

师恩难忘

# 2020事业单位事业部 教师资格直播01班 (初中数学刷题)

讲师：刘老师  
助教：



01

# 2019年下半年数学学科知识与教学能力试题 (初级中学)



## 一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 在利用导数定义证明  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  的过程中用到的极限是（ ）.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{x} \right)^x = e$

C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$

D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = 0, 0 < q < 1$



2. 设  $M, X, Y$  为  $n$  阶方阵, 则下列命题一定正确的是 ( ).

A.  $XY=YX$

B.  $M(X+Y)=MX+MY$

C. 若  $XY=0$  且  $X \neq 0$ , 则  $Y=0$

D. 若  $MX=MY$  且  $M \neq 0$ , 则  $X=Y$





3. 下列定积分计算结果正确的是 ( ).

A.  $\int_{-1}^1 (x^2 + x^3) dx = 0$

B.  $\int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = 0$

C.  $\int_{-1}^1 \ln(x+2) dx = 0$

D.  $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = 0$



4. 将椭圆  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0 \\ z = 0 \end{cases}$  绕长轴旋转一周, 所得旋转曲面的方程为 ( ).

A.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

B.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$

C.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

D.  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$



5. 设  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\beta_1, \beta_2$  是方程组  $AX=0$  的两个不同的基础解系, 则下列结论正确的( )

- A. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  的秩小于向量组  $\beta_1, \beta_2$  的秩
- B. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  的秩大于向量组  $\beta_1, \beta_2$  的秩
- C. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  的秩等于向量组  $\beta_1, \beta_2$  的秩
- D. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  的秩与向量组  $\beta_1, \beta_2$  的秩无关



6. 三个非零向量共面，则下列结论不一定成立的是（ ）。

A.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

B.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

C.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  线性相关

D.  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$





7. 在平面直角坐标系中，将一个多边形依次沿两个坐标轴方向分别平移 2 个单位和 3 个单位后，得到的图形与原来的图形的关系不一定正确的是（ ）。

A. 全等

B. 平移

C. 相似

D. 对称



8. 学生是数学学习的主体是数学教学的重要理念，下列关于教师角色的概述不正确的是（ ）。

A. 组织者

B. 引导者

C. 合作者

D. 指挥者



## 二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 设  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , 变换  $Y = AX + B$ , 其中变换矩阵  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

(1) 写出椭圆  $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$  在该变换下  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  满足的曲线方程; (5 分)

(2) 在该变换下, 哪些性质不变, 哪些性质发生了变化了 (例如距离、斜率等)? (2

分)



(1) 写出椭圆  $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$  在该变换下  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  满足的曲线方程; (5 分)

(2) 在该变换下, 哪些性质不变, 哪些性质发生了变化了 (例如距离、斜率等)? (2 分)



10. 利用一元函数积分计算下列问题:

(1) 求曲线  $y = \sin x$  与  $y = x^2 - \pi x$  所围平面图形面积; (4 分)

(2) 求曲线段  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  绕  $x$  轴旋转一周所围成的几何体体积. (3 分)





11. 一个袋子里有 8 个黑球，8 个白球，随机不放回地连续取球五次，每次取出 1 个球，求最多取到 3 个白球的概率.



12. 简述研究中学几何问题的三种主要方法.



## 12. 简述研究中学几何问题的三种主要方法.

12. 【参考答案】见解析.

解析:

(1) 函数与方程的思想方法: 函数思想是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题; 方程思想是从问题的数量关系入手, 应用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程(组)、不等式(组)), 然后通过解方程或不等式来解决问题.

(2) 数形结合思想: 所谓数形结合思想, 就是在研究问题时把数和形结合考虑, 把问题的数量关系转化为图形性质, 或把图形性质转化为数量关系, 从而使复杂问题简单化, 抽象问题具体化. 解题中的数形结合, 是指对问题既进行几何直观的呈现, 又进行代数抽象的揭示, 两个方面相辅相成, 而不是简单地代数问题用几何方法或几何问题用代数方法, 两方面有机结合才是完整的数形结合. 如: 在解应用题中常常借助线段图的直观帮助分析数量关系.



