



郑州十一中 18 届分班考试数学试题

命题人：宋东伟

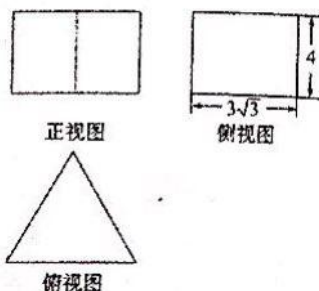
一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 集合 $A=\{x \in \mathbf{N} | x \leq 6\}$, $B=\{x \in \mathbf{R} | x^2 - 3x > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{3, 4, 5\}$ B. $\{4, 5, 6\}$ C. $\{x | 3 < x \leq 6\}$ D. $\{x | 3 \leq x < 6\}$

2. $\sin 585^\circ$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



3. 已知三棱柱的三视图如图所示，其中俯视图为正三角形，则该三棱柱的体积为 ()

- A. $12\sqrt{3}$ B. $27\sqrt{3}$ C. $36\sqrt{3}$ D. 6

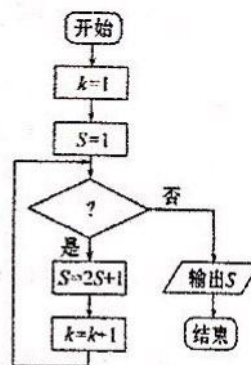
4. 在边长为 3 的等边三角形 ABC 中，点 D, E 分别在 AB, AC 上，且满足 $\vec{AD}=2\vec{DB}$, $\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{EC}$,

则 $\vec{BE} \cdot \vec{CD} =$ ()

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{7}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{7}{2}$

5. 给出如图所示的程序框图，如果输出的结果是 $S=255$ ，那么判断框“?”应为 ()

- A. $k \leq 6?$ B. $k \leq 7?$ C. $k \leq 8?$ D. $k \leq 9?$



6. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$ ，则 $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$ 的定义域是 ()

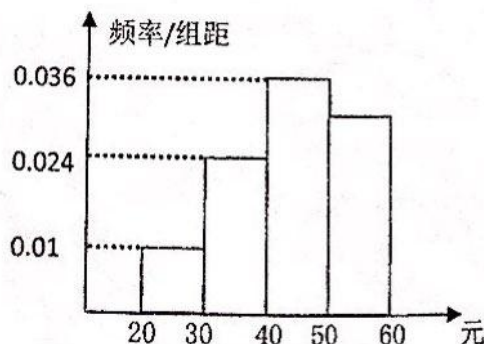
- A. $[0, 2]$ B. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

7. 为得到函数 $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ 的图像，只需将函数 $g(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$ 的图像 ()

- A. 向左平移 $\frac{5}{12}\pi$ B. 向右平移 $\frac{5}{12}\pi$ C. 向左平移 $\frac{7}{12}\pi$ D. 向右平移 $\frac{7}{12}\pi$

8. 学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况，抽出了一个容量为 n 且支出在 $[20, 60)$ 元的样本，其频率分布直方图如右图所示，其中支出在 $[50, 60)$ 元的同学有 30 人，则 n 的值为 ()

- A. 90 B. 100 C. 900 D. 1000



9. 已知函数 $y = \log_a(x-1) + 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P ，若

角 ϕ 的终边经过点 P ，则 $\sin^2 \phi - \sin 2\phi$ 的值等于 ()

- A. $\frac{3}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $-\frac{3}{13}$ D. $-\frac{5}{13}$

10. 设 α, β 是方程 $4x^2 - 4mx + (m+2) = 0$ 的两个实根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{17}{16}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

11. 设集合 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{4-x^2}\}$, $B = \{(x, y) | y = k(x-b)+1\}$, 若对于任意的 $0 \leq k \leq 1$ 都有

$A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 b 的取值范围是 ()

- A. $[1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}]$ B. $[-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{2}]$ C. $[1-2\sqrt{2}, 3]$ D. $[-\sqrt{3}, 3]$

12. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, 若实数 a, b, c 满足 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$, 且 $f(\frac{a+b}{1+ab}) = 2009$,

$f(\frac{b-c}{1-bc}) = 2010$, 则 $f(\frac{a+c}{1+ac}) =$ ()

- A. -1 B. $\lg 2$ C. 1 D. 3

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ 的值 = _____.

14. 一个正四棱锥的底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, 五个顶点都在同一个球面上, 则此球的表面积为 _____.

15. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4) = -f(x)$, 且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数, 若函数 $f(x) = m(m > 0)$

在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 ; 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ _____.

16. 设函数 $f(x) = x|x| + bx + c$, 给出下列结论: ①当 $c = 0$ 时, 有 $f(-x) = -f(x)$ 成立; ②当 $b = 0, c > 0$ 时,

方程 $f(x) = 0$ 只有一个实数根; ③函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(0, c)$ 对称; ④方程 $f(x) = 0$ 最多有两个实数

根. 所有叙述正确的结论序号是 _____.

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. (10 分) 已知集合 $A = \{x | (\frac{1}{2})^x > 1\}$, $B = \{x | 2m-1 \leq x \leq m+2\}$, $B \cap C_R A = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{MN} = (x, -y)$.

