A Notebook of Group Theory

—of The Group Theory for Physicist In a Nutshell

Yuxin.Li

November 9, 2018

1 What's the group?

1.1 The Difination of Group

群是一个含有元素 $\{g_i\}$ 及特定乘法规则的集合, 其中, 乘法规则必须满足:

$$(g_i \cdot g_i) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k).$$

$$\forall g_i, \exists g_i^{-1}, s.t. \quad g_i \cdot g_i^{-1} = I.$$

$$\exists I, s.t. \quad \forall I \cdot g_i = g_i \cdot I \cdot$$

其中, 不需要满足交换律, 满足交换率的群叫做阿贝尔群. 还有必须满足封闭性, 即任意多群元的乘积都不能生成群外的元素. 群元的个数叫做群的阶数.

1.2 Some Examples

1. 转动群 SO(N), 其中 N 是指空间的维数. 实质上 SO(N) 群是一个连续群, 并且是个李群.SO(N) 群的矩阵表示的行列式值为 1.SO(2) 群是一个连续的 abel 群.

2. 置换群 S_n. 这个群实质是对 n 个数的重排群. 群的阶数是 n!. 任何一个有限群都可以同构于 S_n 的一个子群. 对于一组数的排列, 可以分为奇排列和偶排列 (类似与奇置换和偶置换). 其中偶置换群构成 A_n 群, 群的阶数是 S_n 的一半.

3. 复平面转动群 Z_n, 其实质是在复平面对 1 的分解.

$$Z_n = \{e^{i2\pi j/N} : j = 0, \cdots, N-1\}$$

4. 在复平面所有模为 1 的转动元构成 U(1) 群. 这个群可以理解为 Z_n 群的连续化极限.

5. 所有实数在加法作为乘积规则下构成群. 同样所有整数在加法构成乘积规则下构成群

6. 洛伦兹群. 假设在闵科夫斯基空间中定义伪转动角 $\tanh\phi = v$, 可得

$$ct' = \cosh\phi ct + \sinh\phi x \tag{1}$$

$$x' = \sinh\phi ct + \cosh\phi x \tag{2}$$

$$y' = y \tag{3}$$

$$z' = z \tag{4}$$

这样可用矩阵表示如下, 实质他也构成群.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

乘法规则为

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi_2 & \sinh\phi_2 \\ \sinh\phi_2 & \cosh\phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi_1 & \sinh\phi_1 \\ \sinh\phi_1 & \cosh\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1+\phi_2) & \sinh(\phi_1+\phi_2) \\ \sinh(\phi_1+\phi_2) & \cosh(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix}$$

7. 所有行列式值为 1 的矩阵构成一个群 SL(n,C). 因为他们在普通矩阵乘法下, 矩阵行列式恒为 1.

1.3 What's the Subgroup

$$Given\ a\ \{g_\alpha\}\ form\ G. If\ the\ subset\ \{h_\beta\}\ also\ form\ a\ group\ H, H \subset G$$

一些例子

$$SO(2) \subset SO(3), \quad S_m \subset S_n (m < n), \quad A_n \subset S_n, \quad Z_2 \subset Z_4, \quad SO(3) \subset SL(3,R)$$

1.4 Lagrange's Therom

n 阶群 G 含有 m 阶群 H, 其中 m 是 n 的因数. 质数阶群没有非平凡子群.

1.5 The Direct-product of Group

给定两个群 G,F. 他们的群元表示为 g,f. 这样定义 $H = F \otimes G$ 叫做两群的直积. 满足

$$(f,g) \subset H,\ (f,g)(f',g') = (ff',gg'), (f,g)^{-1} = (f^{-1},g^{-1})$$

直积群 H 含有 mn 个群元.

1.6 Homomorphism and Isomorphism

同态 (homomorphism) 是指存在一个映射 $f: G \to G'$, 满足$f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2), f(I) = I$. 同构 (isomorphism) 是指同态是一一到上的. 同构关系的群是相同的群. 他们像的不能再像了.

1.7 The Rearrange therom

存在一个群元的函数 f, 考虑 $\sum_{g\in G} f(g)$, 使得满足

$$\sum_{g\in G} f(g) = \sum_{g\in G} f(gg') = \sum_{g\in G} f(g'g) \text{ 对任意的群元均成立}$$

1.8 Weakening the axioms

实际上群的定义可以被弱化至

1. 存在一个单位元: 存在一个左单位元, 满足对于任何群元 g,$Ig = g$.
2. 存在一个左逆 f, 对于任何群元 g, 使得 $fg = I$

实质是有了左元和左逆, 我们就可以保证右元和右逆的存在.
群的概念实在作用群的概念上提取的, 在物理上, 群元就是作用, 比如作用在 $S = \{p_1, p_2 \cdot\}$, 可以证明这是满足结合律的, 很显然. 实际上, 比如 g 把 $p \to p'$,$g' : p' \to p'', g'' : p'' \to p'''$, 那么这三个群元 g, g', g'' 的排列顺序无关, 只要出现就会使 $p \to p'''$.

1.9 Modular group

模余群在物理上很重要. 考虑一个变换, 将一个复数 z 变换到另一个复数:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

其中满足 $ad - bc = 1$. 这个变换可以有一个矩阵来表示,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad detM = 1$$

显然 $M, -M$ 对应于同一个变换. 实际上这个变换构成一个群 (关键在于满足行列式等于 1),$SL(2, Z)$ 整数域上的特殊线性群. 又因为 $M, -M$ 实际上是一个群元, 我们可以定义 $PSL(2, Z)$, 投影特殊线性群. 这个变还可以表为两个变换的连续作用

$$S : z \to -\frac{1}{z} \qquad T : z \to z + 1$$

两个矩阵是 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 使用表示论的语言可以写出

$$PSL(2, Z) : \langle S, T | S^2 = I, (ST)^3 = I \rangle$$

模余群可以推广到三角群 $\mathcal{T}$, 记做 $(2, 3, n)$.

$$\langle S, T | S^2 = I, (ST)^3 = I, T^n = I \rangle$$

2 A Finite Group

Cayley's 定理: 任意的有限群都同构于同阶置换群 S_n 的一个子群.

2.1 Permutation Group

关于置换群, 可以用一个同阶的矩阵去描述元素的置换, 就是将一个同阶的单位阵相应位置的 1 换位. 任何一个多元素的换位操作都可以写成两个元素换位操作的乘积 (连续的交换). 其中 (123)=(312)=(231).(12)=(21)=I,(12)(23)(34)=(12)(234)=(1234). 一个定理:: 一个偶数阶的群, 一定含有偶数个元素. 这样保证了关于任意元素都有逆元, 或者必有元素的自积是单位元.

2.2 The Equalivance Class

在群 G 中, 两个元素 g 和 g' 是等价的 ($g \sim g'$), 当且仅当存在 f, 使得 $g' = f^{-1}gf$. 这个等价类类似与线性代数里的相似变换. 而且等价关系是可以传递的. 一个等价类里元素的个数记做 n_c. 置换群里的等价类具有相同的循环结构. 在 abel 群里, 所有元素的等价类只有自己. 单位元自成一个等价类. 一个等价类中所有元素的逆也是一个等价类. 一个 n_j 循环结构, 在 S_n 中有多少个这种循环结构呢?

$$N(n_1, \cdots, n_j, \cdots) = \frac{n!}{\prod_j j^{n_j} n_j!}$$

2.3 The dihedral Droup D_n

多边形群 D_n 是一个可以保持多边形不变的元素的集合. 包括旋转群和反射群 $D_n = R_n \otimes r_2$.

$$D_n =< R, r|R^n = I, r^2 = I, Rr = rR^{-1} >$$

2.4 The quarternionic group Q

对虚数 i 的扩展为

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

构成四元群 Q, 包括 1,-1,i,-i,j,-j,k,-k 八个群元. 实际上 a+bi+cj+dk 构成四元数.

2.5 Coxeter Group

一个 coxeter 群就是

$$a_1, a_2, \cdots, a_k|(a_i)^2 = I, (a_ia_j)^{n_{ij}} = I, n_{ij} >= 2, withi, j = 1, 2 \cdots, k >$$

可以证明, 对于 coxeter 群, 满足 $n_{ij} = n_{ji}$.

2.6 Invariant subgroup

存在 H 包含 $\{h_1, h_2, \cdots\}$ 是 G 的一个子群, 任意取一个 $g \in G, g \notin H$, 使得 $\{g^{-1}h_1g, g^{-1}h_2g, \cdots\}$ 构成新的群, 记做 $g^{-1}Hg$. 但是如果 $H = g^{-1}Hg$ 对所有的 $g \in G$ 都成立, 则称 H 是 G 的一个不变子群, 记做 $G \triangleright H$. 这就类似于由 G 的群元 g 构成的相似变换使得 H 不变.

2.7 Derived subgroup

给定一个群 G, 选取两个元素, 计算 $< a, b >= a^{-1}b^{-1}ab = (ba)^{-1}(ab)$. 定义 $< a, a >= I, < a, b >^{-1} =< b, a >$. 当 a,b 取遍所有群元, 那么得到 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 叫做 G 的诱导子群. 例如 A_n 是 S_n 的诱导子群.A_4 的诱导子群是 $V = Z_2 \otimes Z_2$. 对于 abel 群, 我们只能得到平凡的诱导子群.

2.8 A simple group does not contain a (nontrival) invariant subgroup

定义: 一个群叫做简单的, 如果他没有非平凡的不变子群. 如果诱导子群是非平凡的, 那么此群不是简单的.

2.9 Invariant subgroup ,cosets,and the quotient group

如果 H 是 G 的不变子群, 那么子群 H 元素的等价类都在 H 内. 对于一个 H 外的元素 g, 我们考虑 $\{gh_1, gh_2, \cdots\}$, 记做 gH, 对于群 G, 我们得到一组集合 $g_aH, g_bH, \cdots$. 这些集合也组成群, 因为 $(g_aH)(g_bH) = (g_ag_bH)$, 这些左陪集构成群. 同样的, 右陪集也构成群. 另外我们将所有左陪集作为元素构成商群,$Q = G/H$.Q 中的元素的个数 $N(Q) = N(G)/N(H)$. 如果 H 是 G 的不变子群, 那么他的左陪集也是右陪集. 给定一个群, 他的诱导子群构成不变子群, 我们可以构造商群 $Q = G/D$. 这个过程可以重复, 只需要将 Q 看做 G. 因为诱导子群可以看做衡量一个群的非 abel 性, 那么取商群 G/I, 这个步骤叫做 abel 化.

2.10 The composition series and the maximal invariant subgroup

假如我们找到了一个 G 的不变子群 H_1, 我们还可以去找 H_1 的子群 H_2, 一直找下去, 我们得到了群 G 的组成数列.

$$G \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \cdots \triangleright K \triangleright I$$

所以对应的我们有一组商群,$G/H_1 \supset H_1/h_2 \supset \cdot \supset H_j/H_k \supset k$. 比如对于四元群 $\mathcal{Q}$, 有八个元素

$$\mathcal{Q} \triangleright Z_4 \triangleright Z_2 \triangleright I$$

$Z_4 = \{1, i, -1, -i\}, Z_2 = \{1, -1\}$. 对应的商群是 $\mathcal{Q}/Z_4 \supset Z_4/z_2 \supset Z_2/I = Z_2$. 那么有一个问题我们怎样找到群 G 的最大的不变子群, 怎样判断一个群是最大的不变子群? **给定一个群 G 和一个不变子群 H, 构建商群 $Q = G/H$, 如果 Q 没有不变子群,H 是最大的不变子群.** 类似于除数越大, 商越小. 证明如下: **假定 H 不是最大的不变子群, 那么存在一个不变子群 F 包含 H,$G \triangleright F \supset H$. 将 H 记为 $\{h_1, h_2 \cdots\}$,F 记做 $\{h_1, h_2 \cdots h_1, h_2\}$.$G = \{h_1, h_2, \cdots, f_1, f_2, \cdots, g_1, g_2 \cdots\}$.$H$ 是 F 的一个不变子群, 因为他是 G 的一个不变子群. 这意味着 $K = F/H$, 包含 $\{H, fH\}$ 构成商群, 相应的 $Q = G/H = \{H, fH, gH\}$, 显然 $K \subset Q$, 实际上是 $K \triangleright Q$, 因为 $(g^{-1}H)(fH)(gH) = (g^1H)(fgH) = (g^{-1}fg)H = f'H$. 最后一步是因为 F 是 G 的不变子群. 这与 Q 没有不变子群矛盾.** 考虑 $\mathcal{Q}/Z_2$ 有 4 个元素 $\{Z_2, iZ_2, jZ_2, kZ_2\}$. 这个子群还有一个子群. 实际是 $V = Z_2 \otimes Z_2$,Z_2 不是 $\mathcal{Q}$ 的最大子群.

3 The lie group and rotation group

3.1 The minumum representation of rotation group

对于一个转动群来说, 他的矩阵表示必须满足 1.$R^TR = 1, 2.detR = 1$, 这样限制行列式值为 1, 是为了排除反射操作. 转动群中蕴含着李群的思想. 因为将一个转动元限制在无

穷小转动, 这样 R=I+A.$A=\theta J$,J 是一个反对称矩阵. 可以将 R 例如在二维情形写成

$$R=I+\theta J+O(\theta^2)=\begin{pmatrix}1 & \theta\\ -\theta & 1\end{pmatrix}+O(\theta^2)$$

反对称矩阵 J 称为转动群的生成元. 同样可以将上式写成

$$R(\theta)=\lim_{n\to\infty}(R(\frac{\theta}{N}))^N=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\theta J}{N})^N=e^{\theta J}$$

这样可以方便的扩展到高维空间. 这里的 J 类似与虚数单位 i

$$e^{\theta J}=\cos\theta I+\sin\theta J$$

以三维情形为例. 我们考虑李群的表现.$R=I+A,R^TR=I.detR=1.A^T=-A.$

$$J_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},J_y=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},J_z=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\theta_x j_x+\theta_y J_y+\theta_z J_z$$

$$R(\theta)=e^{\theta_x j_x+\theta_y J_y+\theta_z J_z}=e^{\sum_i\theta_i J_i}$$

但是在量子力学中我们认为力学量是厄米算符, 但是 J 是反对称. 令 $j_x=-iJ_x,j_y=-iJ_y,j_z=-iJ_z$ 这样上式就可以写成

$$R(\theta)=e^{\sum_i\theta_i J_i}=e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{j}}$$

3.2 The lie algebra

在无限小转动下, 转动群是对易的. 对于 R=I+A, 我们考虑到任意转动 R', 考虑到 $RR'R^{-1}\approx(I+A)R'(I-A)\approx R'+AR'-R'A$, 考虑 R′ 也是无限小转动,B′=I+A,$RR'R^{-1}=I+B+AB-BA$, 这样我们就得到了一个对易子:$[A,B]=AB-BA$, 将上述过程基矢化, 即考虑李群的生成元 J_i, 那么计算各生成元的对易子即可. 那么考虑一般情况,$[J_i,J_j]=i\epsilon_{ijk}$, 这个 ϵ_{ijk} 定义了 SO(N) 群生成元之间的对易结构, 推广到一般情形, 定义 f_{ijk} 是李群生成元的对易子张量, 我们称做李代数. 张量本身叫做李代数的结构常数.
在数学上我们可以将李代数定义为由生成元的线性组合 $\sum_i\theta_iJ_i$ 张成的线性矢量空间. 也是一个微分流形.$A\,linear\,vector\,space\,V\,with\,a\,map\,f:V\otimes V\to V,satisfing\,f(A,B)=-f(A,B)$. 我们现在求出 SO(N) 群的李代数. 实际是各个李群的对易子 $[J_{(mn)},J_{(pq)}]$, 其中 $J_{(mn)}$ 是指在 m 行 n 列存在非零元素 1 的矩阵. 计算得到

$$[J_{(mn)},J_{pq}]=i(\delta_{mp}J_{(nq)}+\delta_{nq}J_{(mp)}-\delta_{np}J_{(mq)}-\delta_{mq}J_{(np)})$$

3.3 Differential operators rather than matrices

我们可以用微分算符去定义 $SO(3)$ 群的生成元 j_i. 比如

$$J_z=-i(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}),\quad J_x=-i(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}),\quad J_x=-i(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})$$

他们满足轮换对易关系:

$$[J_x,j_y]=iJ_z$$

我们已经知道这对应于量子力学里的角动量算符 (差一个普朗克常数的单位). 实际上 $\vec{J}=-i\vec{x}\otimes\vec{\nabla}$. 他们的等价联系实际是海森堡图像和薛定谔图像的等价性.

3.4 How the SO(4) algebra falls apart

对于 $O(4)$ 群, 显然有 6 个生成元,

$$[J_{(mn)}, J_{pq}] = i(\delta_{mp}J_{(nq)} + \delta_{nq}J_{(mp)} - \delta_{np}J_{(mq)} - \delta_{mq}J_{(np)})$$

通过上式可以写出. 这些生成元可以分成 2 类,J_{12}, J_{23}, J_{31} 构成 3 维的转动群 $SO(3)$.J_{14}, J_{24}, J_{34} 构成伪转动. 令 $J_{12} = J_3, J_{23} = J_1, J_{13} = J_2, J_{14} = K_1, J_{24} = K_2, J_{34} = K_3$. 他们的李代数结构是

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{5}$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \tag{6}$$

$$[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{7}$$

$SO(4)$ 群的结构常数可以用反对称符号来表示. 第一个对易关系明显是 $SO(3)$ 的李代数. 第二个告诉我们 K_i 就像一个 $SO(3)$ 作用的矢量

$$e^{-i\varphi J_3}K_1e^{i\varphi J_3} = \cos\varphi K_1 + \sin\varphi K_2$$

实际上我们可以讲上述生成元分成结构相同的两类. 可以定义 $J_{\pm,i} = \frac{1}{2}(J_i \pm K_i)$. 可以证明

$$[J_{+,i}, J_{-,j}] = 0$$

可见 J_+, J_- 是两套对易的生成元, 实际是选择了另外一组基底使得正交. 这在相对论中, 正对应于闵科夫斯基空间局部同构与欧几里得空间. 实际是将时间一维独立出去, 可以证明

$$[J_{+,i}, J_{+,j}] = i\varepsilon_{ijk}J_{+,k}, \qquad [J_{-,i}, J_{-,j}] = i\varepsilon_{ijk}J_{-,k}$$

这在李代数的层次上证明了 $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$, 只能是局部同构. 因为李代数就是研究在单位元附近的无穷小结构. 实际上我们可以将这个结构放在任意一个群元上, 只需简单地乘上相应的元素. 但是, 李代数并不能覆盖整个群, 指数化的展开不能取遍所有的群元. 实际上这里可以得到在我们现实世界中为什么会有费米子与玻色子. 对于洛伦兹群 $SO(4)$, 实际上有 6 个生成元 (考虑 2 阶反对称张量 $M^{ab}, a, b = 1, 2, 3, 4$). 这里的 6 个生成元实际就是上面定义的, 经过同样过程, 可以得到两套 $SU(2)$ 李代数结构 (关键在于在 $SU(2)$ 里, 角动量可以取到半整数), 根据 $J_3 = N_3^+ + N_3^-$, 可以得到

手征性	表示 (n^+, n^-)	J_3	名称
	(0,0)	0	标量玻色子 (higgs)
左	(1/2,0)	1/2	费米子 (质子)
右	(0,1/2)	1/2	费米子 (中子)
	(1/2,1/2)	1	矢量玻色子 (光子)
...	...	...	...

所以说自旋自由度的出现是由于时空对称性 (洛伦兹群的李代数结构) 决定的. 我们可以进行推广到庞加莱群, 考虑到沿时间空间平移对称性的拓展洛伦兹群, 可见有 10 个生成元 (3 个转动,3 个伪转动,4 个平移).

$$x^\mu \to x'^\mu = X^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

定义 $P^\mu = i\partial_\mu$. 我们考虑这个群的卡斯米尔算符 (和任意算符 (生成元) 都对易, 提供好量子数).

1. $\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu|p\rangle = p^2|p\rangle$. 这是个不变量. 可以组成对易力学量完全集.

2. Pauli-lvianski 矢量.

$$\hat{W}_\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}p^\rho = \tilde{W}_{\sigma\rho}\hat{p}^\rho$$

$M^{\mu\nu}$ 是洛伦兹群的生元张量我们只有在质壳态 (静止坐 xs 系 $\hat{P}^2|p\rangle = p^2|p\rangle = m^2|p\rangle$, 在自然单位制下, 此时 4 动量 $P = (m, 0, 0, 0)$) 上, 才可以构造好量子数. 可见此时上式必须满足 $\rho = 0, \mu, \nu, \sigma = 1, 2, 3$(反对称要求). 此时有最小对易力学量完全集 $\{\hat{P}^2, W^2, \hat{W}_\sigma, \hat{P}_\sigma\}$. 我们得到对易关系

$$[\frac{W_i}{m}, \frac{W_j}{m}] = i\varepsilon_{ijk}\frac{W_k}{m}$$

这里的 W_a/m 就是自旋. 可见自旋和质量存在关系. 自旋是庞加莱群的必然要求.

4 The representation of group

群表示, 比如矩阵对置换群的表示 (实质上矩阵天生就是群的表示), 是指将群元的的乘法结构映射到另一种物体上. 满足 $D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 g_2)$. 就像量子力学中态矢在各个基矢中的表示.

4.1 An introduction of representation theory

1. 所有的群都可以用矩阵来表示, 也就是说, 所有的群, 包括有限群和连续群. 首先任何有限群都同构于同阶置换群的一个子群. 这样自然有矩阵表示. 任何李群都原本就是矩阵定义的. 即使是加法群, 我们也能找到对应的矩阵乘法. 比如 e 指数, 还有 $D(u)D(v) = D(u+v), D(0) = I$, 还有洛伦兹群本身就是一个加法群.

$$D(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

对于一个群有多少表示的问题, 任何群都存在着一个平凡表示, 即 $D(g) = 1$, 的确这样表示符合所有定义. 这就类似于实数领域 0 的引进. 忠实和非忠实的表示: 一个 d 维的表示就是一个由 G 到 GL(d,C) 的一个子群的映射. 这个映射一定是同态的. 如果在加法中这个映射也是同构的. 那么这个表示是忠实的, 否则就是不忠实的.

4.2 The character of Group

一个给定的群有许多表示, 我们定义 $D^{(r)}(g)$ 是群元 g 在表示 r 中的矩阵表示. 定义 charcater $\chi^{(r)}(g) = trD^{(r)}(g)$.character 是一个关于等价类的函数, 同一个等价类的元素具有相同的 character.$g_1 \sim g_2, \chi^{(r)}(g_1) = \chi^{(r)}(g_2)$.

