A06 (2008 1.2) (2009 1.3)

N harmonic oscillators,

א)

$$E=\sum_{i=1}^{N}\hbar\omega\left(n_i+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left[\frac{N}{2}+\sum_i n_i\right]$$

הגדרה:

$$R=\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}=\sum_{i=1}^{N}n_i$$

כעת עלינו למצוא את מספר הסדרים בהן ניתן לסדר R

כדורים ב- N תאים = ו-N-1 מחיצות

0 | 0 0 | 0 0 |

סה"כ $\frac{(R+N-1)!}{R!(N-1)!}$ אובייקטים

סידור פנימי לא משנה, לא למחיצות ולא לכדורים.

$$\Omega(E)=\frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{N}{2}-1\right)!}{\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}\right)!(N-1)!}\approx\frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{N}{2}\right)!}{\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}\right)!N!}$$

$N!\approx N^N$ — לסדר ראשון סטירלינג

ולכן

$$\approx\frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{N}{2}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{N}{2}}}{\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}}\cdot N^N}\quad\left(\frac{E}{\hbar\omega}\gg\frac{N}{2}\right)\approx\frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{N}{2}}}{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}}N^N}$$

$$\boxed{\Omega(E)=\left(\frac{E}{\hbar\omega N}\right)^N}$$

נשים לב ש-

$$\Omega(E+\Delta)-\Omega(E)=\left(\frac{1}{\hbar\omega N}\right)^N\left[(E+\Delta)^N-(E)^N\right]$$

ב) ההמילטוניאן:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m\omega_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2m} p_i^2 \right) = E$$

קיבלנו אליפסואיד N מימדי

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p_i^2}{2mE} \right) = 1$$

נחליף משתנים

$$u_i = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\, q_i \qquad v_i = \frac{1}{\sqrt{2m}} p_i$$

ונקבל

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{u_i^2}{E} + \frac{v_i^2}{E} \right) = 1$$

נפח כדור במרחב u,v

$$V_{u,v} = \frac{\pi^N E^N}{N!}$$

אבל

$$u_i v_i = \frac{\omega}{2} q_i p_i$$

לכן

$$\frac{2}{\omega} \int du\, dv = \int dq\, dp$$

מכאן נפח הכדור במרחב p,q:

$$V_{p,q} = \frac{2^N \pi^N E^N}{\omega^N N!} \approx \left(\frac{2\pi E}{\omega N} \right)^N$$

ובאופן ספציפי לקליפה בעובי Δ

$$V_{p,q}(E+\Delta) - V_{p,q}(E) = \left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right] \approx \left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \cdot \Delta N E^{N-1}$$

ולכן

$$W_0 = \frac{V(E+\Delta) - V(E)}{\Omega(E+\Delta) - \Omega(E)} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right]}{\left(\frac{1}{\hbar \omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right]}$$

$$= (2\pi\hbar)^N = h^N$$

כנדרש.