◫ Ariketak 3. Gaia: Sistema Bakuna. Egoera-ekuazioa

Ariketen aurkezpena

Ondoren dauden oreka termodinamikoarekin eta oreka-eguazioarekin lotutako ariketak dira. Hauen antzeko batzuk Zemnasky liburuan, 2. gaian aurkitu ditzakezu. Ondorengoak ez daude aipatutako liburuan.

Ariketen helburua: egoera-ekuazioaren esanguraz jabetzea. Egoera-ekuazioaren forma ezberdinak erabiltzen trebatzea.

Dakizunez, aztertu beharreko sistemaren deskribapenean parte hartzen duten aldagai termodinamikoen arteko lotura adierazten duen funtzioa da egoera-ekuazioa. Ondoren agertu diren adibideetan, sistemek egoera-ekuazio bana dute, nahiz eta hori ez den beti kasua: baldintza esperimentalen arabera egoera-ekuazio ezberdeinen bidez deskribatu daitezke sistemak. Hobeto esateko, sistemak agertu daitezken oreka(termodinamikoko)-egoerak. Gogoratu oreka-egoerek baino ez dutela betetzen egoera-ekuazioa adierazten duen lotura (funtzio matematikoa).

Egoera-ekuazioa existitzen den funtzio matematikoa da eta, printzipioz, intereseko guneetan (fase-trantsizioak aldera utzita, esaterako, ikusiko dugunez), jarraitua eta deribagarria (zentzu matematikoan). Horren arabera, egoera-ekuazioak beti dauka definituta bere diferentzial osoa, haren aldagai independenteekiko deribatu partzialen bidez eraikitakoa, jakina.

Sistema hidorstatikoak hiru askatasun-gradu dauzka: kimikoa, termikoa eta mekanikoa. Gure kasuan, argitu dudan moduan, masa konstanteko sistem hidrostatikoak baino ez dugunez aztertuko, askatasun-gradu kimikoa izoztuta dago eta era efektiboan gure sistema hidrostatikoek 2 askatasun-gradu (a-g) baino ez dute: termikoa eta mekanikoa.

Horiekin lotutako aldagi termodinamikoak (lehenengo eta bigarren Printzipioak ikasi baino lehen) honako hauek dira: (p, T, V), hiru, beraz. Baina, 2 a-gko sistema denez, horietatik 2 baino ez dira independente. (Gogoratu eskolan esandakoa: askatasun-graduko egoera-ekuazio bat definitzen da.) Gehienetan, honako era honetan adierazi ohi da egoera-ekuazio mekanikoa (a-g mekanikoarekin lotutakoa):

$$V = V(T, p)$$

Baina funtzio matematiko horretan dagoen informazio fisikoa eta beste edozein aldagai termodinamikoren bikote aldagai independentetzat erabilita definitutako funtzioan dagoena berbera da. Hots, hauek ere bai egoera-ekuazio (berberak aurrekotik bakandutakoak badira, jakina) dira:

$$p = p(T, V)$$
$$T = T(p, V)$$

Baina ez bakarrik hori, funtzio horiek guztiak existitzen diren funtzioak direnez, haiek deribatuak ere bai (gorago aipatutko moduan eta zentzuan), beraz, funtzioa ezagutuz gero, bere deribatuak (printzipioz), partzialak, kalkulatu daitezke. Eta alderantziz ere bai: bi deribatu partzialak ezagututa, egoera-ekuazioa (funtzio matematiko moduan) eraiki (berreskuratu) daiteke: integratuz. Edozein kasutan, informazio fisiko berbera dago egoera-ekuazioan zein haren deribatu guztietan (aldi berean ezagututa denak). Bi noranzkoko inplikazioa da. Horietan dautza ondoko ariketak.

Ondoko 6 ariketetan egoera-ekuazioaren eta α eta κ_T koefiziente esperimentalen arteko lotura landuko da.

