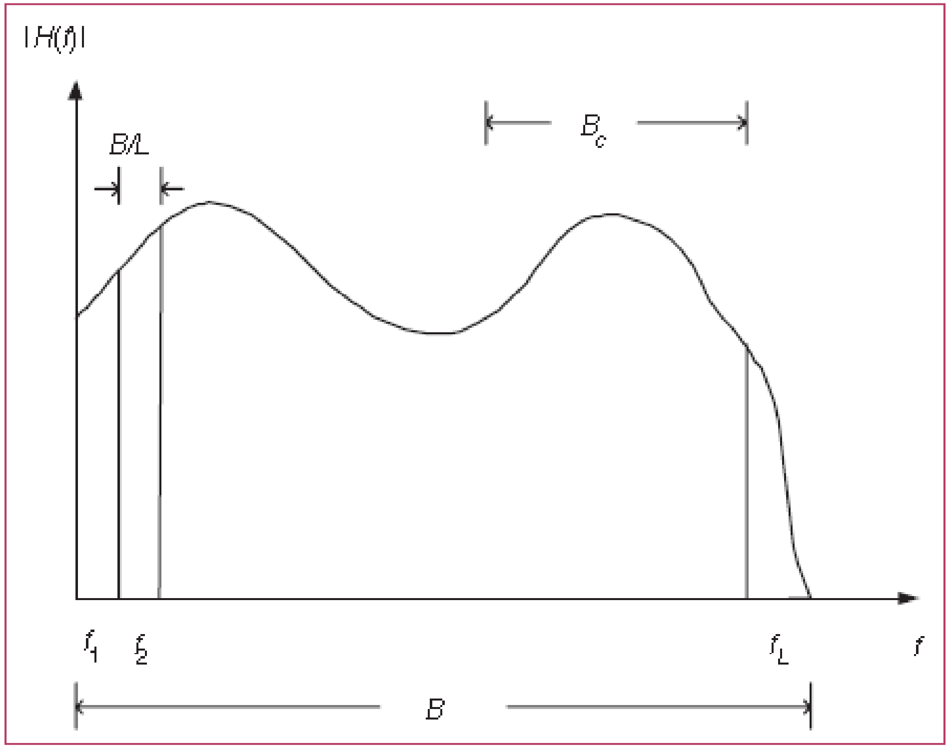
MOTIVATION

- Ces sous-débits individuels peuvent être transmis sur L sous-canaux parallèles, de sorte à maintenir le débit total désiré.
  - Typiquement, ces sous-canaux sont orthogonaux entre eux en présence de conditions idéales de propagation, dans ce cas on parle d'OFDM (orthogonal frequency division multiplexing).

- Le nombre de sous-canaux est choisi de sorte que chaque sous-canal ait une bande inférieure à la bande de cohérence du canal, ainsi ces sous-canaux ne font pas l'expérience de sélectivité en fréquence (flat fading).
  - L'ISI de chaque sous-canal est faible.
  - De plus, dans l'implémentation numérique de l'OFDM, l'ISI peut être complètement éliminé via l'usage du préfixe cyclique.

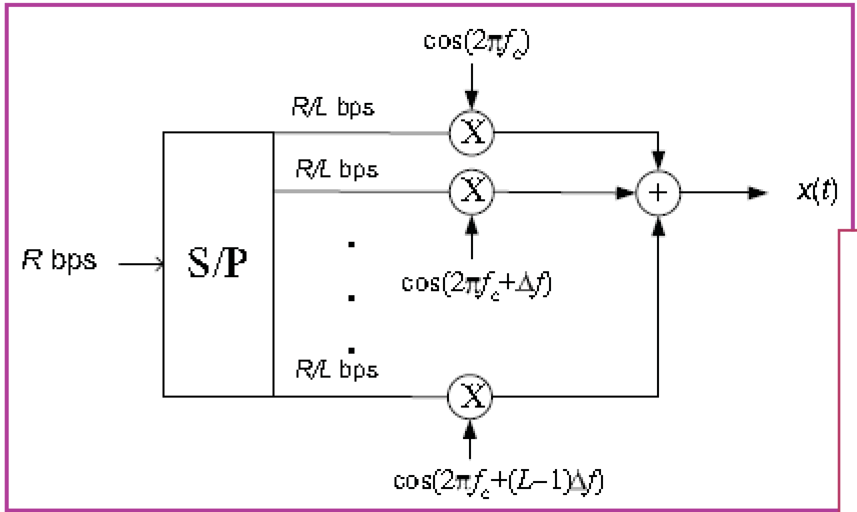
MOTIVATION

- Après être passé à travers le canal H(f), le signal reçu a la forme illustrée ci-dessous (hypothèse simpliste adoptée: pas de recouvrement entre sous-porteuses).



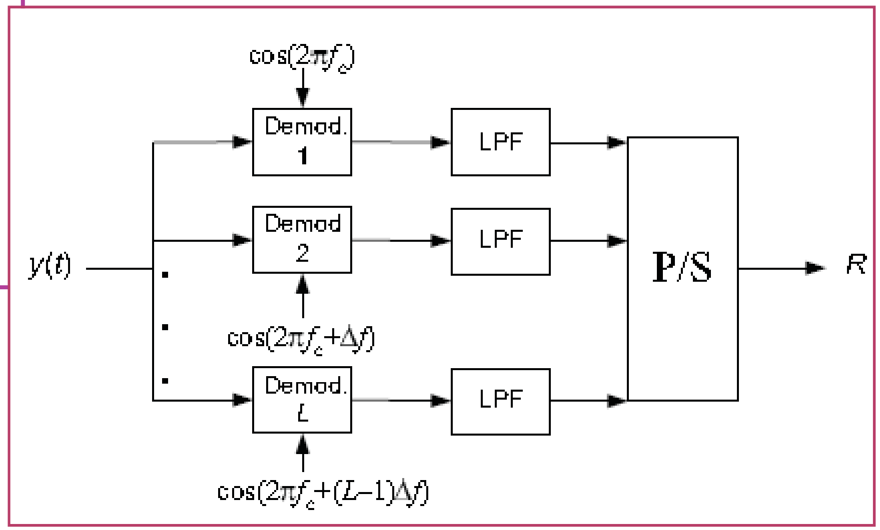
IMPLÉMENTATION 1

- Dans sa forme la plus simple, la modulation multi-porteuse divise le flot d'information de large bande en *L* flots de bande étroite, chacun transmis sur une fréquence différente, toutes les fréquences utilisées étant orthogonales entre elles.



Émetteur

Récepteur



IMPLÉMENTATION 1

- Cette technique multi-porteuse a donc une interprétation intéressante en temps et en fréquence:
  - En temps, la durée d'un symbole de chaque sous-porteuse a augmenté jusqu'à $T = L \times T_s$, augmenter *L permet donc de garantir que la durée d'un symbole reste supérieur au retard de diffusion du canal* $T >> \tau$, condition nécessaire pour avoir une communication sans ISI.
  - En fréquence, les sous-porteuses ont une bande $B/L << B_c$*, ce qui garantit la propriété de "flat fading".*

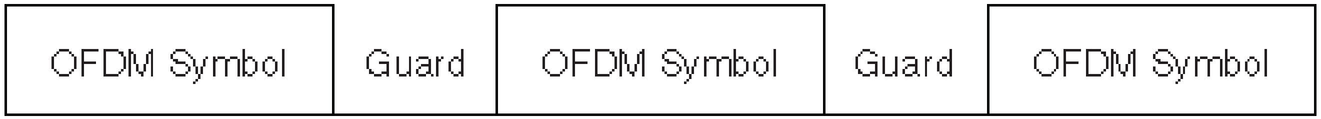
- Ce type de modulation multi-porteuse simple a malheureusement plusieurs inconvénients:
  - Pour ce qui est d'une implémentation réaliste, une large pénalité est infligée du fait que les sous-porteuses ne peuvent avoir des pulses parfaitement rectangulaire tout en restant limité en temps.
  - Des filtres passe-bas de très grande qualité (et coûteux) sont nécessaires pour maintenir l'orthogonalité des sous-porteuses au niveau du récepteur.
  - Finalement, ce schéma nécessite L fréquences indépendantes.

