

A24

(Exam 2007B)  
(HW 2008 4.3)

(3)

$$Z = \sum_{N_A, N_B=N-N_A} \frac{j_A^{N_A} j_B^{N_B}}{N_A! N_B!} = \frac{(j_A + j_B)^N}{N!}$$

$$\langle N_A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{N_A, N_B=N-N_A} N_A \frac{j_A^{N_A} j_B^{N_B}}{N_A! N_B!}$$

(1)

$$= \frac{1}{Z} j_A \cdot \frac{\partial}{\partial j_A} Z$$

$$= \frac{1}{Z} j_A \cdot \frac{N (j_A + j_B)^{N-1}}{N!} = \frac{N j_A}{j_A + j_B}$$

$$\langle N_B \rangle = N - \langle N_A \rangle = \frac{N j_B}{j_A + j_B}$$

$$\langle N_A^2 \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{N_A, N_B=N-N_A} N_A^2 \frac{j_A^{N_A} j_B^{N_B}}{N_A! N_B!} = \frac{1}{Z} j_A \frac{\partial}{\partial j_A} \left( j_A \frac{\partial Z}{\partial j_A} \right)$$

(2)

$$= \frac{1}{Z} j_A \frac{\partial}{\partial j_A} \left( \frac{j_A N (j_A + j_B)^{N-1}}{N!} \right)$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{j_A N (j_A + j_B)^{N-1}}{N!} + \frac{1}{Z} \frac{j_A^2 (j_A + j_B)^{N-2} \cdot N(N-1)}{N!}$$

$$= \frac{j_A N}{j_A + j_B} + \frac{j_A^2 N(N-1)}{(j_A + j_B)^2}$$

$$\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2 = \frac{j_A N}{j_A + j_B} - \frac{j_A^2 N}{(j_A + j_B)^2} = \frac{j_A j_B N}{(j_A + j_B)^2} = \frac{\langle N_A \rangle \langle N_B \rangle}{N}$$