(HW 2010 3.1) polymer in 2d but 1d chain:

$$\mathcal{H} = -k\sum_{i=1}^{N-1} \bar{t}_i \cdot \bar{t}_{i+1} = -ka^2 \sum_{i=1}^{N-1} \cos\varphi_i$$

a) $\bar{t}_n \cdot \bar{t}_m = a^2 \cos(\theta_n - \theta_m) = a^2 \cos(\theta_n - \theta_{n+1} + \theta_{n+1} - \theta_{n+2} + \dots + \theta_{m-1} - \theta_m)$

הביטוי הזה מוזר, אך הוא מצביע חד משמעי! לכן כדאי
לנו לעבוד על ההפרשים

$\varphi_n = \theta_n - \theta_{n+1}$

ואז

$\bar{t}_n \cdot \bar{t}_m = a^2 \cos(\varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots \varphi_{m-1})$

$$\boxed{\bar{t}_n \cdot \bar{t}_m = a^2 \,\mathrm{Re}\, e^{i\sum_{j=n}^{m-1} \varphi_j}}$$

ממוצע לפי הגדרה

$$\langle \bar{t}_n \cdot \bar{t}_m \rangle = a^2\,\mathrm{Re} \frac{\int e^{i\sum_{j=n}^{m-1}\varphi_j} e^{\beta k a^2 \sum_{i=1}^{N-1} \cos\varphi_i} \prod_i d\varphi_i}{\int e^{\beta k a^2 \sum_i \cos\varphi_i} \prod_i d\varphi_i}$$

ישנם רק N-1 אינטגרלים כאשר כל ה-φ בלתי תלויים
אחד בשני!

עבור $j<n$ או $j>m-1$ פשוט נקבל

$$\left(\frac{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi_j}}{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi_j}} \right) = 1$$

לכן מה שנשאר זה האיברים שמופיעים בסכום של $\bar{t}_n \cdot \bar{t}_m$, ישנם
$n-m$ איברים כאלה, וכל אחד תורם

$$\frac{\int e^{i\varphi + \beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi}{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi}$$

לכן

$$\langle \bar{t}_n \cdot \bar{t}_m \rangle = a^2\,\mathrm{Re} \left(\frac{\int e^{i\varphi + \beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi}{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi} \right)^{m-n} \rightarrow \xi^{-1} = \ln \left(\frac{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi}{\int \cos\varphi\, e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi} \right)$$

מכיוון שהחלק הדמיוני מתאפס - $0 = \int \sin\varphi\, e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi$ וכאשר $\int_0^{2\pi} e^{\alpha\cos x} dx = 2\pi I_0(\alpha)$

$$\xi^{-1} = -\ln \left(\frac{\int \cos\varphi\, e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi}{\int e^{\beta k a^2 \cos\varphi} d\varphi} \right) = -\ln \left(\frac{\partial \ln \left(\int e^{\sim} d\varphi \right)}{\partial (\beta k a^2)} \right) = -\ln \left(\frac{\partial \ln (2\pi I_0(\alpha))}{\partial \alpha} \right)$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha} I_0(\alpha) = I_1(\alpha) \rightarrow \quad \xi^{-1} = -\ln\left(\frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)}\right)$ לכן

b) $\langle R^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{t}_i\right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_i \bar{t}_i \sum_j \bar{t}_j \right\rangle = \sum_{ij} \langle \bar{t}_i \cdot \bar{t}_j \rangle$

$$= 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N} \langle \bar{t}_i \cdot \bar{t}_j \rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle \bar{t}_i^2 \rangle$$

($x = e^{-1/\xi}$ נסמן)

$$= 2a^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} x^{j-i} + Na^2$$

$$= 2a^2 \sum_{i=1}^{N} x \cdot \frac{1-x^{N-i}}{1-x} + Na^2$$

$$= \frac{2a^2 x}{1-x}\left(N - x^N \sum_{i=1}^{N} x^{-i}\right) + Na^2$$

$$= \frac{2a^2 x}{1-x}\left(N - x^N \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1-\frac{1}{x^N}}{1-1/x}\right) + Na^2$$

$$= \frac{2a^2 x}{1-x}\left(N + \frac{x^N - 1}{1-x}\right) + Na^2$$

עבור $x<1$ ואז $N\to\infty$ נקבל $x^N \to 0$ וכן $N \gg \frac{1}{1-x}$

$$\langle R^2 \rangle = Na^2\left(\frac{2x}{1-x} + 1\right) = Na^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$ לכן

$$= Na^2\left(\frac{1+e^{-1/\xi}}{1-e^{-1/\xi}}\right) = Na^2\left(\frac{e^{\frac{1}{2\xi}} + e^{-\frac{1}{2\xi}}}{e^{\frac{1}{2\xi}} - e^{-\frac{1}{2\xi}}}\right)$$

$$\boxed{\langle R^2 \rangle = Na^2 \coth\left(\frac{1}{2\xi}\right)}$$