C22 (HW 2008 q.4)

(e) כדי לחשב את $\langle\sigma_i\rangle$ צריך לחשב

$$\langle\sigma_i\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{\sigma_1=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_i=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\sigma_i\langle\sigma_1|P|\sigma_2\rangle\cdots\langle\sigma_{i-1}|P|\sigma_i\rangle\langle\sigma_i|\cdots$$

כאשר $P = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J}\\ e^{-\beta J} & e^{\beta J}\end{pmatrix}$ מהתרגיל. $(B=0)$

נתבונן רק בתווך: $\sum_{\sigma_i=\pm1}\sigma_i|\sigma_i\rangle\langle\sigma_i| = \sum_{s=\uparrow,\downarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}|s\rangle\langle s|$

$$= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \langle\sigma_i\rangle = \frac{1}{Z}\,\mathrm{tr}\left[P^{i-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{N-i+1}\right]$$

בתמורה ציקלית לא משנה עקבה לכן

$$= \frac{1}{Z}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{N}\right]$$

צריך לכסן את P אלכסונית $P\sim 2\begin{pmatrix}\cosh(\beta J)&0\\0&\sinh(\beta J)\end{pmatrix}$

הוקטורים בבסיס זה הינם $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

ובבסיס זה

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\sim\frac12\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac12\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

לכן $\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} P^N\right]$

$$= 2^N \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh^N(\beta J)&0\\0&\sinh^N(\beta J)\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2^N \mathrm{tr}\begin{bmatrix}0 & \sinh^N(\beta J)\\ \cosh^N(\beta J) & 0\end{bmatrix} = 0$$

מכאן $\langle \sigma_i \rangle = 0$ כצפוי.

בטמפרטורה אפס $F = U - TS = U = \langle \mathcal{H} \rangle$

ושם $\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$

לכן מצב היסוד (מינימום U) הוא כאשר כל הספינים מצביעים מעלה או מטה.
נצפה ל- $\langle\sigma_i\rangle = 0$ בכל טמפ' סופית כיוון שהפיכת ספין מפסידה אנרגיה $2J$ אבל מרוויחה אנטרופיה מהו~ ועבור ~~מספיק~~ N גדול ש- $F=U-TS$
במינימום כאשר ישנם הרבה קירות ← אי-מגנטי פרמגנטי.

b) כדי לחשב

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^r\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{N-r}\right]$$

בבסיס בו P אלכסונית נקבל

$$= \frac{1}{Z} 2^N \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh^r(\beta J)&0\\0&\sinh^r(\beta J)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh^{N-r}(\beta J)&0\\0&\sinh^{N-r}(\beta J)\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{Z} 2^N \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0&\sinh^r(\beta J)\\ \cosh^r(\beta J)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sinh^{N-r}(\beta J)\\ \cosh^{N-r}(\beta J)&0\end{pmatrix}\right]$$

$$\langle\sigma_1\sigma_r\rangle = \frac{1}{Z}2^N \operatorname{tr}\begin{bmatrix}\sinh^r(\beta J)\cosh^{N-r}(\beta J) & 0\\ 0 & \cosh^r(\beta J)\sinh^{N-r}(\beta J)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Z}2^N\cosh^N\left[\sinh^r(\beta J)\cosh^{-(r)}(\beta J) + \cosh^{r-N}(\beta J)\sinh^{(N-r)}(\beta J)\right]$$

את Z מצאנו כבר (שיעור):

$$Z = 2^N\left[\cosh^N(\beta J)+\sinh^N(\beta J)\right] = 2^N\cosh^N(\beta J)\left[1+\tanh^N(\beta J)\right]$$

$$\rightarrow \langle\sigma_1\sigma_r\rangle = \frac{\tanh^r(\beta J)+\tanh^{(N-r)}(\beta J)}{1+\tanh^N(\beta J)}$$

בטמפ' סופית $0<\tanh(\beta J)<1$ ולכן $\tanh^N(\beta J)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$

מכאן $\langle\sigma_1\sigma_r\rangle = \tanh^r(\beta J)$

נדרוש $= e^{-\frac{r}{\xi}}$

כדי שזה יתקיים $\rightarrow r\ln(\tanh(\beta J)) = -\frac{r}{\xi}$

זהו אורך הקורלציה: $\rightarrow \boxed{\xi = \left(\ln(\coth(\beta J))\right)^{-1}}$

נקבל ש- ξ מתבדר כאשר $\coth(\beta J)=1$

או כאשר $\beta J\to\infty$ כלומר בטמפ' אפס

ξ הוא אורך הקורלציה במערכת, ואכן בטמפ' אפס יש סדר ארוך טווח (Long range order) שגורם לכך שכל הספינים יהיו באותו כיוון. (כמו סדר פ').

נשים לב שבטמפרטורה סופית ξ סופי, ולכן אין סדר ארוך טווח - רחוק מאוד. אם אנטרופיה מנצחת, לכן נעדיפות. Domain wall: $E=-2J$