## 12. 简述研究中学几何问题的三种主要方法.

(3) 转换化归的思想方法：由数学结论呈现的公理化结构，使得数学上任何一个正确的结论都可以按照需要和可能而成为推断其他结论的依据，于是，任何一个待解决的问题只需通过某种转化过程，归结到一类已经解决或比较容易解决的问题上，即可获得原有问题的解决，这就是转换化归的思想方法。它是一种极具数学特征的思想方法。简言之，就是指在求解数学问题时，如果对当前的问题感到生疏困惑，可以把它进行变换转化，化繁为简、化难为易、化生为熟，从而使问题得以解决。这种思想是科学研究与数学学习中常用的方法，它是解决问题获得新知的重要思想。数学问题解决中的模式识别、分类讨论、消元、降次等策略或方法，都明显体现了转换化归的思想方法。



13. 简述数学教学活动中调动学生学习积极性的原则.





### 13. 简述数学教学活动中调动学生学习积极性的原则。

13. 【参考答案】见解析。解析：课堂上学生能否自主参与学习活动是学生能否成为学习的主人的明显标志。只有学生在情感、思维、动作等方面自主参与了教学活动，学生学习的主体性才能体现，才能使他们以最大的热情、最佳的精神状态投入到数学学习中。

（1）情意原则——激发动机与兴趣

（2）过程原则——“两个过程”有机整合，调动学生积极性

“两个过程”就是数学知识的发生发展过程和学生的数学学习过程。贯彻过程原则，必须做好两个还原：①还原知识的原发现过程，这就要求我们在教学设计中思考数学知识结构的建立、推广和发展过程；数学概念的产生过程；解题思路的探索过程；数学思想方法的概括过程等。②学生思维过程的还原，这就要求我们在教学设计中，为学生构建一条“从具体到抽象，由此及彼、由表及里，从个别到一般，从片面到全面”的思维通道。

在两过程中，采用多种教学方式相结合；同时，形象直观能突破视觉的限制，多角度地观察对象，并能够突出要点，有助于概念的理解和方法的掌握。

（3）调控原则——强调“反馈—调节”机制的应用，有效监控教学活动



### 三、解答题（本大题共 1 小题，共 10 分）

14. 对于问题：“已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导，且  $f(0) = 0$ ，对于任何  $x \in [0, 1]$ ，有

$|f'(x)| \leq |f(x)|$ ，求证  $f(x) = 0$ ， $x \in [0, 1]$ 。”有人是这样做的：

$$|f(x) - f(0)| = |f'(\xi_1)| (x - 0) \quad (0 < \xi_1 < x) \quad ①$$

$$|f'(\xi_1)| x \leq |f(\xi_1)| x \quad ②$$

$$|f(\xi_1) - f(0)| x = |f'(\xi_2)| \xi_1 x \leq |f(\xi_2)| \xi_1 x \leq |f(\xi_2)| x^2 \quad (0 < \xi_2 < \xi_1 < x) \quad ③$$

$$|f(\xi_2) - f(0)| x^2 = |f'(\xi_3)| \xi_2 x^2 \leq |f(\xi_3)| \xi_2 x^2 \leq |f(\xi_3)| x^3 \quad (0 < \xi_3 < \xi_2 < \xi_1 < x) \quad ④$$



请你解答下列问题：

- (1) 写出步骤①的证明依据；（1分）；
- (2) 写出步骤②的证明依据；（1分）；
- (3) 指出步骤③与步骤①的关系；（1分）；
- (4) 完成步骤④以后的证明。（7分）。



请你解答下列问题：

- (1) 写出步骤①的证明依据；（1分）；
- (2) 写出步骤②的证明依据；（1分）；
- (3) 指出步骤③与步骤①的关系；（1分）；

14.【答案】见解析. 解析：

(1) 拉格朗日中值定理；

(2)  $|f'(x)| \leq |f(x)|$ ；

(3) 步骤(3)是步骤(1)中的 $x$ 取 $\xi_1$ ；



(4) 完成步骤④以后的证明。(7分)。

(4)

$$|f(\xi_3) - f(0)|x^3 = |f'(\xi_4)|\xi_3x^3 \leq |f(\xi_4)|\xi_3x^3 \leq |f(\xi_4)|x^4 \quad (0 < \xi_4 < \xi_3 < \xi_2 < x),$$

.....,

$$|f(\xi_{n-1}) - f(0)|x^{n-1} = |f'(\xi_n)|\xi_{n-1}x^{n-1} \leq |f(\xi_n)|\xi_{n-1}x^{n-1} \leq |f(\xi_n)|x^n$$

$$(0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < x),$$

$$\therefore |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq |f(\xi_n)|x^n;$$

因为函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 所以函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 从而函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$

上有界, 当  $x \in [0, 1)$  时,  $0 \leq |f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\xi_n)|x^n = 0$ ,  $\therefore f(x) = 0, x \in [0, 1)$ ;

当  $x = 1$  时,  $0 \leq |f(1)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(\xi_n)|1^n = 0$ ,  $\therefore f(1) = 0$ ;

$\therefore f(x) = 0, x \in [0, 1]$ .





