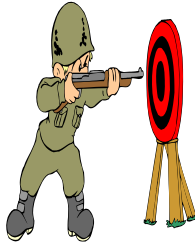


UNIT 7

TRIGONOMETRI (Sin, Kos, Tan Dan Sukuan)



OBJEKTIF

Objektif Am : Mempelajari dan memahami takrifan – takrifan penting dalam trigonometri seperti sinus, kosinus serta sukuan – sukuannya.

Objektif Khusus : Di akhir unit ini pelajar dapat :-

- ◆ Mentakrifkan sinus, kosinus, tangen, sekan, kosekan dan kotangen.
- ◆ Menentukan nilai – nilai trigonometri dengan menggunakan kalkulator.
- ◆ Menyelesaikan masalah sukuan trigonometri.

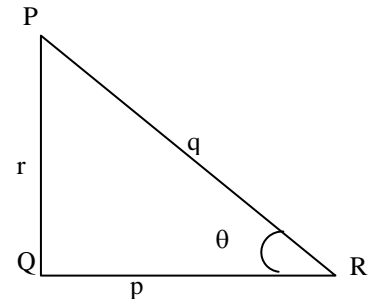


7.0 PENGENALAN

Kita telah menggunakan **Teorem Pythagoras** untuk mengira sisi – sisi bagi satu segi tiga bersudut tegak dalam **Unit 6**. Manakala dalam unit ini kita akan membincangkan nisbah – nisbah sisi segi tiga bersudut tegak yang disebut *nisbah – nisbah trigonometri*. Tiga nisbah trigonometri asas ialah **sinus**, **kosinus** dan **tangen**. Seandainya kita telah memahami 3 konsep asas ini maka kita akan dapat mengikuti subtopik lain dalam trigonometri dengan lebih mudah.

7.1 MENTAKRIFKAN NISBAH – NISBAH TRIGONOMETRI DAN NILAI – NILAI TRIGONOMETRI.

Pertimbangkan satu segi tiga bersudut tegak PQR seperti Rajah 7.1. Kita selalunya menggunakan huruf Greek untuk mewakili sudut. Sudut ' θ ' disebut theta. Huruf – huruf lain yang biasa digunakan ialah α, β, γ (alpha, beta, gamma). Apabila θ adalah sudut seperti dalam Rajah 7.1, maka p disebut *sisi bersebelahan*, dan r disebut *sisi bertentangan*. Manakala q pula adalah sisi yang bertentangan dengan sudut tegak disebut sebagai *hipotenus*.



Rajah 7.1

Untuk makluman anda unit bagi sudut ialah darjah atau ' $^{\circ}$ '. Misalnya sudut θ adalah 35° .

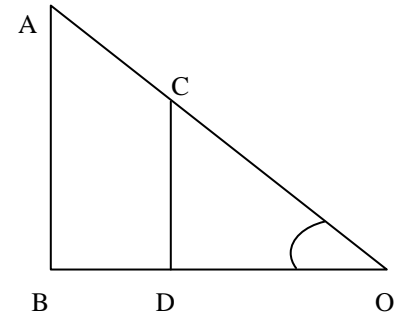
Sekarang cuba kita pertimbangkan Rajah 7.2.

Kita dapat perhatikan bahawa ada 2 segitiga iaitu OAB dan OCD. Sudut θ adalah seperti dalam rajah. Oleh itu dengan jelas kita dapat mentakrifkan nisbah – nisbah trigonometri iaitu :-

$$\sin \theta = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC}$$

Cuba perhatikan nisbah di atas, kita dapati bahawa nisbah tersebut adalah sama bagi kedua – dua segi tiga.

Kita namakan nisbah sisi bertentangan dengan hipotenus bagi satu segi tiga bersudut tegak sebagai **nisbah sinus** atau juga disebut **sin**. Nisbah sinus bagi sesuatu sudut adalah sama tanpa mengira saiz segi tiga bersudut tegak.