4.3 The equalivance representation

如果两个表示之间可以通过一相似变换,$D'(g) = S^{-1}D(g)S$, 那么我们说这个表示是等价的. 也就是说这两个表示本身是同一个矩阵在两组基矢中的表示. 由一个表示, 我们可以选一个非奇异矩阵使之相似于另一个矩阵, 他也是表示. 那么怎样判定他们是不是一个等价表示呢? 我们只需计算他们的 character. 相等的就是一个等价表示.

4.4 The irreducible and reducible representation

考虑 SO(3) 群. 他有两个表示一个是 $D^{(1)}(g) = 1$ 的平凡表示. 还有一个是三维表示 $D^{(3)}(g)$ 的表示. 同样的我们可以给出其他表示使用一个幼稚的做法

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(1)}(g) \oplus D^{(3)}(g) \oplus D^{(3)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)}(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(3)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)}(g) \end{pmatrix}$$

可以验证, 我们得到了另外一个表示, 同样可以得到更多的表示. 但是这些都是可约的表示. 可约的就是可以表示成不可约表示直和的形式. 显然一个群的表示也适用于他的一个子群. 若子群 H 的元素为 h, 那么如果 $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, 也存在 $D(h_1)D(h_2) = D(h_1 h_2)$. 我们就称 H 的表示是 G 的表示限制在子群上. 此时 G 的不可约表示可能不是 H 的不可约表示. 他可能分解或者分开为两个直积. 原因很简单: 可能在 G 的表示 D(g) 中存在一个分块对角的矩阵 D(h) 正好处在其中.

4.5 Unitary representation

幺正定理: 对于任何的有限群. 都有幺正表示, 或者说所有的表示都是幺正的, 可以说对于所有的群元及表示:$D^{\dagger}(g)D(g) = 1$. 这是很有用的, 我们可以判断矩阵是否是幺正的, 来看他是不是一个群表示. 其实这可以理解, 这只不过是说明群元有逆.

4.6 Compact or not compact

幺正定理的实用性是有限制的, 对于有限群他是成立的, 对于无限群基本上不成立的, 当然对于 SO(2) 群, 这显然是成立的. 因为 $R^T(\theta)R(\theta) = I$. 实际上对于洛伦兹群定理是不成立的. 成不成立标准是群本身是否是紧致的. 从有限群到连续群. 这个是求和到积分的区别. 如果积分收敛, 那么我们群是紧致的.

4.7 Direct-product representation

通过对不可约表示的矩阵做直积得到更大的表示. 给定群 G 的两个表示, 维度为 d_s, d_r, 我们得到 $D^{(r)}(g), D^{(s)}(g)$, 那么我们定义直积 $D(g) = D^{(r)}(g) \otimes D^{(s)}(g)$, 维度是 $d_s d_r$, 那么矩阵表示为

$$D(g)_{a\alpha,b\beta} = D^{(r)}(g)_{ab} D^{(s)}(g)_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} D(g)D(g') &= (D^{(r)}(g) \otimes D^{(s)}(g))(D^{(r)}(g') \otimes D^{(s)}(g')) \\ &= (D^{(r)}(g') \otimes D^{(r)}(g'))(D^{(s)}(g') \otimes D^{(s)}(g')) = D(gg') \end{aligned}$$

可见直积表示的确是一个群表示, 但是显然这个表示也是可约的, 可以化直积为直和. 计算直积表示的 character:

$$\chi(c) = \sum_{a\alpha} D(g)_{a\alpha,a\alpha} = (\sum_{a} D^{(r)}(g)_{aa})(\sum_{\alpha} D^{(s)}(g)_{\alpha\alpha}) = \chi^{(r)}(c)\chi^{s}(c)$$

5 The property of representation

5.1 Schur's lemma

该定理讲: 如果 $D(g)$ 是一个有限群的不可约表示, 如果存在一个矩阵 A 与所有的 D(g) 都对易, 那么 A=λI, 其中 λ 是一个常数. 该定理要求 A 在与 $\{D(g_1), D(g_2), \cdots, D(g_n)\}$ 都对易, 这意味着不可约表示群表示构成空间中的某种结构. 证明思路 $[H, D(g)] == 0$, 然后 H=λI.

5.2 The Great Orthogonality therom

给定一个有限群 G 的 d 维不可约表示, 我们有

$$\sum_g D^\dagger(g)^i_j D(g)^k_l = \frac{N(G)}{d}\delta^i_l\delta^k_j$$

也可以写作

$$\sum_g D^\dagger(g)D(g) = \frac{N(G)}{d}I$$

这意味着当我们对所有的表示矩阵求和后, 一些矩阵的特性被洗掉了. 而构成单位矩阵也意味着群元的封闭性.

Proof. 对于矩阵

$$A = \sum_g D^\dagger(g)XD(g),$$

X(是任意矩阵. 对于任意的 g, 有

$$D^\dagger(g)AD(g) = D^\dagger(g)(\sum_{g'} D^\dagger(g')XD(g'))D(g) = (\sum_{g'} D^\dagger(gg')XD(gg')) = A,$$

这样可看到 A 与 D(g) 对易. 所以 $A = \lambda I$,$trA = \lambda d = \sum_g trD^\dagger XD(g) = \sum_g trX = N(G)trX$, 可以得到

$$\frac{N(G)}{d}trX$$

然后我门令 $X = X^j_k = 1$, 所以 $trX = \delta^k_j$,r 然后得到

$$A^i_l = (\sum_g D^\dagger(g)XD(g))^i_l = \sum_g D^\dagger(g)^i_j D(g)^k_l = \lambda\delta^i_l = \frac{N(G)}{d}\delta^i_l trX = \frac{N(G)}{d}\delta^i_l\delta^k_j$$

□

当然这是在同一个不可约表示下的结论. 当存在两个不可约表示 r,s 时, 必须做些推广, 可以理解为是在不同空间里的,

$$\sum_g D^{(r)\dagger}(g)^i_j D^{(s)}(g)^k_l = \frac{N(G)}{d_r}\delta^{rs}\delta^i_l\delta^k_j$$

5.3 character orthogonality

通过求迹使得表示矩阵变成不依赖基底的, 实际上是将矩阵划分为不同的类. 利用 character 的性质 $\chi^{(r)}(c) = trD^{(r)}(g)$, 这样

$$\sum_g (\chi^{(r)}(g))^* \chi^{(s)}(g) = \sum_c n_c (\chi^{(r)}(c))^* \chi^{(s)}(c) = N(G)\delta^{rs},$$

n_c 代表属于类 c 的元素个数. 将上式写开

$$\sum_g (D^{(r)}(g_1), D^{(r)}(g_2), \cdots, D^{(r)}(g_n)) \cdot \begin{pmatrix} D^{(s)}(g_1) \\ D^{(s)}(g_2) \\ \cdots \\ D^{(s)}(g_n) \end{pmatrix} = \frac{N(G)}{d}\delta^{rs}$$

这样将对 g 的求和转换成对类的求和. 因此我们得到

$$\sum_c n_c (\chi^{(r)}(c))^* \chi^{(s)}(c) = N(G)\delta^{rs}$$

5.4 Character Table

我们可以画出一个有限群的 character 表来表示不同不可约表示下各个类的 character. 例如 A_4 群.

A_4	n_c	c	1	1′	1″	3
	1	I	1	1	1	3
Z_2	3	(12)(34)	1	1	1	-1
Z_3	4	(123)	1	w	w^*	0
Z_3	4	(132)	1	w^*	w	0

左边三列分别是类的特征元素, 类中元素的数目, 及该类元素生成的子群类别. 右边 4 列是指有四个不可约表示 $1, 1'', 1'', 3$ 下, 各个类的 character. 由于存在一个平凡表示 $D(g) = 1$, 所以第一列元素为 1, 第一行因为 I 自成一类, 所以三维对应于三阶单位阵. 定义群 G 的特征量:N(C) 是等价类的个数,N(R) 是不可约表示的个数. 在这个表中列间是正交的. 行间也是正交的. 实际上行数等于列数. 即 character table is square. 也就是说等价类的个数是群不可约表示的个数. 考虑一个数列 $(n_c)^{1/2}\chi^{(s)}(c)$, 对于一个 s, 也就是一个表示, 在所有的类, 是一个 N(c) 维的向量, 根据 N 维向量一定只有 N 个相互正交的向量基, 那么就应该有 $N(R) <= N(c)$.
考虑 $D^{(s)}(g)^k_s$, 有三个参量 (s, k, l) 对与当 g 取遍所有群元, 构成一个 N(G) 维的向量. 但是对一个不可约表示下, 当 k,l 取遍所有值, 共有 d_s^2 个矢量. 所以存在

$$\sum_s d_s^2 \le N(G)$$

5.5 A test for reduciblity

由于一个可约的群表示矩阵可以约化成不可约表示的直积. 那么任何一个不可约表示可以写成

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(r)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(s)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

假设一个 d_r 维的 r 表示出现了 n_r 次, 这样 $\chi(c) = \sum_r n_r \chi^{(r)}(c)$, 得到

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = \sum_c n_c \sum_{r,s} n_r n_s \chi^{*(r)}(c)\chi^{(s)}(c) = N(G)\sum_{r,s} n_r n_s \delta^{rs} = N(G)\sum_r (n_r)^2$$

$$\sum_c n_c \chi^{*(r)}(c)\chi(c) = \sum_c n_c \sum_s n_s \chi^{*(r)}(c)\chi^{(s)}(c) = N(G)n_r$$

这相当于把 r 表示提出来了直接得到 r 表示出现的个数.

5.6 The character of the regular representation

由 Caylay 定理: 一个有 N(G) 个元素的有限群一定是置换群 $S_{N(G)}$ 的子群.$S_{N(G)}$ 有一个 N(G) 维的 defining 表示, 任何一个有 N(G) 维的表示叫做群的正则表示. 对于 A_4 有 12 个 4 维矩阵表示. 这些矩阵是一个稀疏矩阵. 正则表示一定是可约的. 实际上只有单位元的单位表示矩阵 character 不为 0. 这样

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = (\chi(I))^2 = N(G)^2 = N(G)\sum_r (n_r)^2$$

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = \chi^{*(r)}(I)\chi(I) = d_r N(G) = N(G)n_r$$

这样得到 $n_r = d_r$. 也即是说在正则表示中各个不可约表示都出现了 d_r 次. 有因为正则表示的矩阵是 $N(G) \times N(G)$ 维的, 那么

$$\sum_r d_r^2 = N(G)$$

5.7 The character table is aquare

对于一个有限群 G, 他的不可约表示的个数等于等价类的个数.$N(C) = N(R)$ 不同的不可约表示是彼此正交的, 怎样证明行正交? 在正则表示中, 表示 r 出现了 d_r 次, 正则表示中等价类 c 的 character 为 $\chi^{reg}(c) = \sum_r d_r \chi^{(r)}(c) = \sum_r \chi^{(r)}(c)\chi^{(r)}(I)$, 在这一步已经说明了第一行与其他行正交性.

5.8 Frobenius algebra,group algebra,and class algebra

在群乘法上考虑群元的加法, 叫做群代数

$$\sum_i a_i g_i + \sum_i b_i g_i = \sum_i (a_i + b_i) g_i$$

$$(\sum_i a_i g_i)(\sum_j b_j g_j) = \sum_{ij} a_i b_j (g_i g_j)$$

考虑等价类 $c = \{g_1^{(c)}, \cdots, g_{n_c}^{(c)}\}$, 定义类平均

$$K(c) = \frac{1}{n_c} \sum_i g_i^{(c)}$$

我们定义 $c, d, e, \cdots$ 去表示各个等价类,

$$K(c)K(d) = nc^{-1} n_d^{-1} \sum_i \sum_j g_i^{(c)} g_j^{(d)}$$

$$g^{-1}(\sum_i \sum_j g_i^{(c)} g_j^{(d)})g = \sum_i \sum_j (g^{-1} g_i^{(c)} g)(g^{-1} g_j^{(d)} g) = \sum_i \sum_j g_i^{(c)} g_j^{(d)}$$

$$K(c)k(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e) K(e)$$

这也就是说两个类代数的乘积实际上构成了所有类代数的线性组合, 上边对类代数做的相似变换, 实际上只是将各个类重排了一下.
同样在将群代数和类代数推广到群的表示中也有相似的结论

$$\mathfrak{D}(c) = \frac{1}{n_c} \sum_{g \in c} D(g)$$

$$D(g'^{-1}) \mathfrak{D}(c) D(g') = \frac{1}{n_c} \sum_{g \in c} D(g'^{-1} g g') = \mathfrak{D}(c)$$

根据 Schur's 定理:$\mathfrak{D}(c) = \lambda(c) I, \lambda(c) = \chi(c)/\chi(I)$,

$$\mathfrak{D}(c)\mathfrak{D}(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e) \mathfrak{D}(e)$$

$$\chi(c)\chi(d) = \chi(I) \sum_e \Gamma(c, d; e) \chi(e)$$

$$\sum_r \chi^{(r)}(c) \chi^{(r)}(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e) \sum_r \chi^{(r)}(I) \chi^{(r)}(e) = \Gamma(c, d; I) N(G)$$

$$\sum_r \chi^{(r)}(c)^* \chi^{(r)}(c') = \frac{N(G)}{n_c} \delta^{cc'}$$

5.9 Character is the function of Class

$$\textbf{不可约表示矩阵维数:} \qquad \sum_r d_r^2 = N(G) \tag{8}$$

$$\textbf{列正交:} \qquad \sum_c n_c(\chi^{(r)}(c))^* \chi^s(c) = N(G)\delta^{rs} \tag{9}$$

$$\textbf{行正交:} \qquad \sum_r \chi^{(r)}(c)^* \chi^{(r)}(c') = \frac{N(G)}{n_c}\delta^{cc'} \tag{10}$$

$$\textbf{特征表是一个方阵:} \qquad N(C) = N(R) \tag{11}$$

$$\textbf{正交定理:} \qquad \sum_g D^{(r)\dagger}(g)^i{}_j D^{(s)}(g)^k{}_l = \frac{N(G)}{d_r}\delta^{rs}\delta_l^i\delta_j^k \tag{12}$$

$$\textbf{维度定理 1:} \qquad \sum_c n_c\chi^*(c)\chi(c) = N(G)\sum_r n_r^2 \tag{13}$$

$$\textbf{维度定理 2:} \qquad \sum_c n_c\chi^{*(r)}(c)\chi(c) = N(G)n_r \tag{14}$$

根据上述公式可以计算一些群表示的特征表.

5.10 The Character of A_3

A_3	n_c		1	1′	1″
	1	I	1	1	1
Z_3	1	$c = (123)$	1	ω	ω^*
Z_3	1	$a = (132)$	1	ω^*	ω

其中 $\omega = e^{i2\pi/3}, \omega^* = \omega^2$, 这里实际上是转置共轭后才会正交.

5.11 Cyclic groups

因为循环群是阿贝尔的, 所以 N 阶循环群就有 N 个等价类, 也就有 N 个不可约表示.$N(G) = 1^2 + 1^2 \cdots + 1^2$, 所以呢, 这些表示也都是一维的. 对于 A_3 群同构与 Z_3 群. 每个不可约表示都是 1 的根.$D^k(Z_N) = e^{i2\pi kj/N}, k = 0, 1, 2, \cdots$. 这里包含着傅里叶变换的实质

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi(k=k')j/N} = N\delta_{kk'}$$

5.12 From A_3 to S_3

S_3 有 6 个元素, 不同于 A_3, 他不是阿贝尔的, 此时 c 与 a 是一个等价类, 因为在 S_3 中由于群元的扩充, 这里存在一个群元 (23) 使得两者等价. 这样对于 S_3 也有三个等价类

S_3	n_c	c	1	$\bar{1}$	2
	1	I	1	1	2
Z_3	2	$(123),(132)$	1	1	-1
Z_2	3	$(12),(23),(31)$	1	-1	0

5.13 From the character table to the representation matrices

对于小的群, 我们可以从特征表去构建表示矩阵. 比如对于 S_3 群, 他的 2 维表示矩阵为

$$I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (132) \sim \begin{bmatrix} \omega^* & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, (123) \sim \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^* \end{bmatrix}$$

$$(12) \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, (23) \sim \begin{bmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, (31) \sim \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega^* & 0 \end{bmatrix}$$

5.14 The class of inverses:Real and complex characters

对于一个等价类 c, 我们有 $\bar{c}$, 包含了所有 c 中群元的逆元. 因为 $D(G)$ 是幺正的, 那么 $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1} = D(g)^\dagger$, 对其求迹, 得到

$$\chi(\bar{c}) = \chi(c)^*$$

一个直接的推论就是如果一个等价类中含有某个元素的逆元, 那么他的特征标是实的. 还可以证明, 这个等价类必然含有所有元素的逆元, 即 $\bar{c} = c$.

5.15 The invariance group T of the tetrahedron and A_4

正四面体的不变子群 T 同构于 A_4, 共有 12 个群元. 在一个表示 r 下, 所有在同一类的元素的矩阵表示的迹是一样的, 有 3 个 1 维表示, 一个 3 维表示.A_4 群没有一个 4 维的不可约表示, 他的 defining 表示是可约的:$4 \to 1 + 3$.

A_4	n_c	c	1	1′	1″	3
	1	I	1	1	1	3
Z_2	3	$(12)(34)$	1	1	1	-1
Z_3	4	(123)	1	ω	ω^*	0
Z_3	4	(132)	1	ω^*	ω	0

怎样求得 A_4 群的 3 维不可约表示矩阵呢? 首先是 I, 他一定是一个 3 维的单位阵. 对于 $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$, 这三个群元是相互对易的, 所以可以同时被对角化, 他们构成一个等价类.

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而 (123) 构成 Z_3 群, 也即是

$$(123) = c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第三类的其他元素是 $r_1cr_1, r_2cr_2, r_3cr_3$. 同样的

$$(132) = a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其他的元素可以是 $r_1ar_1, r_2ar_2, r_3ar_3$.

5.16 The character table of groupS_4

S_4	n_c	c	1	$\bar{1}$	2	3	$\bar{3}$
	1	I	1	1	2	3	3
Z_2	3	$(12)(34)$	1	1	2	-1	-1
Z_3	8	(123)	1	1	-1	0	0
Z_2	6	(12)	1	-1	0	1	-1
Z_4	6	(1234)	1	-1	0	-1	1

5.17 The dihegral group D_4

D_4 群是一个 dihedral 正 n 边形的群的不变子群. 共有 8 个元素 $\{I, R, R^2, R^3, r, rR, rR^2, rR^3$,$D_4 :< R, r|R^4 = r^2 = I >$, 构成 5 个等价类,r 是指沿对角和对边的反转操作, 分为两个等价类, 写出 2 维矩阵表示

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

他的特征标表为

D_4	n_c	c	1	1′	1″	1‴	2
	1	I	1	1	1	1	2
Z_2	1	R^2	1	1	1	1	-2
Z_4	2	R, R^3	1	1	-1	-1	0
Z_2	2	r_x, r_y	1	-1	1	-1	0
Z_2	2	d_1, d_2	1	-1	-1	1	0

5.18 The quarternionic group$\mathfrak{Q}$

$\mathfrak{Q}$ 群共有八个元素, 构成 $\mathfrak{Q} = Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$,$\mathfrak{Q} = \{1, -1, j, -j, i, -i, k, -k\}$ 分成五个等价类, 写出特征标表时, 要注意四个 1 表示实际上是任意的, 他们因为构成幺正表示, 所以必须是 ± 1, 可以看到,$\mathfrak{Q}$ 的特征标表和 D_4 是一致的, 但他们显然不是一个群, 也不同构, 所以特征标表和群不是一一对应的.

D_4	n_c	c	1	1′	1″	1‴	2
	1	I	1	1	1	1	2
Z_2	1	R^2	1	1	1	1	-2
Z_4	2	R, R^3	1	1	-1	-1	0
Z_2	2	r_x, r_y	1	-1	1	-1	0
Z_2	2	d_1, d_2	1	-1	-1	1	0

5.19 The character table of 5-permetation group S_5

由对 5 有 7 种分解, 可以有七个等价类, 也就是 7 个不可约表示.7 个等价类代表元素为 $\{I, (12)(34), (123), (12345), (12), (1234), (12)(345)\}$. 分别有 1,15,20,24,10,30,20 个.

S_5	n_c	c	1	$\bar{1}$	4	$\bar{4}$	5	$\bar{5}$	6
	1	I	1	1	4	4	5	5	6
Z_2	15	$(12)(34)$	1	1	0	0	1	1	-2
Z_3	20	(123)	1	1	1	1	-1	0	0
Z_5	24	(12345)	1	1	-1	-1	0	0	1
Z_2	10	(12)	1	-1	2	-2	1	-1	0
Z_4	30	(1234)	1	-1	0	0	-1	1	0
Z_6	20	$(12)(345)$	1	-1	-1	1	1	-1	0

5.20 The character table of 5-permetation group A_5

从 S_5 群到 A_5 群, 我们丢失了 $(12), (1234), (12)(345)$ 这三类偶置换操作类, 实际上 (12345) 分为了两个等价类,$(12345), (12354)$. 但是 (123) 并没有分解, 因为存在 $(45321)(123)(12354) \sim (124)$, 所以一共还有 5 个等价类, 所以特征标表是

A_5	n_c	c	1	3	3	4	5
	1	I	1	3	3	4	5
Z_2	15	$(12)(34)$	1	-1	-1	0	1
Z_3	20	(123)	1	0	0	1	-1
Z_5	12	(12345)	1	ζ	1-ζ	-1	0
Z_5	12	(12354)	1	1-ζ	ζ	-1	0

其中 $\zeta = (1 + \sqrt{5})/2$.

5.21 $A_5$is simple :A simple proof

一个简单群就是一个没有非平凡不变子群的群. 怎样证明 A_5 是一个简单群? 首先对于一个子群, 他必须包含一个完整等价类. 反证法, 假设 H 是 A_5 的一个不变子群, 并且 A_5 不是简单群,A_5 有五个等价类,$n_c = 1, 15, 20, 12, 12$. 根据拉格朗日定理, 这些子群的个数一定能被 60 整除, 但是对所有等价类 n_c 的和都不可能被 60 整除 60. 所以 A_5 是一个简单群.

6 Real,Pseudoreal,Complex Representation and the number of square roots

6.1 Complex or not

给定一组群的不可约矩阵, 我们如何判定这组矩阵是复的, 还是实的? 即使所有的矩阵元都是实的, 也不能说表示是实的. 一组含有复元素的表示可以通过相似变换和他的共轭表示等价, 即 $D(g)^* \neq D(g), \exists S, D(g)* = SD(g)S^{-1}, for\ all\ g \in G$. 所以说看上去是复矩阵, 也不一定是复表示.