#### 四、论述题（本大题共1小题，共15分）

15. 学生的数学学习应当是一个生动活泼，积极主动和富有个性的过程，认真听讲，积极思考，动手实践，自主探索，合作交流等都是学习数学的主要方式，请谈谈教师如何在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯.



#### 四、论述题（本大题共1小题，共15分）

15. 学生的数学学习应当是一个生动活泼，积极主动和富有个性的过程，认真听讲，积极思考，动手实践，自主探索，合作交流等都是学习数学的主要方式，请谈谈教师如何在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯.

15. 【参考答案】见解析. 解析：认真听讲、善思好问、质疑反思、合作交流等这些都是良好的学习习惯，教师在教学中可以通过以下几个方面帮助学生养成良好的学习习惯：

（1）**激发学生的兴趣.** 在数学课堂上，教师要更多地激发学生学习兴趣上下工夫，要通过自己的教学智慧和教学艺术，充分展示数学的亲合力，拨动学生的好奇心，激发学生学习数学的原动力，使学生由厌学到乐学，最终达到会学，使其养成认真听讲的好习惯.

（2）**运用启发式教学，引发学生思考.** 教师在课堂教学中可以运用问题串，通过新旧知识之间的联系引发学生的认知冲突，由易到难，由浅入深，层层递进，不断引发学生的数学思考，使其养成勤于思考、善于思考的良好学习习惯.

（3）**鼓励学生质疑和标新立异.** 教师在课堂授课过程中要鼓励学生从不同的角度，运用不同的方法进行解答，鼓励一题多解及质疑问难，只有在课堂当中营造鼓励质疑的氛围，学生才能在日常的学习中养成质疑问难的良好学习习惯，使其不仅知其然，更知其所以然.

（4）**教师在课堂教学中需要发挥学生的主体地位，**除接受学习外，还需要着重培养学生动手实践、自主探究和合作交流等好的数学学习方法，使其成为学生的学习习惯.

总之，好的学习习惯的养成不是一蹴而就的，它需要教师在日常教学中刻意诱导，潜移默化，点滴积累，通过较长时间的磨炼，最后方能习以为常，养成良好的学习习惯.



## 五、案例分析题（本大题共 1 小题，共 20 分）

16. 案例：下面是某个学生的作业：

解方程：  $\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} + 3$

①移项得：  $\frac{1-x}{x-2} - \frac{1}{2-x} = 3$ ，②通分得：  $\frac{1-x+1}{x-2} = 3$ ，③化简得：  $-1=3$ ，④矛盾.

原方程是不是无解啊.

问题：

- （1）指出该学生解此方程时出现的错误，并分析其原因；（7分）
- （2）给出上述方程的一般解法，帮助学生解除疑惑；（7分）
- （3）简述中学阶段解方程常用的数学思想方法。（6分）



问题：（1）指出该学生解此方程时出现的错误，并分析其原因；（7分）

解析：（1）首先该生的解题步骤不规范。

针对分式方程的解题步骤一般采用如下环节，

第一步：去分母，即在分式方程两边同乘以分母的最小公倍式（最简公分母）；

第二步：去括号；

第三步：移项；

第四步：合并同类项；

第五步：系数化为1；

第六步：检验；

其次在第二步到第三步过程中运用分子、分母同时消去公因式 $(x-2)$ 错误，忽略了

$(x-2)$ 是有可能为0的，只有确定了 $x-2 \neq 0$ 才可以这样进行化简。



(2) 给出上述方程的一般解法，帮助学生解除疑惑；(7分)

(2) 一般解法：
$$\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} + 3$$

解：去分母，两边同乘  $(x-2)$  得： $1-x = -1+3(x-2)$ ；

去括号得：
$$1-x = -1+3x-6$$

移项得：
$$-x-3x = -1-6-1$$

合并同类项得：
$$-4x = -8$$

系数化为1得：
$$x = 2$$

检验：当  $x=2$  时， $x-2=0$ ，因此  $x=2$  不是原分式方程的解，

所以原分式方程无解。





### (3) 简述中学阶段解方程常用的数学思想方法。(6分)

(3) ①**函数与方程的思想方法**：在解方程与列方程的过程中就运用到从问题的数量关系入手，应用数学语言将问题中的条件转化为数学模型（方程（组）、不等式（组）），然后通过解方程或不等式来解决问题的思想方法。