Rajah 7.2

$$\sin \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{hipotenus}}$$

Prinsip yang sama digunakan untuk mendapatkan nisbah jarak sisi bersebelahan dengan satu sudut θ berbanding dengan hipotenus dalam satu segi tiga bersudut tegak. Nisbah ini disebut **nisbah kosinus** atau **kos**.

$$\cos \theta = \frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{hipotenus}}$$

Begitu juga bagi nisbah yang ketiga iaitu **tangen**. Tangen bagi sesuatu sudut adalah nisbah sisi bertentangan dengan sisi bersebelahan bagi satu segi tiga bersudut tegak atau **tan**.

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{sisi bersebelahan}}$$

Nisbah tangen juga boleh didapati dengan mengira nisbah sinus berbanding dengan nisbah kosinus.

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{sisi bersebelahan}}$$

$$= \frac{\frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{hipotenus}}}{\frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{hipotenus}}}$$

Oleh itu

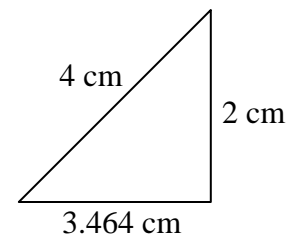
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

CONTOH 7.1

Merujuk kepada Rajah 7.3 dapatkan $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ dan $\tan 30^\circ$.

$$\sin \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{hipotenus}}$$

Penyelesaian :-



Rajah 7.3

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{2}{4} \\ &= 0.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{3.464}{4} \\ &= 0.866\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{2}{3.464} \\ &= 0.577\end{aligned}$$

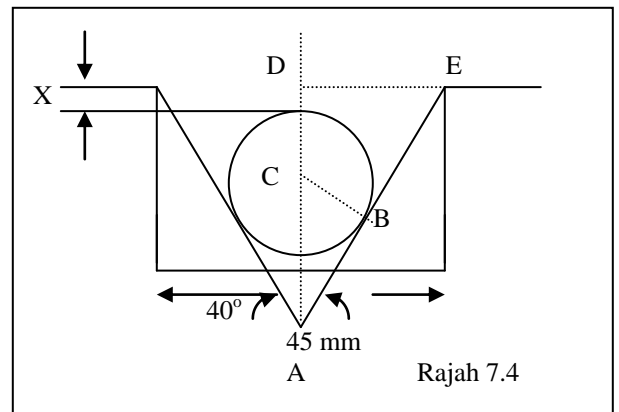
atau

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3.464}{4}} \\ &= \frac{2}{4} \times \frac{4}{3.464} \\ &= \frac{2}{3.464} \\ &= 0.577\end{aligned}$$

CONTOH 7.2

- a) Afiq seorang pelajar Sijil Teknologi Pembuatan, dia sedang berdiri 54 m dari sebuah bangunan. Sudut dongak dari tempat ia berdiri ke bangunan itu ialah 80° . Apakah tinggi bangunan itu ?

- b) Satu lubang tirus 40° disemak dengan menggunakan satu bebola bergarispusat 30 mm. Ukuran – ukuran lain adalah seperti Rajah 7.4. Hitungkan jarak x.



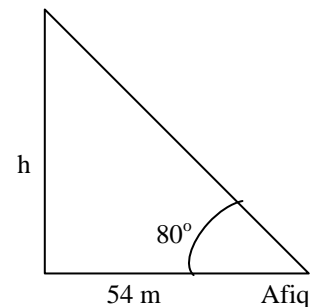
Penyelesaian :-

- a) Bagi menyelesaikan masalah tersebut, kita perlu mengambil maklumat penting dan cuba lukiskan rajah yang bersesuaian seperti Rajah 7.5 di mana h mewakili tinggi bangunan tersebut.

Dalam segi tiga bersudut tegak (Rajah 7.5), h adalah sisi bertentangan dan jarak dari bangunan adalah sisi bersebelahan. Untuk mengira sisi bertentangan bagi segi tiga tersebut, nisbah trigonometri yang sesuai adalah **tangen**.

$$\tan 80^\circ = \frac{h}{54}$$

$$\begin{aligned} h &= 54 \times \tan 80^\circ \\ &= 306.25 \text{ m} \end{aligned}$$



Rajah 7.5

Oleh itu, tinggi bangunan itu ialah 306.25 m.