Masa konstanteko sistema hidrostatikoaren kasuan, bi dira definitzen diren koefiziente esperimentalak:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Beraz, $V = V(T, p)$ egoera-ekuazioa definituz gero, ondoko eran daude lotuta V bolumeraren diferentzialarekin:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

$$dV = V\alpha dT - V\kappa_T dp$$

Egoera-ekuaziotik abiatuta koefiziente esperimentalak lortu daitezke: deribatuz. Batzuetan, ez da posible $V = V(T, p)$ era analitikoan adieraztea eta, beraz, bolumenaren deribatu partzialak ezin izango dira kalkulatu. Deribatu partzialen arteko erlazioak kontuan hartuz, bolumenaren deribatuak presioaren eta tenperaturaren deribatuen funtzioan idatzi beharko dira. Beste zenbait kasutan, komenigarria da funtzio inplizitu eta esplizuten deribatuen arteko erlazioak erabiltzea. Koefiziente esperimentaletatik abiatuta, egoera-ekuazioa lortu daite: integratuz.

Azkenik, askotan, arestian idatzitako adierazpen diferentziala (diferentzialen arteko erlazio hori) ez da erabilgarria izango egoera-ekuazioa lortzeko.Orduan, deribatu partzialen arteko erlazioak erabili beharko dira. Horrelako kasuetan, benetako egoera-ekuazioaren adierazpen diferentziala ondoko bi hauetako bat izango da:

1. $$p = p(T, V)$$
$$dp = \frac{\alpha}{\kappa_T}dT + \frac{1}{V(-\kappa_T)}dV$$
2. $$T = T(p, V)$$
$$dT = \frac{\kappa_T}{\alpha}dp + \frac{1}{V\alpha}dT$$

Egoera-ekuaziotik koefiziente esperimentalak lortzea:

> Lehenego bi ariketetan egoera-ekuazioa ezaguna da eta koefziente esperimentalak (α eta κ_T) lortu behar dira. Horretarako, deribatu baino ez da egin behar. Kontuan izan koefiziente esperimentalak defintzen direla egoera-ekuazioaren forma hauxe izanik: $V = V(T, p)$. Horrek esan nahi du, V esplizituki adierazi behar dugula beste aldagaien funtzioan. Batzuetan hori ez da posible analitikoki. Konturatuko zarenez, berori gertatuko zaizu ondorengo bi ariketetan. Kontuz, beraz.
>
> Zer eta beste aldagai dependente erabiltzen baduzu eta horren diferentziala kalkulatu?

✏ 1. Ariketa: Berthelot-en gas erreala

Lortu, Berthelot-en egoera-ekuazioa esleitu zaion gasaren kasuan, α zabalkuntza termikoko eta κ_T konprimigarritasun isotermoko koefizienteak.

Berthelot-en egoera-ekuazioa ondokoa da:

$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V-b) = RT$$

🔧 Emaitza

$$\alpha = \frac{1}{T}\left[\frac{\left(p + \frac{2a}{TV^2}\right)(V-b)}{pV - \frac{a}{TV} + \frac{2ab}{TV^2}}\right]$$

$$\kappa_T = \left[\frac{(V-b)}{pV - \frac{a}{TV} + \frac{2ab}{TV^2}}\right]$$

✏ 2. Ariketa: Redlich/Kwong-en gas erreala

Lortu, Redlich/Kwong-en egoera-ekuazio aldatua esleitu zaion gasaren kasuan, α zabalkuntza kubikoko eta κ_T konprimigarritasun isotermoko koefizienteak.

Redlich/Kwong-en egoera-ekuazio aldatua ondokoa da:

$$\left(p + \frac{a}{T^{\frac{1}{2}}V^2}\right)(V-b) = RT$$

🔧 Emaitza

$$\alpha = -\frac{1}{V}\left[\frac{\frac{R}{(V-b)} + \frac{1}{2}\frac{a}{V^2}\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}}{-\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{T^{\frac{1}{2}}V^3}}\right]$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{1}{-\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{T^{\frac{1}{2}}V^3}}\right]$$