②**数学模型的思想方法**：中学数学中的“列方程解应用题”就是数学模型思想方法的应用。这类题的基本思路是：根据题意（实际问题）列出方程（数学模型），运用数学方法求解方程（数学问题的解）；根据问题的实际意义检验方程解的合理性，给出原问题的答案

③**转换化归的思想方法**：在解方程的过程中移项、合并同类项、系数化为1的方法，都明显体现了转换化归的思想方法。

④**假设思想方法**：在列方程的过程先对题目中的已知条件或问题作出某种假设，然后按照题中的已知条件进行推算，根据数量出现的矛盾，加以适当调整，最后找到正确答案的一种思想方法。



六、教学设计题（本大题共1小题，共30分）

17. 针对“角平分线的性质定理”的内容，请你完成下列任务：

（1）叙述角平分线的性质定理；（5分）

（2）设计“角平分线的性质定理”教学过程（只要求写出新课导入、定理形成与证明过程），并说明设计意图；（20分）

（3）借助“角平分线的性质定理”，简述如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验。（5分）



六、教学设计题（本大题共1小题，共30分）

17. 针对“角平分线的性质定理”的内容，请你完成下列任务：

（1）叙述角平分线的性质定理；（5分）

解析：（1）角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等



(2) 设计“角平分线的性质定理”教学过程（只要求写出新课导入、定理形成与证明过程），并说明设计意图；（20分）

## (2) 教学过程

### 导入环节

引导学生回顾角平分线的尺规作图方法，并在练习本上绘制出任意一个角 $\angle AOB$ ，画出它的角平分线 $OC$ 。进一步提问在 $OC$ 上任取一点 $P$ ，过点 $P$ 画出 $OA$ 、 $OB$ 的垂线，分别记垂足为 $D$ 、 $E$ 。观察、测量 $PD$ 、 $PE$ 并作比较，你发现了什么呢？进一步引出课题《角平分线的性质》。

【设计意图】引导学生回顾旧知拉近学生与新知识的距离，并强化学生对角平分线画法的掌握。设置学生动手操作的教学活动调动学生的积极性，使得学生更愿意参与到教学活动中。针对 $PD$ 、 $PE$ 大小比较的结论设疑，一方面可以帮助学生养成勤于思考的学习习惯，另一方面也为学生学习角平分线的性质定理做铺垫。



新授环节：

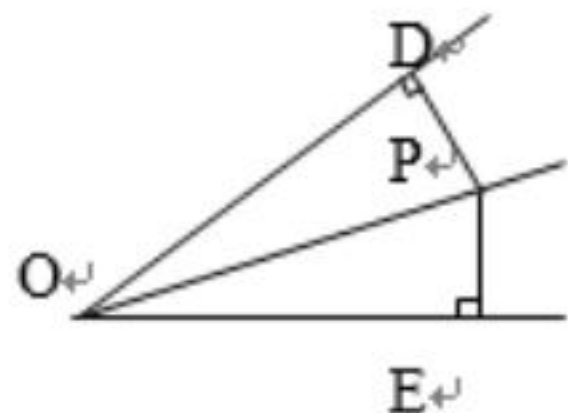
活动一：猜想

引导学生在OC上再取几个点进行测量，从测量出的多组数据中进行归纳。尝试猜想：角平分线上的点到角两边的距离相等。

活动二：探究验证

提出探求问题，“角平分线上的点到角两边的距离相等”这一猜想是否正确？又要如何验证呢？

教师引导学生将上述猜想转化为具体的规范的数学语言，并明确已知条件、以及未知条件。“已知角平分线上的任意一点P分别作OA、OB的垂线，垂足分别为D、E，求证 $PD=PE$ ”并利用多媒体展示如下几何图形。



