# Fisika estatistikoa
# 2 . AZTERKETATXOA

Jon Gabirondo López

Ariketa honetan bi azpisistemez osatutako sistema konposatua izango dugu aztergai. Aipaturiko azpisistemak, $S_1$ eta $S_2$, $N = 3$ eta $N = 4$ partikulez osatuta daude, hurrenez hurren.

Ariketa bi ataletan banatuko dugu, partikulen izaerak lortuko ditugun emaitzetan duen eragina aztertzeko. Horrela, nahiz eta ariketa osoan zehar partikulak identikoak eta independenteak izan, lehen atalean bereizgarriak izango dira eta bigarrenean aldiz, bereiztezinak.

Partikulen askatasun-gradu bakarra magnetikoa izango da, momentu magnetikoa ($\mathbf{m}$) hain zuzen ere. Partikula bakoitzaren momentu magnetikoaren balio posible bakarrak $\pm\mu$ izango dira eta eremu magnetiko baten eraginez partikulak izango duen energia hurrengoa izango da: $E_m = -\mathbf{mB}$.

Behin sistemaren ezaugarriak finkatuta, ekin diezaiogun azterketari.

## Bi azpisistema magnetikoen arteko energia-trukea: partikula bereizgarriak

Hasteko, zerrendatu ditzagun sistema konposatuari dagozkion mikroegoerak. Horretarako, azpisistema bakoitzari dagozkion mikroegoerak zerrendatu eta zenbatuko ditugu. Hauek edukita, bi azpisistemak independenteak direnez, badakigu sistema konposatuaren mikroegoera posibleak $S_1$eko mikroegoera guztiak $S_2$ko mikroegoera guztiekin konbinatzean lortzen direla. Hau da,

$$\Omega_T = \Omega_1 \cdot \Omega_2 \qquad \text{non } \Omega_i \text{ (azpi)sistema bakoitzaren mikroegoera kopurua den}$$

Hurrengo tauletan azpisistema bakoitzari dagozkien mikroegoerak ikus daitezke, bakoitzari dagozkion momentu magnetiko eta energiarekin batera.

**$S_1$**

| A | B | C | $m_1(\mu)$ | $E_1(\mu B)$ |
|---|---|---|---|---|
| - | - | - | -3 | 3 |
| + | - | - | -1 | 1 |
| - | + | - | -1 | 1 |
| - | - | + | -1 | 1 |
| + | + | - | 1 | -1 |
| + | - | + | 1 | -1 |
| - | + | + | 1 | -1 |
| + | + | + | 3 | -3 |

**$S_2$**

| A | B | C | D | $m_2(\mu)$ | $E_2(\mu B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| - | - | - | - | -4 | 4 |
| + | - | - | - | -2 | 2 |
| - | + | - | - | -2 | 2 |
| - | - | + | - | -2 | 2 |
| - | - | - | + | -2 | 2 |
| + | + | - | - | 0 | 0 |
| + | - | + | - | 0 | 0 |
| + | - | - | + | 0 | 0 |
| - | + | + | - | 0 | 0 |
| - | + | - | + | 0 | 0 |
| - | - | + | + | 0 | 0 |
| + | + | + | - | 2 | -2 |
| - | + | + | + | 2 | -2 |
| + | - | + | + | 2 | -2 |
| + | + | - | + | 2 | -2 |
| + | + | + | + | 4 | -4 |

Taula 1: Partikula bereizgarriez osatutako azpisistemen mikroegoera posible guztiak. $\mu$ momentudun partikulak $'+'$ ikurrez adierazi dira eta $-\mu$ momentudun partikulak $'-'$ ikurrez adierazi dira.

Beraz, hau da sistema konposatuaren mikroegoeren kopurua:

$$\Omega_1 = 8 \quad \Omega_2 = 16 \quad \rightarrow \quad \Omega_T = 128$$

Orain, demagun azpisistemak banatzen dituen horma diatermo bilakatu dugula, bien arteko energia-trukea ahalbidetuz. Gainera, sistema osoari $E_T = -3\mu B$ energia eman diogu.