OFDM BASICS

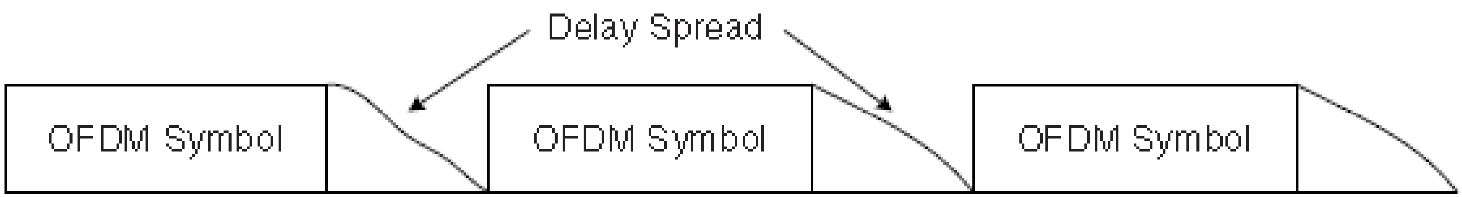
- Pour résoudre ce problème nécessitant le recours à L fréquences distinctes aussi bien dans l'émetteur que dans le récepteur, l'OFDM utilise une technique de calcul efficace:
  - La DFT (Discrete Fourier Transform), qui se traduit par une technique d'implémentation très efficace appelée FFT (Fast Fourier Transform).
  - La FFT et son inverse, la IFFT, peut créer une multitude de sous-porteuses orthogonales en utilisant juste une seule fréquence.

TRANSMISSION AVEC INTERVALLES DE GARDE

- On commence par grouper L symboles de données en un bloc appelé symbole OFDM.
  - Un symbole OFDM dure T secondes où $T=L\times T_s$
- Pour que chaque symbole OFDM reste indépendant des autres après avoir traversé un canal sans fil, on introduit un temps de garde T_g entre les symboles OFDM.



- Ainsi, après avoir reçu une série de symboles OFDM, tant que T_g est supérieur à τ, chaque symbole OFDM n'interfèrera qu'avec lui-même:



CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

- Maintenant que les symboles OFDM ont été rendus orthogonaux entre eux, il reste à éliminer l'ISI au sein de chaque symbole OFDM.
- Quand une entrée de données x[n] est envoyé à travers une FIR (Finite Impulse Response) h[n] du canal linéaire et indépendante du temps, la sortie est la convolution linéaire de l'entrée et du canal: y[n]= x[n]*h[n].
- Cependant, imaginons qu'on obtienne y[n] via une convolution circulaire:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

- Où:

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n] \triangleq \sum_{k=0}^{L-1} h[k]x[n-k]_L$$

- Et la fonction circulaire $x[n]_L = x[n \bmod L]$ est la version circulaire x[n] de période L.

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

- Dans le cas de la convolution circulaire, la DFT a la propriété suivante:

$$\mathrm{DFT}\{y[n]\} = \mathrm{DFT}\{h[n] \circledast x[n]\}$$

- Ce qui donne dans le domaine fréquentiel:

$$Y[m] = H[m]X[m] \quad (\bullet)$$

  - On note que la dualité entre convolution circulaire en temps et la simple multiplication en fréquence est une propriété unique à la DFT.

- La DFT et l'IDFT sont définies ainsi:

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} = X[m] \triangleq \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nm}{L}}$$

$$\mathrm{IDFT}\{X[m]\} = x[n] \triangleq \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=0}^{L-1} X[m] e^{j\frac{2\pi nm}{L}}$$

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

- L’équation (•) décrit un canal sans ISI dans le domaine fréquentiel, où chaque symbole d’entrée X[m] est tout simplement multiplié par une valeur complexe H[m].
  - Donc, connaissant la réponse fréquentielle du canal au récepteur, il est simple de récupérer le symbole d’entrée tout simplement en calculant ce qui suit:

$$\hat{X}[m] = \frac{Y[m]}{H[m]}$$

  - Où l’estimation X^[m] sera en général imparfaite, à cause du bruit additif, l’interférence inter-canal, l’estimation biaisée du canal, et autres imperfections.
  - Cependant, en principe, l’ISI, qui est la forme la plus sérieuse en termes d’interférences en large bande, a été mitigée.

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

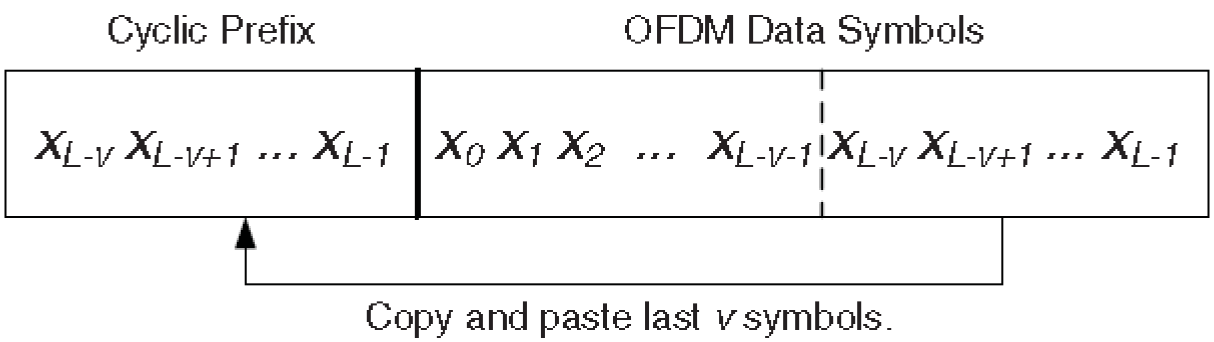
- La question qui se pose à présent est la suivante:
  - D'où provient cette convolution circulaire?

- Après tout, la nature fournit une convolution linéaire quand un signal est transmis via un canal.

- La réponse est que la convolution circulaire peut être simulée en ajoutant un préfixe cyclique CP (Cyclic Prefix) au vecteur transmis.

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT
LE PRÉFIXE CYCLIQUE

- l'usage de l'algorithme FFT est essentiel pour que l'OFDM soit réalisable en pratique, un algorithme qui a l'avantage d'avoir une faible complexité.
- Pour que l'IFFT/FFT puisse créer un canal sans ISI, le canal doit donner l'impression de fournir une convolution circulaire, comme dans l'équation (•)
- Ajouter le CP au signal transmis crée un signal qui semble être $x[n]_L$ et donc $y[n] = x[n] \circledast h[n]$



CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

LE PRÉFIXE CYCLIQUE

- Si le retard de diffusion maximal du canal a une durée de *v* échantillons, ajoutant une bande de garde d'au moins *v*+1 échantillons entre deux symboles OFDM successifs, rend chaque symbole OFDM indépendant de ceux qui viennent avant lui et après lui.

- En représentant chaque symbole OFDM en temps comme un vecteur de longueur L par ce qui suit:

$$x = [x_0 \ \ x_2 \ldots x_{L-1}]$$

- Après avoir appliqué un préfixe cyclique de longueur v, le signal transmis est:

$$\mathbf{x}_{cp} = [\underbrace{x_{L-v} \ x_{L-v+1} \cdots x_{L-1}}_{\text{Cyclic Prefix}} \ \underbrace{x_0 \ x_1 \cdots x_{L-1}}_{\text{Original Data}}]$$

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT
LE PRÉFIXE CYCLIQUE

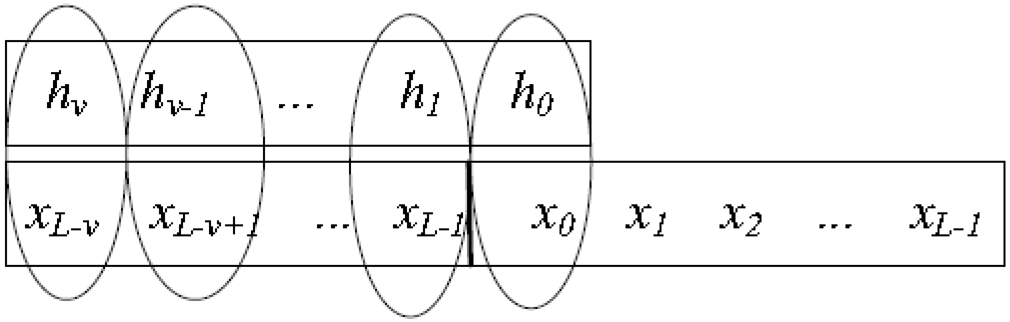
- La sortie du canal est par définition $y_{cp} = h * x_{cp}$, où h est un vecteur de longueur v+1 décrivant la réponse impulsionnelle du canal durant le symbole OFDM.