b) Merujuk pada Rajah 7.4, segi tiga ABC,

$$\frac{15}{h} = \sin 20^\circ$$

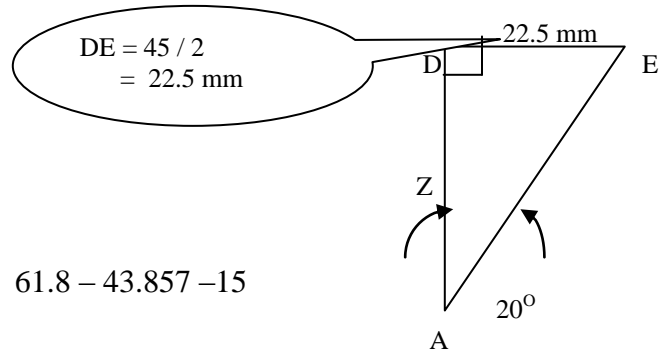
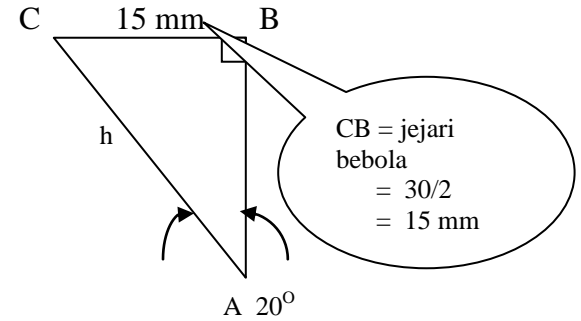
$$\therefore h = \frac{15}{\sin 20^\circ} = 43.857 \text{ mm}$$

Dari segi tiga ADE,

$$\frac{22.5}{Z} = \tan 20^\circ$$

$$Z = \frac{22.5}{\tan 20^\circ} = 61.8 \text{ mm}$$

$$\therefore x = z - h - \frac{30}{2} = 61.8 - 43.857 - 15 = 2.9 \text{ mm}$$



Sekiranya anda telah memahami konsep nisbah trigonometri yang telah di terangkan sebelum ini, anda dapat mencari nisbah trigonometri menggunakan kalkulator saintifik dengan senang. Kalkulator anda mempunyai kekunci sin, cos dan tan pada papan kekunci. Jika anda menggunakan kekunci sin, kalkulator akan memberi nisbah sinus, kekunci cos akan memberi nisbah kosinus dan kekunci tan akan memberi nisbah tangen. Bagi lebih memahami lagi dalam menggunakan kalkulator, sila baca manual kalkulator dan pastikan anda telah memilih 'mode' yang bersesuaian dengan penggunaannya.

Kadang – kala, nilai – nilai sisi segi tiga bersudut tegak diketahui tetapi nilai sudut tidak di ketahui. Konsep **trigonometri songsang** sangat penting dalam keadaan sedemikian. Jika **a** adalah **sisi bertentangan**, **b** **sisi bersebelahan** bagi **sudut θ** dan **h** adalah **hipotenus**, maka kita boleh menyatakan simbol songsangan seperti berikut :-

Simbol	Di sebut sebagai
$\theta = \sin^{-1} \frac{a}{h}$	Songsangan bagi sinus
$\theta = \cos^{-1} \frac{b}{h}$	Songsangan bagi kosinus
$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$	Songsangan bagi tangen

Anda boleh mencari songsangan bagi nisbah fungsi trigonometri dengan menggunakan kalkulator. Untuk membuktikan kenyataan ini gunakan kalkulator anda bagi menyelesaikan nilai – nilai berikut :-

$$\theta = \sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$$

Hanya tekan kekunci di kalkulator anda

$$\theta = \cos^{-1}(0.62) = 51.684^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.5) = 56.309^\circ$$

Senangnya....