Kasu honetan, hiru banaketa baino ez dira posible:

| | $E_1$ | $m_1$ | $E_2$ | $m_2$ | $E_T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $-3\mu B$ | $3\mu$ | 0 | 0 | $-3\mu B$ |
| $\beta$ | $-\mu B$ | $\mu$ | $-2\mu B$ | $2\mu$ | $-3\mu B$ |
| $\gamma$ | $\mu B$ | $-\mu$ | $-4\mu B$ | $4\mu$ | $-3\mu B$ |

Taula 2: Sistema konposatuari emandako energiarekin bateragarriak diren azpisistema bakoitzaren energia eta momentuak

Beraz, zerrendatu ditzagun banaketa bakoitzari dagozkion mikroegoerak:

$\alpha$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A | B | C | D |
| + | + | + | + | + | - | - |
| + | + | + | + | - | + | - |
| + | + | + | + | - | - | + |
| + | + | + | - | + | + | - |
| + | + | + | - | + | - | + |
| + | + | + | - | - | + | + |

$\beta$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A | B | C | D |
| + | + | - | - | + | + | + |
| + | + | - | + | - | + | + |
| + | + | - | + | + | - | + |
| + | + | - | + | + | + | - |
| + | - | + | - | + | + | + |
| + | - | + | + | - | + | + |
| + | - | + | + | + | - | + |
| + | - | + | + | + | + | - |
| - | + | + | - | + | + | + |
| - | + | + | + | - | + | + |
| - | + | + | + | + | - | + |
| - | + | + | + | + | + | - |

$\gamma$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A | B | C | D |
| + | - | - | + | + | + | + |
| - | + | - | + | + | + | + |
| - | - | + | + | + | + | + |

Taula 3: $\alpha$, $\beta$ eta $\gamma$ banaketei dagozkien mikroegoerak

3. Taulan ikusten denez, hauek dira banaketa bakoitzari dagozkion mikroegoeren kopuruak:

$$\Omega_\alpha = 6 \quad \Omega_\beta = 12 \quad \Omega_\gamma = 3$$

Azpisistemen momentu magnetikoei dagokionez, hauek dira azpisistemek har ditzaketen momentuak:

$$m_1 = 3\mu,\ \mu,\ -\mu$$

$$m_2 = 4\mu,\ 2\mu,\ 0$$

Sistema konposatua oreka egoerara iritsi dela onartuz, badakigu sistema hiru banaketetako ekiprobableak diren edozein mikroegoeratan egon daitekeela. Ondorioz, makroegoera horrekin bateragarriak diren mikroegoeren kopurua 21 denez, 3. taulako mikroegoeren probabilitatea $\frac{1}{21}$ izango da eta hor agertzen ez direnena nulua izango da.

Bestalde, hauek izango dira azpisistemek har ditzaketen momentu magnetiko ezberdinen probabilitateak:

$$\mathrm{P}(m_1 = 3\mu) = \frac{6}{21} \qquad \mathrm{P}(m_1 = \mu) = \frac{12}{21} \qquad \mathrm{P}(m_1 = -\mu) = \frac{3}{21}$$

$$\mathrm{P}(m_2 = 4\mu) = \frac{3}{21} \qquad \mathrm{P}(m_2 = 2\mu) = \frac{12}{21} \qquad \mathrm{P}(m_2 = 0) = \frac{6}{21}$$

Atalari amaiera emateko, kalkulatu ditzagun batezbesteko energia eta momentu magnetikoa, ostean hauen balio probableenekin alderatzeko.

Honakoa da magnitude baten batezbestekoaren definizio matematikoa:

$$\langle x \rangle = \sum_i P_i \cdot x_i \qquad \text{non } P_i \ x \text{ neurtzean } x_i \text{ balioa lortzeko probabilitatea den}$$

Orduan,

$$\langle E_1 \rangle = \mu B \cdot \left( -3 \cdot \frac{6}{21} - 1 \cdot \frac{12}{21} + 1 \cdot \frac{3}{21} \right) = -\frac{9}{7}\mu B$$

$$\langle m_1 \rangle = \mu \cdot \left( -3 \cdot \frac{6}{21} - 1 \cdot \frac{12}{21} + 1 \cdot \frac{3}{21} \right) = \frac{9}{7}\mu$$

$$\langle E_2 \rangle = \mu B \cdot \left( -4 \cdot \frac{3}{21} - 2 \cdot \frac{12}{21} + 0 \cdot \frac{6}{21} \right) = -\frac{12}{7}\mu B$$

$$\langle m_2 \rangle = \mu \cdot \left( -4 \cdot \frac{3}{21} - 2 \cdot \frac{12}{21} + 0 \cdot \frac{6}{21} \right) = \frac{12}{7}\mu$$

Eta hauek dira balio probableenak:

$$E_1 = -\mu B \qquad m_1 = \mu$$

$$E_2 = -2\mu B \qquad m_2 = 2\mu$$

Ikusten denez, batezbesteko balioen probabilitatea nulua da eta beraien balio absolutua baliorik probableenarena baino handiagoa da, Maxwell-Boltzmann-en banaketan gertatzen den modura.