- La sortie y_{cp} a (L+v)+ (v) = L + 2v échantillons:
  - Les premiers échantillons d' y_{cp} contient l'interférence du symbole OFDM précédent et sont donc purgés.
  - Les derniers échantillons sont dispersés dans le symbole OFDM suivant, et sont donc aussi purgés.
  - Ceci laisse L échantillons pour la sortie y souhaité, ce qui est exactement requis pour récupérer les L symboles de données intégrés dans x.

- On démontre que ces L échantillons de **y seront équivalents à $y = h \otimes x$.**

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT
LE PRÉFIXE CYCLIQUE

- Plusieurs démonstrations sont possibles; la plus intuitive se base sur un simple argument d'induction. Considérons y_0, le premier élément de **y:**
  - Comme le montre la figure, grâce au CP, y_0 dépend sur x_0 et les valeurs x_{L_v} ,…, x_{L-1}.



$$y_0 = h_v x_{L-v} + h_{v-1} x_{L-v+1} \ldots + h_1 x_{L-1} + h_0 x_0$$

  - Ce qui donne:

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 x_0 + h_1 x_{L-1} + \ldots + h_v x_{L-v} \\ y_1 &= h_0 x_1 + h_1 x_0 + \ldots + h_v x_{L-v+1} \\ &\vdots \\ y_{L-1} &= h_0 x_{L-1} + h_1 x_{L-2} + \ldots + h_v x_{L-v-1} \end{aligned}$$

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT

LE PRÉFIXE CYCLIQUE

- En inspectant l'équation rappelée ici, on constate que cela équivaut exactement à la valeur résultant de y = x $\otimes$ h.

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n] \triangleq \sum_{k=0}^{L-1} h[k]x[n-k]_L$$

- Ainsi en mimant une convolution circulaire, un préfixe cyclique qui est au moins aussi long que la durée du canal permet de décomposer la sortie du canal en une simple multiplication de la réponse fréquentielle du canal H=DFT{h} et celle de l'entrée X=DFT{x}.

- Le CP, en dépit de sa simplicité et de son élégance, n'est pas sans inconvénient:
  - Il engendre un gaspillage en bande.

CONVOLUTION CIRCULAIRE & DFT
ÉGALISATION FRÉQUENTIELLE

- Afin que les symboles reçus puissent être estimés, le gain complexe du canal correspondant à chaque sous-porteuse doit être connu, ce qui revient à connaître l'amplitude et la phase de la sous-porteuse.
  - Pour les techniques de modulation simples, comme QPSK, qui n'utilisent pas l'amplitude pour véhiculer l'information, la phase est suffisante.

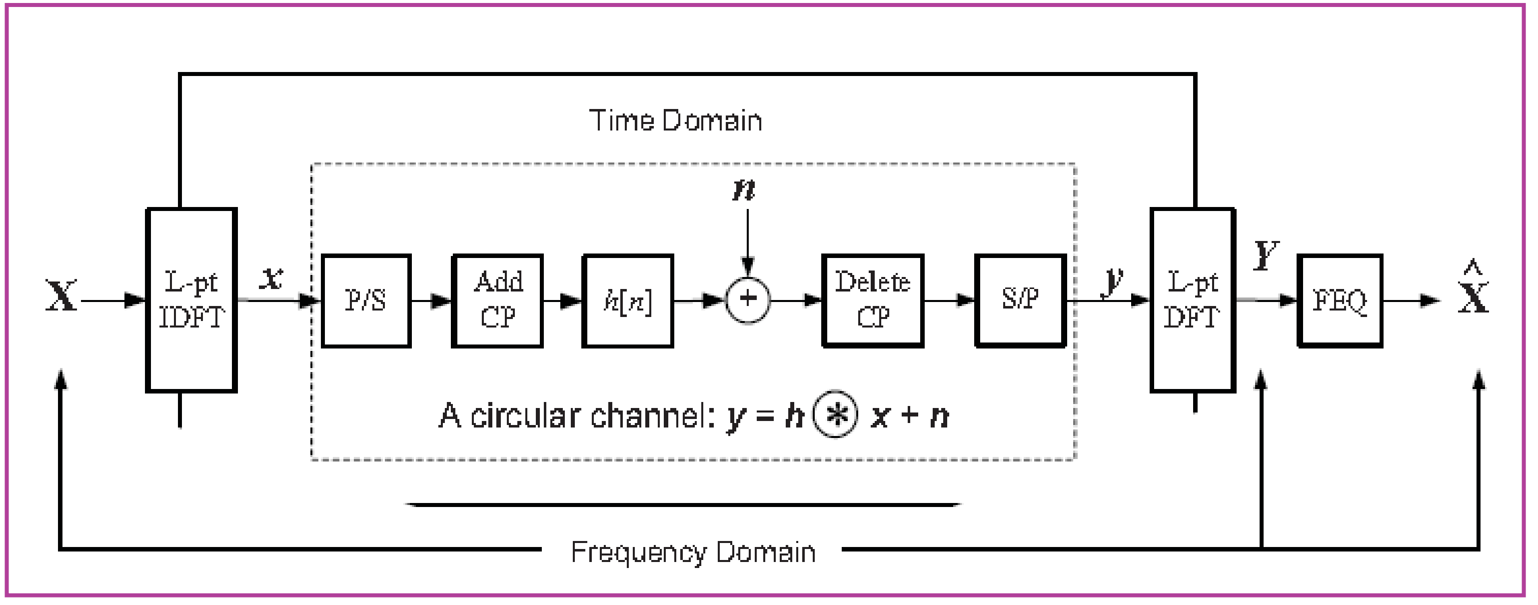
- Après que la FFT a été réalisée, les symboles sont estimés en utilisant un égaliseur en fréquence (one-tap frequency domain equalizer) ou FEQ tel que:

$$\hat{X}_l = \frac{Y_l}{H_l}$$

  - Où H_l est la réponse fréquentielle du canal à la fréquence $f_c+(l-1)\Delta f$ et donc peut à la fois corriger la phase et égaliser l'amplitude avant l'appareil de décision.

LE DIAGRAMME D'UN BLOC OFDM

- En OFDM, le codage et décodage sont effectués dans le domaine fréquentiel, où X, Y, et $\hat{X}$ contiennent les *L symboles de données transmis, reçus et estimés.*



LE DIAGRAMME D'UN BLOC OFDM

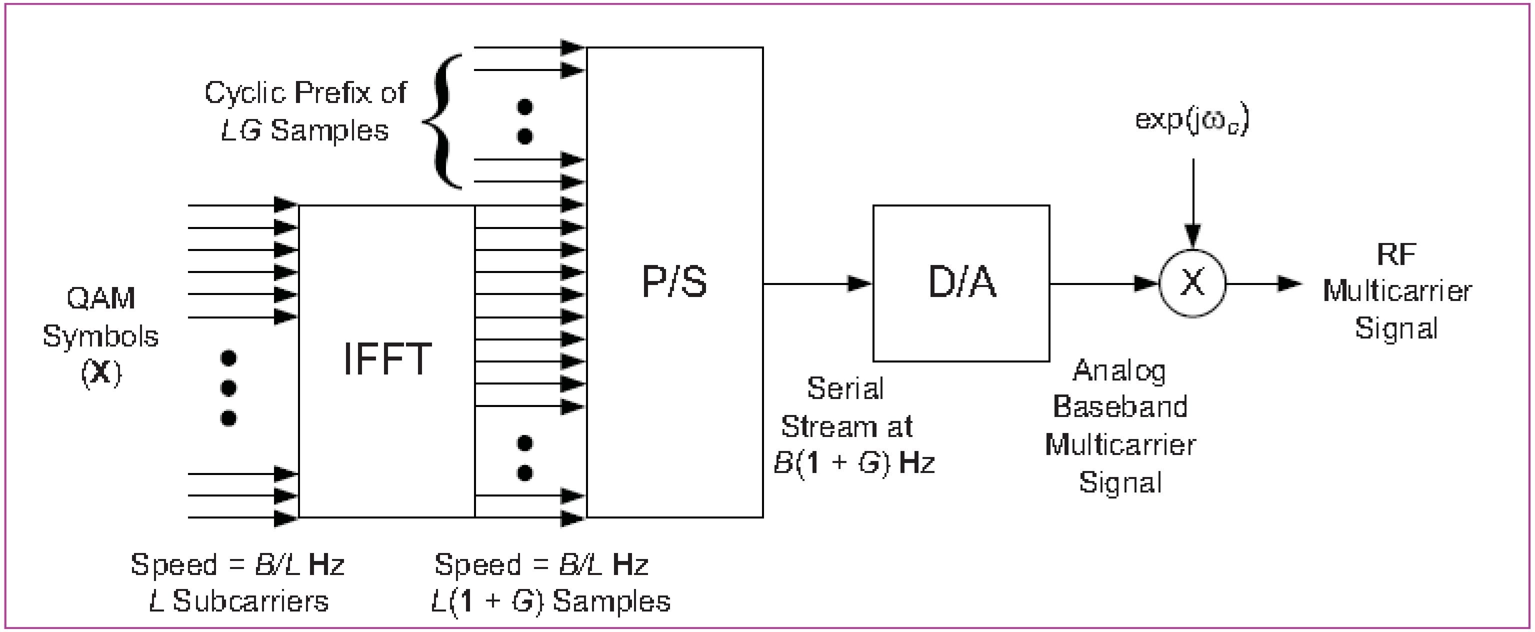
1. La première étape est de diviser un signal large bande de bande passante B en L signaux de bande étroite (sous-porteuses), chacun de bande passante B/L.
   - Ainsi le débit symbole global est maintenu alors que chaque sous-porteuse fait l'expérience de flat fading (sans ISI), tant que le préfixe cyclique reste inférieur au retard de diffusion.
   - Les L sous-porteuses pour un symbole OFDM sont représentées par le vecteur **X qui contient les L symboles courants.**