CONTOH 7.3

Dapatkan nilai θ :-

a) $\sin \theta = 0.7071$

b) $\cos \theta = 0.7986$

c) $\tan \theta = 0.4663$

d) $\cot \theta = 0.4663$

Penyelesaian :-

a) $\sin \theta = 0.7071$
 $\theta = \sin^{-1} 0.7071$
 $\theta = 45^\circ$



Hanya perlu tekan
kekunci pada
kalkulator

b) $\cos \theta = 0.7986$
 $\theta = \cos^{-1} 0.7986$
 $\theta = 37^\circ$

c) $\tan \theta = 0.4663$
 $\theta = \tan^{-1} 0.4663$
 $\theta = 25^\circ$

d) $\cot \theta = 0.4663$

$$\frac{1}{\tan \theta} = 0.4663$$

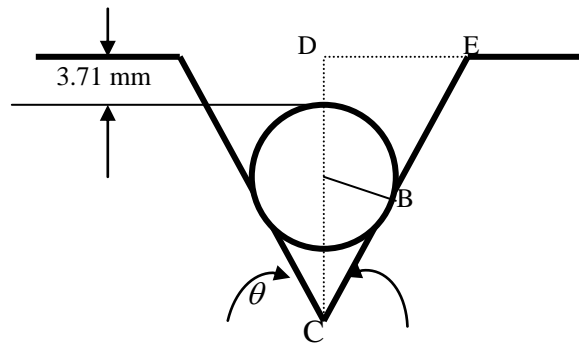
$$0.4663 \tan \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{1}{0.4663}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{0.4663} = 65^\circ$$

CONTOH 7.4

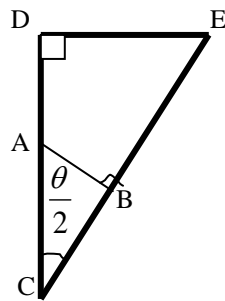
Satu bebola bergaris pusat 25mm digunakan untuk memeriksa sudut 'Vee' suatu bongkah kerja. Untuk ukuran – ukuran berikut rujuk pada Rajah 7.6, hitungkan sudut θ .



Rajah 7.6

Penyelesaian :-

Daripada rajah 7.6 cuba kita keluarkan lakaran gambarajah seperti di bawah :-



$$\begin{aligned} \text{Daripada } \triangle CDE, \\ AC &= 38 - (12.5 + 3.71) \\ &= 21.79 \text{ mm} \end{aligned}$$

Daripada $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{12.5}{21.79} \\ &= 0.573 \end{aligned}$$

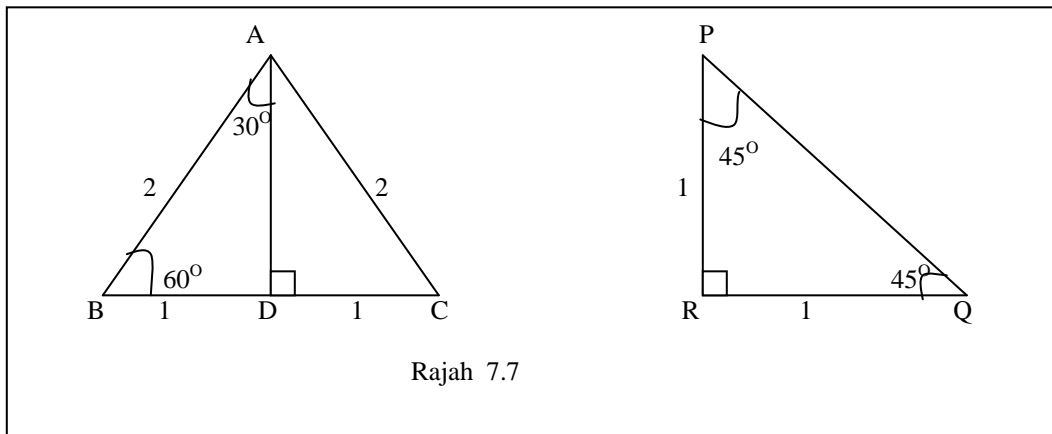
$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} &= \sin^{-1} 0.573 \\ &= 34.96^\circ \\ \theta &= 34.96^\circ \times 2 \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

Anda telah pun faham akan penggunaan nisbah sinus, kosinus dan tangen bagi satu segitiga bersudut tegak. Daripada 3 nisbah trigonometri asas ini, kita akan mentakrifkan nisbah trigonometri yang lain iaitu sekan, kosekan dan kotangen. Kita ringkaskan hubungan antara nisbah trigonometri ini seperti berikut :-

NISBAH TRIGONOMETRI	SINGKATAN
Kosekan $\theta = \frac{1}{\sin \theta}$	Kosek θ
Sek $\theta = \frac{1}{\cos \theta}$	Sek θ
Kotangen $\theta = \frac{1}{\tan \theta}$	Kot θ

CONTOH 7.5

Lengkapkan jadual yang di beri berdasarkan Rajah 7.7.



