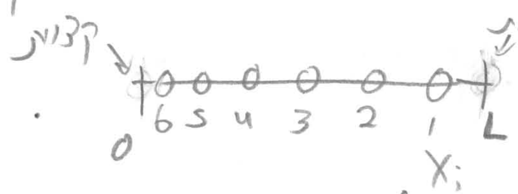
$\boxed{A22}$

$$V(x_i - x_j) = \begin{cases} \infty & |x_i - x_j| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad , \quad \underline{\text{in } 1D}$$

נקבע את הכדורים על חוט ונמספר אותם מימין לשמאל



לכל אחד קואורדינטה x_i

הכדור הראשון יכול לנוע בין x_2+a ועד L

ז"א

$$\int_{x_2+a}^{L} dx_1$$

השני בין x_3+a לבין $L-a$ ז"א

$$\int_{x_3+a}^{L-a} dx_2 \int_{x_2+a}^{L} dx_1$$

סה"כ

$$Z_N = \frac{1}{\lambda^N} \cdot \int_{0}^{L-(N-1)a} dx_N \cdots \int_{x_3+a}^{L-a} dx_2 \int_{x_2+a}^{L} dx_1$$

כאשר

$$\int_{x_2+a}^{L} dx_1 = L - x_2 + a$$

$$\int_{x_3+a}^{L-a} (L - x_2 + a)\, dx_2 = \left[y = x_2 - (L-a)\right] = \int_{x_3-L+2a}^{0} -y\, dy = \frac{1}{2}(L - x_3 - 2a)^2$$

ז"א קיים n עבורו

$$I_n = \int_{x_{n+1}+a}^{L-(n-1)a} (L - x_n + (n-1)a)^{n-1} dx_n = \left[y = x_n - (L-(n-1)a)\right]$$

$$= \int_{x_{n+1}-L+na}^{0} (-y)^{n-1} dy = \frac{1}{n!}(x_{n+1} - L + na)^n$$

מהו $I_{n+1} = ?$

$$I_{n+1} = \int_{x_{n+2}+a}^{L-na} dx_{n+1}\, I_n = \int_{x_{n+2}+a}^{L-na} \frac{1}{n!}(x_{n+1}-L+na)^n\, dx_{n+1}$$

$$= \int_{x_{n+2}-L+(n+1)a}^{0} \frac{1}{n!}(-y)^n\, dy = \frac{1}{(n+1)!}\left(x_{n+2}-L+(n+1)a\right)^{n+1}$$

סגירה בדיוק מתמטית הרקורסיה; לכן עבור $X_{N+1}=-a$ נקבל

$$X_N = \frac{1}{N!}\left(L-(N-1)a\right)^N$$

$$\boxed{Z = \frac{\left(L-(N-1)a\right)^N}{\lambda^N N!}}$$

וסה"כ

$$F = -kT\ln Z \approx -kTN\left[\ln\frac{1}{\lambda} + \ln(L-Na) - \ln N + 1\right]$$

$$= -kTN\left[\ln\frac{a}{\lambda} + \ln\left(\frac{L}{Na}-1\right) + 1\right]$$

b) $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} = k_B T \cdot \frac{1}{\frac{L}{N} - a} = \frac{k_B T N}{L} \frac{1}{1 - \frac{Na}{L}}$

$$\approx\Big|_{Na \ll L} \underbrace{\frac{k_B T N}{L}}_{\text{חוק גזים אידיאלי}} \cdot \Big(1 + \underbrace{\frac{Na}{L}}_{\text{תיקון עבור } a \text{ סופי}} + \dots\Big)$$

המקדם $B = a$

$B = \frac{1}{2}\int\left(1 - e^{-\beta U(x)}\right)dx$ נשים לב שהמקדם הויריאלי

$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} 1\,dx = a$ as $e^{-\beta U(x)} = \begin{cases} 0 & -a < x < a \\ 1 & |x| > a \end{cases}$

c) $E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{-\partial(\beta F)}{\partial \beta} = N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \lambda = N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \beta^{1/2}$ כצפוי.

$= \frac{1}{2} k_B T \cdot N$ הכוחות הפנימיים אינם משפיעים על סך האנרגיה.

d) In 3D: $Z_N = \frac{1}{\lambda^{3N} N!} V_{eff}^{N}$ $V > V_{eff} > V - v_0 N$

$E(V_{eff}) = E(V,N) \rightarrow E = \frac{3}{2} k_B T N$

אך צורה לא מונוטונית של $P(\frac{V}{N})$ תביא למעבר פאזה.

$V_{eff} > V - v_0 N$