2010 (S.3 and S.4) → Exam 2008B Q4.

a) $\gamma + \gamma \leftrightarrow \pi^+ + \pi^-$. (relativistic)   (π = boson)

b) no more photons but boson density maintained. $T_c = ?$
(assume $kT \ll m_\pi c^2$). density at $T=0$?

c) $n_{e^+} = n_{e^-} = \bar{n}$ initial
$e^+ + e^- \leftrightarrow \pi^+ + \pi^-$ equilibration.
Chem pot. at $T \neq 0$. Condensation at $T=0$ and conditions. ($m_e > m_\pi$ & $m_e < m_\pi$)

---

a) $\mu_\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_+ + \mu_- = 2\mu_\gamma = 0$

neutrality $\mu_+ = \mu_- \Rightarrow \quad \mu_+ = \mu_- = 0.$

$$n_\pm = \frac{1}{V}\sum_p \frac{1}{e^{\beta\sqrt{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2}} - 1} \approx \frac{1}{V}\sum_p \frac{1}{e^{\beta m_\pi c^2 + \beta \frac{p^2}{2m_\pi}} - 1}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}\left(e^{-\beta m_\pi c^2}\right) \approx \frac{1}{\lambda^3} e^{-\beta m_\pi c^2} \qquad \left(\frac{m_\pi c^2}{kT} \gg 1\right)$$

no singularity at $p=0$ → no condensation (because $z=1$)

at $T \to 0$ $\quad e^{\beta\sqrt{m_\pi^2 c^2 + p^2 c^2}}\Big|_{T\to 0} \to \infty$ giving $n_\pm(T\to 0) = 0$

$\frac{p}{m} \ll c$ כשמקטינים את T גם $n_\pm$ מתחיל לדעוך!

---

b) Photon source switched off at T_0

$$n_\pm = \frac{1}{\lambda^3(T_0)} e^{-\beta_0 m_\pi c^2} = \frac{1}{\lambda^3(T_c)}\zeta(3/2) \rightarrow \frac{T_c}{T_0} = e^{-\beta_0 m_\pi c^2 \frac{2}{3}} \zeta(3/2)^{-\frac{2}{3}}$$

(limits: $\beta_0 \to \infty : T_c \to 0$ no condensation possible, no initial boson population

$\beta_0 \to 0 \quad n_{0\pm} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) = n_\pm = \frac{1}{\lambda^3(T_c)} g_{3/2}(1) \rightarrow T_c = T_0$)

c) neutrality: $\underbrace{\mu_{e^+} = \mu_{e^-}}_{\text{neutrality}} = \underbrace{\mu_{\pi^+}}_{\text{equilibrium}} = \mu_{\pi^-} \rightarrow = \mu$

$n_e + n_\pi = \bar{n}$: ס"כ צפיפות נשמרת, כתנאי התחלה

$$\frac{2}{V}\sum_p \frac{1}{e^{\beta\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}-\beta\mu}+1} + \frac{1}{V}\sum_p \frac{1}{e^{\beta(m_\pi^2c^4+p^2c^2)-\beta\mu}-1} + \langle n_0\rangle = n$$

$\sqrt{m_\pi^2c^4+p^2c^2}-\mu \geq 0$ תנאי לבוזונים

(סיכוי חיובי) לכל p, ובפרט עבור $p=0$ נקבל (for all T)

$\boxed{\mu \le m_\pi c^2}$

at $T=0$, $m_e > m_\pi$: $\mu < m_e c^2 \rightarrow e^{\beta(m_e c^2-\mu)}\Big|_{\beta\to\infty} \to \infty$

$\rightarrow n_e \to 0$, $n_\pi = \bar{n}$

אוכלוסיית הפרמיונים נעלמת.

כל החלקיקים π במצב BEC (כי T=0).

For $m_e < m_\pi$: $m_e c^2 < \mu < m_\pi c^2$

but $\mu^2(T=0) = E_F^2 = m_e^2c^4 + p_F^2c^2 \rightarrow p_F = \sqrt{\mu^2 - m_e^2c^4}/c$

$$n_e = 2\int_{p<p_F} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3c^3}\left(\mu^2 - m_e^2c^4\right)^{3/2}$$

but $\mu \le m_\pi c^2 \rightarrow \boxed{n_e \le \frac{c^3}{3\pi^2\hbar^3}\left(m_\pi^2 - m_e^2\right)^{3/2} = n_c}$

i) For $\mu < m_\pi c^2$ $e^{\beta(m_\pi c^2-\mu)}\Big|_{T\to 0} \to \infty$ and אוכלוסיית ה π נעלמת

ונותרו כל החלקיקים מסוג e^+ כאשר צריך לקיים

$\boxed{n_e = \bar{n} < \frac{c^3}{3\pi^2\hbar^3}\left(m_\pi^2 - m_e^2\right)^{3/2} = n_c}$

ii) For $\underbrace{\mu = m_\pi c^2}_{\text{תנאי ל-BEC}} \Leftrightarrow n_e = \frac{c^3}{3\pi^2\hbar^3}\left(m_\pi^2 - m_e^2\right)^{3/2} = n_c$ אוכלוסיית ה- e^+

$n_\pi = \bar{n} - n_e$ אוכלוסיית ה- π

במצב BEC

ס"כ BEC נוצר כאשר תנאי ההתחלה $\bar{n} > n_c$ ומצב כך.