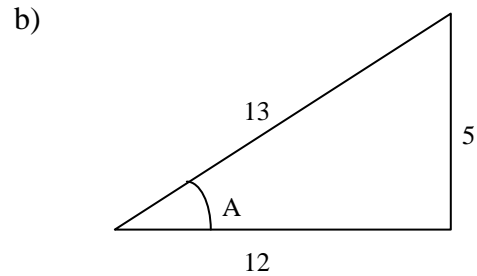
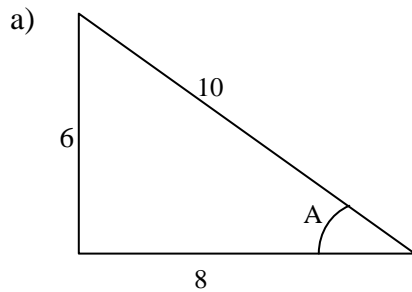
θ	30°	45°	60°
Kosek θ			
Sek θ			
Kot θ			

Penyelesaian :-

θ	30°	45°	60°
Kosek θ	2	1.414	1.155
Sek θ	1.155	1.414	2
Kot θ	1.732	1	0.577

CONTOH 7.6

Dapatkan kosek A, Sek A dan Kot A bagi rajah segitiga berikut dan sisi segi tiga adalah dalam cm.



Penyelesaian :-

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \text{Kosek } \theta &= \frac{1}{\sin A} \\
 &= \frac{1}{\frac{6}{10}} \\
 &= \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\
 \text{Kot } A &= \frac{1}{\tan A} \\
 &= \frac{1}{\frac{6}{8}} \\
 &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sek } A &= \frac{1}{\cos A} \\
 &= \frac{1}{\frac{8}{10}} \\
 &= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad Kosek \theta = \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{13}}$$

$$= \frac{13}{5}$$

$$Kot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{12}}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$Sek A = \frac{1}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\frac{12}{13}}$$

$$= \frac{13}{12}$$

CONTOH 7.7

Dengan menggunakan kalkulator nilaikan yang berikut :-

a) Sek 150°

b) Kosek 225°

c) Kot 300°

Penyelesaian :-

$$\begin{aligned} a) \quad Sek 150^\circ &= \frac{1}{\cos 150^\circ} \\ &= \mathbf{-1.1547} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad Kosek 225^\circ &= \frac{1}{\sin 225^\circ} \\ &= \mathbf{-1.4142} \end{aligned}$$

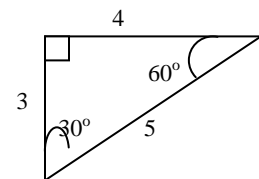
$$\begin{aligned} c) \quad Kot 300^\circ &= \frac{1}{\tan 300^\circ} \\ &= \mathbf{-0.5774} \end{aligned}$$

AKTIVITI 7a

Untuk makluman, anda hampir berjaya melalui rintangan bagi input pertama. Justeru itu ujikan kefahaman anda sebelum meneruskan kepada input yang kedua dalam unit ini. Untuk kepastian jawapan yang di buat, anda boleh menyemaknya di halaman berikut.

7.1) Berpandukan pada rajah di bawah dapatkan :-

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) Sin 30° | b) Kos 30° |
| c) Tan 30° | d) Sin 60° |
| e) Kos 60° | f) Tan 60° |



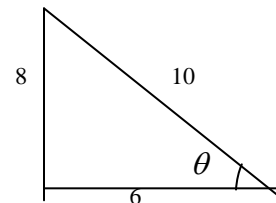
7.2) Tangga berukuran 4m di sandarkan ke dinding sebuah bangunan pada ketinggian 3.4m bagi menjalankan kerja – kerja mengecat. Kecondongan tangga dari dinding tersebut ialah 50° . Berapa jauhkah kaki tangga itu daripada dinding bangunan tersebut?.