6.2 Conjugate representations

一个表示 $D(g)$ 的复表示记做 $D(g)^*$(省略了上标 r). 通过求迹, 得到

$$\chi^{(r*)}(c) = trD(g)^* = (trD(g))^* = \chi^{(r)}(c)^*$$

也即是说复共轭表示的特征标等于表示特征标的复共轭. 实际上互为共轭的两个表示是等价的, 如果两者等价, 他们的特征标是一致的 (是分别对所有的类都一致).$\chi^{r*}(c) = \chi^{(r)}(c)$, 他们的所有特征标是实的. 如果特征标是复数, 那么表示也是复的. 这样就可以将表示分为复的实的两大类, 实际上实的可以分为真实的和赝实的.

6.3 A restriction on the similiarity transformation S: Real versus pseudoreal

给定一个非复的不可约表示, 对 $D(g)* = SD(g)S^{-1}$ 取共轭, 得到 $D(^g)^\dagger = D(g)^{*T} = (S^{-1})^T D(g)^T S^T$, 因为表示矩阵是幺正的, 那么 $D(g)^\dagger = D(g^{-1})$, 我们得到

$$D(g^{-1}) = (S^{-1})^T D(g)^T S^T$$

我们利用两次这个关系得到 $D(g)$ 和自己的关系, 对变换矩阵 S 做出限制. 得到

$$D(g) = (S^{-1})^T D(g^{-1})^T S^T = (S^{-1})^T (SD(g)s^{-1})S^T = (S^{-1}S^T)^{-1} D(g)(S^{-1}S^T).$$

这就是说 $(S^{-1}S^T)$ 与所有的表示矩阵都对易, 这样根据 schur 定理, 这样 $(S^{-1}S^T) = \eta I$
这就是说,$\eta = \pm 1$,S 是对称的或者反称的.
如果 S 是对称的,$\eta = 1$, 我们说表示是实的.
如果 S 是反称的,$\eta = -1$ 我们说表示是赝实的. 一个表示是赝实的,(奇数阶反对称方阵的行列式值为零, 所以是退化的, 不能做变换矩阵) 只有当他的维数是偶数维的.
S 是幺正的, 证明如下:$SD(g) = D(g)^*S = (D(g)^{-1})^T S$, 所以 $S = D(g)^T SD(g)$. 对上式取

厄米共轭得:$S^\dagger = D(g)^\dagger S^\dagger D(g)^*$, 将两式乘起来得到 $S^\dagger S = D(g)^\dagger S^\dagger D(g)^* D(g)^T SD(g) = D(g)^\dagger S^\dagger SD(g)$, 所以 $DS^\dagger S = S^\dagger SD$, 这样再次利用 schur 定理,$S^\dagger S$ 与所有的表示都对易.$S^\dagger = I$, 所以 S 是幺正的.

6.4 Real representation is really real

实表示的矩阵元都是实数 (在特定的基底下). 先证明一个引理: 给定幺正对称矩阵 U, 一定可以存在一个幺正对称矩阵 W, 使得 $W^2 = U$, 这样我们或许可以不断进行此过程得到最简单的幺正对称矩阵. 假设 $S = W^2$,$W^{-1} = W^\dagger = W^*$. 这

$$
\begin{aligned}
&W^2 D(g) W^{-2} = D(g)^* \\
\rightarrowtail &WD(g)W^{-1} = W^{-1}D(g)^*W = W^*D(g)^*(W^{-1})^* = (WD(g)W^{-1})^*
\end{aligned}
$$

所以说 $WD(g)W^{-1}$ 是实的, 所以 $D(g)$ 是实的

6.5 An invariant bilinear for a noncomplex representation

定义 x 是 d_r 个遵守 d_r 维的不可约表示变换的集合,$x \to D(g)x$, 同理 $y \to D(g)y$, 其中 D(g) 是不可约表示 r 的表示矩阵, 这样如果 r 是实的或者赝实的, 那么 $y^T Sx$ 是一个双线性不变量. 证明如下

$$(1) : D^T(g) = SD^\dagger(g)S^-1$$

$$y^T Sx \to y^T D(g)^T SD(g)x = y^T SD^\dagger(g)S^{-1}D(g)x = y^T Sx$$

反过来看, 如果 $y^T Sx$ 是一个不变量, 那么 $D(g)^T SD(g) = S$, 这意味着 $D^*(g)S = SD(g)$, 得到 D 和 D^* 等价, 可见双线性不变量存在当且仅当不可约表示是实的或者赝实的.

6.6 The reality checker

怎样验证一个不可约表示是实的, 赝实的, 还是复的??
给出一个任意的矩阵 X, 定义

$$S = \sum_{g \in G} D(g)^T XD(g)$$

那么有 $D(g)^T SD(g) = \sum_{g' \in G} D(g)^T D(g')^T XD(g')D(g) = S$. 这就是说对于任意的群元 g, 我们总可以找到 $y^T Sx$ 是双线性不变量, 如果不可约表示是复的, 那么

$$S = \sum_{g \in G} D(g)^T XD(g) = 0$$

对上式求迹后得到

$$\sum_{g \in G} \chi(g^2) = 0, \text{如果表示是复的}$$

对于所有情形, 我们可以用下式来判定

$$\sum_{g \in G} \chi^{(r)}(g^2) = \eta^r N(G),\ with\ \eta^r = \begin{cases} 1 & if\ real, \\ -1 & if\ pseudoreal, \\ 0 & if\ complex \end{cases}$$

这里实际上是做了一个多对一的映射,g^2 所代表的群元是元群的一个子群. 根据一个定理: 如果 g_1, g_2 属于同一个等价类, 那么 g_1^2, g_1^2 也属于同一个等价类, 这样就可以将上式转化成对等价类的求和.

下面说一个容易错的例子: 对于 S_3 的 2 表示, 有 $I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (123) \sim \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^* \end{pmatrix}, (132) \sim \begin{pmatrix} \omega^* & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, (12) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (23) \sim \begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, (31) \sim \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^* & 0 \end{pmatrix}$, 他们的确不是实矩阵, 但是我们可找出相似变换 $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $V^\dagger D^{(2)}(g) V$ 是实矩阵, 所以 2 是实表示.

6.7 The number of square roots

我们现在考虑, 对于一个群元 $f \in G$, 令 σ_f 代表 f 平方根解的个数, 也即是 $g^2 = f$, 在群 G 中有多少这样的 g 元存在. 根据定理: 如果一个群含有偶数个元素, 至少含有一个元素不是单位元但他的平方是单位元. 现在

$$\sum_{g \in G} \chi^{(r)}(g^2) = \sum_f \sigma_f \chi^{(r)}(f) = \eta^r N(G)$$

σ_f 是一个只与群性质有关系的量, 而与表示无关. 对上式乘上 $\chi^{(r)*}(f')$ 得到

$$\begin{aligned}
\sum_r (\sum_f \chi^{(r)}(f)) \chi^{(r)*}(f') &= \sum_r \eta^{(r)} \chi^{(r)*}(f') N(G) \\
&= \sum_f \sigma_f (\sum_r \chi^{(r)}(f) \chi^{(r)*}(f')) \\
&= \sum_f \sigma_f \frac{N(G)}{n_c} \delta_{cc'} = \sigma_{f'} N(G)
\end{aligned}$$

这里存在一个多对一的映射, 许多个 g 对应着一个 f, 实际上这样在改变指标求和时就必须考虑简并的效果, 最后一步是先选出 $f' \in c'$, 然后在对这些个 f' 求和. 最后得到

$$\sigma_f = \sum_r \eta^{(r)} \chi^{(r)}(f)$$

这样只要给出特征标表, 我们就可以先确定各个表示的 $\eta^{(r)}$, 然后就可以知道任意群元平方根的个数. 特别是 I 的平方根个数

$$\sigma_I = \sum_r = \eta^{(r)} d_r = \sum_{r=real} d_r - \sum_{r=pseudoreal} d_r$$

6.8 Sum of the representation matrics of squares

我们现在想知道的更详细: 所有表示矩阵的加和是什么? 这里实际上也是涉及到一个抹平方向性的问题. 给出 $A = \sum_g D(g^2)$, 做一个变换

$$D^{-1}(g') A D(g') = D^{-1}(g') = D^{-1}(g') (\sum_g D(g^2)) D(g') = \sum_g D(g'^{-1} g g' g'^{-1} g g') = A$$

根据 schur 定理, 这 A 矩阵和所有的表示矩阵都对易, 那么 $A = cI$,

$$\begin{aligned}\sum_g trD^{(r)}(g^2) = cd_r = \sum_g \chi^{(r)}(g^2) = \sum_f \sigma_f \chi^{(r)}(f)\\ = \sum_s \eta^{(s)} \sum_f \chi^{(s)*}(f)\chi^{(r)}(f) = \eta^{(r)} N(G)\end{aligned}$$

上式的证明用了特征标表的列正交性, 最后得到

$$\sum_g D^{(r)}(g^2) = N(G)(\eta^{(r)}/d_r)I$$

会想到之前学的大正交定理

$$\sum_g D(g)^{-1}D(g) = (N(G)/d_r)I$$

这里同样抹去了方向性.

6.9 How many ways can a group element be written as a product of two squares

我们这里再往前走一步, 我们看一下在一个群 G 中, 任意群元 $h^2 = f^2g^2$, 满足上式的 f,g 的个数, 实际上这里不仅是 f,g 的个数, 还包括二者的组合.

$$\sum_g \chi^{(r)}(f^2g^2) = N(G)(\eta^{(r)}/d_r)\chi^{(r)}(f^2)$$

对上式求迹, 并对所有的 f 求和我们得到

$$\sum_g \chi(r)(f^2g^2) = N(G)(\eta^{(r)}/d_r)\chi^{(r)}(f^2)$$

$$\sum_f \sum_g \chi^{(r)}(f^2g^2) = N(G)(\eta^{(r)}/d_r)\sum_f \chi^{(r)}(f^2) = (N(G)\eta^{(r)})^2/d_r$$

定义 τ_h 为对于给定 h,$h^2 = f^2g^2$ 的个数, 这样上式写成

$$\sum_f \sum_g \chi^{(r)}(f^2g^2) = \sum_h \tau_h \chi^{(r)}(h) = (N(G)\eta^{(r)})^2/d_r$$

乘上 $\chi^{(r)*}(h'), h'$ 是任意群元, 对 r 求和, 得到:

$$\begin{aligned}\sum_r(\sum_h \tau_h \chi^{(r)}(h))\chi^{(r)*}(h) = N(G)^2 \sum_r (\eta^{(r)})^2/d_r \chi^{(r)*}(h)\\ = \sum_h \tau_h(\sum_r (h)\chi^{(r)*}(h'))\\ = \sum_h \tau_h \frac{N(G)}{n_c}\delta_{cc'} = \tau_{h'} N(G)\end{aligned}$$

解得

$$\tau_h = N(G)\sum_r (\eta^{(r)})^2\chi^{(r)}(h)/d_r$$

作为特例

$$\tau_I = N(G)\sum_r (\eta^{(r)})^2$$

7 Some application of Group

7.1 Crystals are beautiful

一个晶体就是具有一些原子在变换 $\vec{T} = n_1\vec{u_1} + n_2\vec{u_2} + n_3\vec{u_3}$ 下保持不变的晶格. 这个群包含平移, 旋转, 反射, 反演叫做晶体的空间群. 将平移去掉后的群叫做点群, 一共有 14 种. 假设一个晶格在绕某轴旋转 $2\pi/n$ 角度后不变,n 只可能取 1,2,3,4,6. 在准晶体中是可以存在着五重对称性的, 并且存在这黄金分割比的特征常数.

8 Eular's φ-function,Fermat's little theorm,Wilson's theorm

定义 G_n 群,n 是一个整数,G_n 就是一组数 m 的集合,$1 \leqslant m \leqslant n$,m 和 n 的最大公约数是 1, 也就是说 m 和 n 是互质的. 在模余乘法下,G_n 构成群.

$$m_1 = 1(mod\, n), m_2 = 1(mod\, n), m_1 \in G_n, m_2 \in G_n, s.t.\; m_1m_2 = 1(mod\, n)$$

qi 其中模余乘法是指

$$m = 1(mod\, n) \simeq m = kn + 1, k\text{是一个整数}$$

结合律易证, 单位元是 1, 对于逆元, 我们有一个引理: 给定整数 a 和 b, 两者互质, 存在一个整数 x 和 y, 使得 $xa + yb = 1$, 其中 x 的逆元是 m,$xm = 1(mod\, n)$. 因为乘法规则就是简单的代数乘法, 群也是 abel 的.
G_n 的阶数, 也就是 G_n 群中元素的个数, 叫做欧拉 φ-函数 $\varphi(n)$.$\varPhi(9) = 6$, 同构于 Z_6 群.$\varphi(16) = 8$, 同构于 $Z_4 \otimes Z_2$ 群. 欧拉证明了定理: 如果 a 和 n 互质, 即他们最大公约数是 1, 那么

$$a^{\varphi(n)} = 1(mod\, n)$$

实际很好证, 对于一个有限群 G 中的元素 g, 不断自乘, 那么 $g^{N(G)} = I$, 这里也是这样一个道理,a 或许比 n 大, 但在做一次模余之后, 得到的余数一定在 G_n 中, 那么就可以应用定理.
Fermet 最小定理实际是欧拉定理的推论: 对于一个质数 p,p 不是 a 的因数, 那么有

$$a^{p-1} = 1(mod\, n)$$

对于一个质数, 他的 G_n 群的阶数是 $\varphi(n) = n-1, G_n = 1, 2, \cdots, n-1$.
Wilson 定理:$(n-1)!+1$ 可以被 n 除当且仅当 n 是一个质数. 如果 n 不是质数, 那么 n 的因数一定可在 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 找到, 那么 $(n-1)! = 0(mod\, n)$, 反之,a 是质数, 那么 $G_n = 1, 2, \cdots, n-1$, 其中 1 的逆元是 1,(n-1) 的逆元是 (n-1), 其他的逆元都可以找到, 那么

$$(n-1)! = (n-1)\cdot 1 = n - 1(mod\, n)$$

8.1 Frobenius Groups

我们可以将任意的循环群直积得到新的群, 比如 $Z_{13} \otimes Z_3$, 这意味着包含两个元素 $a^{13} = I, b^3 = I$, 其中满足 $bab^-1 = a$, 那么此群共有 39 个元素, 元素为 $g = a^m b^n, 0 \leqslant m \leqslant 12, 0 \leqslant n \leqslant 2$. 但是如果我们将 $bab^-1 = a^3$ 定义, 这样 $Z_{13} \times Z_3 = T_{13}$, 叫做 Frobenius 群. 这种扩张叫做半直积. 其实是 $bab^-1 = a^r$ 的特殊情况.

$$< a, b | a^{13} = I, b^3 = I, bab^{-1} = a^3 >$$

考虑 T_{13} 群的不可约表示, 共有 39 个元素, 他的等价类包括 $\{I\}, C_3 : \{a^2, a^5, a^6\}, C_3' : \{a, a^3, a^9\}, C_3^* : \{a^4, a^{10}, a^{12}\}, C_3^{'*} : \{a^7, a^8, a^{11}\}$, 还有两个形式 $a^m b, a^m b^2$ 的等价类 $C_{13}^{(1)} : \{b, ab, a^2 b, \cdots, a^{11} b, a^{12} b\}, C_{13}^{(2)} : \{b^2, ab^2, a^2 b^2, \cdots, a^{11} b^2, a^{12} b^2\}$, 可知群 T_{13} 有 7 个不可约表示, 根据 $\sum_r d_r^2 = N(G)$, 首先有一个一维的表示 I, 仔细分析, 如果还有其他的以为表示, 那么就得满足 $bab^-1 = a^3$ 即,$a^2 = 1$, 但是 a=-1 不满足 $a^{13} = 1$, 所以 a=1, 但是对于 $b^3 = 1$, 存在三个表示:$1, \omega, \omega^*$, 可见总共有三个一维表示记做 $1, 1', 1''$, 所以还有 4 个 3 维不可约表示, 对于 b 来说, 若

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

那么将 a 做对角化后, 令 $\rho = e^{\frac{2\pi i}{13}}$, 可得

$$3 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho^3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^9 \end{pmatrix}, 3' = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^6 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^5 \end{pmatrix}, 3^* = \begin{pmatrix} \rho^{12} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{10} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^4 \end{pmatrix}, 3^{'*} = \begin{pmatrix} \rho^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^7 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^8 \end{pmatrix}$$

可以验证这些不可约表示都是幺正矩阵, 实际上所有的幺正带有单位行列式的 3 阶群构成了群 $SU(3)$.

9 Quantum Mechanics and Group Throry :Parity Bloch's Theorem,and the Brillouin Zone

9.1 The principle of quantum theory

量子力学是线性的, 他遵守薛定谔方程, 即

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi$$

因为薛定谔方程是线性的, 因为他只包含对时间的一阶微分, 所以方程解具有叠加性. 解得形式为 $\Psi(t) = \psi e^{-i\epsilon/\hbar}$, 如果 ψ 至于位置有关, 而和时间无关, 那么遵守定态薛定谔方程

$$H\psi = \epsilon\psi \qquad H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

简并情形是指对于某一个力学量, 他的对应着同一个本征值有多于一个本征矢量, 比如对于哈密顿量,

$$H\psi^a = E\psi^a, \quad with\ a = 1, \cdots, d \quad d \leq \infty$$

9.2 Symmetry implies degeneracy

在量子力学中, 变换可以用一个幺正的算符表示, 如果一组变换使得 H 不变, 那么有 $H^\dagger HT = H$, 那么这些 T 构成一个群 G, 群中的任何元素的叠加都使 H 不变, 又因为变换是幺正的, 那么 $HT = TH$, 即 H 与 T 对易, 两者可以被同时同一组基底对角化, 两者有共同的本征态, 但这些本征态不具有相同的本征值. 如果 $H\psi^a = E\psi^a$, 那么

$$H(T\psi^a) = HT\psi^a = TH\psi^a = TE\psi^a = E(T\psi^a)$$

令 $\psi'^{a} = T\psi^a$, 他一定是本征矢量的线性组合,$T\psi'^a = (D(T))^{ab}\psi^b$, 同样有 $D(T_1T_2) = D(T_1)D(T_2)$, 根本就在于简并的态构成了封闭的线性空间. 在这个空间中 H 是一个 d 维的单位矩阵乘上本征值. 也就是说 H 与所有的不可约表示都对易.

9.3 From degeneracy to group representations

d 个简并的本征矢量构成了群 G 的一个 d 维不可约表示. 如果知道 G 是什么, 我们也就能猜到 d 是什么, 同样给定简并情况, 我们也可以猜出 G 是什么, 两个算符对易, 只是两个操作对易, 组成的直积群是 abel 的.
如果 H 和群 G 所有的 d 维不可约表示矩阵 $D(g)$ 都对易, 那么 H 在这个 d 维简并子空间中等于本征值乘单位矩阵. 这里的 H 可以理解为哈密顿量. 如果一组态构成对称群的一个可约表示, 那么该矩阵是分块对角的:

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(r)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(s)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad for\ all\ g \in G$$

那么我们可知哈密顿量也是分块对角的, 这使得我们可以容易的对角化 H 矩阵,

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^{(r)}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^{(s)}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

但是群不能告诉我们 E 是什么, 可以这样想, 对于一个中心势场 $V(r)$, 改变中心势场的大小, 可以使能量发生变化, 但不能使能级打开, 以为系统的对称性并没有破坏.

9.4 Parity

给定一个具有对称性的势函数,$H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ 在对称群 Z_2 下是不变的, 那么定义反射算符 P, 那么只有两个本征值 ,$+1, -1$. 这意味着存在大量的简并. 实际上群论中,Z_2 有两个不可约表示,$r = 1, r = -1$. 也即是说波函数具有确定的宇称 $\psi(x) = \pm\psi(x)$.

9.5 Bloch's theorem and Brillouin zone

一个粒子在一维势场 $V(x)$ 中运动, 势场具有平移周期性 $V(x)=V(x+a)$. 这个对称群 (几何上) 含有 $\{\cdots, T^{-1}, I, T, T^2, \cdots\}$.T 代表平移操作 $a: x \to Tx = x+a$. 因为这个群是 abel 的, 因为在一维上平移是对易的, 那么他任何一个元素构成一个等价类, 也就是说有 $N(G)$ 个 1 维的不可约表示. 这样 $\psi^{'}(x)=T\psi(x)=\zeta\psi(x)$, 但是由于波函数的归一化性质, 那么 $|\zeta|=1$, 令 $\zeta=e^{ika}, k\in R$, 既然有 $e^{ika+2\pi}=e^{ika}$, 那么我们将 k 限制在

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

这实际是晶格倒格矢的布里渊区. 我们引入周期性边界条件即对于一维晶格, 有 N 个粒子,$T^N=1$, 对称群实际 N 阶循环群,Z_N 群.$e^{iNka}=1$ 使得 $k=(2\pi/Na)j, j\in Z$. 因为 N 是宏观的大, 那么 k 的间隔是很小的, 可以看做连续.
Bloch 原理是说, 对于周期势场 $V(x)=V(x+a)$, 那么波函数可以写成

$$\psi(x)=e^{ikx}u(x), u(x)=u(x+a)$$

给定一个势场函数, 将波函数形式带入薛定谔方程, 解出 $u(x)$ 和允许能级. 这些能级是依赖于 k 的, 记做 $E_n(k)$.

9.6 Ray and projection representation

对于量子力学我们只能根据薛定谔方程将波函数定到差一个常数相因子的程度, 即 $\psi(x)$ 和 $\psi(x)e^{ia}$ 是无法区分的, 根据群表示论, 那么 $D(T_2T_1)=D(T_2)D(T_1)$, 那么此时 $D(T_2T_1)=e^{ia(T_1,T_2)}D(T_2)D(T_1)$, 这个 $a(T_1,T_2)$ 产生的新的表示叫做投影表示. 这个相因子的自由性产生了一个群的新分支–同调.

10 Group Theory and Harmonic Motion :Zero Modes

对于经典力学, 牛顿方程中含有对时间的二阶微分, 实际导致是非线性的, 然而对于薛定谔方程来说, 只有对时间的一阶微分, 他是线性的这也是为什么群论有着重要作用的原因, 波函数构成对称操作群的表示.

11 Harmonic systems of springs and masses

经典力学中的一个例外就是在于谐振子问题, 力 $\vec{\nabla}x$ 是 x 的线性函数, 考虑 N 个等质量的粒子在弦上等距排列, 在 D 维空间内震动. 将第 a 个粒子 $(a=1,\cdots,N)$ 记做 $x_a^i(i=1,2,\cdots,D)$, 化简后牛顿方程写为

$$\frac{d^2x_a^i}{dt^2}=-\sum_{b=1}^{N}\sum_{j=1}^{D}H^{ia,jb}x_b^j$$

这里可能会出现重复求和的问题, 如 $b=a, j=i$, 此时可限制 H 的具体形式. 将 x_a^i 放进一个 ND 维的矢量 $x^A, A=1,2,3,\cdots,ND$ 中, 这样将 $x^A(t)=x^A\sin(\omega t+\phi)$, 这里 ϕ 是相移. 我们得到本征值方程:

$$H^{AB}x^B=\omega^2x^A$$

实对称矩阵 H 有 DN 个本征值 ω_α^2 和本征矢量 $x_\alpha^A, \alpha = 1, 2, \cdots, DN$,$\alpha$ 表示本征频率 ω_α^2 的第 α 的谐振模.