组织学生同桌之间讨论并畅所欲言可以利用之前学过的哪些知识进行证明？尝试说一说证明思路

预设：证明，验证结论的正确性。

组织学生前后桌结成学习小组根据刚刚讨论得出的思路，进行思考讨论并写出证明过程。



学生完成之后，随机请小组代表进行总结发言，并由一位小组代表上台板演证明过程，教师加以强调证明过程的书写格式，规范如下，

证明：  $\because PD \perp OA, PE \perp OB.$

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$  ,

在  $\triangle POD$  和  $\triangle POE$  中，

$$\begin{cases} \angle PDO = \angle PEO \\ \angle AOC = \angle BOC \\ OP = OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle POD \cong \triangle POE, (AAS)$

$\therefore PD = PE.$





并引导学生利用该求证过程，总结证明几何命题的一般步骤为：①明确题目中的已知和求证；②根据题意画出图形，并用数学符号表示已知和求证；③分析，找出由已知推出求证的条件，并写出证明过程。

【设计意图】组织学生通过多次测量猜想结论重视知识的产生发展过程，教师引导学生规范表达明确已知条件以及求证条件增强学生的严谨意识。引导学生在已有经验的基础上利用三角形全等的知识进行验证证明提高学生应用数学的意识与能力以及分析解决问题的能力。且学生经历猜想验证过程可以锻炼其数学思维，并发展逻辑推理能力。



(3) 借助“角平分线的性质定理”，简述如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验。(5分)

(3) 学生在小学阶段已经对基本几何图形有过接触，因此在教学的过程中可以采取如下方式帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验。

①要注意与学生已学知识的衔接，总结和提高。把握好学生从直观到抽象的思维重心的转变。

②充分利用教科书中提供的情境以及现实生活中大量存在的实例，从中抽象出几何图形，然后着重分析并对照图形的特征，把概念与图形结合起来，进而揭示它们的本质属性。

③重视知识发生过程的教学，对概念，应使学生参与其形成过程，即怎样从实例抽象概括出来，例如，体的概念是怎样从实物中抽象出来的；对图形的性质，应引导学生积极观察、实验、思考、探究和交流，通过教学活动，自己得出结论，例如，本题的角平分线的性质的教学过程设计。

④重视文字语言和图形语言的教学，与基本概念有关的语言有描述性语言，又有严谨、准确的数学语言，还要结合图形的表示法进行一些符号语言的学习，以及进行画图，认图的学习，在学习过程中，应当注意文字语言、符号语言、图形语言结合运用。

⑤教师应注意学生在活动的主体性，给学生参与数学活动留下充分的时间与空间。引导他们积极参与、主动探究和合作交流，积累活动经验，获得成功的体验，调动学生的学习积极性，培养学习数学的兴趣，为今后的数学学习创造良好的开端。



经典课程

班型	班级名称	上课内容	课程安排	价格
基础专项精讲班	综合素质专项班	夯实基础，考点覆盖 系统梳理知识点，梳理重难点	02期 1. 15-2. 11	229
	科目二专项班		02期1. 15-2. 11	229
	中学学科专项班		2. 3-2. 21	269
刷题突破班	综合素质刷题班	刷题巩固做题思路	01期 2. 3-2. 11 02期 2. 20-2. 26	159
	科目二刷题班		02期 2. 12-2. 18	159
	中学学科刷题班		2. 26-2. 29	129
重点进阶班	写作专项特训班	提升写作能力，抓住经典 题型	2. 13 2. 17 2. 19 2. 21	109
	小学教学设计特训班	掌握教学设计做题方法和 技巧	2. 4-2. 7	109
冲刺班	中/小/幼科目一	考前冲刺点睛	考前一周	19.9
	中/小/幼科目二		考前一周	
	中学学科		考前一周	



还等什么呢？！  
造起来~

购课享优惠



足不出户 随报随学 包邮精美讲义 · 抢先一步 领先一路 在家就能当学霸

班级名称	上课内容	课程安排	原价	非协议价格	协议价格
全程班（小幼）	科目一+科目二 基础精讲 刷题突破 写作专项 冲刺点睛 知识导图与高频考点速学速记	全程A 12. 10-3. 3 全程B 12. 25-3. 3	1190	1. 15号前 550元 2. 12号前 670元 2. 12号后 740元	1580 两科不过全退 一科不过重学
全程班（中学）	科目一+科目二+学科 基础精讲 刷题突破 重点进阶 冲刺预测 知识导图与高频考点速学速记	12. 10-3. 4	1590	1. 15号前 749元 2. 20号前 899元 2. 20号后 1049元	1880 三科不过全退 两科或一科不 过重学



购课享优惠





offcn 中公教师