2. Pour utiliser une seule ressource radio large bande au lieu de L ressources radio indépendantes et en bande étroites, les sous-porteuses sont modulées en utilisant une opération IFFT .

3. Pour que l'IFFT/FFT puisse décomposer le canal entaché de ISI en sous-porteuses orthogonales, un CP de longueur v doit être rajouté après l'opération IFFT. Les L+v symboles résultant sont alors envoyés en série via le canal large bande.

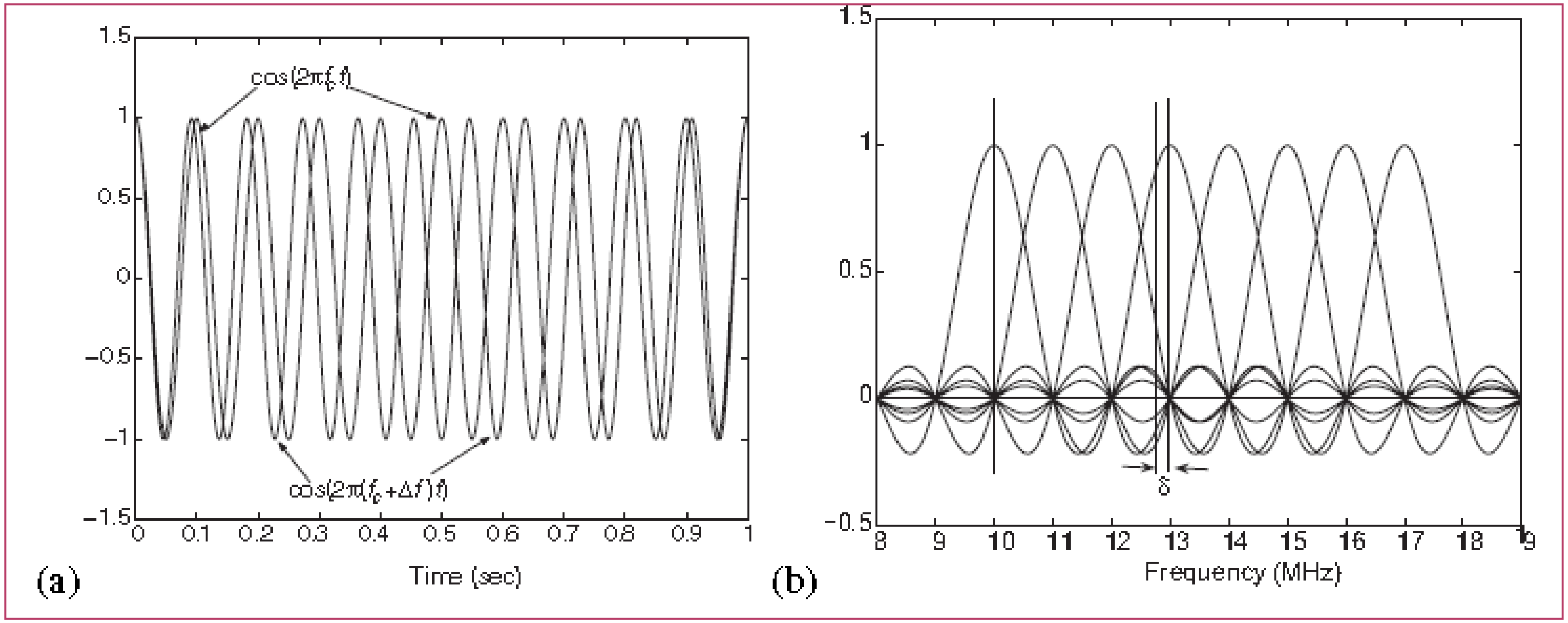
LE DIAGRAMME D'UN BLOC OFDM

4. Au niveau du récepteur, le CP est supprimé, les L *symboles reçus sont démodulés*, grâce à une opération FFT, ce qui produit *L symboles, chacun de la forme* $Y_l = H_l \times X_l + N_l$ pour la sous-porteuse *l*
5. Chaque sous-porteuse peut être égalisée via FEQ en divisant simplement par le gain complexe du canal pour la sous-porteuse en question. Ce qui donne le résultat suivant: $\hat{X}_l = X_l + N_l / H_l$



LE DIAGRAMME D'UN BLOC OFDM

- La figure qui suit montre un symbole OFDM en temps (a) et en fréquence (b).
  - Dans le domaine temporel, l'IFFT module effectivement chaque symbole de donnée sur une unique fréquence porteuse. Dans la figure, on montre juste deux porteuses: le signal transmis est la superposition de toutes les porteuses individuelles.
  - Pour la réponse fréquentielle, on montre juste L=8 sous-porteuses.



LE DIAGRAMME D'UN BLOC OFDM

- Puisque la fenêtre en temps est T=1µsec et une fenêtre rectangulaire est utilisée, la réponse fréquentielle de chaque sous-porteuse devient une fonction "sinc" qui passe par zéro chaque 1/T=1MHz.

- Ceci peut être confirmé par le fait que la transformée de Fourier donne le résultat suivant:

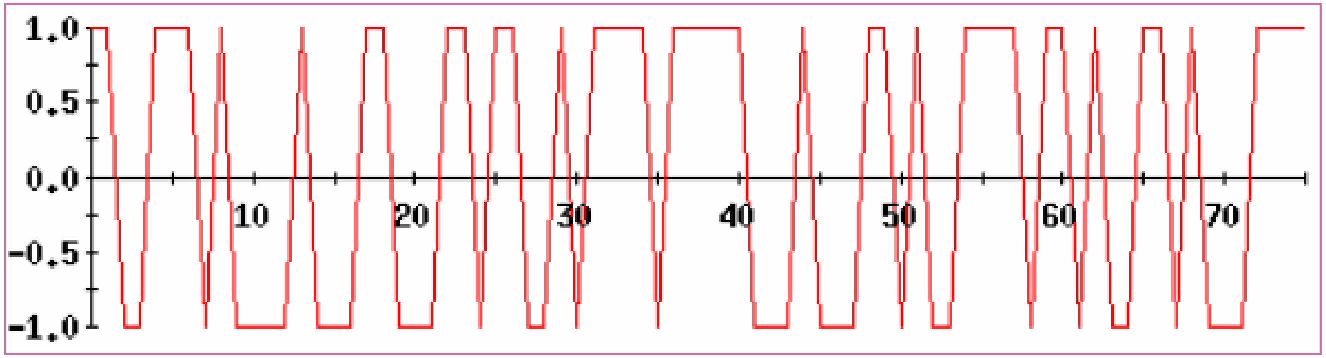
$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c)\cdot \mathrm{rect}(t/T)\} = \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(2t/T)\}$$

$$= \mathrm{sinc}\left(T(f - f_c)\right)$$

  - Où rect(x)=1, x appartient à (-0.5, 0.5) et zéro ailleurs.