7.3) Dengan menggunakan kalkulator dapatkan nilai θ bagi setiap yang berikut :-

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) Sin $\theta = 0.4226$ | b) Kot $\theta = 1.0000$ |
| c) Kos $\theta = 0.8660$ | |

7.4) Berpandukan rajah di sebelah dapatkan :-

- | |
|-------------------|
| a) Kos θ |
| b) Sek θ |
| c) Kot θ |
| d) Kosek θ |



7.5) Dengan menggunakan kalkulator, cari nisbah sinus, kosinus, sekam dan kotangen bagi sudut – sudut berikut :-

- | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|
| a) 3.1° | b) 47.4° | c) 65.7° |
|----------------|-----------------|-----------------|

MAKLUM BALAS

- 7.1) a) $\frac{4}{5}$ @ 0.8 b) $\frac{3}{5}$ @ 0.6 c) $\frac{4}{3}$ @ 1.33
- d) $\frac{3}{5}$ @ 0.6 e) $\frac{4}{5}$ @ 0.8 f) $\frac{3}{4}$ @ 0.75

7.2) 2.571m

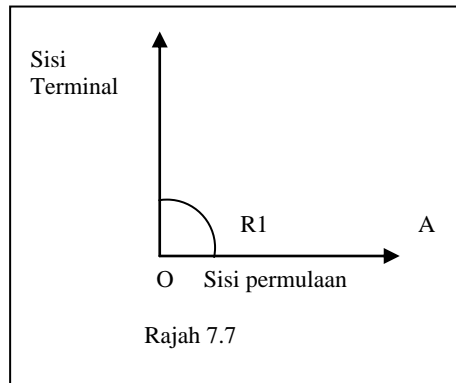
- 7.3) a) 25° b) 45° c) 30°

- 7.4) a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

- 7.5) a) $\sin 3.1^\circ = 0.0541$
 $\cos 3.1^\circ = 0.9985$
 $\sec 3.1^\circ = 1.0015$
 $\cot 3.1^\circ = 18.464$
- b) $\sin 47.4^\circ = 0.7361$
 $\cos 47.4^\circ = 0.6769$
 $\sec 47.4^\circ = 1.4774$
 $\cot 47.4^\circ = 0.9195$
- c) $\sin 65.7^\circ = 0.9114$
 $\cos 65.7^\circ = 0.4115$
 $\sec 65.7^\circ = 2.43$
 $\cot 65.7^\circ = 0.4515$

