D06

(HW 2008.2.3)

(HW 2009.9.2)

$$\rho(q,p,t=0) = \delta(q)\,\frac{e^{\frac{-p^2}{2mkT}}}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

א) משפט ליוביל (מס׳ המצבים בנפח קבוע) $\Leftarrow$ $\left(\frac{d\rho}{dt}=0\right)$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho,\mathcal{H}\} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p}\right)$$

אבל

$$\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = 0$$

לכן

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial\rho}{\partial q}}$$

איך פותרים?

נגדיר

$$c = \frac{p}{m}$$

עלינו לפתור

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\right)\rho = 0$$

וכעת נגדיר

$$u = q + ct$$

$$v = q - ct$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = c\frac{\partial}{\partial u} - c\frac{\partial}{\partial v}$$

ולכן קיבלנו משוואה

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\rho = 0$$

$$\rightarrow\ 2\frac{\partial}{\partial u}\rho = 0 \ \rightarrow\ \rho = g(v) = g(q-ct)$$

$$= g\left(q - \frac{p}{m}t\right)$$

כדי שהתנאי יתקיים

$$\rho(t=0) = g(q)$$

נקבל

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(q,p,t) &= \rho\left(q-\frac{p}{m}t,\, p,\, 0\right)\\ &= \delta\left(q-\frac{p}{m}t\right) g(p)\end{aligned}}$$

(*) הערת אגב, משוואת גלים מהצורה

$$\frac{1}{c^2}\rho_{tt} - \rho_{xx} = 0$$

ניתן לכתוב

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \partial_x\right)\left(\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x\right)\rho = 0$$

וכעת ע"י טרנספורם

$$u = ct + x$$
$$v = ct - x$$

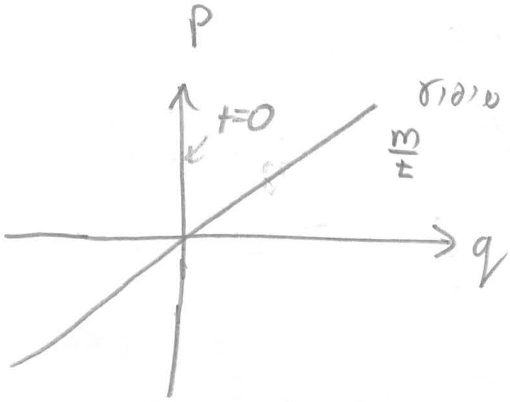
היא הופכת ל-

$$\partial_u \partial_v \rho = 0$$

שפתרונה

$$\rho = \alpha(u) + \beta(v)$$

ובמרחב הפאזות:



ב) את ערך התוחלת של $\mathcal{O}$ גודל מדיד נחשב לפי

$$\langle O(t)\rangle = \int d\Gamma \cdot O \cdot \rho(\Gamma,t)$$

במקרה שלנו

$$\langle p^2\rangle = \int p^2 f(p)\,\delta\left(q-\frac{p}{m}t\right)dp\,dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p^2 f(p)\,dp = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi m}}\cdot\left(\frac{-1}{2m}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}dp$$

$$= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi m}}\cdot(-2m)\,\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}$$

$$\boxed{\langle p^2\rangle = \frac{m}{\beta} = mk_BT}$$

ובצורה דומה

$$\langle q^2\rangle = \int q^2 f(p)\,\delta\left(q-\frac{p}{m}t\right)dp\,dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p}{m}t\right)^2 f(p)\,dp = \left(\frac{t}{m}\right)^2\cdot mk_BT = \frac{k_BT}{m}t^2$$

$$\boxed{\langle q^2\rangle = \frac{k_BT}{m}t^2}$$

ג) הזמן $\tau_0 = \dfrac{2Q}{p_0/m}$

$$\frac{p_0}{m} = \frac{\sqrt{\langle p^2\rangle}}{m}$$

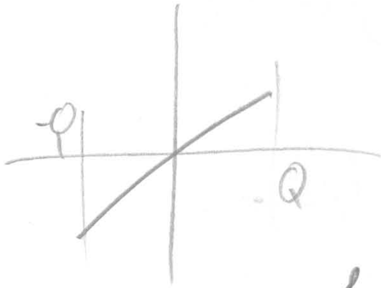
זהו הזמן שלוקח לחלקיק בעל מהירות אופיינית
להגיע מקצה אחד $(-Q)$ לקצה השני $(+Q)$.

$$\tau_0 = \frac{2Qm}{\sqrt{\langle p^2\rangle}} = 2Q\sqrt{\frac{m}{kT}}$$

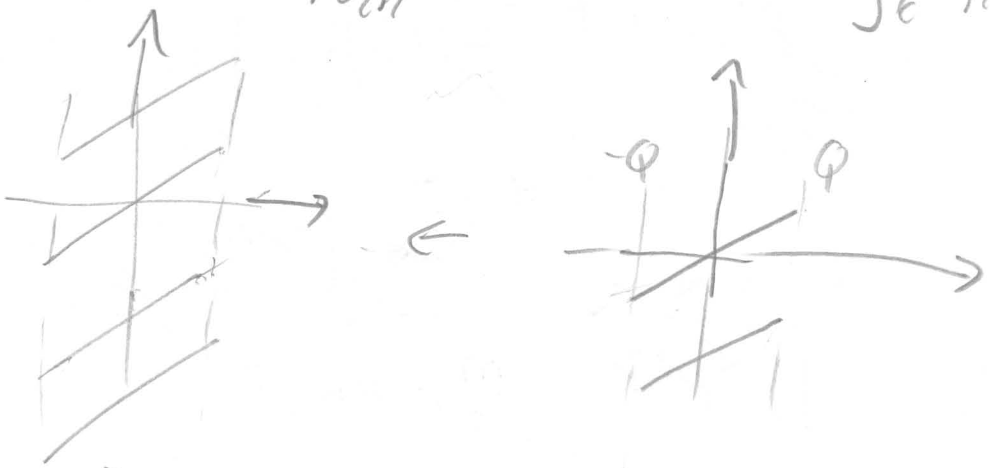
בזמנים ארוכים אנו בטוחים שהחלקיק יפגע בקיר ויחזור

תהליך שיוצר $p \to -p$

מתחילים כמו מקודם




אבל אז ... ולבסוף




אבל לא נשכח שהשיפוע של הקווים הוא $\sim \frac{m}{t}$

לכן לאט לאט השיפוע יורד והקווים מתכווצים אחד לשני

עד שמקבלים המון קווים קרובים שהפרש ביניהם מתכווץ כמו $\frac{2mQ}{t}$

3) עלינו להגדיר ממוצע על הרזולוציה המתאימה, נבחר $\varepsilon$ שטח כלשהו (במרחב pq)

לכל $\varepsilon$ אחרי מספיק זמן בערך! מספיק קווים דרך $\varepsilon$ כדי למצע

$$\tilde{\rho}(q,p,t \gg \tau_0) = \frac{1}{2Q} f(p)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\varepsilon} dq\,dp\, \rho(q,p,t)$$

לפי

ובאמת נראה שהגודל סטציונרי ע"י הנגזרת בזמן

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial q} = 0$$