11.1 The power of group theory

实际上 DN-DN 维的 H^{AB} 矩阵并不好写, 但是如果系统在几何上构成某种对称群, 那么根据特征标表和直觉我们可以得到谐振模甚至是振动频率. 对称群作用于质点上给出群 G 一个 DN 维的可约表示 D(g), 实际上是可以写出的, 以为我们知道所有的群元和质点坐标. 但是只要我们知道特征标, 那么我们就知道 D(g) 可以化为几个不可约表示

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(r)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(s)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad for\ all\ g \in G$$

根据 schur 定理, 实际上可以写出在同一组基底下

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{(r)}^2 I_{d^r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{(s)}^2 I_{d^s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$I_d]$ 是 d 维的单位矩阵. 根据

$$\sum_r d_r^2 = N(G)$$

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = N(G) \sum_r n_r^2$$

$$\sum_c n_c \chi^{*(r)}(c)\chi(c) = N(G) n_r$$

这样就可以确定 d_r 了. 但是群论可以告诉我们本征频率的简并模数, 但是不能告诉频率是什么, 这就和前面类似, 可以告诉我们能级的简并度, 但是不能告诉能级值.

11.2 Zero mode

对于一维双质点谐振子, 写出牛顿方程:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -(x_2 - x_1)$$

, 这方程可解, 我们写出 H 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

对于双质点谐振子, 他构成二阶置换群 S_2, 含有两个等价类, 两个不可约表示, 写出特征标表

S_2	n_c	c	1	$\bar{1}$
	1	I	1	1
Z_2	1	(12)	1	-1

两个 DN=2 维的表示可写成 $D(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $D((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 将两者对角化, 可得 $D((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 根据 Schur 定理, 可知 H 也必须是对角的

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

这意味着存在 $\omega = 0$ 的振动模式, 称为 0 模, 他是两个质点做等速度平移, 弹簧没有拉伸. 实际上对应着基矢为 $x^A = (1, 1)$, 群论不能告诉我们非 0 模是什么, 但是这是一个二维问题, 另一个本征矢量与之垂直, 只能有 $x^A = (1, -1)$, 作用得到 $\omega^2 = 2$. 这叫做呼吸模, 两个质点速度相等方向相反. 实际上如果两个质点质量不等, 也是存在 0 模的. 首先整个系统是平移不变的, 两个质点等速度移动不拉伸弹簧, 一个本征矢量为 (1,1). 由 $m_1\ddot{x_1} = -(x_1 - x_2)$, 定义 $a_i = 1/m_i$, 得到 H 矩阵 $\begin{pmatrix} (a_1 & -a_1 \\ -a_2, a_2) \end{pmatrix}$, 这是一个非实对称矩阵, 本征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a_1 + a_2$.

11.3 The triangular ”molecule”

对于三个分子的谐振, 三个分子构成三阶置换群 S_3, 特征标表如下:

S_3	n_c	c	1	$\bar{1}$	2
	1	I	1	1	2
Z_3	2	$(123), (132)$	1	1	-1
Z_2	3	$(12), (23), (31)$	1	-1	0

这个群有三个等价类, 三个不可约表示, 两个一维的, 一个二维的. 对于三个分子, 自由度是 $DN = 3 \cdot 2 = 6$, 构成 6 维的可约表示,$\chi(c) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. 根据

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = N(G) \sum_r n_r^2$$

得到 $1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 2^2 = 6 \sum_r n_r^2, \sum_r n_r^2 = 8$. 可以看出系统存在 0 模, 在 x,y 方向的平移, 构成一个不可约 2 维表示. 根据

$$\sum_c n_c \chi^{*(r)}(c)\chi(c) = N(G) n_r$$

得到

$$n_1 = (1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2)/6 = 2$$

$$n_2 = (1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot -1 \cdot 2)/6 = 0$$
$$n_3 = (1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot -1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 2)/6 = 2$$

所以只可能是 $n_1 = 2, n_{\bar{1}} = 0, n_2 = 2$ H 可以写成一个 6 维矩阵,

$$H = \begin{pmatrix} \omega_{(1)}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{(1)}^{\prime 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{(2)}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{(2)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{(2)}^{\prime 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{(2)}^{\prime 2} \end{pmatrix}$$

如图, 我们考虑所有的振动模, 图 a 是两个平移零模, 图 b 是一个一维的转动模, 没有另个

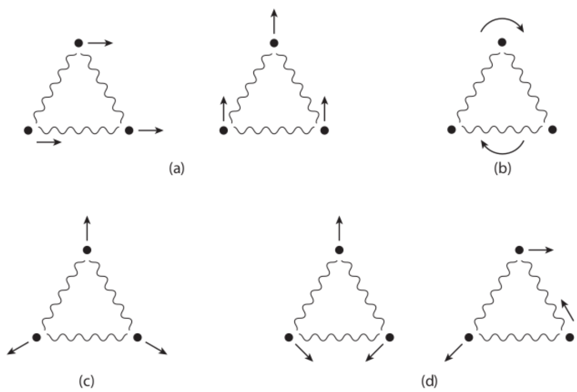


Figure 1: 三分子谐振模

方向的转动模, 因为牛顿方程是时间反演对称的, 还有一个一维的呼吸模如图 c. 实际上还有一个二维的不可约表示, 如图 D 所示, 我们已经知道了 4 个本征矢量, 可以列出 4 个正交方程, 只有两个未定量, 这可以设出. 实际上我们可以得到本征值的, 因为三个零模本征值为 0, 剩下的三个本征值只有两个不可约表示, 所以是简并的, 也即是上图的下一行, 两个本征频率是一样的.

12 Symmetry in the Laws of Physics :Lagrangian and Hamiltonian

如果在一个方程中, 所有的物理量以同一种方式变换, 我们就说该方程具有协变性.

12.1 Lagrangian

给定一个在一维势场中运动的粒子, 牛顿形式为

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -V(q')$$

写出该系统的作用量

$$S(q) = \int dtL(\frac{dq}{dt}, q) = \int \{\frac{1}{2}m(\frac{dq}{dt}^2) - V(q)\}$$

拉格朗日量就是粒子的动能减去势能,$\frac{1}{2}m(\frac{dq}{dt}^2) - V(q)$. 作用量是一个泛函, 他是函数的函数, 给定一个函数, 他便给出一个数. 我们对此进行变分, 固定端点值, 我们通过变分求得作用量的极值, 得到的函数 $q(t)$ 就是实际粒子走过的路径. 具体:

$$\delta S(q) = \int dt\delta L(\frac{dq}{dt}, q) = \int dt(\frac{\delta L}{\delta \frac{dq}{dt}}\delta\frac{dq}{dt} + \frac{\delta L}{\delta q}\delta q)$$

变分和微分可交换顺序, 得到

$$\delta S = \int (\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \frac{dq}{dt}}) - \frac{\delta L}{\delta q})\delta q(t)$$

边界条件使得分步积分的第一项消失了, 由于 δq 的任意性, 在取极值时 $\delta S = 0$, 就得到欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \frac{dq}{dt}}) - \frac{\delta L}{\delta q} = 0$$

实际上这只不过是一个多元函数求全微分得到的表达式而已, 变分和求微分的步骤是一样的. 使用莱布尼兹记号写成更紧凑的形式

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}) = \frac{\delta L}{\delta q}$$

对于牛顿形式是一个微分方程, 他考虑的局部极小过程, 而拉格朗日方程给出的是运动的整体过程.
作用量 S 在一个对称群变换下是不变的,S 是一个对称群的平凡表示.

12.2 The Hamiltonian

对拉格朗日量做勒让德变换得到哈密顿量, 给定 $L(\dot{q}, q)$, 定义动量 $p = \delta L/\delta\dot{q}$,

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(\dot{q}, q)$$

对于绝大多数系统, 哈密顿量就是系统的总能量. 写出哈密顿正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

给定哈密顿量或者拉格朗日量, 我们可以写出运动方程, 实际上找出系统的协变的运动方程, 要比找出在相同变换下不变的拉格朗日量要难得多. 艾米诺特曾经证明任何一个守恒量都对应着拉格朗日量一个连续的对称性, 也即是一个李群的的生成元.

13 Tensors and Representations of the Rotations Groups SO(N)

13.1 Representation the rotation groups

怎样表示特殊正交群 SO(N) 呢? 首先 SO(N) 群的群元 R 满足, 他的所有 N 维矩阵满足

$$R^T R = I \ \ detR = 1$$

在定义表示中,SO(N) 群的群元用 N-N 矩阵来表示, 将 N 个基底 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ 变成他们的线性组合, 更精确的说,N 维的不可约表示是由矢量组成的. 我们定义矢量为他在转动下变换

$$V^i \to V'^i = R^{ij} V^j, j = 1, 2, \cdots, N$$

对于 SO(2) 群, 他其实是 Z_n 群的同构. 可以有无穷多个 1 维的不可约表示, 用 $k = 1, 2, \cdots, N$ 来标记. 群元 $e^{i2\pi j/N}$ 在 k 表示下, 为 $D^{(k)}(e^{i2\pi j/N}) = e^{i2\pi j/N}$. 将 $N \to \infty$, 就构成 $SO(2)$ 群. 遵守 $D^{(k)}(\theta)D^k(\theta') = e^{ik\theta}e^{ik\theta'} = e^{ik(\theta+\theta')} = D^{(k)}(\theta+\theta') and D^k(2\pi) = 1$. 但是对于 SO(3) 群而言, 不能如此简单, 子群的不可约表示不能被放进群的不可约表示中. 但是 SO(3) 的确是含有无穷多个 1 维不可约表示处.

13.2 The difination of Tensors

定义张量:

$$T^{ij} \to T'ij = R^{ik} R^{jl} T^{kl}$$

带有两个指标, 这里实际是一个包含了对 k, l 的求和, 是将一个张量变成他的线性组合. 同样我们还可以定义更多阶的张量

$$W^{ijn} \to W'^{ijn} = R^{ik} R^{jl} R^{mn} W^{klm}$$

如果我们将 9 个分量 T^{ij} 写成一个列向量, 那么这个线性组合就可以用 9 维的矩阵来表示. 对于任何一个转动, 用 3-3 矩阵来表示. 我们能用 9-9 矩阵来表示. 给定 9 维的 SO(3) 的表示,

$$T^{ij} \to T'^{ij} = R_1^{ik} R_2^{jl} T^{kl}$$

$$T''^{ij} = R_2^{1k} R_2^{jl} T'^{kl} = R_2^{ik} R_1^{km} R_2^{jl} R_1^{ln} T^{mn} = (R_2 R_1)^{im} (R_2 R_1)^{jn} T^{mn}$$

实际上满足表示规则. 根本原因在与所有的指标变换都是独立的, 互不干扰的. 这个张量 T 就构成了 SO(3) 的一个 9 维的表示. 当然他是可约的, 如果这 9 个元 T^{ij} 在变换下组成一个小集体, 也即是说在 T 的一个子集下是封闭的, 实际上这些封闭变换的 T^{ij} 就构成一个不可约表示. 的确在这个 9 维表示中的确存在这些子集, 所以是可约的. 我们通常是将张量 T 分别进行全对称和全反称化, 这些张量元不是全部独立的, 独立元的个数也即是不可约表示的维数. 对 T 进行反称化 $A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}$, 毫无疑问这也是一个张量. 实际上他只有 3 个独立元 A^{12}, A^{13}, A^{23}. 推广到 N 阶的全反称张量, 是只有 $N(N-1)/2$ 个独立元, 也即是构成 $N(N-1)/2$ 维的不可约表示. 对 T 进行全对称化 $S^{ij} = T^{ij} + T^{ji}$, 他有 6 个独立元, 也就构成 6 维表示. 推广到 N 维是 $N(N+1)/2$ 维表示. 但是还没完. 我们可以将 S 无迹化得到 $\tilde{S}^{ij} = S^{ij} = \delta^{ij}(S^{kk}/N)$. 因为

$$S^{ii} \to S^{'ii} = R^{ik} R^{il} S^{kl} = (R^T)^{ki} R^{il} S^{kl} = (R^{-1})^{ki} R^{il} S^{kl} = \delta^{kl} S^{kl} = S^{kk}$$

所以, 这些对角元构成了一个子集. 可以将迹拿出去, 构成一个 Travil 的 1 维表示, 在 $\tilde{S}$ 也就剩下 5 个独立元 $\tilde{S}^{23}, \tilde{S}^{12}, \tilde{S}^{13}, \tilde{S}^{11}, \tilde{S}^{22}$, 也就构成 5 维不可约表示. 这个过程实际是对原矩阵 (张量 T) 做了一个基底变换, 换了一组基底罢了.T^{ij} 分别变成 $T^{12}-T^{21}, T^{23}-T^{32}, T^{13}-T^{31}, T23+T^{32}, T^{12}+T^{12}, T^{13}+T^{31}, T^{11}, T^{22}, T^{11}+T^{22}+T^{33}$. 一旦我们选定了一组可以是矩阵分块对角的基底, 这个分解就对所有的转动元成立. 也即是说存在一个相似变换使得所有的 D(R) 同时分块对角. 上述过程可以写成 $3\otimes 3 = 1\oplus 3\oplus 5$, 推广写出为 $N\otimes N = 1\oplus N(n-1)/2\oplus N(N+1)/2-1$.

13.3 Invariant Symbol

$\delta^{ij}R^{ik}R^{jl} = \delta^{kl}$, 实际上意味着正交对应于 O. 在 N 维空间, 反对称符号带有 N 个指标, 满足 $\varepsilon^{\cdots l\cdots m\cdots} = -\varepsilon^{\cdots m\cdots l\cdots}, and\varepsilon^{12\cdots N} = 1$. 这代表了矩阵行列式为 1, 即 S. 同样满足 $\varepsilon^{ijk\cdots n}R^{ip}R^{jq}R^{kr}\cdots R^{ns} = \varepsilon^{pqr\cdots s}\det R$. 可以这样看, 当用 δ 和 ε 作用到群元 R 时, 他们得到自己. 对与对称张量, 与 ε 缩并得 0, 而反称张量与 ε 缩并后只是改变指标.

13.4 Dual tensors

给出一个反对称张量 A^{ij}, 我们可以定义 $B^{k\cdots n} = \varepsilon^{ijk\cdots n}A^{ij}$, 这个 B 张量实际上是一个带有 N-2 个指标的反对称张量. 由 $\varepsilon^{ijk\cdots n}R^{ip}R^{jq} = \varepsilon^{pqr\cdots s}R^{kr}\cdots R^{kr}$ 我们有

$$B^{k\cdots n} \to \varepsilon^{ijk\cdots n}R^{ip}R^{jq}\cdots A^{pq} = \varepsilon^{pqr\cdots s}R^{kr}\cdots R^{ns}A^{pq} = R^{kr}\cdots R^{ns}B^{r\cdots s}$$

我们称 A 和 B 是对偶的, 实际上这里是包含了重复指标的求和. 对于三维情形,$B^k = \varepsilon^{ijk}A^{ij}$,B 是一个向量. 这个地方是 3 维或者 SO(3) 独特的地方.
我们现在可以构造 SO(N) 的更高维的不可约表示了. 我们可以构造更多指标的张量 $T^{ijk\cdots n}$, 这叫张量表示. 他们变换遵守同样的规则, 由于各指标对独立变换, 前后的张量就有相同的指标对称形式. 这样就实际上对构造全反称或者全对称的张量产生麻烦.

13.5 Contracting of Indices

当我们将张量的指标两个写成一样的时候, 我们实际上是进行了缩并, 也就是对这两个指标进行求和, 产生的新张量实际是 N-2 个指标的张量.
为甚么 SO(3) 很特殊的, 关键在于 3-2=1, 一个反对称指标对偶于一个指标, 我们只需考虑对称无迹指标张量 $S^{i_1 i_2\cdots i_j}$, 这样 $\delta^{ij}S^{ij\cdots k} = 0$. 对于三阶张量而言, 我们只需考虑对称张量 $T^{\{ij\}k}$, 把他写出 $3T^{\{ij\}k} = (T^{\{ij\}k} + T^{\{jk\}i} + T^{\{ki\}j}) + (T^{\{ij\}k} - T^{\{jk\}i}) + (T^{\{ij\}k} - T^{\{ki\}j}$, 这样第一项是全对称的, 是 3 个元素的全置换. 后两项是反称的, 用 $\varepsilon^{jil}, \varepsilon^{kjl}$ 乘上就得到两个二阶张量, 完成指标降阶. 唯一的新的东西就是全反称无迹张量 $\tilde{S}^{ijk} = S^{ijk} - \frac{1}{N+2}(\delta^{ij}S^{hhk} + \delta^{ik}S^{hhj} + \delta^{ik}S^{hhi})$.

13.6 Dimension of the irreducible representations of SO(2)

考虑 $S^{i_1 i_2\cdots i_j}$ 的独立元的个数, 他给了不可约表示的维数, 用 j 表示.$j = 1, 2, \cdots N$. 总共有

$$\sum_{k=0}^{j}(k+1) = (k+1) = \frac{1}{2}j(j+1) + (j+1) = \frac{1}{2}(j+1)(j+2)$$

但是我们考虑无迹条件 $\delta^{i_1i_2}S^{i_1i_2\cdots i_j}=0$, 所以最后就有 d=(2j+1) 个不可约表示. 对于 SO(2) 来说, 他有 N=2, 所有的不可约表示都是二维的

$$D^{(j)}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos j\theta & \sin j\theta\\ -\sin j\theta & \cos j\theta\end{pmatrix}$$

但实际这是错误的, 所有的表示都是 1 维的. 这个实际是可约的

$$\begin{aligned}U^\dagger D^j(\theta)U&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}\cos j\theta & \sin j\theta\\ -\sin j\theta & \cos j\theta\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^{ij\theta} & 0\\ 0 & e^{-ij\theta}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

可见的确被对角化了, 这里的的幺正矩阵实际是表示矩阵的本正矢量张成的矩阵. 在高维空间的转动群 SO(N). 因为他指标包含着复杂的置换对称关系, 所以用 ε 缩并并不会降低指标. 在置换指标时, 我们考虑的是置换群, 这和张量构成表示的那个群没有关系.

13.7 Self-dual and antiself-dual

偶数维空间转动群 $SO(2n)$ 有着额外的特征, 他有着对偶和反对偶张量. 考虑带有 n 个反对称指标的张量 $A^{i_1i_2\cdots i_n}$, 共有 $2n(2n-1)\cdots(n+1)/n!=(2n)!/(n!)^2$ 个元素, 它构成一个可约表示. 实际上 $B^{i_1i_2\cdots i_n}=\frac{1}{n!}\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_ni_{n+1}\cdots i_{2n}}A^{i_{n+1}i_{n+2}\cdots i_{2n}}$ 是和 A 对偶的. 实际上 A 也是和 B 对偶的. 构造 $T_+=A+B$ 是自对偶的,$T_-=A-B$ 是反对偶的. 所以这个 A 可以约化为 2 个表示. 维度为 $(2n)!/(2(n!)^2)$.
当我们将一个群的不可约表示限制在他的子群上时, 这个不可约表示通常会分解成子群的不可约表示的直和. 这是很好理解的, 对于 SO(4) 的 4 维矢量表示, 他在限制在子群 SO(3) 时, 会分解成 $4\to3\oplus1$. 而他的 6 维表示 (反对称二阶张量) 会分为 A^{14},A^{24},A^{34} 和 A^{12},A^{23},A^{13} 即 $6\to3\oplus3$. 这在物理学上实际是电磁场张量分解

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_1 & -E_2 & -E_3\\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2\\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1\\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0\end{pmatrix}$$

9 维表示 (对称 2 阶张量) 会分解成 $9\to5\oplus3\oplus1$s 三个不可约表示.

13.8 The adjonint representation and the Jacobi identity

对于 SO(3) 群来说, 他的定义表示给出 3 个生成元, 也就给出了李代数结构.

$$J_x=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},J_y=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},J_z=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[J_a,J_b]=i\varepsilon_{abc}J_c,\ a,b,c=x,y,z$$

ε_{abc} 给出对易关系, 实际上这是个 3 阶张量, 若是固定一个指标就给出一个矩阵. 我们发现 $(J_a)_{bc}=-i\varepsilon_{abc}$, 这个在小括号里面的 a 是指固定了 a 指标. 这只是一个巧合, 因为对于

SO(N) 来说, 共有 N 个生成元, 而 f^{abc} 却可以取遍 $N(N-1)/2$ 个指标. 只有 N=3, 这两个值相等.
但是结构常数 ε 的确构成一个不可约表示, 叫做伴随表示. 引入雅克比恒等式

$$[A,B],c]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$$

A,B,C 是矩阵或者是算符. 由于李代数是可以定义为

$$[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$$

a,b,c 可以取遍 n 个值,n 是生成元的个数. 根据雅克比恒等式, 第一项写为

$$if^{abc}[T^d,T^c]=(if^{abd})(if^{dcg})T^g$$

这意味着生成元的对易关系实际是生成元的线性组合. 我们得到

$$f^{abd}f^{dcg}+f^{bcd}f^{dag}+f^{cad}f^{dbg}=0$$

定义矩阵 $(T^b)^{cd}=-if^{bcd}$, 这样就将结构常数定义为了矩阵. 前两式的 T^b 代表不同的含义, 前式代表某个李代数的生成元. 而下面的代表伴随表示的特定矩阵表示.$(T^b)^{cd}=-if^{bcd}$ 定义了 $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$ 的一个表示. 即

$$([T^a,T^b])^{cg}=if^{abd}(T^d)^{cg}$$

总而言之, 李代数的结构常数定义了代数的一个伴随表示, 维度是生成元的个数.
那么 SO(N) 群的伴随表示呢?SO(N) 群的生成元的个数是 $N(N-1)/2$. 不可约表示的生成元使用反对称张量

$$J^{ij}_{mn}=(\delta^{mi}\delta^{nj}-\delta^{mj}\delta^{ni})$$

m,n 表示我们在讨论 $N(N-1)/2$ 中的哪一个矩阵 (独立元素).i,j 表示这个矩阵里的元素, 共有 N^2g 个. 我们将反对称张量 T^{ij} 写成 N 维矩阵, 他是 J_a 的线性组合 (实际 J_a 是他的独立元).

$$T^{ij}=\sum_{a=1}^{\frac{1}{2}N(N-1)}A_aJ^{ij}_a=A_aJ^{ij}_a$$

这中间有重复指标求和.$a=1,2,3\cdots1/2(N-1)N$,$i=1,2,3\cdots N$. 这个式子实际是双线性函数, 对 A_a 和 J_a 都是线性组合. 那么 A_a 是怎么变换的呢? 考虑 $T\to T'=RTR^T=RTR^{-1}$, 对于无限小转动,$R=I+\theta_aJ_a$. 所以 $T'=(I+\theta_aJ_a)T(I+\theta_aJ_a)^{-1}=T+\theta_a[J_a,T]$, 所以

$$\delta T=\theta_aT_b[J_a,J_b$$

考虑到李代数是靠生成元的对易关系和结构常数决定的, 那么我们可以写出 $\delta A=\delta A_cJ_c=\theta_aA_b[J_a,J_b]=\theta_aA_bf_{abc}J_c$, 得到

$$\delta A_c=f_{abc}\theta_aA_b$$

这 $N(N-1)/2$ 个 A_a 按照上式变换构成一个伴随表示.