EXEMPLE PRATIQUE

- Soit une séquence de bits à transmettre via 4 sous-porteuses.
  - Débit symbole du signal=1 et fréquence d'échantillonnage est 1 échantillon/symbole, chaque transition équivaut donc à un bit.



  - Les premiers bits étant:

    1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1,…

- On range à présent ces bits par ligne de 4 puisqu'on dispose de 4 sous-porteuses, ce qui revient à faire une conversion série/parallèle.

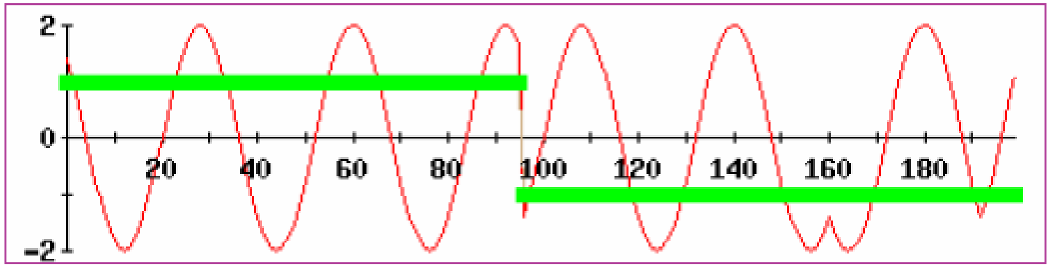
c1	c2	c3	c4
1	1	-1	-1
1	1	1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	-1	1	1

→ Table I

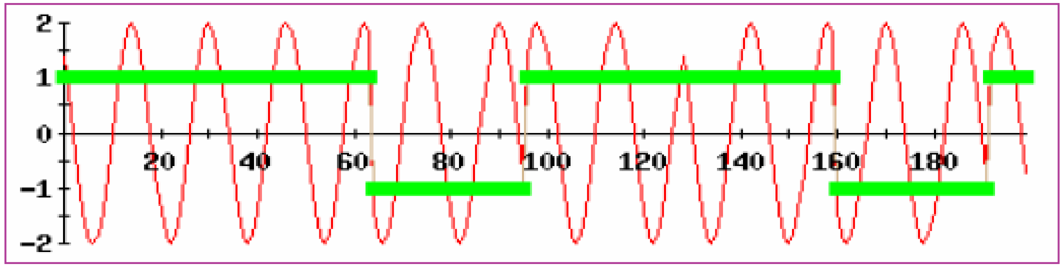
EXEMPLE PRATIQUE

- Chaque colonne représente les bits qui seront portés par chaque sous-porteuse.
- On commence par la première c_1, quelle sera sa fréquence?
- On sait d'après le théorème d'échantillonnage de Nyquist que la plus petite fréquence capable de véhiculer l'information doit être au moins égale au double du débit.
- Dans ce cas, le débit par sous-porteuse est de ¼(ou 1 symbole/s pour 4 sous-porteuses). La plus petite fréquence est donc de ½ Hz. On choisit 1Hz par commodité. Les autres fréquences sont des harmoniques de c_1.
- On choisit au hasard une modulation donnée: BPSK.

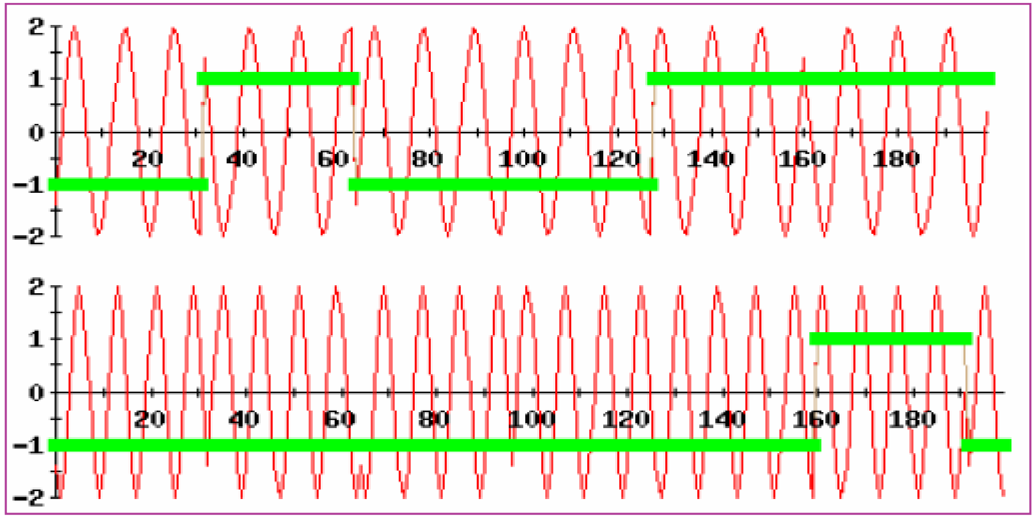
- c_1: on veut envoyer 1, 1, 1, -1, -1, -1 sur la première sous-porteuse.



- c_2: on veut envoyer 1, 1, -1, 1, 1, -1 sur une sous-porteuse de 2Hz.

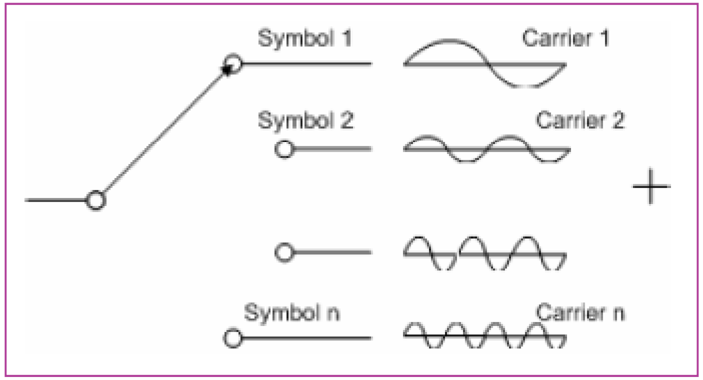


- c_3 sera envoyé sur 3Hz (modulé avec -1, 1, 1, -1, -1, 1) et c_4 sur 4Hz (modulé avec -1, -1, -1, -1, -1, 1).

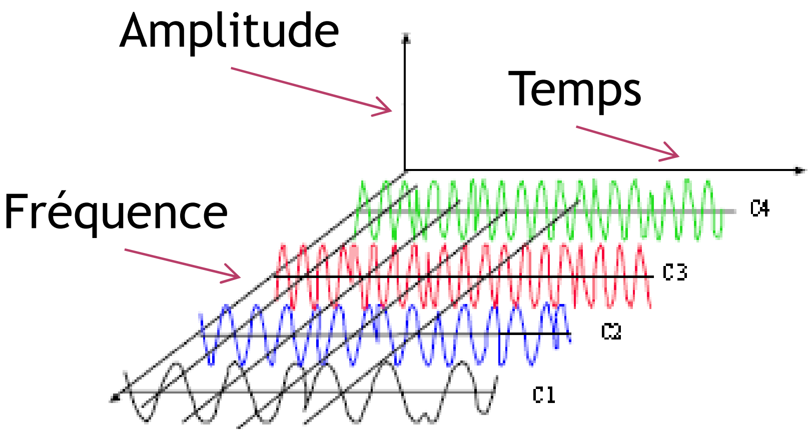


EXEMPLE PRATIQUE

- On a donc modulé tous les bits sur 4 sous-porteuses orthogonales.
  - On a pris le débit et distribué les bits, chacun à la fois sur les sous-porteuses.

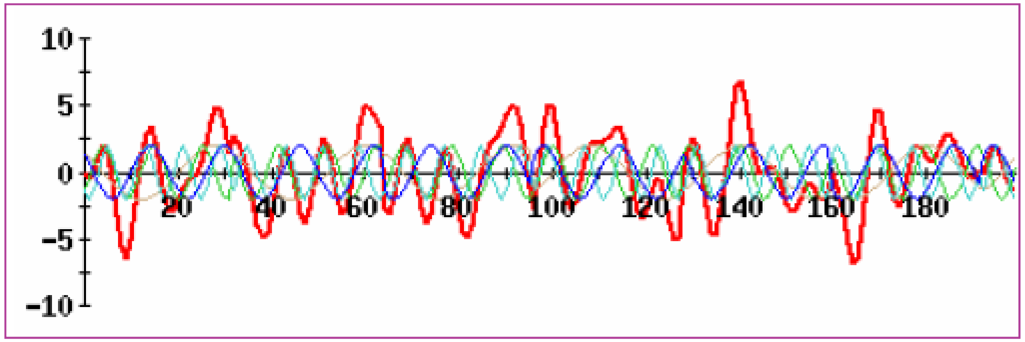


- Ce qui donne le résultat suivant:



EXEMPLE PRATIQUE

- On ajoute les 4 sous-porteuses modulées pour créer un signal OFDM souvent produit par un bloc IFFT.



