$\boxed{B21}$ (2008 6.2) א

$$\gamma+\gamma \leftrightarrow e^{+}+e^{-}$$

c

equilibrium: $\mu^{+}+\mu^{-}=2\mu_{photons}=0$

$$\rightarrow -\mu^{+}=\mu^{-}$$

neutrality: $n_{e^+}=n_{e^-} \rightarrow \mu^{+}=\mu^{-} \rightarrow \boxed{\mu^{+}=\mu^{-}=0}$

$$n_{\pm}=\overset{\swarrow \text{spin}}{\frac{2}{V}}\sum_{p}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p}+1}$$ פרמיונים

$$\left[\varepsilon_p^{2}=m^{2}c^{4}+c^{2}p^{2}\right.$$ דיספרסיה יחסותית]

$$=\frac{2}{V}\sum_{p}\frac{1}{e^{\beta\sqrt{m^{2}c^{4}+p^{2}c^{2}}}+1}$$

עבור $kT \ll mc^{2}$

$pc \ll mc^{2}$

$$\sqrt{m^{2}c^{4}+p^{2}c^{2}}=mc^{2}\sqrt{1+\frac{p^{2}}{m^{2}c^{2}}}\approx mc^{2}+\frac{p^{2}}{2m}$$

$$n_{\pm}\approx\frac{2}{V}\sum_{p}\frac{1}{\underbrace{e^{\beta mc^{2}}}_{=z^{-1}}e^{\beta\frac{p^{2}}{2m}}+1}=\frac{2}{\lambda^{3}}f_{3/2}(z)=\frac{2}{\lambda^{3}}f_{3/2}\left(e^{-\beta mc^{2}}\right)$$

$$\approx\frac{2}{\lambda^{3}}e^{-\beta mc^{2}}\ll\frac{2}{\lambda^{3}}$$ שכן $\beta mc^{2}\gg 1$

(ה)

$$\gamma+\gamma \leftrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

כמו מקודם $\mu^+ = \mu^- = 0$

$$n_\pm = \frac{1}{V}\sum_p \frac{1}{e^{\beta\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}}-1} \approx \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}\left(e^{-\beta mc^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\lambda^3} e^{-\beta mc^2}$$

למעשה ניתן להסתכל על הבעיה כבעיה עם $z_{eff} = e^{-\beta mc^2}$

אבל נשים לב שלא ניתן להגיע למצב בו $z_{eff} = 1$

שהוא מצב BEC.

דבר שניתן להתבונן על זה: אין סינגולריות ב- $p=0$, ולכן אין BEC.

כמו כן, אין אילוץ על $n_\pm$ כמו במערכת רגילה, כאן הם נקבעים ע"י שווי משקל.

(ו) מצאנו $n_+ \approx \frac{1}{\lambda^3} e^{-\beta_0 mc^2}$

עכשיו אבל $\mu \neq 0$

$$n_+ \approx \frac{1}{V}\sum_p \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta mc^2} e^{\frac{p^2}{2m}} - 1}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}\left(e^{-\beta mc^2} z\right)$$

נגדיר $z^* = e^{-\beta mc^2} z$

ונקבל BEC כאשר $z^* = 1$ ואז

$$\frac{1}{\lambda^3(T_0)} e^{-\frac{mc^2}{kT_0}} = \frac{1}{\lambda^3(T_c)} \cdot \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$T_c = T_0\left(\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) e^{\frac{mc^2}{kT_0}}\right)^{-2/3}$$