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lnk}=\delta^{il}\delta^{jn}-\delta^{in}\delta^{jl}$$

14 Lie Algebra of SO(3) and Ladder Operators: Creation and Annihilation

14.1 The Ladder Operation and decomposition of representation

SO(3) 的李代数表示就是三个生成元, 这三个生成元不是对易的, 所以他们不能被同时对角化, 我们可以将 J_z 对角化, 在这组基底下讨论. 定义升降阶算符 $J_+ = J_x + J_y, J_- = J_x - J_y$, 满足

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z$$

在 Dirac 记号下表示

$$J_z|m >= m|m >$$

$$J_+ = \sqrt{(j+1+m)(j-m)}|m+1>$$

$$J_- = \sqrt{(j+1-m)(j+m)}|m-1>$$

可见分别将" 梯子" 升了或降了一级, 梯子是有头有尾的, 对于角动量量子数 j,m 只能取 $-j, -j+1, \cdots j-1, j$ 这 2j+1 个值,j 可以取正整数或者半整数, 这意味着自旋.
我们将 $SO(3)$ 的两个表示乘起来, 给定 $SO(3)$ 的两个张量: 对称无迹张量 S^{ij} 和矢量 T^k, 他们构成了 5 维和 3 维的不可约表示. 他们的直积 $P^{ijk} = S^{ij}T^k$ 是 1 个三阶张量, 明显的有 15 个元素. 它具有前两个指标的对称性, 所以是可约的, 现在就是要将 P^{ijk} 写成对称无迹张量的线性组合. 考虑对称张量 $U^{ijk} = S^{ij}T^k + S^{jk}T^i + S^{ki}T^j$. 迹是 $U^k = \delta^{ij}U^{ijk} = 2S^{ik}T^i$. 定义无迹张量 $\tilde{U}^{ijk} = U^{ijk} - \frac{1}{5}(\delta^{ij}U^k + \delta^{jk}U^i + \delta^{ki}U^j)$, 他有 7 个元素 (123,331,221,332,112,113,223), 构成 7 维不可约表示. 然后考虑 $S^{ij}T^k$ 的反对称部分, 缩并 $V^{il} = S^{ij}T^k\varepsilon^{jkl}$. 这个张量是无迹的, 他有八个元素. 他的对称和反称部分分别:$W^{il} = V^{il} + V^{li}, X^{il} = V^{il} - V^{li}$. 反对称部分:$\frac{1}{2}X^{il}\varepsilon^{mil} = S^{ij}T^k\varepsilon^{jkl}\varepsilon^{mil} = S^{ij}T^k(\delta^{jm}\delta^{ki} - \delta^{ji}\delta^{km}) = S^{im}T^i = \frac{1}{2}U^m$. 它构成 3 维不可约表示. 对称部分 $W^{il} = S^{ij}T^k\varepsilon^{ikl} + S^{lj}T^k\varepsilon^{jkl}$, 它构成 5 维不可约表示. 这样

$$5 \otimes 3 = 7 \oplus 5 \oplus 3, \quad 15 = 7 + 5 + 3$$

推广到特殊情形, 实际上是给定两个对称无迹张量 $S^{i_1 i_2 \cdots i_j}$ 和 $T^{i_1 \cdots i_{j'}}$, 他们的直积是一个张量带有 $j + j'$ 个指标. 我们将其对称化, 并且将他无迹化, 就得到了用 $j + j'$ 标志的不可约表示. 使用 ε^{ikl} 缩并,i 属于 S,k 属于 T, 这样就得到有 $j + j' - 1$ 个指标的张量, 得到了不可约表示 $j + j' - 1$. 重复此步骤. 最后得到

$$j \otimes j' = (j + j') \oplus (j + j' - 1) \oplus \cdots \oplus (|j - j'| + 1) \oplus |j - j'|$$

14.2 Casimir invariant

所谓卡斯米尔不变量实际是总角动量算符.$SO(3)$ 群的生成元 J_x, J_y, J_z 就像一个矢量在转动下变换:$\delta\vec{J} = \vec{\theta} \otimes \vec{J}$. 这意味存在不变量 $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. 可见 $[J_i, J^2] = 0, [J_\pm, J^2] = 0$. 这意味这些量有相同的本征矢量.

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$$

$$J^2|i, m >= j(j+1)|j, m >$$

我们将三个生成元写成算符形式

$$L_x = i(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}), L_y = i(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}), L_z = i(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})$$

他们满足同样的对易关系. 可见这个函数满足

$$\vec{L}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi), \quad L_z Y_l^m(\theta,\varphi) = mY_l^m(\theta,\varphi)$$

其中 $l = 0, 1, 2 \cdots, m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l$, 这个 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 叫做球谐函数. 将 $L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, 可以看做沿 Z 轴旋转, 这样 $L_\pm = e^{\pm i\varphi}(i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm \frac{\partial}{\partial\theta})$,

$$L^2 = -(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})$$

$$Y_l^m = N_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos\varphi), \qquad P_l^m(\cos\theta) \text{ is associated Legendre function}$$

14.3 Heisonberg algebra and creation and annihilation operators

动量 p 和位置 q 满足对易关系 $[q,p] = i, q = x, p = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. 这样我们定义算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip), a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip)$$

为湮灭和创生算符. 满足

$$[a, a^\dagger] = 1$$

定义厄米算符 $N = a^\dagger a$, 他能被对角化, 本征值为 n, 本征态为 |n>,n 是一个实数.

$$[a, N] = a, \qquad [a^\dagger, N] = -a^\dagger$$

得到 $Na|n >= (n-1)a|n >, a|0 >= 0$, 得到

$$a|n >= \sqrt{n}|n-1>, \qquad a^\dagger|n >= \sqrt{n+1}|n+1>$$

数列 $n = 1, 2, 3, \cdots$,|0> 是真空态, 真空态也有着巨大的能量, 这直接导致了不确定原理. 这个无穷维度的矩阵 a 只有在上次对角位置有非零元 $A_{n-1,n} =< n-1|a|n >= \sqrt{n}$. 相反 $a^\dagger$ 的矩阵就是只有下次对角有非零矩阵元.

14.4 The Jordon-Schwinger constrution of the angular momentum algebra

约当和施温格把

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z$$

中的角动量算符代数分解成两个产生和湮灭算符表示. 考虑算符 a,b 满足 $[a,b] = 0, [a^\dagger, b] = 0, [a^\dagger, a] = -1, [b, b^\dagger] = 1$, 这样

$$[a^\dagger a - b^\dagger b, a^\dagger b] = 2a^\dagger b, \qquad [a^a - b^\dagger b, b^\dagger a] = -2b^\dagger a, \qquad [a^\dagger b, b^\dagger a] = a^\dagger a - b^\dagger b$$

可见对应关系为

$$J_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), \qquad J_+ = a^\dagger b, \qquad J_- = b^\dagger a$$

可以在物理上这么考虑,$a^\dagger$ 相当于放进一个自旋为 1/2 的粒子且自旋向上,a 就意味着拿掉一个自旋为 1/2 的自旋向下的粒子.$b^\dagger$ 相当与放进一个自旋 1/2 自旋向下的粒子,b 相当与拿掉一个自旋为 1/2 自旋向下的粒子.$a^\dagger b$ 相当于自旋反转朝上. 结果满足

$$|j,m>= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}(a^\dagger)^{j+m}(b^\dagger)^{j-m}|0,0>$$

$$J_+|j,m>= a^\dagger b|j,m>= \sqrt{(j+1+m)(j-m)}|m+1>$$

14.5 The Dirac construction of the angular momentum algebra

使用狄拉克符号左右矢可以简化计算. 给定两个右矢 |m>,|n>, 和相应左矢 |m>,|n>. 正交化 $<m|n>= 0, <m|m>= 1$. 写出

$$J_z = \frac{1}{2}(|+><+| - |-><-|), \qquad J_+ = |+><-|, \qquad J_- = |-><+|$$

$$J_+J_- = |+><+|, J_-J_+ = |-><-|, [J_+, J_-] = |+><+| - |-><-|, [J_z, J_+] = J_+$$

15 Angular Momentum and Clebsch-Cordan Decomposition

结合量子力学角动量及左右矢去探究角动量的耦合. 给定两组右矢 $|j,m>$ 和 $|j',m'>$,$m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$,$m' = -j', -j'+1, \cdots, j'-1, j'$, 分别有 (2j+1) 和 (2j'+1) 个态. 两个矢量耦合有 (2j+1)*(2j'+1) 个态. 这些就是构成 $SO(3)$ 的一个不可约表示. 我们将 $|j,m>\otimes|j',m'>=|j,j',m,m'>$.

15.1 the Clebsch-Gordan decomposition

所谓的克莱布希-戈登系数及分解就是将一个组合态 (直积) 表示成各个组态直和的形式.

$$|J,M>= \sum_{m+m'=M, m=-j, m'=-j'}^{j,j'} |j,j',m,m'><j,j',m,m'|J,M>$$

系数就是 $<jj'mm'|JM>$, 例 $|2,0>= \frac{1}{\sqrt{6}}(|-1,1>+2|0,0>+|1,-1>)$, 左边是 |JM>,2 是总角动量,0 是总磁量子数, 而右边的是两个态的分磁量子数 $|m,m'>$. 通常的做法就是将先写出 $|J,j+j'>|j,j'>$, 然后对 |j,j'> 分别使用 J_- 算符作用, 得到系数和态矢组合. 直到台阶底部 |J,-j-j'>. 当然也可以反着去递推使用 J_+. 背后的数学就是将不可约表示直积然后将其分解为直和的形式.

15.2 Wigner-Eckart theorem

在量子力学中, 我们把由于微扰 (电磁场比如), 导致的由初态 |i> 到末态 |f> 的跃迁振幅记做 <i|O|f>. 在原子物理学中, 初末态的转变就像 $SO(3)$ 群的一些不可约表示. 我们记做 $|i>=|\alpha,j,m>,|f>=|\alpha',j',m'>.\alpha,\alpha'$ 代表主量子数, 不由 O 决定. 其他的量子数在偶极跃迁下会遵从跃迁选择定则 $J=1,M=0,-1,1$ 魏格纳定理是

$$<\alpha',j',m'|O_{jm}|\alpha,j,m>=(<j',m'|(|JM>\otimes|j,m>))<\alpha',j'||O_j||\alpha,j>$$

$$=<j',m'|J,j,M,m><\alpha',j'||O_j||\alpha,j>$$

这个振幅因子就是 $|JM>\otimes|j,m>$ 是和对称性和动力学有关, 而 $<\alpha',j'||O_j||\alpha,j>$ 叫做算符的诱导矩阵元, 他需要写出薛定谔方程并对初末态积分. 群论告诉我们 $<\alpha',j'||O_j||\alpha,j>$ 不依赖于 m,m', 这个定理的精髓就是 $<j',m'|J,j,M,m>$, 即克莱布希-戈登系数,$O_j|\alpha,j,m>=|J,j,M,m>$, 这两个东西是一回事.

16 Tensors and Representations of the Special Unitary SU(N)

16.1 The Special Unitary Group SU(N)

对于 SU(N) 群, 又称特殊幺正群. 所有的特殊幺正矩阵 (注意这里使用了矩阵去定义群, 实际上是定义了定义表示) 构成了特殊幺正群, 满足 $detU=1,U^\dagger U=I$. 与特殊正交群的不同之处就在于引入了复数.
考虑矢量 v 在 SO(N) 群群元 O 作用下保持长度不变, 即 $v^Tv=v'^Tv,v'=Ov$, 这个条件要强于 u^Tv 在转动下保持不变. 考虑 v^Tv 不变, 令 $v\to v+\lambda u$, 则 $(v+\lambda u)^T(v+\lambda u)=v^Tv+\lambda(u^Tv+v^Tu)+\lambda^2u^Tu$ 保持不变, 意味着 u^Tv+v^Tu 不变, 即 u^Tv 不变. 根据李群, 令 O=I+A, 代入上式可得 $A^T+A=0$, 即 A 是反对称矩阵, 可以写成 $N(N-1)/2$ 个反对称矩阵的线性组合. 但是对于 $SU(N)$ 来说, 此时是 $v^\dagger v$ 保持不变,$v\to v'=Uv=\sum_{j=1}^N v^{*j}v^j=v^{*T}v=v^\dagger v$.

16.2 SU(N) as a subgroup of U(N)

特殊幺正群是 $U(N)$ 的子群, 只不过是将 det$U=e^{i\alpha}$ 限制为 $det=1$. 首先对于 U(1) 群, 他的群元很明了, 就是 $e^{i\phi},0\le\phi\le2\pi$. 所以对于一般的 N,U(N) 有两组群元, 第一组形如 $e^{i\phi}I$, 构成 U(N) 的子群, 这个所有的群元与 $U(1)$ 有着一一到上的映射, 实际是同构于 U(1). 另一组是有着行列式为 1 的 N 阶矩阵, 构成 $SU(N)$, 是和 $U(1)$ 对易的. 低阶幺正群有着高阶群没有的性质是与反对称符号所带的指标有关.
怎样构建 $SU(N)$ 群的张量表示呢?? 首先写出其中得 $SU(3)$ 的张量 T^{ijk}, 有三个指标, 每个可取 1 到 3, 且是全对称的, 所以共有 $333,332,331,322,321,311,222,221,211,111$, 这 10 种形式, 因此是一个 10 维的表示, 实际上这也是一个不可约表示, 这和之前的情况不同, 不能在这个全对称张量中取处迹, 因为这里涉及到负数, 不能使用 δ 去缩并, 所以没有之前意义上的迹. 这个 10 维表示实际上是存在 10 种重子有关, 构成强相互作用群 $SU(3)$ 的一个不可约表示. 对于一般情况,N=3, 张量若有 m 个指标, 也就有 $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 个独立元. 那么我们怎么取迹呢? 这里实际是取共轭转置. 实际上在 $SU(N)$ 群中我们必须引

入两种指标, 上指标和下指标. 张量的缩并就是上下指标的缩并, 是靠体元也就是 ϵ 升降指标去缩并. 实际上这里的就要求指标平衡. 上指标是逆变的, 实际上是矢量空间. 下指标是协变的, 对应于对偶矢量空间. 在引入复矢量后, 我们定义复矢量复共轭记为 $\phi^{i*} = \phi_i$. 这样就完全符合上下指标缩并, 因为此时得到的是一个不变量 (在幺正操作), 即对应与标量. 这样就有两种变换方式

$$\phi^i \to \phi^{'i} = U^i_j \phi^j$$

$$\phi_i \to \phi'_i = \phi_j (U^\dagger)^j_i$$

$$\zeta_i \phi^i \to \zeta'_i \phi^i = \zeta_j (U^\dagger)^j_i U^i_k \phi^k = \zeta_j (U^\dagger U)^j_k = \zeta_j \delta^j_k \phi^k = \zeta_j \phi^k$$

总而言之, 上指标用 U 变换, 下指标用 $U^\dagger$ 变换.
那么, 现在张量也可以有上下指标,$\varphi^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$. 考虑简单情况 φ^{ij}_k, 我们有

$$\varphi^{ij}_k \to \varphi^{'ij}_k = U^i_l U^j_m (U^\dagger)^n_k \varphi^{lm}_k = U^i_l U^j_m \varphi^{lm}_n (U^\dagger)^n_k$$

现在我们知道怎样求迹, 我们将上下指标相等然后求和. 考虑 $\delta^k_k \varphi^{ij}_k = \varphi^{ii}_j$, 他这样变换

$$\varphi^{ii}_j \to U^i_l U^j_m (U^\dagger)^n_j = U^i_l \delta^n_m \varphi^{lm}_n = U^i_l \varphi^{lm}_m$$

总而言之, 带有上下指标的无迹张量组成构成 $SU(N)$ 的表示. 张量的指标的置换性质不会在群元的作用下改变. 对与 φ^{ij}_k 形式的张量,ij 指标可以是交换对称和反称的. 对称张量组成一个 $\frac{1}{2}N(N-1)(N+2)$ 维的不可约表示, 反对称张量构成一个 $\frac{1}{2}N(N-2)(N+1)$ 维的不可约表示. 总结起来就是 SU(N) 的不可约表示是有指标置换具有明确对称性的张量构成. 对于 $\varphi^i, \varphi^{ij}(antisymmetry), \varphi^{ij}(symmetry), \varphi^i_j$ 组成的不可约表示分别为 $N, N(N-1)/2, N(N+1)/2, N^2-1$ 维.
我们可以利用特殊性即 $detU = 1$, 写开矩阵的行列式得:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} U^{i_1}_1 U^{i_2}_2 \cdots U^{i_N}_N = 1$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} U^1_{i_1} U^2_{i_2} \cdots U^N_{i_N} = 1$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} U^{i_1}_{j_1} U^{i_2}_{j_2} \cdots U^{i_N}_{j_N} = \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

实际上我们也可以在上式两端乘上 $(U^\dagger)^{j_N}_{p_N}$(注意这个 p 是暴露的, 不参与求和), 可以不断重复此过程, 这样就可以写出

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{N-1} i_{p_N}} U^{i_1}_{j_1} U^{i_2}_{j_2} \cdots U^{i_{N-1}}_{j_{N_1}} = \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N} (U^\dagger)^{j_N}_{p_N}$$

这样我们使用两个对偶的反称符号, 就可以将上下指标进行升降. 实际上对于 $SU(2)$ 群来说, 只需要一种指标就可以了.

16.3 From group to algebra

当我们考虑 $SU(N)$ 群的李代数时, 将 $U = I + iH$,H 是一个小的复矩阵.$U^\dagger U = (I - iH^\dagger)(I + iH) = I - i(H^\dagger - H) = I$, 推知 $H^\dagger = H$, 这意味着 H 是厄米的. 我们可以

写出 $U = e^{iH}$,U 是幺正的, 那么 H 是厄米的. 我们现在计算 U 的行列式, 因为 H 是厄米的, 那么他可以被一个幺正矩阵对角化 $H = W^\dagger \Lambda W$, 对角元是 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$ 那么

$$\begin{aligned} detU &= dete^{iH} = dete^{iW^\dagger \Lambda W} = det(W^\dagger e^{i\Lambda} W) = det(WW^\dagger) dete^{i\Lambda} \\ &= dete^{i\Lambda} = \prod_{j=1}^{N} e^{i\lambda_j} = e^{i\sum_{j=1}^{N}\lambda_j} = e^{itr\Lambda} = e^{itrW^\dagger \Lambda W} \\ &= e^{itrH} \end{aligned}$$

这样我们得到 $trH = 0$, 这意味着 H 是一个无迹的厄米矩阵. 由于这是复矩阵, 实际上对于 2 阶的矩阵, 有 3 个独立元 (这些独立元的个数是不随坐标系或者基地的变化而变化的), 实际上对于 $SU(2)$, 这 H 是三个泡利矩阵的线性组合.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

那么 $H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\theta_a\sigma_a, U = e^{iH} = e^{i\frac{1}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$. 当 N=3 时, 可知有 8 个 3 阶的独立的无迹厄米矩阵 ($N^2 - 1$), 叫做盖尔曼矩阵:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

其实上述矩阵具有如下性质

$$H = \theta_a \frac{\lambda_a}{2}, \quad U = e^{iH}, \quad tr\sigma_a\sigma_b = 2\delta_{ab}, \quad tr\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$$

可见对于 $SU(N)$ 群来说, 他的定义表示具有的生成元的个数是 $N^2 - 1$ 个. 相比 $SO(N)$ 群来说, 他的定义表示的生成元的个数是 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个. 对于 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 群来说, 他们具有相同个数的参数, 实际上他俩是局部同构的.

16.4 The Structure constants of the Lie Algebra

对于一个群, 群元并不对易 (这样才能生出其他群元,Abel 群中的群元是是对易的). 李群和李代数就是抓住了这个群乘法的本质, 去研究无限小群元. 给定 $U_1 = I + A, U_2 = I + B$,A 和 B 是无限小矩阵, 那么

$$U_2^{-1}U_1U_2 = (I - B)(I + A)(I + B) = I + A + AB - BA = I + A + [A, B]$$

群元的对易关系就在于对易子 [A,B], 这样将 $A = i\sum_a \theta^a T^a, B = i\sum_b \theta'^b T^b$, 这样

$$[A, B] = -\sum_{ab} \theta^a \theta'^b [T^a, T^b]$$

问题就化为了生成元的对易子了. 因为 $[T^a, T^b]$ 是反厄米和无迹的, 他们也可以写成

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

上式要对 c 求和. 实际上结构常数 f^{abc} 是全反称的, 而不仅是前两个指标反称. 对于 $SU(2)$ 群来说, 结构常数就是 δ_{ab}.
实际上对于 $SU(N)$ 矩阵, 并不只有 N 阶的不可约表示, 其实也有其他阶数的表示, 比如 $SU(5)$, 他有 5 阶,10 阶,15 阶,24 阶的表示, 这些表示生成元的个数都是 24 个!!! 考虑一个 d 维的不可约表示的张量 φ, 他在无限接近 I 的群元作用下 $\varphi \to (I + i\theta^a T^a)\varphi$. 那么 $\delta\varphi^p = i\theta^a (T^a)^p_q \varphi^q$, 其中 T^a 是具有许多指标的 d 维张量, 但是这些指标有复杂的对称关系, 所以 T 的元素不是独立的.