# Bi azpisistema magnetikoen arteko energia-trukea: partikula bereiztezinak

Atal honetan aurretik burututako kalkulu guztiak errepikatuko ditugu, baina oraingoan partikulak elkarren artean bereiztezinak direla onartuz. Honegatik, jada emandako azalpenak errepikatu gabe emaitzak adieraziko ditugu.

Hauek dira azpisistema bakoitzak har ditzakeen mikroegoeren zerrenda:

**$S_1$**

| | | | $m_1(\mu)$ | $E_1(\mu B)$ |
|---|---|---|---|---|
| - | - | - | -3 | 3 |
| + | - | - | -1 | 1 |
| + | + | - | 1 | -1 |
| + | + | + | 3 | -3 |

**$S_2$**

| | | | | $m_2(\mu)$ | $E_2(\mu B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| - | - | - | - | -4 | 4 |
| + | - | - | - | -2 | 2 |
| + | + | - | - | 0 | 0 |
| + | + | + | - | 2 | -2 |
| + | + | + | + | 4 | -4 |

Taula 4: Partikula bereiztezinez osatutako azpisistemen mikroegoera posible guztiak. $\mu$ momentudun partikulak $'+'$ ikurrez adierazi dira eta $-\mu$ momentudun partikulak $'-'$ ikurrez adierazi dira.

Beraz, hau da sistema konposatuak har ditzakeen mikroegoeren kopurua:

$$\Omega_T = 21$$

Sistemari $E_T = -3\mu B$ energia ematean, aurreko taula behatzean ohartzen gara hiru banaketa posible baino ez daudela, bakoitza mikroegoera bakarrekoa:

| | $E_1$ | $m_1$ | $E_2$ | $m_2$ | $E_T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $-3\mu B$ | $3\mu$ | $0$ | $0$ | $-3\mu B$ |
| $\beta$ | $-\mu B$ | $\mu$ | $-2\mu B$ | $2\mu$ | $-3\mu B$ |
| $\gamma$ | $\mu B$ | $-\mu$ | $-4\mu B$ | $4\mu$ | $-3\mu B$ |

Taula 5: Sistema konposatuari emandako energiarekin bateragarriak diren azpisistema bakoitzaren energia eta momentuak

Beraz, oraingoan hiru mikroegoera baino ez dira makroegoerarekin bateragarriak.

$\alpha$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | - | - |

$\beta$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | - | + | + | + | - |

$\gamma$

| $S_1$ | | | $S_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | - | - | + | + | + | + |

Taula 6: $\alpha$, $\beta$ eta $\gamma$ banaketei dagozkien mikroegoerak

Momentu magnetikoei dagokionez, azpisistemek aurreko berak baino ezin dituzte lortu:

$$m_1 = 3\mu,\ \mu,\ -\mu$$

$$m_2 = 4\mu,\ 2\mu,\ 0$$

Orekara iritsi ostean, sistema 6.taulan agertzen den edozein mikroegoeratan egon daiteke, horietako bakoitzean egoteko probabilitatea $\frac{1}{3}$ delarik. Taulan agertzen ez diren mikroegoeretan egoteko probabilitatea nulua da.

Azpisistema bakoitzat har ditzakeen momentu magnetiko bakoitzari mikroegoera bakarra dagokionez, momentu magnetiko guztiak ekiprobableak dira:

$$\mathrm{P}(m_1 = 3\mu) = \mathrm{P}(m_1 = \mu) = \mathrm{P}(m_1 = -\mu) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(m_2 = 4\mu) = \mathrm{P}(m_2 = 2\mu) = \mathrm{P}(m_2 = 0) = \frac{1}{3}$$

Hauek izango dira energia eta momentu magnetikoen batezbestekoak:

$$\langle E_1 \rangle = \frac{\mu B}{3} \cdot (-3 - 1 + 1) = -\mu B$$

$$\langle m_1 \rangle = \frac{\mu}{3} \cdot (-3 - 1 + 1) = \mu$$

$$\langle E_2 \rangle = \frac{\mu B}{3} \cdot (4 + 2) = -2\mu B$$

$$\langle m_1 \rangle = \frac{\mu}{3} \cdot (4 + 2) = 2\mu$$

Lehen aipatu bezala, mikroegoera guztiak ekiprobableak direnez eta mikroegoera bakoitzak energia eta momentu magnetiko ezberdinak dituenez, ez dago ez energia ezta momentu probableenik.