Koefiziente esperimentaletatik egoera-ekuazioa lortzea

> Hurrengo hiru ariketetan, justu kontrakoa egin behar da; hots, abiapuntuan, aztertu beharreko sistemekin lotutako koefiziente esperimentalak ezagutzen dira eta egoera-ekuazioa bera lortu behar da, integratuz. Kasu hauetan ere bai sailtasunak izango dituzu, batzuetan. Berriro ere kontuan izan informazio berbera dagoela egoera-ekuazioaren edozein saporetan eta, beraz, baliokide izango dela ekuazio diferentzial bat edo harekin lotutako beste bat integratzea. Erabili beharko dituzu deribatu partzialen arteko erlazioak.
>
> Ariketa batean, konturatuko zarenez, ezezaguna den konstante batzuk daude eta horien arteko erlazioa eskatzen da. Hori lortzeko, benetan existitzen diren funtzioek (diferentzial zehatzek) betetzen duten baldintza erabili beharko duzu; hots, bigarren ordenako deribatu partzial gurutzatuek berdinak direla, honako hau:
>
> $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)_{y,x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\right)_{x,y}$$

✏ 3. Ariketa: gas hipotetikoa

Gas hipotetikoaren kasuan, α zabalkuntza kubikoko koefizientea eta κ_T konprimigarritasun koefizientea ondoko adierazpenek adierazi dizkigute:

$$\alpha = \frac{n\,R}{V\,p}$$

$$\kappa_T = \frac{a}{V} + f(p)$$

Lortu sistemari dagokion egoera-ekuazioa.

Emaitza

$$pV = n\,R\,T - \frac{1}{2}\,a\,p^2$$

4. Ariketa: gas erreala 1

Aztertu beharreko fluidoaren kasuan α zabalkuntza kubikoko koefizientea eta κ_T konprimigarritasun koefizientea ondoko adierazpenek adierazi dizkigute:

$$\alpha = 2\delta\theta - \varpi p e^{\gamma\theta}$$

$$\kappa_T = -Ae^{\gamma\theta}$$

- Lortu sistemari dagokion egoera-ekuazioa.
- Lortu A, γ, δ eta ω konstanteen arteko oinarrizko erlazioa.

Emaitza

$$\ln V = \delta\,\theta^2 + A\,p\,e^{\gamma\theta} + \ln C$$

5. Ariketa: gas erreala 2

Aztertu beharreko gasaren kasuan α zabalkuntza kubikoko koefizientea eta κ_T konprimigarritasun-koefizientea ondoko adierazpenek adierazi dizkigute:

$$\alpha = \frac{1}{T}\frac{1 + \frac{a}{RTV}}{\frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV}}$$

$$\kappa_T = \frac{1}{p}\frac{1}{\frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV}}$$

- Lortu sistemari dagokion egoera-ekuazioa.
- Lortu integrazio-konstantearen balioa, kontuan hartuz presio txikietarako gasaren jokaera gas idealarena dela.

Emaitza

$$p\,(V-b) = C\,T\,e^{-\frac{a}{RTV}}$$

6. Ariketa: gas erreala 3

Aztertu beharreko gasaren kasuan α zabalkuntza kubikoko koefizientea eta κ_T konpresibilitate-koefizientea ondoko adierazpenek adierazi dizkigute:

$$\alpha = \frac{(V-b)}{TV}$$

$$\kappa_T = \frac{(V-b)}{pV}$$

- Lortu sistemari dagokion egoera-ekuazioa.
- Lortu integrazio-konstantearen balioa kontuan hartuz $b = 0$ den kasuan gasaren jokaera gas idealarena dela.

Emaitza

$$p\,(V-b) = C\,T$$

Sistema hidrostatiko baten egoera-ekuazioaren, mekanikoaren, aukerako forma

✎ 7. Ariketa: Sistem hidrostatiko hipotetikoa

Presio konstanteko baldintzatan substantzia baten tenperatura ΔT kantitatean aldatutakoan, frogatu dentsitate-aldaketa ondokoa izango dela:

$$\Delta\rho = -\rho\alpha\Delta T$$

- Azaldu zeinuaren zergatia.