16.5 The adjoint representation of SU(N)

对 $SU(N)$ 群, 由无迹张量 φ^i_j 组成的不可约表示叫做群的伴随表示, 具有 $N^2 - 1$ 维 (有 φ^i 构成的是基本不可约表示 N, 他的复共轭 φ_i 给出 N^* 不可约表示). 对于 $\varphi^i_j \to \varphi'^i_j = U^i_l (U^\dagger)^n_j \varphi^l_n = U^i_l \varphi^l_n (U^\dagger)^n_j$, 实际

$$\varphi \to \varphi' = U\varphi U^\dagger$$

φ^i_j 是一个无迹厄米矩阵, 他可以写为生成元 T^a 的线性组合 $a = 1, 2, \cdots N^2 - 1$.

$$\varphi^i_j = \sum_{a=1}^{N^2-1} A^a (T^a)^i_j = A^a (T^a)^i_j$$

其实这是一个双线性函数, 既是 T^a 的线性组合, 也是 A^a 的线性组合. 这 $N^2 - 1$ 个 A^a 给出 $N^2 - 1$ 维的伴随表示. 那么 A^a 是如何变换的呢??

$$\delta\varphi = i\theta^a [T^a, \varphi], \qquad \varphi = A^a T^a$$

$$\varphi \to \varphi' = (1 + I\theta^a T^a)\varphi(1 + i\theta^a T^a)^\dagger = \varphi + i\theta^a T^a \varphi - \varphi i\theta^a T^a = \varphi = i\theta^a [T^a, \varphi]$$

$$(\delta A^b) = i\theta^a A^c [T^a, T^c] = i\theta^a A^c i f^{acb}$$

我们得到 $\delta A^b = i\theta^a (T^a)^b_c A^c$, 对比得 $(T^a)^b_c = -if^{abc}$.
对于 $U(1)$ 群来说, 他是平凡的, 但是很重要, 他的群元有 $e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ 服从基本的指数乘法. 是一个 abel 群, 物理上电荷守恒定律对应于物理定律在将电荷场与 $e^{i\theta(x)}$ 乘机做线性组合下的不变性有关,x 是时空坐标.

17 SU(2):Double Covering and the Spinor

17.1 SU(2) is locally isomorphic to SO(3)

给出一个厄米无迹矩阵 X, 我们可以将他写成 3 个泡利矩阵的线性组合, 给定一个系数矢量, 即 $\vec{x} = (x, y, z)$, 那么 $X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$.

$$X = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

我们对上式求行列式, 可以发现 $detX=-(x^2+y^2+z^2)=-\vec{x}^2$, 也就是说这里存在这一个不变量, 就是矢量的长度. 考虑一个元素 U 是 $SU(2)$ 的群元, 那么考虑 $X'=U^\dagger XU$, 那么 X' 也是无迹厄米矩阵, 也可以写成 $\vec{x'}=(x',y',z'), X'=\vec{x'}\cdot\vec{\sigma}$. 实际上 $x'=\lambda x$, 两者是线性关系. 我们计算 $\det X'=-(\vec{x'})^2=detU^\dagger XU=(detU^\dagger)(detX)(detU)=detX=-\vec{x}^2$. 也就是说, 这个 x′ 仅仅是将 x 旋转了一个角度, 即 $x'=Rx, R\in SO(3)$. 这样也就是说, 给定一个二阶无迹矩阵在 $SU(2)$ 的变换下, 得到的新二阶无迹张量在以泡利矩阵为基底下系数变换对应这一个 $SO(3)$ 变换, 显然这里满足群乘法规则: 给定映射 $U\to R$, 那么 $(U_1U_2)^\dagger X(U_1U_2)=U_2^\dagger(U_1^\dagger XU_1)U_2=U_2^\dagger X'U_2=X''$, 对应着 $x''=R_2x'=R_2R_1x$.
实际上, 这个映射是个双射, 也就是双覆盖.$f:U\to R$. 因为 U 和 $-U$ 对应着同一个 R:$f(U)=f(-U)$, 显然 U 和-U 是不同的. 既然是双映射, 那么也就不能是同构的了他们是局部同构的. 也就是说可以在接近于单位元 I 的邻域是同构的, 这个关系和 $SU(2),SO(3)$ 有一个三维表示有关.
考虑泡利矩的性质, 他们对应与二阶单位矩阵的 3 种分解, 并且是反对易的. 可以概括为

$$\sigma_a\sigma_b=\delta_{ab}I+i\varepsilon_{abc}\sigma_c$$

定义反对易的运算符号 {}, 那么有

$$\{\sigma_a,\sigma_b\}=2\delta_{ab},\qquad[\sigma_a,\sigma_b]=2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$$

定义 $T^a=\sigma_a/2$,$[\sigma_a/2,\sigma_b/2]=i\varepsilon_{abc}\frac{\sigma_c}{2}$. 可以发现,$SU(2)$ 群的结构常数是反对称符号. 实际上这里是说 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 在李代数层面上是完全同构的, 因为在量子场论中, 我们也只是将群的李代数带入去求得拉格朗日量, 并不涉及群的具体结构.
我们可以很快的写出 $SU(2)$ 的李代数的不可约表示, 定义 $T^\pm=T^1\pm iT^2$, 我们可以写出

$$[T^3,T^\pm]=\pm T^\pm,[T^+,T^-]=2T^3$$

$SU(2)$ 的表示是 $(2j+1)$ 维的, 也就是 $j=0,1/2,1,2/3,\cdots$. 现在也就明白了 $SO(3)$ 群中出现半整数的 j, 他们只不过是 $SU(2)$ 的表示. 特别是 j=1/2 的表示, 包括 $|\frac{1}{2}>,|-\frac{1}{2}>$, 是 $SU(2)$ 的基本表示.

17.2 The group elements of SU(2)

给出一个公式 (实际上是引入矢量 U^a,V^b 对泡利矩阵进行缩并)

$$(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})(\vec{v}\cdot\vec{\sigma})=u^av^b\sigma_a\sigma_b=u^av^b(\delta_{ab}I+i\varepsilon_{abc}\sigma_c)=(\vec{u}\cdot\vec{v})I+i(\vec{u}\otimes\vec{v})\cdot\vec{\sigma}$$

我们之前将 $U=e^{i\phi_a\sigma_a/2}=e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2}$, 使用 $\vec{\varphi}=\varphi\hat{\varphi}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma})^2=\varphi^2$, 那么可写出

$$\begin{aligned}U=e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2)^n\\&=\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{\varphi}{2})^{2k}\}I+i\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{\varphi}{2})^{2k+1}\}\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\\&=\cos\frac{\varphi}{2}I+i\hat{\varepsilon}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

这个公式实际上很像欧拉公式, 的确这和转动角是有很大关系的, 说白了还是两个群的对易关系. 实际上我们可以将任意一个二阶矩阵分解成一个厄米和一个反厄米矩阵即

$M = (t + \vec{x}\cdot\vec{\sigma})e^{i\theta}e^{i\frac{\vec{\varphi}}{2}\sigma} = (t + \vec{x}\cdot\vec{\sigma})(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma})e^{i\theta}$, 这力需要 4 个独立的参数. 这里出现的半角实际上正是双覆盖的表现. 这也是因为 $x \to Rx$, 和 $SU(2)$ 群元 $X \to U^\dagger XU$. 我们计算 $U^\dagger XU$. 假定 φ 指向第三条轴, 那么可知

$$U^\dagger\sigma_1 U = \cos\varphi\sigma_1 + \sin\varphi\sigma_2 \quad U^\dagger\sigma_2 U = -\sin\varphi\sigma_1 + \cos\varphi\sigma_2$$

那么我们接着计算

$$X' = U^\dagger(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3)U = (\cos\varphi x - \sin\varphi y)\sigma_1 + (\sin\varphi x + \cos\varphi y)\sigma_2 + z\sigma_3$$

这完全是 $x' = R(\varphi)x = \cos\varphi x - \sin\varphi y, , y' = R(\varphi)y = \sin\varphi x + \cos\varphi y, z' = R(\varphi)z = z$. 这正是双覆盖的对应关系:$U(\varphi) = e^{i\varphi\sigma_3/2}$, 我们相当于绕 z 轴旋转

$$U(2\pi) = e^{i2\pi\sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = -I$$

这意味着当我们绕 $SU(2)$ 一周, 对应的转动绕 $SO(3)$ 两周.
对于 $SU(2)$ 群来说, 他的张量表示不需要下指标, 而且上指标是全对称的. 因为他的反对称指标是有 ε_{ab} 和 ε^{ab}, 我们可以将所有下指标全部升上去或者缩并. 具体如下

$$T^{pqijk} = \varepsilon^{pm}\varepsilon^{qn}T^{ijk}_{mn} \qquad T^{jl} = \varepsilon_{ik}T^{ijkl}$$

17.3 Dimension of SU(2) irreducible representation

那么由张量 $T^{i_1 i_2\cdots i_m}$ 构成的不可约表示的维度是多少呢, 每个指标可以取 1,2. 又因为是全对称的,那么可见有 m+1 维. 令 $m = 2j$,那么就有 $2j+1$ 维.$j = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots .j = 1/2$ 是基本表示,$j = 1$ 是矢量表示.
我们得到既然对于 $SU(2)$ 群来说, 我们不需要下指标, 因为 $\varepsilon^{ij}\varphi_j = \varphi^i$ 的变换完全就像 φ^i. 但是 $\varphi_i = \varphi^{*i}$, 这岂不是意味着取复共轭是没有意义了么? 实际上如果一个表示 $D(g)$ 看上去不是实的, 即 $D(g)^* \neq D(g)$, 这个表示和他的复共轭表示实际上是可以通过相似变换联系即

$$D(g) = SD(g)S^{-1}$$

我们说这个表示是赝实的.$SU(2)$ 的基本表示是赝实的, 这个相似矩阵是 σ_2. 即 $S = S^{-1}\sigma_2$.

17.4 The groups U(N) and SU(N)

对于一般的 N,U(N) 有两组群元, 第一组形如 $e^{i\phi}I$, 构成 U(N) 的子群, 这个所有的群元与 $U(1)$ 有着一一到上的映射, 实际是同构于 U(1). 另一组是有着行列式为 1 的 N 阶矩阵, 构成 $SU(N)$, 是和 $U(1)$ 对易的. 我们就说 $U(N) = SU(N)\otimes U(1)$. 但是这是错误的, 因为这两个群还有一个不平凡的交集.$U(1)$ 的群元形如 $e^{i2\pi k/N}I, k = 1, \cdots, N-1$ 行列式为 1, 因此也是属于 $SU(N)$ 群的. 这个交集实际是 Z_N. 考虑到两个群的直积 $H = F\otimes G$, 里面的元素是 (f,g), 分别属于 F 和 G. 相应的 $F\bigcap H = (f, I_G), G\bigcap H = (I_F, g), F\bigcap G\bigcap H = (I_F, I_G)$. 所以我们已经在 $U(1)$ 中数了 Z_N, 那么就该在 $SU(N)$ 中除去这个, 所以

$$U(N) = (SU(N)/Z_N)\otimes U(1)$$

在这个商群 $SU(N)/Z_N$ 中,N 个元素 $e^{i2\pi k/N}U$,U 是一个任意的幺正单位矩阵,$k = 0, 1, \cdots, N-1$, 实际上是一个元素. 例如 N=2, 这时 $U, -U$ 实际上就成了一个元素, 所以 $SU(2)/Z_2$

$= SO(3)$. 群的中心定义为群中和其他所有元素都对易的元素的集合. 所以 Z_N 是 $SU(N)$ 的中心. 在李代数的层面上,$SU(N)$ 和 $SU(N)/Z_N$ 没有区别, 因为李代数只研究单位元邻域的元素. 在物理上, 关于强相互作用, 弱相互作用, 电磁相互作用的理论基于 $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, 但是实际应用中, 在规范玻色子相互作用下群的整体性质并没有出现, 只有李代数出现在了唱的拉格朗日量中.

18 The Election Spin and Karmer's Degeneracy

18.1 The election spin

似乎这个转动 2π 被表示成 $-I$ 的表示在物理上是没有意义的, 实际上这正对应着自旋为 1/2, 波函数 Ψ 在转动 2π 上是变号的, 但是物理上的客观测量是与 $\Psi^\dagger, \Psi$ 的双线性函数, 所以总体看来是不变号的. 电子自旋具有 1/2 是说明电子波函数有两个分量变换形如 $\psi \to e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2}\varphi$. 绕 z 轴转动 2π 对应与

$$\psi \to e^{i(2\pi)\sigma_3/2}\psi = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} \psi = -\psi$$

考虑静止电子的波函数满足的薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi$$

电子自旋给出 $\vec{S} = \Psi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2}\Psi$. 置于外场 B 时,

$$H = \mu_B \vec{B}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}\mu_B(B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3) = \frac{1}{2}\mu_B \begin{pmatrix} B_3 & B_1 + iB_2 \\ B_1 - iB_2 & -B_3 \end{pmatrix}$$

让外场 B 不随时间改变且沿 z 轴, 这样破坏了原有的对称性, 波函数解得

$$\Psi(t) = e^{-i\mu\vec{B}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}t}\Psi(0) = U(t)\Psi(0), \quad U = \cos\frac{\varphi}{2}I + i\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\mu Bt}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\mu Bt}{2}} \end{pmatrix}\Psi(0) = (\cos\frac{\mu Bt}{2}I - i\sin\frac{\mu Bt}{2}\sigma_3)\Psi(0)$$

可见磁场的存在只不过是在上下分量上乘了一相对相位. 当电子自旋转动 2π, 也就是时间经过 $2\pi(\mu B)^{-1}$. 波函数改变符号. 我们计算 $\vec{S} = \Psi^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}\Psi$, 得到

$$\vec{S}_1 = \cos\mu Bt\vec{S}_1(0) - \sin\mu Bt\vec{S}_2(0)$$

$$\vec{S}_2(t) = \sin\mu Bt\vec{S}_1(0) + \cos\mu Bt\vec{S}_2(0)$$

$$\vec{S}_3(t) = \vec{S}_3(0)$$

经过时间 $2\pi(\mu B)^{-1}$, 电子自旋回到原位.

18.2 Time reversal and antiunitary operator

时间反演算符是一个反幺正算符, 考虑薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t), \qquad H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})$$

我们考虑将 $t \to t' = -t$, 那么我们得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(t') = H\psi'(t')$$

将 $\psi'(t') = T\psi(t)$, 那么带入方程并乘上 T^{-1}, 那么我们得到

$$T^{-1}(-i)T\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = T^{-1}HT\psi(t)$$

, 因为 H 不含时间 t, 所以与 T 对易. 那么我们得到

$$T^{-1}(-i)T = i$$

的确是反幺正的. 在量子力学中, 时间 t 总是带有 i(这是否和广义相对论里的闵科夫斯基度规有关??), 时间反转也得反转 i. 让 $T = UK$,K 能够让他后面的东西取复共轭,$K^2 = I$, 我们得到 $T^{-1} = KU^{-1}$.U 是普通的幺正矩阵,K 是反幺正的.$T^{-1}(-i)T = i, KU^{-1}(-i)UK = i, U^{-1}(-i)U = K^{-1}K = KiK = (-i)i(-i) = -i$, 可见 K 是反幺正的.
考虑一个自旋 1/2 非相对论情形下电子,$\vec{S} = \Psi^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}\Psi$, 在时间反演算符下,$\vec{S} \to \frac{1}{2}\psi^\dagger(UK)^\dagger\vec{\sigma}UK\psi = \frac{1}{2}\psi^\dagger KU^\dagger\vec{\sigma}UK\psi$, 将 U 记做 $\eta\sigma_2$, 那么

$$KU^\dagger\vec{\sigma}UK = \eta^*\eta K\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 K = K\begin{pmatrix}-\sigma_1\\+\sigma_2\\-\sigma_3\end{pmatrix}K = -\vec{\sigma}$$

对于自旋 1/2 粒子,$T^2 = \eta\sigma_2 K\eta\sigma_2 K = \eta\sigma_2\eta^*\sigma_2^* KK = -1$, 两次连续的时间反演不能给出单位 1, 自旋 1/2 不能回到原来. 这就是克拉默简并, 在电场里的电子, 无论电场多么复杂, 每个能级上对应着两个简并态. 证明很简单: 电场在时间反演下不变, 哈密顿量和时间反演算符对易, 因此 Ψ 和 $T\Psi$ 有着相同的能量, 但是他们两个不是一个态, 否则 $T\Psi = e^{i\alpha}$, 然后

$$T^2\Psi = T(T\Psi) = Te^{i\alpha}\Psi = e^{-i\alpha}T\Psi = e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\Psi = \Psi$$

这与前式矛盾了, 所以这是两个不同的态, 所以是 2 重简并的.

19 Integration over Continuous Groups,Topology,Coset Manifold,and SO(4)

19.1 Character orthogonality for compact continuous groups

特征标正交定理仅仅对于连续紧致群成立, 我们可以将对群元的求和 $\sum_G$ 化成积分 $\int d\mu(g)$,$\mu(g)$ 是能够使积分有限的积分变量.
首先我们考虑 $SO(3)$ 群不可约表示的特征标, **所有旋转 ϕ 角的转动都是等价的, 而不依赖**

于转动轴 (他们之间只差了一个对于轴转动的相似变换). 这我们可以取 z 轴为转动轴, 那么取 J_3 的本征态 $|j,m>, m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j$, 那么 $e^{i\psi J_3}=e^{im\psi}|j,m>$. 所以转动矩阵 $R(\psi)$ 是对角的, 对角元是 $e^{im\psi}$. 取迹得到不可约表示 j 的特征标:

$$\chi(j,\psi)=\sum_{m=-j}^{j}e^{im\psi}=e^{ij\psi}+e^{i(j-1)\psi}+\cdots+e^{-ij\psi} \tag{15}$$

$$=e^{-ij\psi}(e^{2ij\psi}+e^{i(2j-1)\psi}+\cdots+1)=e^{-ij\psi}\frac{e^{i(2j+1)\psi}-1}{e^{i\psi}-1} \tag{16}$$

$$=\frac{\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{17}$$

可见这个不可约表示是依赖于两个参数的,j 不可约表示的维数是 $\chi(j,0)=2j+1$, 还有 $\chi(0,\psi)=1, \chi(1,\psi)=1+2\cos\psi$. 那么对于 $SU(2)$ 群的特征标是什么?? 实际上因为两者局部同构, 我们只需将上式取半整数就行了. 我们计算 $SU(2)$ 的基本表示 $\chi(\frac{1}{2},\psi)=2\cos\psi/2$. 我们画出 $j=1/2,1,2$ 的 $\chi(j,\psi)$,

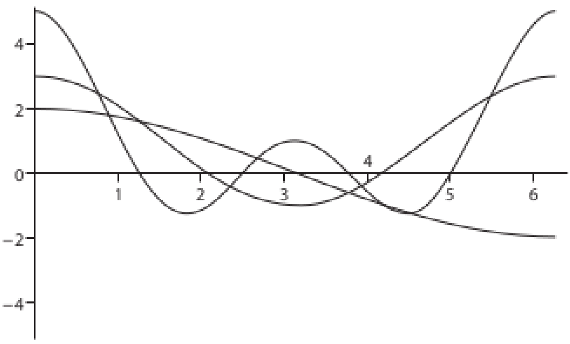


Figure 2

19.2 Group manifolds

对于连续群, 我们考虑群的流形. 最简单连续群的 $SO(2)$ 的流形拓扑结构是一个圆, 群元 $R(\theta), 0\leq\theta\leq 2\pi . R(2\pi)=R(0)$. 实际上在流形上的积分变量就是流形上的体元, 也就是度规的单位度量. 对于 $SO(2)$ 群, 显然是 $d\theta$. 实际上对于一个一般的连续群 G, 如果两个群元 g_1, g_2 很接近的话, 就有 $g_1^{-1}g_2$ 接近于单位元. 如果我们知道在原点附近的度规结构, 我们只需要乘上 g 就得到 g 附近的度规结构.

那么对于 $SO(3)$ 群来说, 他的流形又是什么呢?? 我们将转动群元参数化 $R(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=e^{i\sum_k\theta_kJ_k}$. 可见需要三个参数, 显然不是一个二维流形 S^2. 我们选择轴角参数化: 指定转轴 $\vec{n}$ 和转动角 ψ, 具体而言 $\vec{n}=(sin\theta cos\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta)$, 所以一个转动可以 $\vec{\psi}=\psi\vec{n}$ 来表示, 长度表示转角, 方向表示转轴, 实际上 ψ 决定了转动的类. 实际的流形是很复杂的, 因为对于沿轴正向转动 π 角, 和沿负向转动 π 角是一致的, 所以这里存在这共轭点是认同的, 类似与将一个三维球的表面折叠起来,ψ 是这个球表面, 在球的内部是一个" 正常" 的球 B^3. 我们说过有着不同转轴但是相同转角的元素是等价的 $R(\vec{n},\psi)\sim R(\vec{n'},\psi)$. 差一个将两个

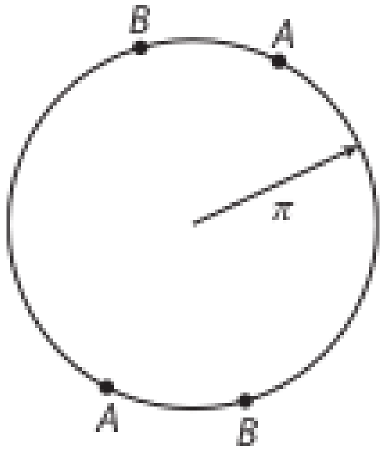


Figure 3

轴认同的转动. 对于一个固定 ψ,$R(\vec{n},\psi)$ 给出一个半径为 ψ 的球面.$SO(3)$ 的等价类对应于半径不同的球面也即是 ψ, 而 $SO(2)$ 的等价类对应于圆上不同的点 (这是因为 $SO(2)$ 是一个 abel 群, 所有元素自成一类), 在 $SO(3)$ 中. 单位元对应与一个点, 这也是因为他自成一类.