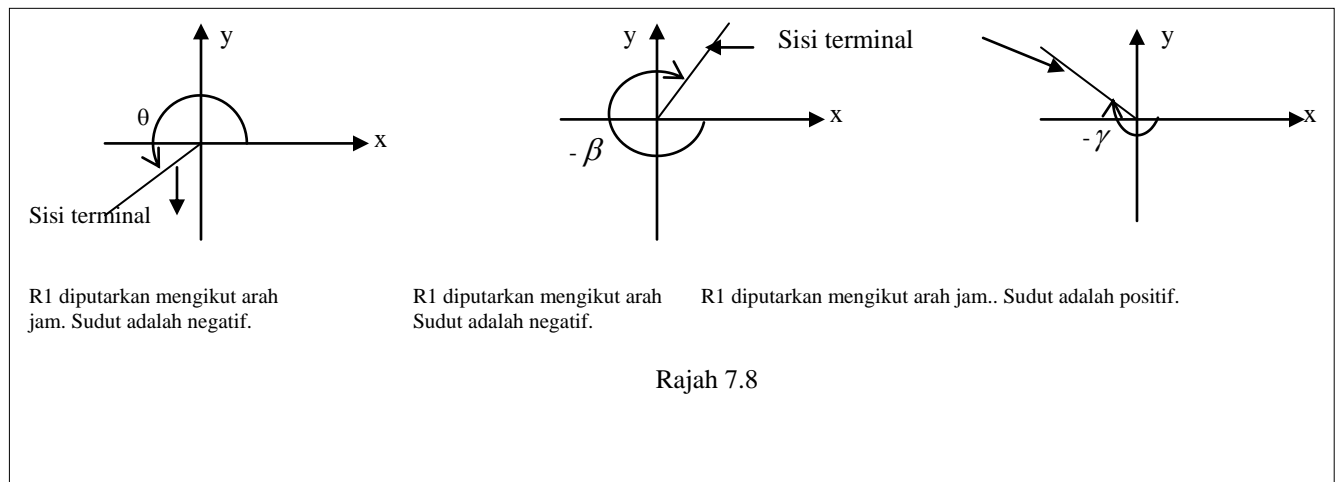
7.2 SUKUAN TRIGONOMETRI

Kita telah mempelajari 6 nisbah trigonometri yang utama dan mengira sudut. Sebelum kita menentukan nilai trigo mengikut sukuan, kita perlu tahu posisi piawai sudut dalam sistem koordinat Cartesan, sudut rujukan dan sudut getaran.



Merujuk kepada Rajah 7.7, R1 ialah jejari dari titik O ke A. Satu sudut dibentuk dengan memusingkan R1, sekeliling titik hujungnya. Posisi permulaan jejari disebut sisi permulaan dan posisi di akhir pusingan disebut sisi terminal. Titik hujung disebut bucu bagi sudut.

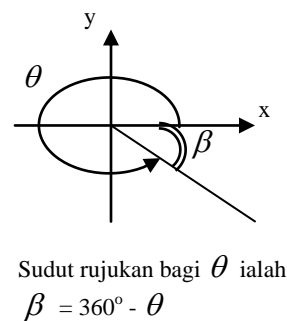
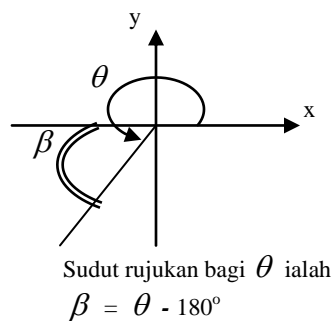
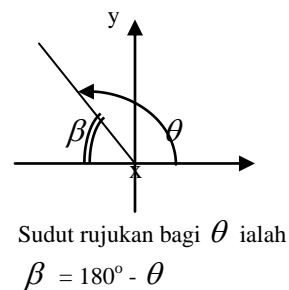
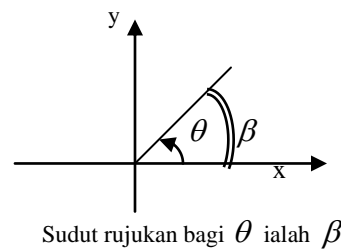
Sekarang kita memperkenalkan sistem koordinat Cartesan untuk mendapat **posisi piawai bagi sudut** dengan mengambil titik awalan sebagai 'bucu' dan paksi - x positif sebagai sisi permulaan.



Dengan memutarakan R1 mengikut *arah lawan jam* ke posisi terminal, kita akan mendapat *sudut positif*, manakala ikut *arah jam* akan memberikan kita *sudut negatif*. Tiada had bagi bilangan pusingan. Sudut positif dan negatif diilustrasikan dalam Rajah 7.8 m/s 14.

Andaikan θ sebagai **sudut** dalam **posisi piawai**. **Sudut rujukan** adalah **sudut tirus** yang terbentuk daripada sisi terminal bagi θ dan paksi mendatar. **Sudut rujukan bagi θ di tandakan oleh β** dan diilustrasikan seperti dalam Rajah 7.9.

Kita mesti memahami rajah ini sebelum membuat pengiraan.



Rajah 7.9

CONTOH 7.8

Cari sudut rujukan bagi

- a) $\theta = 135^\circ$ b) $\theta = -130^\circ$
c) $\theta = 240^\circ$ d) $\theta = 650^\circ$

Penyelesaian :-

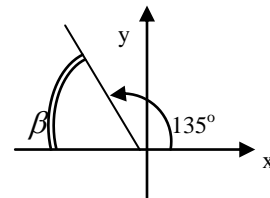
- a) 135° terletak di sukuan kedua seperti rajah di bawah:-

Sudut rujukan bagi θ ialah

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \theta \\ &= 180^\circ - 135^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$



Kita mesti gunakan rumus pada rajah 7.9.