  - On note la grande variabilité du signal en comparaison avec l'amplitude constante de chaque sous-porteuse.

- On peut écrire le processus ci-dessus comme tel:

$$c(t) = \sum_{n=1}^{N} m_n(t) \sin(2\pi n t)$$

  - Ce qui n'est autre que l'équation d'une FFT inverse

FFT/IFFT

- FFT prend un signal aléatoire, le multiplie successivement par des exponentiels complexes sur l'ensemble des fréquences disponibles, somme chaque produit, de sorte que le résultat sera le coefficient de la fréquence en question
  - Ces coefficients sont appelés spectre et représente le poids de chaque fréquence dans le signal d'entrée.
  - Il est commun de considérer que le résultat d'une FFT est un signal dans le domaine fréquentiel.

- FFT en sinusoïde donne ce qui suit:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin(n\frac{2\pi k}{N}) + j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos(n\frac{2\pi k}{N})$$

  - Où les x(n) sont les coefficients des sinus et cosinus aux fréquences $2\pi k/N$, k étant l'indexe d'une fréquence parmi les N fréquences possibles et n étant l'indice de temps.
  - X(k) est la valeur du spectre à la $k^{ième}$ fréquence et x(n) est la valeur du signal à l'instant n.

FFT/IFFT

- L'IFFT prend ce spectre et convertit le tout à nouveau en signal temporel en le multipliant successivement par un ensemble de sinusoïdes.

- L'IFFT a la forme suivante:

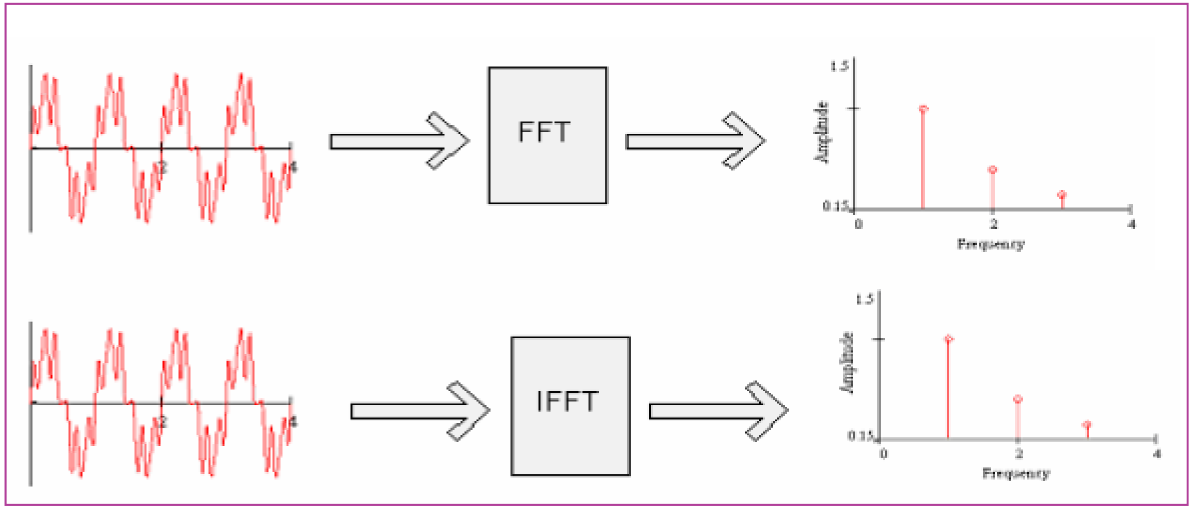
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin(\frac{2\pi kn}{N}) - j\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\cos(\frac{2\pi kn}{N})$$

- Ces deux dernières équations ne se distinguent que par les coefficients de leur sinusoïdes et par le signe « moins ».

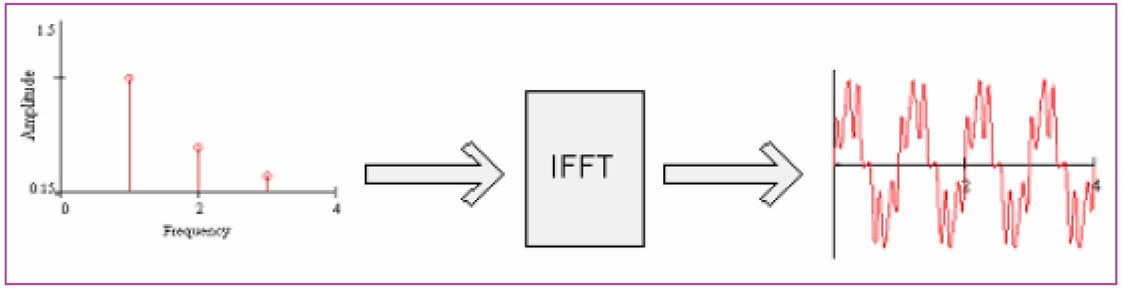
- Les coefficients par convention sont définis comme étant des échantillons dans le domaine temporel x(n) pour FFT et des frequencies bin values X(k) pour IFFT.

FFT/IFFT

- Un signal temporel donne un spectre aussi bien à la sortie d'une FFT que d'une IFFT