19.3 Integration measure

我们需要定义流形上的积分 $\int_G d\mu(g)F(g)$, 首先他必是有限的. 我们知道这实际是流形上的体元, 是不依赖于群元的, 也就是说

$$d\mu(g) = d\mu(I)$$

定义 $\int_G d\mu(g)1 = V(G)$, 这可以理解为归一化常数, 然而并没有具体含义 ($\sum_G 1 = N(G)$ 是群元的个数). 定义 $y^1, y^2, \cdots, t^D$ 是 D 维流形上的坐标,$d\mu(g) = dy^1 dy^2 \cdots dy^D \rho(y^1, y^2, \cdots, t^D)$,$\rho$ 是一种类似于密度的东西, 实际上是两组坐标间的雅克比矩阵.
对于 $SO(2)$ 群, 流形是一个圆, 体元是 $d\theta$. 洛伦兹群有两个参数, 伪转动角为 φ, 满足 $L(\varphi')L(\varphi) = L(\varphi' + \varphi)$. 体元是 $d\varphi$. 实际是 boost 角参数将群元乘法映射到了对应参数的加法. 但是这个参数化是无界的 $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi = \infty$, 所以说对应的 $SO(1,1)$ 群的是非紧致的. 紧致群有幺正表示, 而非紧致群是没有幺正表示的. 我们可以在流形上选定不同的坐标系, 比如

$$L(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$$

同样服从群乘法 $L(v)L(u) = L(v'), v' = \frac{v+u}{1+uv}$. 这实际是洛伦兹变换里的速度变换, 如果两个观者相对速度是 u, 一个质点相对一个观者速度为 v, 那么它相对另一个观者速度是 v'. 这样将 $v \to v + \delta v$, 乘上 $L(u)$, 使得变换 $v' \to v' + \delta v' = \frac{v+u}{1=uv} + \frac{1-u^2}{(1+uv)^2}\delta v$. 所以体元是 $\rho = \frac{1-u^2}{(1+uv)^2}.d\varphi = \frac{1-u^2}{(1+uv)^2}dv$, 是雅克比矩阵. 定义 $dy^1 dy^2 \cdots dy^D \rho(y^1, y^2, \cdots, y^D) =$

$dy'^1 dy'^2 \cdots dy'^D \rho(y'^1, y'^2, \cdots, y'^D) = dy^1 dy^2 \cdots dy^D J(\frac{\partial y'}{\partial y})\rho(y^1, y^2, \cdots, y^D)$, 所以得到

$$\rho(y^1, y^2, \cdots, y^D) = J(\frac{\partial y'}{\partial y})\rho(y'^1, y'^2, \cdots, y'^D)$$

这个群的" 体积" 是 $\int_{-1}^{1} \frac{dv}{1-v^2} = \infty$. 群是否紧致的并不取决与群的参数化.
对于 $SO(3)$ 群, 他的体元可以记做 $d\theta d\varphi \sin\theta d\psi f(\psi)$. 其中 $f(\psi)$ 是和' 半径' 有关的量. 在无限小的时候近似与 ψ^2. 考虑无限小转动 $R(\delta, \varepsilon, \sigma) = I + \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \sigma \\ \delta & 0 & -\varepsilon \\ -\sigma & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = I + A$. 体元可记做 $d\delta d\varepsilon d\sigma$, 计算 $R(\vec{n}, \psi') = R(\vec{e_z}, \psi)R(\delta, \varepsilon, \sigma).R(\vec{e_z}, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi\cos\psi & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
我们得到 $R(\vec{n}, \psi') \approx R(\vec{e_z}, \psi) + R(\vec{e_z}, \psi)A$. 得到 $n_1 = (\sin\psi\varepsilon + (1+\cos\psi)\sigma)/(2\sin\psi), n_2 = (-\sin\psi\sigma + (1+\cos\psi)\varepsilon)(2\sin\psi), n_3 = 1$. 求迹我们得到 $\psi' = \psi + \delta$. 选择另外一组坐标系 (x^1, x^2, x^3), 我们得到 $(x^1, x^2, x^3) = \psi'(n_1, n_2, n_3)$, 计算雅克比矩阵 $J = det(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\varepsilon, \sigma, \delta)}) = \psi^2/sin^2(\psi/2)$., 得到 $d\delta d\sigma d\delta = dx^1 dx^2 dx^3/J = \sin\theta\sin(\psi/2)d\delta d\psi\varphi$, 当我们对一个类函数 $F(g)$ 积分时 (半径 ψ), 固体角部分就消下去了. 因为函数只依赖于群元的类, 也就是半径 ψ,

$$\int_{SO(3)} d\mu(g)F(g) = \int_0^\pi d\psi(\sin^2\frac{\psi}{2})F(\psi)$$

19.4 Character orthogonality

验证特征标的正交性,$\chi(j, \psi) = \frac{\sin(j+1/2)\psi}{\sin\psi}$.

$$\int_{SO(3)} d\mu(g)\chi(k, \psi)^*\chi(j, \psi) = \int_0^\pi d\psi \sin^2(\frac{\psi}{2})\frac{\sin(k+\frac{1}{2})\psi\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin^2\frac{\psi}{2}} \quad (18)$$

$$= \frac{0}{\pi}d\psi\sin(k+\frac{1}{2})\psi\sin(j+\frac{1}{2})\psi \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi d\psi(\cos(j-k)\psi - \cos(j+k+1)\psi) \quad (20)$$

$$= \frac{\pi}{2}\delta_{jk} \quad (21)$$

这也告诉我们归一化因子是 $\pi/2$. 实际上我们也可以利用正交性去决定积分体元.$\int_0^\pi d\psi f(\psi)$ $\chi(k, \psi)^*\chi(j, \psi) = c\delta_{jk}$, 实际上这是一个积分方程, 更不好解.
傅里叶级数也只不过是 $U(1)$ 群的特征标正交性,$D^j(e^{i\theta}) = e^{ij\theta}$, 不变体元是 $d\theta$.

$$\int_0^{2\pi} d\theta(e^{ik\theta})^* e^{ij\theta} = 2\pi\delta_{jk}$$

还可以计算克莱布希-戈登系数, 因为不可约表示直积的特征标是特征标的积,$\chi(j\otimes k) = \chi(j)\chi(k)$. 定义 $\zeta = e^{i\theta}$, 我们的到

$$\chi(j) = (\zeta^j + \zeta^{j-1} + \cdots + \zeta^{-j}) = \zeta^{-j}(\zeta^{2j+1} - 1)/(\zeta - 1) = (\zeta^{j+1} - \zeta^{-j})/(\zeta - 1)$$

$$\chi(k)\chi(j) = (\zeta^k + \zeta^{k-1} + \cdots + \zeta^{-k})(\zeta^{j+1} - \zeta^{-j})/(\zeta - 1) \tag{22}$$
$$= \chi(j+k) + \chi(j+k-1) + \cdots + \chi(j-k) \tag{23}$$

也即是直积的直和分解

$$k \otimes j = (j+k) \oplus (j+k-1) \oplus \cdots \oplus (j-k)$$

19.5 Topology of group manifold

拓扑的基本概念是闭合曲线的同伦, 流形上的两条曲线是同伦的, 当且仅当他们可以连续的形变到另一条. 在欧式空间里, 任何的闭合曲线都是同伦的, 因为他们都同伦与于一个点, 球面上的两条曲线也是同伦的. 流形 M 的同伦群 $\pi_1(M)$ 是这么定义的, 取一点 p, 所有起点和终点都在 p 点的所有同伦曲线构成群元 g, 群的乘法是 $g_1 g_2$, 是可以看做两条过 p 点的闭合曲线. 单位元就是一个点, 逆元就是将曲线的方向到着走. 一个重要的性质是如果两个流形有着不同的同伦群, 他们在拓扑上不同胚. 考虑在欧式空间上有一个洞, 他的

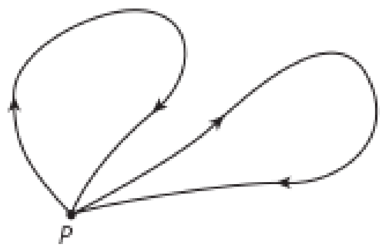


Figure 4

同伦群是 Z. 一条闭合曲线可以绕洞 j 圈, 也就构成一个群中的一个元素.
$SO(3)$ 的同伦群是 Z_2, 也即是说他有两个元素. 一条起点和终点在单位元的闭合曲线如果不到达 $\psi = \pi$, 是可以缩到一个点的, 记做 I. 见图 5. 而如果他到达 $\psi = \pi$, 比如 A 点, 那

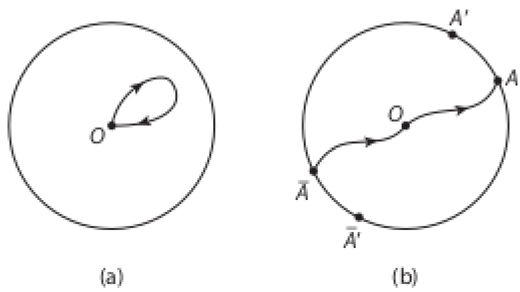


Figure 5

么他将会从 A 的共轭点 $\bar{A}$ 出来, 这不可以缩为一点, 这构成同伦群的另一个元素 g. 考虑 $g \cdot g$. 见图 6. 他依次经过 $O - A - \bar{A} - O - B - \bar{B} - O$ 我们将 A 和 $\bar{B}$ 认同, 那么 $\bar{A}$ 也自然与 B 认同. 实际上还是可以缩到一点的, 还是 I.$g \cdot g = I$.

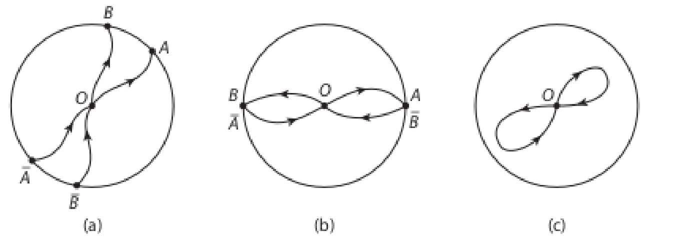


Figure 6

19.6 The group manifold of SU(2)

对于 SU(2) 群, 他的任意一个群元可以记为 $U=e^{i\vec{\varphi}\vec{\sigma}/2}$, 是由 3 个实参数确定 φ. 所以他的流形是 3 维的. 实际上是 4 维空间里的单位球面 S^3. 和与 $SO(3)$ 的局部同构是有关的, 两者流形不一致, 但是局部是一致的,$SO(3)$ 群的流形可看做是将边界粘到一起的 S^3 半球面. 在 S^3 的曲线都可以变到一个点,$\pi_1(SU(2))=\varnothing$. 考虑一个矩阵元 $U=t+i\vec{x}\cdot\vec{\sigma}$ 由四个数 (t,x,y,z) 定义. 幺正条件使得 $U^\dagger U=t^2+\vec{x}^2=1$(可见的确是 4 维空间中的单位球面). 考虑之前的结果 $U=\cos\frac{\varphi}{2}I+i\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}$, 这样就找到对应关系 $t=\cos\frac{\varphi}{2},\vec{x}=\sin\frac{\varphi}{2}\hat{\varphi}$. 这里看似是出现了四个参数, 实际还是 3 个参数, 因为他这里有一个约束条件. 在 S^3 上的积分体元是 $d\mu(g)=\sin^2\zeta\sin\theta d\theta d\zeta d\varphi,\ t=\cos\zeta,x^2+y^2+z^2=\sin^2\zeta$. 对一个类积分得到

$$\int_0^\pi d\zeta\sin^2\zeta F(\psi)=\int_0^\pi d\psi\sin^2\frac{\psi}{2}F(\psi)$$

可见因为积分体元是局部的概念, 对于 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 群, 应该是一样的.
那么二维球面是什么那?? 实际上是一个陪流形. 考虑有限群陪集的概念. 给定一个群 G 有子群 H,$g_1,g_2\in G\ but\notin H$, 如果存在一个 $h\in H$ 使得 $g_1=g_2h$, 那么 $g_1\sim g_2$. 这个过程将群元分成不同的陪集 (不是群)$g_1H,g_2H,\cdots$. 陪集也构成群叫做商群 G/H, 单位元就是 H. 对于连续群, 我们可以说如果 g_1,g_2 是无限接近的, 那么他们的陪集也是无限接近的. 有了这个距离的概念, 就可以说陪集构成一陪集群的陪流形. 让 $G=SO(3),H=SO(2)$,H 包含绕 z 轴的群元.$g_1\sim g_2$ 等价于 $g_1\vec{e}_z=g_2h\vec{e}_z=g_2\vec{e}_z$. 也就是说 h 没有作用,$g_1,g_2$ 是认同的, 他们将北极点映射为同一个点. 每一个陪集都对应着单位球面上的一个点,$S^2=SO(3)/SO(2)$, 这也证明了 $SO(2)$ 不是 $SO(3)$ 的不变子群,$SO(2)\otimes SO(2)\neq SO(3)$.
我们说 $SU(2)$ 的群元一一对应于 4 维欧式空间单位球面上的一点, 他的群流形是一个 S^3. 群元 $W=t+i\vec{x}\cdot\vec{\sigma}$, 他不是无迹也不厄米的. 考虑另外两个群元 U,V. 那么矩阵 $W'=U^\dagger WV$ 也是一个群元, 因为 $SU(2)$ 是一个群啊, 满足封闭性.$W'=t'+i\vec{x'}\cdot\vec{\sigma}$ 也满足 $t'^2+\vec{x'}^2=1$. 所以两个都是 4 维单位矢量, 也就是说映射 $W\to W'$ 对应着一个 4 维旋转, 一个 $SO(4)$ 群元. 一对 $SU(2)$ 群元 (U,V) 给出一个群 $SU(2)\otimes SU(2)$ 局部同构于 $SO(4)$. 实际上我们在第一章得到了 $SO(4)=SO(3)\otimes SO(3)\sim SU(2)\otimes SU(2)$. 局部的含义是指 (U,V) 和 (-U,-V) 对应于同一个转动, 也即是双覆盖. 这里有一个疑问为什么是两个元素 (U,V), 将一个元素作用与 W, 也可以啊, 但显然不能与 $SO(4)$ 同构, 维度不对. 考虑一个 $SU(2)\otimes SU(2)$ 的子群 (V,V), 而且是对角的.$W\to W'=V^\dagger WV=V^\dagger(t+i\vec{x}\cdot\vec{\sigma})V=(t+i\vec{x}\cdot V^\dagger\vec{\sigma}V)=(t+i\vec{x}'\cdot\vec{\sigma})$ 只改变 x, 也就是将对角子群 $SU(2)$ 映射到 $SO(4)$ 的 $SO(3)$ 子群. 考虑另一个子群 $(V^\dagger,V)$, 他改变了 t, 是一个 4 维空间的旋转. 计算 $W'^\dagger$ 是不改长度的.

19.7 Running a reality check on SO(3) and SU(2)

之前得到 $\eta^{(r)} = \frac{1}{N(G)} \sum_{g\in G} \chi^{(r)}(g^2)$, 如果 $\eta^{(r)} = 1$, 我们说这个不可约表示是实的. 如果 $\eta^{(r)} = 0$, 那么表示是复的, 如果为-1, 那么表示是赝实的, 我希望这个对于紧致连续群也成立, 那么只需将求和换成积分. 我们发现对于 $SO(3)$ 的不可约表示是实的, 对于 $SU(2)$, 一半是是实的, 一半是赝实的 (因为出现了半整数).

$$\int_0^\pi d\mu(g)\chi(j,2\psi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\psi \sin^2(\frac{\psi}{2})\frac{\sin((2j+1)\psi)}{\sin\psi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\psi(e^{i\psi} - 2 + e^{-i\psi})\{e^{ij2\psi} + e^{i(j-1)2\psi} + \cdots + e^{-ij2\psi}\}$$

j= 整数, 积分值为 1,j= 半整数, 积分值为-1($SU(2)$ 群中包含 j= 半整数, 所以一半是赝实的). 对于 $U(1)$,$D^{(j)}(e^{i\theta}) = e^{ij\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{wij\theta}d\theta = \frac{1}{2ij}(e^{i4\pi j} - 1) = 0$$

所以 $U(1)$ 的不可约表示是复的.

20 Symplectic Groups and Their Algebra

补充知识: 群 $SL(n,R)$ 是实数域上的特殊线性群, 满足 $detM = 1$, 群乘法是一般的矩阵乘法.

20.1 Symplectic groups :Sp(2n,R) and Sp(2n,C)

考虑 2n 阶的正则反对称矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

I 是 n 阶单位矩阵, 定义辛矩阵 R(2n 阶实矩阵) 满足

$$R^TJR = J$$

这个辛矩阵构成 $Sp(2n,R)$ 群. 满足封闭性, 群单位元是 I, 逆元是 R^{-1}. 可见 R 不是正交矩阵, 但是此处的辛矩阵满足 $detR = 1$ 而不是 ± 1. 可以这么考虑, 考虑对角反射矩阵 $r = diag(-1,1,\cdots,1)$, 满足正交性, 但是不满足辛条件 $r^TJr \neq J$. 这里的行列式为 1, 是因为他是偶数阶矩阵, 具体证明, 考虑特征多项式

$$P(z) = det(R - zI) = z^{2n}det(z^{-1}R - I) = z^{2n}detRdet(z^{-1} - R^{-1})\text{行列式满足顺序提取} \tag{24}$$

$$= z^{2n}det(R)det(z^{-1} + JR^TJ) \tag{25}$$

$$= z^{2n}(detJ)^2detRdet(R^T - z^{-1}), (JR^TJR = J^2 = -I, detJ = (-1)^n) \tag{26}$$

$$= z^{2n}detRdet(R^T - z^{-1}) \tag{27}$$

$$= (detR)z^{2n}P(1/z) \tag{28}$$

如果 $P(\lambda)=0$, 那么 $P(1/\lambda)=0$. 所以 R 的本征值是成对出现的 $\{\lambda_i, 1/\lambda_i\}$, 所以 detR=1. 辛条件给出 $n(2n-1)$ 个约束条件, 所以 $Sp(2n,R)$ 群有 $n(2n+1)$ 个参数, 也就有 $n(2n+1)$ 个生成元.
考虑 $Sp(2n,C)$ 是复数域上的辛群, 群元是 2n 阶复矩阵 C:

$$C^TJC=J$$

因为是复数域, 每一个矩阵元由两个实参决定, 也就是有 $2n(2n+1)$ 个独立参数. 在物理学上, 哈密顿方程是具有辛结构的.

20.2 USp(2n)

考虑 2n 阶幺正矩阵满足

$$U^TJU=J$$

构成群 $USp(2n)$, 特殊幺正辛群. 注意是 U 的转置而不是厄米!! 考虑具有 $e^{i\varphi}I_{2n}$ 形式的矩阵, 他明显不满足辛条件, 所以他不构成 $USp(2n)$, 实际上

$$USp(2n)=SU(2n)\bigcap Sp(2n,C)$$

$USp(2n)$ 是 $SU(2n)$ 的子群, 不是 $U(2n)$ 的. 那么 $USp(2n)$ 里有多少个参数呢, 我们写出李代数 $U=I+iH$.H 是厄米矩阵 (实际也是无迹), 满足 $H^T=JHJ$. 我们可以写出一般形式的 $H=\begin{pmatrix}P & W*\dagger\\ W & Q\end{pmatrix}$ P,Q 是厄米的, 带入上式得到 $Q=-P^T, W=W^T$. 可见 $trP=-trQ$, 所以 H 是无迹的.W 还有 $n+n(n-1)/2$ 个复参数, 所以 H 一共有 $n(2n+1)$ 的实参数.H 的一般形式是

$$H=\begin{pmatrix}P & W^*\\ W & -P^T\end{pmatrix}, \text{P 是厄米的,W 是复的对称矩阵}$$

我们可以预见 $USp(2)\simeq SU(2)\simeq SO(3)$, 他们都有三个生成元. 对于 $SU(2)$ 的元 $U=e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}, H=\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}$, 满足 $H^T=JHJ$. 还有 $USp(4)\simeq SO(5)$, 他们都有 10 个生成元. 在量子场论, 我们考虑 2n 个分量场 $\Psi=\begin{pmatrix}\chi\\ \Upsilon\end{pmatrix}$, 由两个 n 分量场 χ,Υ 组成,$\Psi^TJ\Psi=\chi^T\Upsilon-\Upsilon^T\chi$. 他们在幺正变换下不变 $\Psi\to U\Psi$, 如果 $U^TJU=J$.

20.3 Symplectic algebra

将 J 写为 $J=I\times i\sigma_2$, 考虑 2n 阶无迹厄米矩阵

$$iA\otimes I=\begin{pmatrix}iA & 0\\ 0 & iA\end{pmatrix},\quad S_1\otimes\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & S_1\\ S_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$S_2\otimes\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & iS_2\\ -iS_2 & 0\end{pmatrix}\quad S_3\otimes\sigma_3=\begin{pmatrix}S_3 & 0\\ 0 & -S_3\end{pmatrix}$$

I 是 2 阶单位矩阵,A 是任意的 n 阶反对称矩阵,S_i 是 n 阶实对称矩阵, 他们构成 $USp(2n)$ 群的李代数.
直接验证的方法是将 H 写成他们的线性组合

$$H=\vec{\theta}\cdot\vec{J}=\begin{pmatrix}iaA+dS_3 & bS_1+icS_2\\ bS_1-icS_2 & iaA-dS_3\end{pmatrix}$$

$\vec{\theta}=\{a,b,c,d\}$, 可见的确满足 $H^T=JHJ$ 条件. 我们还可以验证生成元的对易关系. 首先 A,n 阶实反对称矩阵有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个实参数,n 阶实对称矩阵有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个实参数. 所以也就有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个 A, 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个线性独立的 S, 总生成元的个数是 $\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{3}{2}n(n+1)=n(2n+1)$.

$$[iA\otimes I, S_a\otimes\sigma_a]=i[A,S_a]\otimes\sigma_a=iS'_a\otimes\sigma_a, \text{反对称矩阵和实对称矩阵的对易子是对称的}$$

$$[S\otimes\sigma_1, S'\otimes\sigma_1]=[S,S']\otimes I=A\otimes I, \text{两个对称矩阵的对易子是反对称的}$$

$$[S_1\otimes\sigma_1, S_2\otimes\sigma_2]=i\{S_1,S_2\}\otimes\sigma_3=iS_2\otimes\sigma_3, \text{对称矩阵反对易子是对称的}$$

$$(I\otimes i\sigma_2)(A\otimes I)(I\otimes i\sigma_2)=(A^T\otimes I)$$

$$(I\otimes i\sigma_2)(S_a\otimes\sigma_a)(I\otimes i\sigma_2)=(S_a\otimes\sigma_a^T), a=1,2,3$$

可见他们的确是 $SUp(2n)$ 的生成元, 满足 H 李群的代数关系.

21 From the Lagrangian to Quantum Field Theory

海森堡将 p,q 对易得到 $[q,p]=i$, 狄拉克引入创生和湮灭算符 $a^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip), a=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$, 满足关系 $[a,a^\dagger]=1$. 海森堡得到对于一个算符 O, 满足 $\frac{dO}{dt}=i[H,O]$, 解得位置 q 有着时间依赖关系:

$$q(t)=\frac{1}{2}(ae^{-i\omega t}+a^\dagger e^{i\omega t}), q(0)=q$$

21.1 what is field:from q toψ

我们将场定义为一个依赖于时间和空间坐标 x 的动力学量, 分两步:$q(t)\to q_a(t)\to\varphi(t,\vec{x})$,$a=1,2,\cdots,N$ 标志 N 个粒子. 我们在将 a 这个标志粒子的不连续变量到连续的标志空间坐标的 $\vec{x}$. 最关键的是 $\vec{x}$ 仅仅标识空间坐标, 而不是一个动力学量, 这和 q 不同, 虽然 q 也表示粒子的位置, 但在场里, 没有粒子的概念. 场的拉格朗日量通常可写出 $\sum_a(\cdots)$ 将它取连续极限, 得到 $L=\int d^3x\mathcal{L}$,$\mathcal{L}$ 是拉格朗日密度.

