$\boxed{\text{D01}}$ (2008 q.1)
(2009 s.1)

a) $H = \int d^3v \int d^3r\, f(\bar{r},\bar{v},t) \ln f(\bar{r},\bar{v},t)$

$$\left.\begin{aligned} &\int d^3r \int d^3v\, f = N \\ &\int d^3r \int d^3v \left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right) f = E \end{aligned}\right\}$$ האילוצים:

ברור שלא עושים כלום עם אילוצים

$$\Lambda = H + \alpha\underbrace{\left(N - \iint f\right)}_{=0} - \beta\underbrace{\left(E - \iint \left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right) f\right)}_{=0}$$

אם מחפשים אקסטרמום של Λ אז

$$\delta\Lambda = \delta f \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial f} = 0 = \delta f \frac{\partial}{\partial f}\left(H - \alpha \iint f + \beta \iint \left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right) f\right)$$

$$0 = \delta f \frac{\partial}{\partial f}\left(\iint f\ln f - \alpha f + \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right) f\right)$$

$$0 = \delta f \iint \ln f + 1 - \alpha + \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right)$$

מכאן

$$\ln f = \alpha - \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2+\varphi\right) - 1$$

$$f = A e^{-\beta\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi\right)}$$

את A,β ניתן למצוא מהאילוצים

ג) ראשית, נשים לב שעבור התנגשויות =0 נקבל

$$\vec{v}\cdot\nabla_r f - \frac{1}{m}\vec{\nabla}\varphi\, \nabla_v f = 0 \qquad (*)$$

והפונקציה $f = f\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\vec{r})\right)$

מקיימת $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r f = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\varphi\, f'$ ← (נגזרת מלאה)

וגם $\frac{1}{m}\vec{\nabla}\varphi\,\nabla_v f = \frac{1}{m}\nabla\varphi\,(m\vec{v})\cdot f' = \vec{v}\cdot\nabla\varphi\, f'$

לכן $f = f\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\vec{r})\right)$ מקיים את תנאי (*)

לכן צד שמאל של משו' בולצמן שווה לאפס.

כמו כן, התנגשויות מוגדרות כ-

$$\int d^3v_1\, d^3v_2 \int d\Omega\, \sigma(\Omega)\cdot|\vec{v}_1-\vec{v}_2|\left(f_1'f_2' - f_1f_2\right)$$

(לא נגזרת)

לכן התנגשויות $=0$ גורר (Huang 4.R)

$$f_1'f_2' = f_1f_2$$

$$\ln f_1 + \ln f_2 = \ln f_1' + \ln f_2'$$

לנו צורה של חוק שימור לכן מורכב מגדלים נשמרים:

$$\ln f = a + \overbrace{b\vec{v}}^{\text{תנע מרכז המסה}}_{\text{(מרכז מסה)}} + c\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi\right)$$

↓ השלמה לריבוע

$$= -\beta\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\vec{r})\right) + \text{Const}$$

$$f = Ae^{-\beta\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi\right)}$$

והצפיפות

$$n = \int d^3v\, f = e^{-\beta\varphi(\vec{r})}\int d^3v\, Ae^{-\frac{\beta}{2}mv^2}$$

$\boxed{\text{DO1}}$ (2008 g.1)
(2009 s.1)

a) $H = \int d^3v \int d^3r\, f(\bar r, \bar v, t) \ln f(\bar r, \bar v, t)$

ההגבלות:

$$\left.\begin{aligned} &\int d^3r \int d^3v\, f = N \\ &\int d^3r \int d^3v \left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) f = E \end{aligned}\right\}$$

ברור שלא עושים בלום של מגבירים

$$\Lambda = H + \alpha\underbrace{\left(N - \iint f\right)}_{=0} - \beta\underbrace{\left(E - \iint \left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) f\right)}_{=0}$$

אם מחפשים אקסטרמום של Λ צ"ל

$$\delta\Lambda = \delta f \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial f} = 0 = \delta f \frac{\partial}{\partial f}\left(H - \alpha \iint f + \beta \iint \left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) f\right)$$

$$0 = \delta f \frac{\partial}{\partial f}\left(\iint f \ln f - \alpha f + \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) f\right)$$

$$0 = \delta f \iint \ln f + 1 - \alpha + \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right)$$

מכאן

$$\ln f = \alpha - \beta\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) - 1$$

$$f = A e^{-\beta\left(\frac{1}{2}mv^2 + \varphi\right)}$$

את A, β ניתן למצוא מהאילוצים

ג) ראשית, נשים לב שעבור התנגשויות =0 נקבל

$$\bar v\cdot\nabla_r f-\frac{1}{m}\bar\nabla\varphi\,\nabla_v f=0 \qquad (*)$$

והפונקציה $f=f\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\bar r)\right)$

מקיימת $\bar v\cdot\bar\nabla_r f=\bar v\cdot\bar\nabla\varphi\, f' \leftarrow$ (נגזרת מלאה)

ואז $\frac{1}{m}\bar\nabla\varphi\,\nabla_v f=\frac{1}{m}\nabla\varphi\,(m\bar v)\cdot f'=\bar v\cdot\nabla\varphi\, f'$

לכן $f=f\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\bar r)\right)$ מקיים את תנאי (*)

לכן צד שמאל של משוו' בולצמן שווה לאפס.

כמו כן, התנגשויות מוגדרות כ-

$$\int d^3v_1\,d^3v_2\int d\Omega\,\sigma(\Omega)\cdot|\bar v_1-\bar v_2|\left(f_1'f_2'-f_1f_2\right)$$

(שמו נשמרת)

לכן התנגשויות $=0$ גורר (Huang 4.?)

$$f_1'f_2'=f_1f_2$$

$$\ln f_1+\ln f_2=\ln f_1'+\ln f_2'$$

זוהי צורה של חוק שימור לכן מורכב מגדלים נשמרים:

$$\ln f=a+\overbrace{b\underset{(\text{מרכז מסה})}{\bar v}}^{\text{תנע מרכז המסה}}+c\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi\right)$$

השמה [illegible]

$$=-\beta\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi(\bar r)\right)+\text{const}$$

$$f=Ae^{-\beta\left(\frac{1}{2}mv^2+\varphi\right)}$$

והצפיפות

$$n=\int d^3v\,f=e^{-\beta\varphi(\bar r)}\int d^3v\,Ae^{-\frac{\beta}{2}mv^2}$$