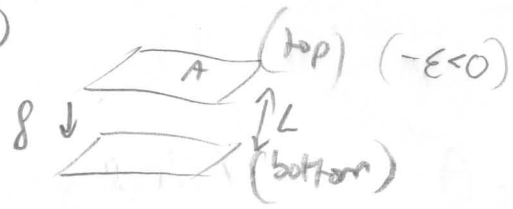
A18 (2009 3.3)



a) $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + gz$, $Z_1(z) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} e^{-\beta g z}\, dz \cdot A$

$\rightarrow Z \approx \frac{1}{N(z)!}\left(\frac{A\Delta z}{\lambda^3} e^{-\beta g z}\right)^{N(z)}$

$\frac{F(z)}{N(z)} = +kT\ln\left(n(z)\lambda^3\right) + gz - kT\ln(z) + 1)$

$\mu_{3D}(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial N(z)} = gz + kT\ln\left(n(z)\lambda^3\right) = \mu_{id} + gz$

In equilibrium $\mu(z) = \mu = \mu(z=0)$

$\downarrow$ $n(z) = \frac{1}{\lambda^3} e^{\beta(\mu - gz)} = n(0) e^{-\beta g z}$

$n_0 = \frac{1}{L}\int_0^L n(z)\, dz = n(0) \cdot \frac{1 - e^{-\beta g L}}{\beta g L}$ Γ_{2D}

$$\boxed{n(z) = n_0 \frac{\beta g L}{1 - e^{-\beta g L}} e^{-\beta g z}}$$

b) $Z_{plate} = \begin{cases} \frac{1}{N!}\left(\frac{A}{\lambda^2} e^{\beta\varepsilon - \beta g L}\right)^{N(L)} & \text{top plate} \\ \frac{1}{N!}\left(\frac{A}{\lambda^2} e^{\beta\varepsilon}\right)^{N(0)} & \text{bottom plate} \end{cases}$

Similarly for $(z=0, L)$ $F_{2D} = \left[-\varepsilon + gz + kT\ln\left(n_{2D}(z)\lambda^2\right) + kT\right] N(z)$

$\rightarrow \mu_{2D} = -\varepsilon + gz + kT\ln\left(n_{2D}\lambda^2\right) = \mu_{2D} = kT\ln\left(n(0)\lambda^3\right)$

$\downarrow$ $n_{2D} = n(0)\lambda\, e^{\beta(\varepsilon - gz)} = n_0\lambda e^{\beta\varepsilon}\frac{\beta g L}{1 - e^{-\beta g L}} \cdot \begin{cases} e^{-\beta g L} & \text{top plate} \\ 1 & \text{bottom plate} \end{cases}$

c) Force:

$$P(0)\cdot A = n(0)\,kT\cdot A \qquad \text{(ideal gas)}$$

$$P(L)A = n(L)\cdot kTA$$

$$[P(0)-P(L)]\cdot A = n_0\cdot \frac{\beta g L}{1-e^{-\beta g L}}\left(1-e^{-\beta g L}\right)\cdot kT\cdot A$$

$$= n_0 g L A$$

הכח כלפי מעלה כי $(n(0) > n(L))$

על החלקיקים פועל כח g ז"א סה"כ הכח של החלקיקים

$$F_{part} = g\, n_0 L A$$

כלפי מטה

ולכן סה"כ הכוחות $= 0$.

A18

Grand Canonically

a) $Prob(z) \propto e^{-\beta g z}$ ההסתברות לפי פקטור בולצמן

$n(z) = n(0)\cdot e^{-\beta g z}$ לכן צפיפות החלקיקים

משתנה לפי

$$\frac{1}{L}\int_0^L n(z)dz = n_0$$

$$\frac{n(0)}{L}\int_0^L e^{-\beta g z}dz = \frac{n(0)}{L}\cdot\frac{1-e^{-\beta g L}}{\beta g L} = n_0$$

$$\rightarrow \boxed{n(0) = n_0\cdot\frac{\beta g L}{1-e^{-\beta g L}}} \qquad \boxed{n(z) = n_0\left(\frac{\beta g L}{1-e^{-\beta g L}}\right)\cdot e^{-\beta g z}}$$

---

b) נתבונן על הלוח התחתון, פונ' חלוקה חד חלקיקית לא תעזור

~~$\left(Q_1^{Lower} = 1 + e^{\beta\mu} Z_1\right)$~~ ~~$\left(Z_1^{Lower} = \frac{A}{\lambda^2}e^{+\beta\varepsilon}\right)$~~

$$Q_1^{Lower} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N}\cdot Z_N = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(e^{\beta(\mu+\varepsilon)}\cdot\frac{A}{\lambda^2}\right)^N = \exp\left(e^{\beta(\mu+\varepsilon)}\cdot\frac{A}{\lambda^2}\right)$$

$$Q^{upper} = \exp\left(e^{\beta(\mu+\varepsilon-gL)}\cdot\frac{A}{\lambda^2}\right)$$ בצורה דומה

$$N^{lower} = +kT\frac{\partial \ln Q}{\partial\mu} = +kT\,\frac{\partial\left(e^{\beta(\mu+\varepsilon)}\cdot\frac{A}{\lambda^2}\right)}{\partial\mu} = \frac{A}{\lambda^2}\cdot e^{\beta(\mu+\varepsilon)}$$

$$N^{upper} = \frac{A}{\lambda^2}\cdot e^{\beta(\mu+\varepsilon-gL)}$$ ובצורה דומה

$\mu = const = \mu(z=0) = \mu_{ideal} = kT\ln\left(n(0)\lambda^3\right)$ אפס בגלל התלות שאמרנו

$$e^{\beta\mu} = n(0)\lambda^3$$

$$N_{upper}^{Lower} = A n(v) \lambda e^{\beta \varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & \text{bottom plate} \\ e^{-\beta p L} & \text{top plate} \end{bmatrix}$$

ולכן

הכח כמו ביחידת הנפח.