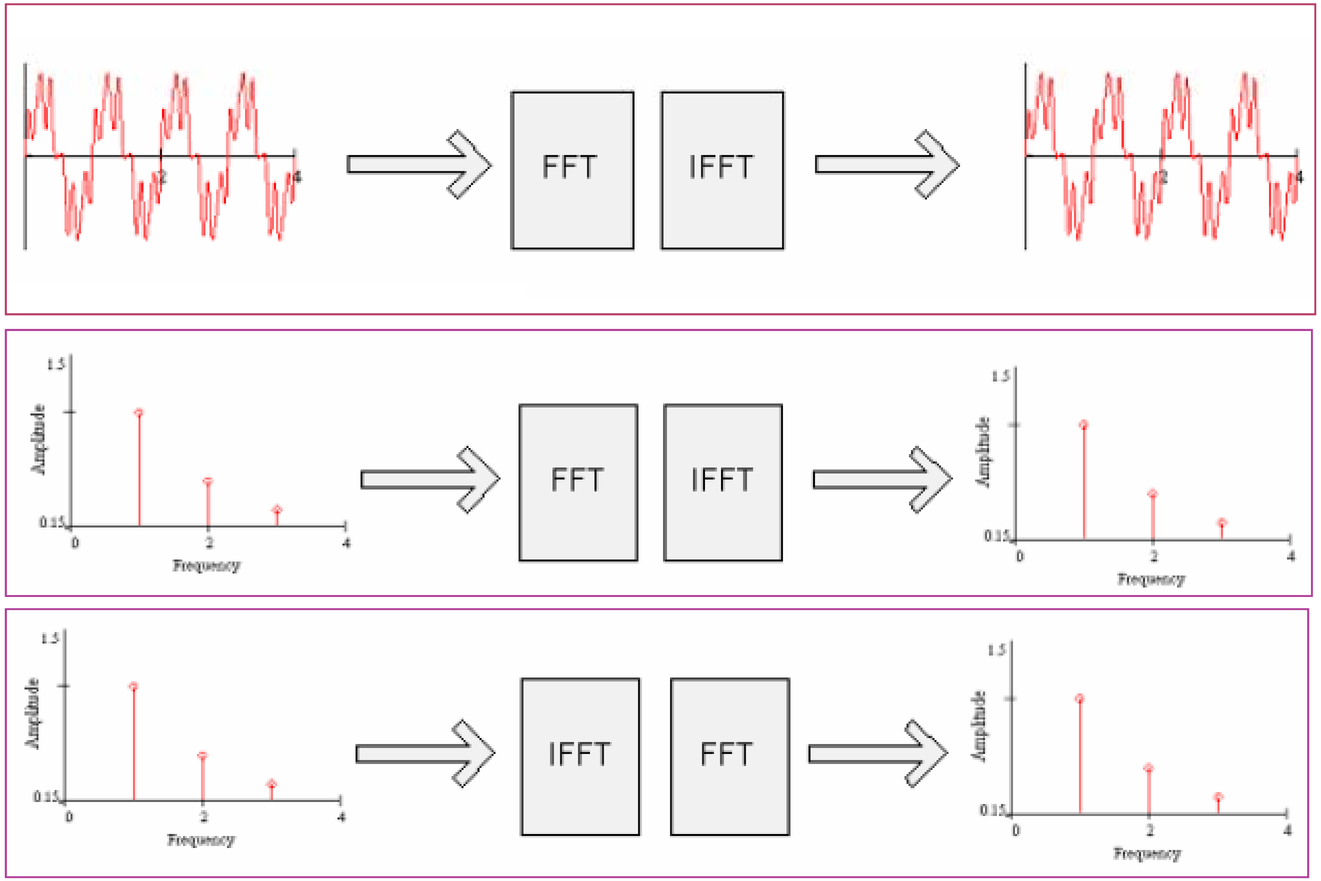


- Un signal fréquentiel produit un signal temporel à la sortie d'une IFFT



FFT/IFFT

- En utilisant les 2 opérations en séquences on retrouve le signal d'origine.



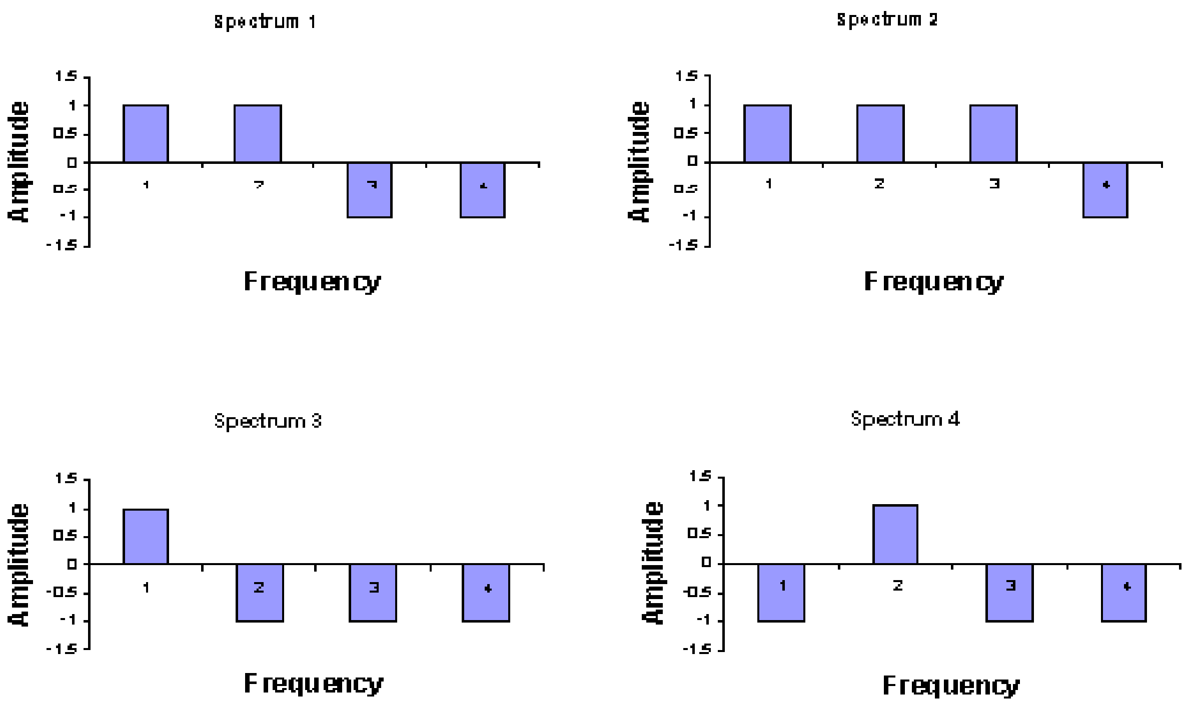
FFT/IFFT

- Dans Table I, la première colonne peut être considérée comme les amplitudes de sinusoïdes. On peut alors utiliser l'IFFT pour produire un signal temporel.
  - On peut argumenter contre cette idée en constatant que le signal est déjà dans le domaine temporel. Comment peut-on traiter un signal temporel pour produire un autre signal temporel?
  - En fait, il suffit de prétendre que les bits d'entrée ne sont pas une représentation d'un signal temporel mais des amplitudes fréquentielles (ce qui est le cas réellement).

- On prend donc ces bits et par le biais d'IFFT, on crée un signal de sortie qui est en fait un **signal OFDM temporel**.
  - L'IFFT est une opération mathématique qui n'accorde aucune importance au type de l'entrée et de la sortie à condition que ce qui se présente à l'entrée soit les amplitudes d'un ensemble de sinusoïdes.

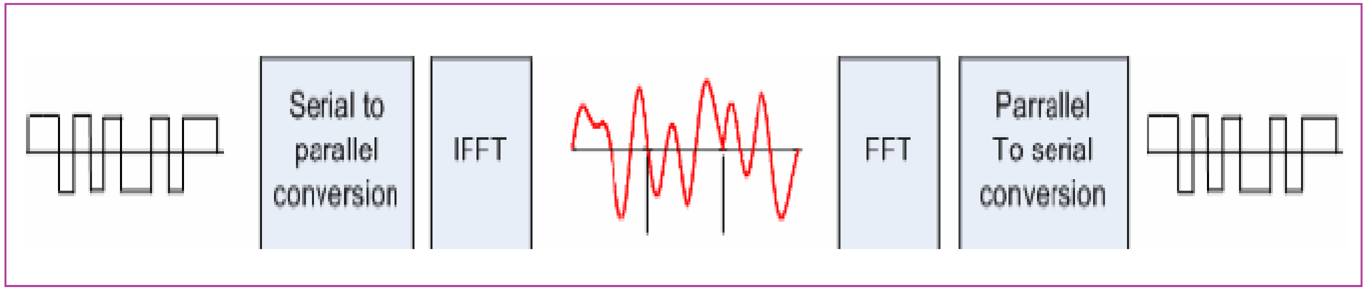
FFT/IFFT

- En se basant sur cette analyse, chaque ligne de Table I peut être considérée comme un spectre (même si ce n'est pas le cas vraiment mais qu'importe).
  - Chaque spectre dispose de 4 fréquences 1Hz, 2Hz, 3Hz et 4Hz.
  - Chacun de ces spectres peut être converti pour produire un signal temporel via IFFT (un symbole OFDM), quoique dans ce cas, l'entrée est véritablement un signal temporel se déguisant en signal spectral.



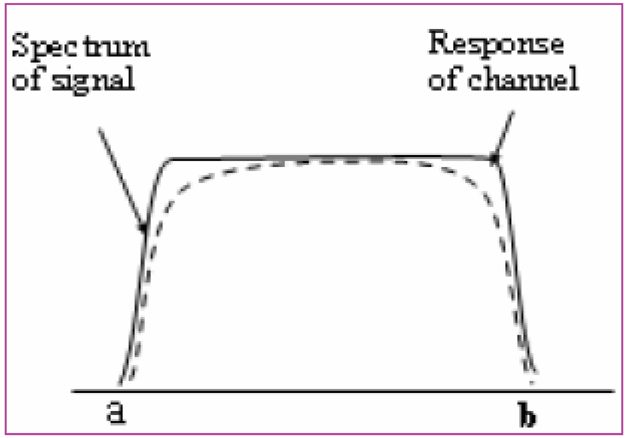
FFT/IFFT

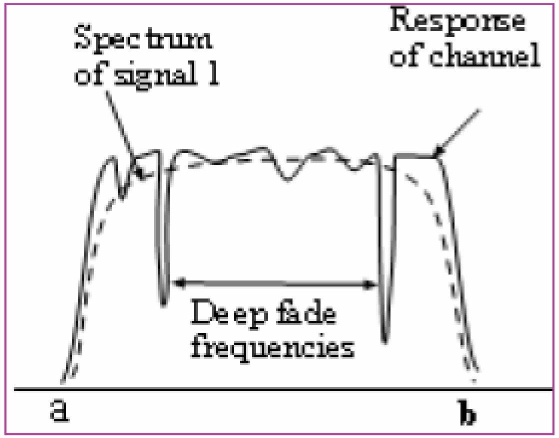
- Le diagramme du bloc fonctionnel décrivant comment le signal est modulé/démodulé:



AVANTAGES DE L'OFDM

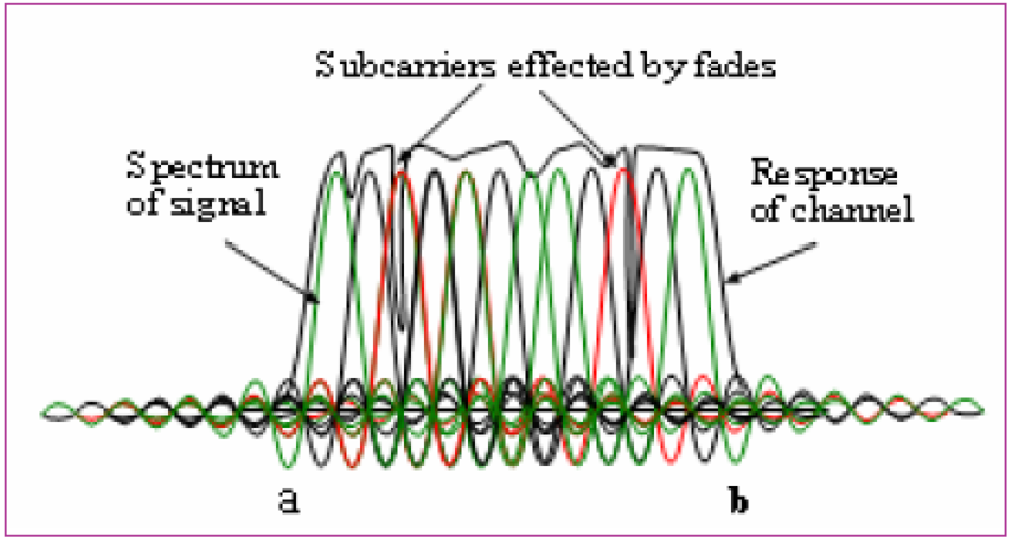
- Dans la 1ère figure, on voit en traits pleins, la réponse souhaité du canal et en pointillés, le spectre du signal: le signal n'a subi ni affaiblissement, ni distorsion.
- Dans la 2ème figure, on voit qu'à certaines fréquences, le canal ne laisse pas l'information passer.
  - Il s'agit d'un canal sélectif en fréquences et de quoi dépendent ces fréquences? De l'environnement, qui s'il est variable (mouvement), affectera différentes fréquences d'une manière aléatoire et variable.



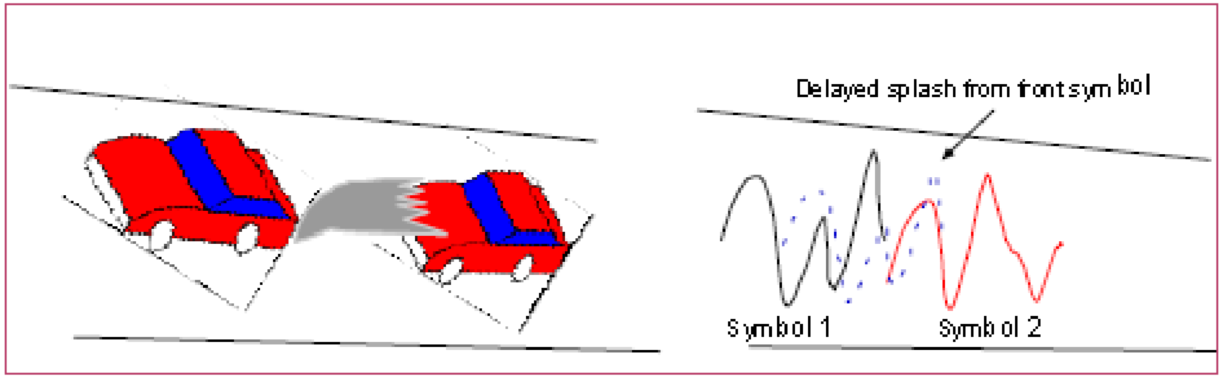


AVANTAGES DE L'OFDM

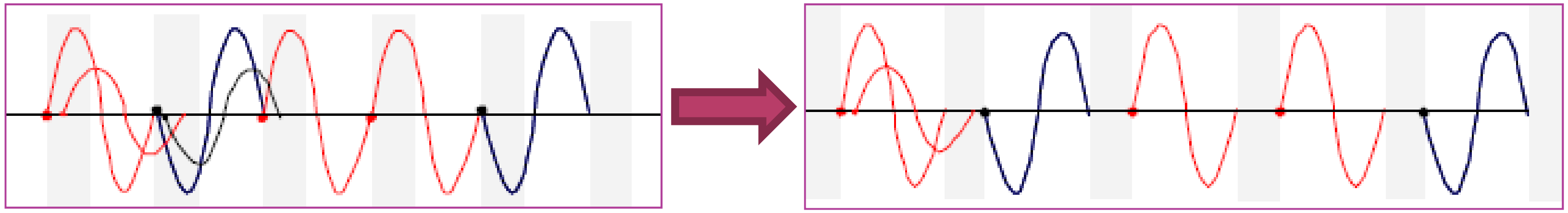
- Un signal OFDM offre un avantage quand il s'agit d'un canal sélectif en fréquences: on voit dans la figure que juste deux sous-canaux sont affectés
  - Au lieu de perdre tout un symbole, on perd juste quelques bits qui peuvent facilement être récupéré grâce à un efficace codage.



AVANTAGES DE L'OFDM
RETARD DE DIFFUSION ET PRÉFIXE CYCLIQUE



- La solution est de laisser une distance entre les deux voitures, pour éviter l'éclaboussement.

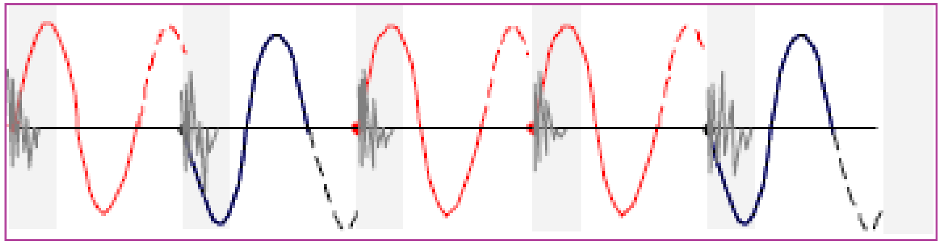


- On déplace donc le symbole suivant de sorte à éviter toute interférence avec le retard de diffusion. Mais ce n'est pas une solution faisable pratiquement.

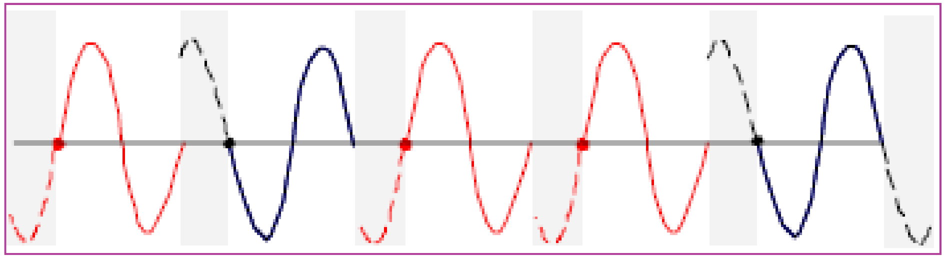
AVANTAGES DE L'OFDM

RETARD DE DIFFUSION ET PRÉFIXE CYCLIQUE

- On prolonge donc le symbole pour occuper l'espace vide.
  - Le symbole donc dépasse un cycle.
- Le souci est que le début du signal (important pour récupérer l'information utile) est toujours en danger.



- On déplace donc le symbole et remplit l'espace laissé vide par n'importe quoi (puisqu'il s'agit d'une information qui sera perdue):



- On choisira de répéter la dernière partie du symbole.

AVANTAGES DE L'OFDM
RETARD DE DIFFUSION ET PRÉFIXE CYCLIQUE

- En théorie, il faudra ajouter ce préfixe à chacun des sous-porteuse. En pratique, on se contente de faire cela au symbole OFDM composite.