(I) 若 x, y 分别表示将一枚质地均匀的正方体骰子 (六个面的点数分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6)

先后抛掷两次时第一次、第二次出现的点数, 求满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = -1$ 的概率;

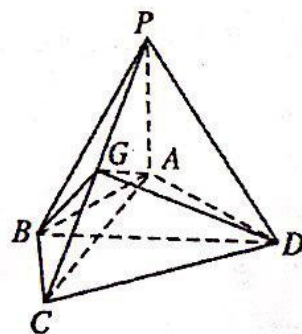
(II) 若 $x, y \in [1, 6]$, 求满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} > 0$ 的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=BC=2$, $AD=CD=\sqrt{7}$, $PA=\sqrt{3}$, $\angle ABC=120^\circ$, G 为线段 PC 上的点.

(1) 证明: $BD \perp$ 平面 APC ;

(2) 若 G 为 PC 的中点, 求 DG 与平面 APC 所成的角的正切值;

(3) 若 G 满足 $PC \perp$ 平面 BGD , 求 $\frac{PG}{GC}$ 的值.



20. 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$

(1) 求函数的单调递增区间

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域

21. 已知方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0$

(1) 若此方程表示圆，求 m 的取值范围；

(2) 若 (1) 中的圆与直线 $x + 2y - 4 = 0$ 相交于 M, N 两点，且 $OM \perp ON$ (O 为坐标原点)，求 m 的值

(3) 在 (2) 的条件下，求以 MN 为直径的圆的方程。

22. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + a}{x}, x \in [1, +\infty)$,

(1) 若对于定义域内的任意 x 都有 $f(x) > 2$ ，试求 a 的取值范围。

(2) 当 $a=1$ 时，若 $f(x) \geq 5t^2 - 10mt + 5$ 对所有 $x \in [1, +\infty)$ 且 $m \in [-1, 1]$ 恒成立，求实数 t 的范围。

答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	B	B	D	C	B	C	C	C	A

13. $\frac{7}{5}$

14. 9π

15. -8

16. ①②③

17. 由已知, $A=(-\infty, 0)$ 且 $B \subseteq A$

1° $B = \emptyset$ 时, $2m-1 > m+2 \Rightarrow m > 3$

2° $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 2m-1 \leq m+2 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m < -2 \end{cases} \Rightarrow m < -2$

由 1° 2° 可知, $m \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ 即为所求。

18. (I) 设 (x, y) 表示一个基本事件, 则抛掷两次骰子的所有基本事件有 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)$, 共 36 个。

用 A 表示事件 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ”, 即 $x-2y = -1$.

则 A 包含的基本事件有 $(1, 1), (3, 2), (5, 3)$, 共 3 个。

$\therefore P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

答: 事件 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ” 的概率为 $\frac{1}{12}$.

(II) 用 B 表示事件 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ”, 即 $x-2y > 0$.

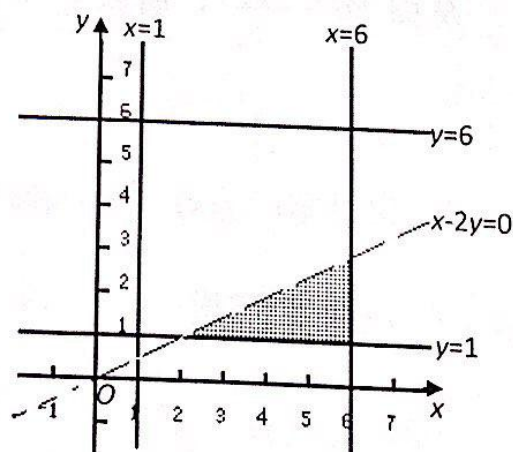
试验的全部结果所构成的区域为

$\{(x, y) | 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6\}$,

构成事件 B 的区域为

$\{(x, y) | 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6, x-2y > 0\}$,

如图所示。



$$21. (1) m < 5; (2) m = \frac{8}{5}; (3) (x - \frac{4}{5})^2 + (y - \frac{8}{5})^2 = \frac{16}{5}$$

$$22. (1) x \in [1, +\infty) \text{ 时, 恒有 } f(x) > 2,$$

$$\text{即恒有 } \frac{x^2 + 3x + a}{x} > 2 \Rightarrow x^2 + 3x + a > 2x \Rightarrow a > -x^2 - x \quad \text{只须 } a > (-x^2 - x)_{\max}$$

$$\text{令 } g(x) = -x^2 - x \quad \text{对称轴 } x = -\frac{1}{2} \notin [1, +\infty)$$

$$\therefore x = 1 \text{ 时, } g(x)_{\min} = -2$$

故 $a > -2$ 即为所求。

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) \geq 5, \text{ 所以 } f(x) \geq 5t^2 - 10mt + 5 \text{ 对所有 } x \in [1, +\infty) \text{ 且 } m \in [-1, 1] \text{ 恒成立, 即 } t^2 - 2mt \leq 0. \text{ 记 } g(m) = -2mt + t^2,$$

$$\text{则 } g(m) = -2mt + t^2 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上恒不大于零, 则 } g(m)_{\max} \leq 0.$$

$$\text{即 } g(1) \leq 0 \text{ 且 } g(-1) \leq 0.$$

$$\text{解得 } t \in [-2, 2]$$