$\boxed{D02}$ (2008: 2.4)

(Pathria 2.2)

נוכיח ממשוואת הרציפות

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

(a

א/ב

$$\mathrm{div}(\rho \bar{v}) = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right]$$

$$= \sum_i \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right]$$

$\downarrow$

נשים לב שלפי הגדרה

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

לכן ממשוואת הרציפות קיבלנו

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right)$$

(זה הגורם שמתאפס כאשר $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ $\quad -\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$)

בבעיה שלנו משוואות המילטון אינן מתקיימות:

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \rightarrow \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = 0$$

$$\dot{p} = -\gamma p \rightarrow \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\gamma$$

לכן

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \gamma \rho}$$

המשך..

ב)

$$\rho_0 = \rho(p,q,t=0) = \begin{cases} const & \text{inside } w_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כדי שסה"כ ההסתברות תהיה 1 נדרוש

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{1}{w_0} & \text{inside } w_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מהמשוואה

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma\rho$$

$$\ln\rho = \gamma t + \ln(\rho_0)$$

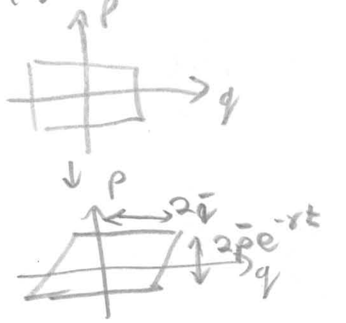
$$\rho = \rho_0 e^{\gamma t}$$

ממשוואות התנועה

$\dot{p} = -\gamma p \rightarrow \boxed{p(t) = p_0 e^{-\gamma t}}$ $\quad \dot{q} = \frac{p}{m} \rightarrow q(t) = q_0 + \frac{p_0}{\gamma m}(1 - e^{-\gamma t})$

רוחב הענן

$w(t) =$



$\Leftarrow w_0 = 4\bar{p}\bar{q}$

נקבל

$$\rho_0 = \frac{1}{4\bar{p}\bar{q}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{4\bar{p}\bar{q}} \cdot e^{\gamma t} \qquad (*)$$

המשך בדף הבא...

ג) מכיון שמספר המצבים הכולל נשמר $\int_w \rho(q,p,t)\,dw = const$

נקבל

$$w(t) = w_0 e^{-\gamma t}$$

w ימשיך לקטון עד זמן t^* שבו $w(t^*) = w_0 e^{-\gamma t^*}$

כך ש- $\Delta q \Delta p \approx \hbar \rightarrow w(t^*) \approx \hbar = w_0 e^{-\gamma t^*}$

$$\boxed{t^* = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{w_0}{\hbar}\right)}$$

ד) מס' המצבים האפשרים $h\rho = \frac{h}{w(t)}$ (חסר יחידות)

$$S = -\int_w h\rho \ln h\rho \, dq\,dp = -\int_w h\rho(t) \cdot [\ln h\rho_0 + \gamma t]\,dw$$

עבור $\rho(t)$ לא תלוי ב- q,p נקבל

$$S = -h\rho(t)\,w(t) \cdot (\ln h\rho_0 + \gamma t) \qquad (\rho(t)w(t) = 1\ \text{const})$$

$$S = -(\ln h\rho_0 + \gamma t) \rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -\gamma$$

האנטרופיה קטנה בזמן בקצב γ

זוהי השפעתו של התהליך הגורם לבריחת אנרגיה.

ב) (א) למעשה

$$W_0 = \int_{-\bar{p}}^{+\bar{p}} dp_0 \int_{-\bar{q}}^{+\bar{q}} dq_0$$

ועלינו לחשב

$$W(t) = \int_{-\bar{p}(t)}^{+\bar{p}(t)} d\,p(t) \int_{-\bar{q}(t)}^{+\bar{q}(t)} dq(t)$$

ע"י החלפת משתנים

$$= \int_{-\bar{p}}^{+\bar{p}} dp_0 \int_{-\bar{q}}^{+\bar{q}} dq_0 \cdot \left| \underbrace{\frac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)}}_{\text{Jacobian}} \right| =$$

$$J = \left| \frac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)} \right| = \begin{vmatrix} e^{-\gamma t} & \frac{1}{\gamma m}(1-e^{-\gamma t}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{-\gamma t}$$ כאשר

$$w(t) = \int dp_0 \int dq_0 \cdot e^{-\gamma t} = w_0 e^{-\gamma t}$$