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2-\frac{c^2}{2}\sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i})^2-V(\varphi)$$

第一项是动能,c 是光速. 第二项是场的空间梯度, 将时空写成 4 维坐标 $x^\mu=(t,x^i)$. 将 $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. 那么

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-V(\varphi)$$

实际上 $(\partial_\mu\varphi)^2=(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2-\sum_{i=1}^3(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i})^2$. 考虑到拉格朗日公式

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\frac{dq}{dt}})=\frac{\delta L}{\delta q}$$

在场论中 $q(t)$ 替换为 $\varphi(t,\vec{x})$. 拉格朗日方程中实际是包含时空坐标的微分, 实际是 $\partial_\mu(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}})$ 那么在场论里的欧拉-拉格朗日方程

$$\partial(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi}) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}, (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\vec{x}^2})\varphi + V'(\varphi) = 0$$

对谐振子,$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, 解得 $\varphi(t,\vec{x}) \sim e^{-i(\omega_k t - \vec{x}\cdot\vec{k})}, \omega_k = \vec{x}^2 + m^2$. 根据海森堡规则将动量场定义为 $\pi(t,\vec{x}) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, 这样引入一个创生和湮灭算符既可以将 $\varphi(t,\vec{x})$ 展开 (类似与傅里叶展开):

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}(a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a(\vec{k})^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})})$$

如果场 φ 是实的, 或者说是厄米的, 第二项实际由第一项得出. 很大的区别就在于此时的算符是依赖于 $\vec{k}$ 的, 这样原来的场 $\varphi(t,\vec{x})$ 对 x 的依赖就变成了 $a, a^\dagger$ 对 k 的依赖. 在物理上 $a^\dagger(\vec{k})$ 作用于真空态 |0> 得到一个态有着动量 $\vec{k}$, 能量 $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$
给定一个群 G(实际是通过实验观察或者理论推导), 有着不同的场构成不同的表示 $R_1, R_2, \cdots$, 任务就是求出在 G 群元作用下不变的拉格朗日量. 给定群 $SU(N)$ 和两个场 φ_{ij}(有两个下指标的对称张量) 和 η^k(基本表示). 那么 $\varphi_{ij}\eta^i\eta^j$ 是一个不变量, 他形容一个 φ 粒子和两个 η 粒子间相互作用, 当我们将拉格朗日量中 φ 和 η 展开成创生和湮灭算符时, 包含一项能够湮灭一个 φ 粒子, 创生两个 η 粒子, 也就是衰变.

21.2 Lagrangians with internal symmetries

最简单的 $U(1)$ 群不变场包含场 φ 属于定义表示: 在群元 $e^{i\theta}, \varphi \to e^{i\theta}\varphi, \varphi^\dagger \to e^{-i\theta}\varphi^\dagger$, 那么厄米条件是不成立的 $\varphi \neq \varphi^\dagger, \varphi$ 是一个非厄米场. 那么

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}(a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b(\vec{k})^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})})$$

这里实际上因为不是厄米场, 我们引入了两个创生和湮灭算符, 第 2 项和第一项无关

$$\varphi \to e^{i\theta}\varphi = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}(a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x} - \theta)} + b(\vec{k})^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)})$$

$$\varphi^\dagger \to e^{-i\theta}\varphi^\dagger = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}(a(\vec{k})^\dagger e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x} - \theta)} + b(\vec{k})e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)})$$

可见他们 $a^\dagger, b^\dagger$ 在 $U(1)$ 作用下是相反的, 如果 $a^\dagger|0>$ 产生一个粒子有动量 $\vec{k}.b^\dagger|0>$ 产生一个有着动量 $\vec{k}$ 的反粒子. 电磁场实际有 $U(1)$ 对称性, 两个态是有着等量异号的电荷.$U(1)$ 同构与 $SO(2)$, 一个复数场就是写成两个实数场,

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

这也证明了要有两组产生湮灭算符, 实际上是电场和磁场.$\frac{1}{2}$ 是归一化因子, 在 $\mathcal{L}$ 中出现的不同的场就是 G 的不可约表示. 他们必须组合成一种在 G 群元作用下不变的形式. 我们所有的内在对称性群是紧致的, 那么场应该是幺正的 (作为不可约表示), 给定一个群和由场表示的不可约表示, 构建在 G 作用下不变的拉格朗日量就是场论.

22 Some Example

22.1 Multiplying Irreducible Representation of Finite Groups:Return to the Tetrahedral Group

我们怎样将有限群的不可约表示的直积分解成直和??
如果一个有限群是一个连续群的子群, 那么就很简单. 比如四边形群 $T = A_4$, 是 $SO(3)$ 的一个子群. 有 4 个不可约表示.

A_4	n_c	c	1	1′	1″	3
	1	I	1	1	1	3
Z_2	3	(12)(34)	1	1	1	-1
Z_3	4	(123)	1	w	w^*	0
Z_3	4	(132)	1	w^*	w	0

考虑如何将 $3\otimes 3$ 在 T 下分解. 在 $SO(3)$ 中 $3\otimes 3 = 1\oplus 3\oplus 5$. 限制到 T 时, 并不存在 5 表示, 实际分解为 $5 \to 3\oplus 1'\oplus 1''$. 因为 5 是实的 (他作为无迹张量的对称部分). 如果分解中包括复表示, 那么必须也包含他的共轭表示, 所以 $1', 1''$ 是成对出现的. 仅考虑两个矢量 $\vec{u}, \vec{v}$(他们是相应的矢量表示),3 表示可以写出 $\vec{u}\otimes\vec{v}$.5 表示 (一个对称无迹张量) 有五个独立元, 写成 $u_2v_3 + u_3v_2, u_3v_1 + u_1v_3, u_1v_2 + u_2v_1$, 还有两个独立的对角元 $2u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3, u_2v_2 - u_3v_3$. 在 A_4 群中存在一个等价类构成 Z_3 群 (循环置换群), 是一个子群, 那么 $u_1 \to u_2 \to u_3 \to u_1$, 可以看出前 3 个元置换后是封闭的, 后两个是封闭的, 是这两个的线性组合, 前者构成 3 表示, 后者是 $1', 1''$ 表示. 所以

$$3\otimes 3 = 1\oplus 1'\oplus 1''\oplus 3\oplus 3$$

在特征标表中 $\omega = e^{i2\pi/3}, \omega^* = \omega^2$. 得到 $1+\omega+\omega^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ \omega^2\\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ \omega^2\\ \omega\end{pmatrix} = \sqrt{3}i\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$1' \sim q' = u_1v_1 + \omega u_2v_2 + \omega^2 u_3v_3$$
$$1'' \sim q'' = u_1v_1 + \omega^2 u_2v_2 + \omega u_3v_3$$

那么之前定义的两个对角独立元实际上是 $q'+q'', q'-q''$, 所以这就是选定了一组新的坐标基, 这个基底下, 前两个元是正交的. 也就分成了两个表示 $1', 1''$, 令 c=(132), 那么 $(1,\omega,\omega^2)\to(\omega,\omega^2,1) = w*(1,\omega,\omega^2), (1,\omega^2,\omega)\to(\omega^2,\omega,1) = \omega^2*(1,\omega^2,\omega)$, 也就是说即使 $1', 1''$ 是一维的不可约表示, 他们在 A_4 作用下也不是不变的, 很明显

$$1'\otimes 1'' = 1, 1'\otimes 1' = 1'', 1''\otimes 1'' = 1'$$

实际上两个 3 维表示是 $(u_2v_3, u_3v_1, u_1v_2), (u_3v_2, u_1v_3, u_2v_1)$, 分别对应 $(132), (123)$. 他们在 $SO(3)$ 不是向量, 但是限制在 T 时, 他们的确是向量.
实际上最常用最标准的方法是用特征标的方法去求直和分解, 因为 $\chi(r\otimes s) = \chi(r)\cdot\chi(s)$, 也就是说不可约表示直积的特征标是特征标的乘积. 那么 $\chi(3\otimes 3) = \begin{pmatrix}3^2\\ (-1)^2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,

根据

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = N(G)\sum_r n_r^2$$

$$\sum_c n_c \chi^{*(r)}(c)\chi(c) = N(G)n_r$$

n_r 是在可约表示中不可约表示 r 出现的次数. 第一式给出 $1\cdot 9^2 + 3\cdot 1^2 + 0 + 0 = 84 = 12\cdot 7, \sum_r n_r^2 = 7$, 可知 $1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2 = 7$, 或者 $1^2+1^2+1^2+2^2 = 7$, 实际是后者.3 出现两次, 三个 12 维表示出现 1 次, 根据 2 式, 可求分别出现了次数.

$$\begin{pmatrix}9\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\\omega\\\omega^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\\omega^*\\\omega\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

这种方法更好, 不需要很多考虑. 实际上我们并不知道一个有限群是否是某个连续群的子群, 我们也不知道连续群的相应的克莱布希-戈登分解.

22.2 Crystal Field Splitting

一个原子通常具有因为势场的对称性的简并能级, 比如角动量为 j 的简并度是 $2j+1$. 当原子置于晶格中, 原有的 $SO(3)$ 的对称性被打破, 变成了晶格对称性, 这样简并能级会被打开. 实际是当一个群 G 被限制在他的一个子群 H 时,G 的不可约表示会分成 H 的几个不可约表示, 对此处 $G = SO(3)$,H 是一个 G 的子群, 是一个多面体群, 在前面当 $SO(3)$ 退化成正四面体群 T 时, 他得的五维不可约表示会变成 $5 \to 3 \oplus 1' \oplus 1''$
考虑一个正四面体晶格, 我们根据特征标的正交性, 利用上一节的方法, 将一个不可约表示分解成几个子群的不可约表示, 比如 $SO(3)$ 的 7 维不可约表示的分解. 首先是将 $SO(3)$ 的对于 $T = A_4$ 群 4 个等价类的对应特征标求出,$\chi(j,\psi) = \sum_{m=-j}^{j} e^{im\psi} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}$. 首先单位元对应于 $\psi = 0.\chi(j,0) = (2j+1)$. 类 (12)(34) 是 π 转动,$\chi(j,\pi) = (-1)^j$. 另外两个构成 Z_3 群, 实际上是以顶点为轴的旋转,$\chi(j, 2\pi/3) = 0, -1, 1, 0, -1, 1\cdots$. 我们可以写出特征标表

A_4	n_c	c	1	1′	1″	3	5	7	9	11	13	15
	1	I	1	1	1	3	5	7	9	11	13	15
Z_2	3	(12)(34)	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
Z_3	4	(123)	1	w	w^*	0	-1	1	0	-1	1	0
Z_3	4	(132)	1	w^*	w	0	- 1	1	0	-1	1	0

这样实际就可以求出任何一个不可约表示的分解,

$$\sum_c n_c \chi^*(c)\chi(c) = N(G)\sum_r n_r^2$$

$$\sum_c n_c \chi^{*(r)}(c)\chi(c) = N(G)n_r$$

我们求得 $7 \to 3 \oplus 3 \oplus 1$. 实际上我们也可以将 A_4 的特征标表看成一个矩阵, 求他的逆得到. 对称破却在物理学中很重要.

22.3 Group Throry and Special Function

群论和特殊函数有着重要的联系. 球谐函数 (勒让德函数) 和 $SO(3)$ 群有关, 当我们考虑二维欧几里得群 E_2, 他和贝塞尔函数有关.
首先考虑 $E(2)$ 群, 将一个 2 维矢量转动和平移 $\vec{x} \to \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{a}$. 构成一个群.$\vec{x} \to R_2(R_1\vec{x} + \vec{a}_1) + \vec{a}_2 = R_2R_1\vec{x} + R_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. 将群元记做 $g(R, \vec{a})$,$R \to \theta, a \to (x, y)$. 那么

$$g(R_2, \vec{a}_2)g(R_1, \vec{a}_1) = g(R_1R_2, R_2\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$$

(可以将 $T(\vec{a}) = g(I, \vec{a}), R = g(R, \vec{0})$, 那么 $g(R, \vec{a}) = T(\vec{a})R$. 这样一个 $E(2)$ 群元可以记做一个平移再一个转动, 实际上两者不对易, 因为这里的旋转轴 (点) 不是随体的, 旋转是相对于原点来说的, 所以平移前后的旋转是不一样的.$T(\vec{a})$ 和 R 分别是 $E(2)$ 的一个子群. 实际平移还是个不变子群

$$\begin{aligned} g(R, \vec{b})^{-1}g(I, \vec{a})g(R, \vec{b}) &= R^{-1}T(-\vec{b})T(\vec{a})T(\vec{b})R = R^{-1}T(\vec{a})R && (29) \\ &= g(R^{-1}, 0)g(R, \vec{a}) = g(I, R^{-1}\vec{a}) && (30) \end{aligned}$$

我们考虑欧几里得群的李群, 在单位元附近展开,$R = I - i\theta J, T(\vec{a}) = I - i\vec{a} \cdot \vec{P}$.J 是转动群的生成元,P 是两个方向. 我们得到李代数是

$$[J, P_i] = i\epsilon_{ij}P_j, i, j = 1, 2 \qquad [P_1, P_2] = 0$$

这里使用了爱因斯坦重复指标求和,$R = e^{-i\theta J}, T(\vec{a}) = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}$. 将 T,R 在单位元附近乘积, 得到关系 $J = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{P}}{\theta}$, 那么

$$[J, P_i] = [\frac{1}{\theta}\sum_i a_iP_i, P_i]$$

我们定义升降算符 $P_\pm = P_1 \pm iP_2$. 达到 $[J, P_\pm] = \pm P_\pm$.$P^2 = P_-P_+ = P_+P_-$ 和 J 和 $P_\pm$ 都对易, 实际上 P^2, J 构成一组最小力学量完全集, 可以同时对角化. 将本征态 $|pm>$:

$$P^2|pm>= p^2|pm>, \qquad J|pm>= m|pm>$$

$$<pm|P^2|pm>= p^2 =<pm|P_+^\dagger P_+|pm>=<pm|P_-^\dagger P_-|pm>$$

归一化条件是 $<pm|pm>= 1$. 因为 p=0 是平凡的,|0m> 不对应于 P, 这是就是一个二维转动群 $SO(2)$. 可见 $SO(2) \in E2$. 计算

$$JP_+|pm>= (P_+J + [I, p_+])|pm>= (m + 1)P_+|pm>$$

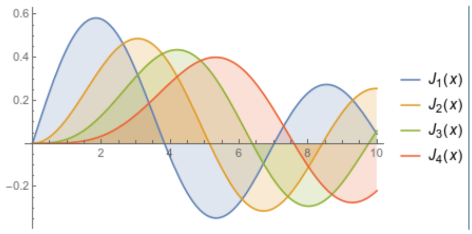
可见 $P_+|pm>$ 也是 J 的一个对应于 $m + 1$ 的本征态. 令 $P_+|pm>= -i|p, m + 1>$. 可以将李代数表示为

$$<pm'|J|pm>= m\delta_{m'm}, \qquad <pm'|P_\pm|pm>= \mp ip\delta_{m',m+1}$$

这个以 p 做标记的表示是无穷维的指数表示. 群元 $g(R, \vec{a})$ 可以用无穷维的矩阵表示,

$$\begin{aligned} D^{(p)}(\theta, \vec{a})_{m'm} &= \langle pm'|g(R, \vec{a})|pm\rangle = \langle pm|T(\vec{a})R|pm\rangle && (31) \\ &= \langle pm'|T(\vec{a})e^{-i\theta J}|pm\rangle = \langle pm'|T(\vec{a})|pm\rangle e^{-im\theta} && (32) \end{aligned}$$

```
Plot[Evaluate[Table[BesselJ[n, x], {n, 4}]], {x, 0, 10}, Filling → Axis,
|绘图 |计算       |表格  |第一类贝塞尔函数                   |填补      |轴
 PlotLegends → "Expressions"]
 |绘图的图例
```



将 $\vec{a}$ 看作是沿 x 轴方向, 那么 $\langle pm|T(\vec{a})|pm\rangle = e^{i(m-m')\varphi}\langle pm'|g(I,\vec{a}=(a,0))|pm\rangle = e^{i(m'-m)\varphi}\langle pm|e^{-iaP_1}|pm\rangle$. 得到

$$\langle pm|e^{-iaP_1}pm\rangle = J_{m-m'}(pa)$$

J_n 是 n 阶一类贝塞尔函数, 实际上贝塞尔函数就是在处理具有圆柱对称性是所引入的. 贝塞尔函数图见下: 证明如下:

$$e^{-iaP_1} = e^{-aP_+/2}e^{-aP_-/2} \tag{33}$$

$$= \sum_{n_+}\frac{1}{n_+!}(\frac{-iaP_+}{2})^{n_+}\sum_{n_-}\frac{1}{n_-!}(\frac{-iaP_-}{2})^{n_-} \tag{34}$$

$$= \sum_{n_+,n_-}\frac{1}{n_-!n_+!}(-i)^{n_++n_-}(\frac{a}{2})^{n_++n_-}P_+^{n_+}p_-^{n_-} \tag{35}$$

$$\langle p,m'|P_+^{n_+}P_-^{n_-}|p,m\rangle = p^{n_++n_-}\langle p,m'+n_+|p,m-n_-\rangle$$

可知必须满足 $m'-m == n_+ - n_-$, 所以上式求和实际只有一个指标,

$$\langle p,m'|e^{-iaP_1}|p,m\rangle = \sum_{n_+=0}^{\infty}\frac{1}{(n_+)!(m-m'+n_+)!}(-i)^{2n_++m-m'}(\frac{a}{2})^{2n_++m-m'}P_+^{n_+}P_-^{2n_++m-m'}$$

这个级数就是 bessel 函数.
另外一个表示 $E(2)$ 的方式是诱导表示, 实质是选择另外一组坐标基底, 构造另一组对易力学量完全集 P_1, P_2. 将 $|\vec{p}\rangle$ =$|p,\varphi\rangle$. 令 $P_i|\vec{p}\rangle = p_i|\vec{p}\rangle, i = 1,2$

$$T(\vec{a})|\vec{p}\rangle = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}|\vec{p}\rangle = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}}|\vec{p}\rangle, \qquad R(\theta)|p,\varphi\rangle = |p,\varphi+\theta\rangle$$

我们关心的是 $\langle p,m'|e^{-iaP_1}|p,m\rangle$. 在 $|p,\varphi\rangle$ 基底下, 平移算符的矩阵元是一个相因子 $e^{-iap\cos\varphi(\vec{a},\vec{p})}$,$\varphi$ 是 a,p 间的夹角. 我们需要两组基底的变换矩阵. 根据傅里叶变换,

$$|pm\rangle = c_m\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}e^{im\varphi}|p,\varphi\rangle$$

$$\langle p\varphi|c_{m'}^{\dagger}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}e^{-im'\varphi}e^{-iap_1}c_m\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}e^{im\varphi}|p\varphi\rangle \tag{36}$$

$$= c_{m'}^{\dagger}c_m\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}e^{-i(m-m')\varphi-iaP_1} \tag{37}$$

$$= 1 \tag{38}$$

$$\langle pm|pm'\rangle = c_m c_{m'} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} \langle p\varphi|p\varphi\rangle \tag{39}$$

$$= |c_m|^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} = 1 \tag{40}$$

可见 $c_m^2 = 1$, 设 $c_m = i$. 那么贝塞尔函数 $J_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i(n\varphi - z\sin\varphi)}$
另外 $D(R,\vec{a}) = \begin{pmatrix} R & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 构成 E(2) 的 3 维表示,R 是 2 阶的 $SO(2)$ 的群元. 证明

$$D(R_1,\vec{a}_1)D(R_2,\vec{a}_2) = \begin{pmatrix} R_1 & \vec{a}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 & \vec{a}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1R_2 & R_1\vec{a}_2 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= D(R_1R_2, R_1\vec{a}_2 + \vec{a}_1)$$

22.4 Covering the Tetrahedron

我们知道 $SU(2)$ 群双覆盖 $SO(3)$ 群, 有知道 $T = A_4 \subset SO(3)$. 那么我们自然会想当我们以同样的方式将 $SU(2)$ 限制在某个子群, 记做 T', 会不会双覆盖 T 呢? 是的, 的确这样, 因为两个元素 $U, -U$ 对 R 的对应关系不变. 因为在 T 中,12 个元素分成 4 个等价类:$I, \{r_1, r_2, r_3\}, \{c, r_1cr_1, r_2cr_2, r_3cr_3\}, \{a, r_1, r_2ar_2, r_3ar_3\}$. 他们是 $SU(2)$ 的 2 阶矩阵. 给定 $U, -U$ 映射到同一个 R, 这 24 个元素为

$$I, r_1, r_2, r_3, c, r_1cr_1, r_2cr_2, r_3cr_3, a, r_1, r_2ar_2, r_3ar_3$$

$$-I, -r_1, -r_2, -r_3, -c, r_1cr_1, -r_2cr_2, -r_3cr_3, -a, r_1, -r_2ar_2, -r_3ar_3$$

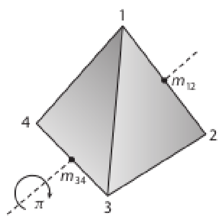
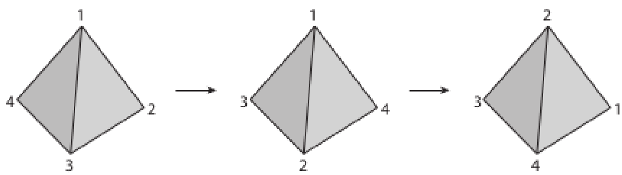


Figure 2



那么 T′ 有几个等价类呢. 显然不能是 8 个, 也不是 4 个.r_i 对应于绕 3 个正交边旋转 π 角. 在 $SU(2)$ 中, 一个旋转 φ 转动就是 $U = e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} = \cos\frac{\varphi}{2} I + i\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}$. 根据

$$r_1^{-1} r_3 r_1 = (-i\sigma_1)(i\sigma_3)(i\sigma_1) = -i\sigma_3 = -r_3$$

可见 $r_3, -r_3$ 是同一个等价类. 实际是 7 个等价类,T' 的特征标表是

T'	n_c	c	1	1′	1″	3	2	2′	2″
	1	I	1	1	1	3	2	2	2
Z_2	1	$-I$	1	1	1	3	-2	-2	-2
Z_4	6	$r, -r$	1	1	1	-1	0	0	0
Z_6	4	c	1	w	w^*	0	1	w	w^*
Z_6	4	-c	1	w	w^*	0	-1	-w	-w^*
Z_6	4	a	1	w^*	w	0	1	w^*	w
Z_6	4	-a	1	w^*	w	0	-1	-w^*	-w