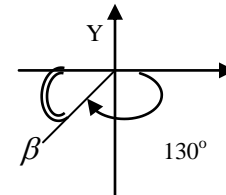
- b) -130° terletak di sukuan ketiga seperti rajah di bawah :-

Sudut diukur mengikut arah jam.

Sudut dari paksi - x ialah

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \theta \\ &= 180^\circ - 130^\circ \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

Oleh itu, sudut rujukan ialah 50° .

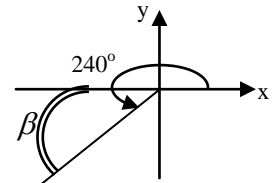


- c) 240° terletak di sukuan ketiga seperti rajah di bawah :-

Sudut dari paksi - x ialah :-

$$\begin{aligned}\beta &= \theta - 180^\circ \\ &= 240^\circ - 180^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

Oleh itu, sudut rujukan ialah 60° .



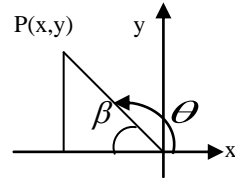
Kita telah ilustrasikan sudut rujukan bagi θ di antara 0° dan 360° . Seperti yang disebutkan sebelum ini, sudut rujukan adalah sentiasa tirus. Jika lebih daripada satu pusingan lengkap dibuat, apakah sudut rujukannya?

download@
<http://math2ever.blogspot.com>

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Semua nisbah adalah positif apabila θ terletak dalam sukuan pertama

2. P terletak di sukuan pertama, di mana $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Dalam sukuan ini, x negatif dan y positif.



Oleh kerana θ adalah sudut cakah, kita perlu mencari sudut rujukan. Biarkan sudut rujukan $\beta = 180^\circ$.

Oleh itu,

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \sin \beta$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = -\cos \beta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{-x} = -\tan \beta$$

Nisbah sinus adalah positif di sukuan kedua.

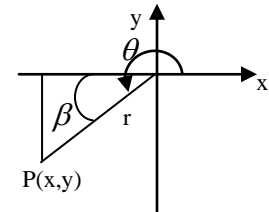
3. P terletak di sukuan ketiga, di mana $180^\circ < \theta < 270^\circ$. Dalam sukuan ini, x dan y adalah negatif.

Sudut rujukan θ adalah $\beta = \theta - 180^\circ$. Oleh itu,

$$\sin \theta = \frac{-y}{r} = -\sin \beta$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = -\cos \beta$$

$$\tan \theta = \frac{-y}{-x} = \tan \beta$$



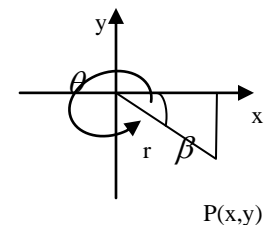
Nisbah tangen adalah positif di sukuan ketiga.

4. P terletak di sukuan keempat, di mana $270^\circ < \theta < 360^\circ$. Di sukuan ini, kedua-dua x dan y adalah negatif.

Sudut rujukan θ adalah $\beta = 360^\circ - \theta$. Oleh itu

$$\sin \theta = \frac{-y}{r} = -\sin \beta$$

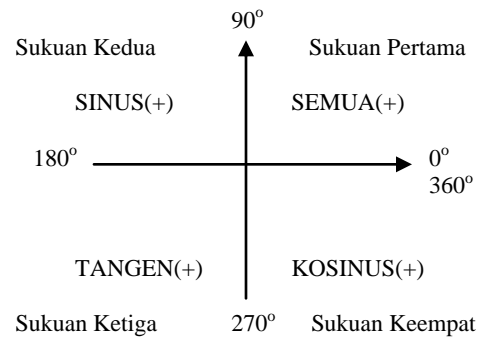
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \cos \beta$$



$$\tan \theta = \frac{-y}{x} = -\tan \beta$$

Nisbah kosinus adalah positif di sukuan keempat.

Berdasarkan kepada keempat – empat sukuan itu, kita boleh simpulkan informasi ini seperti Rajah 7.10.



Rajah 7.10

Untuk menghafal nisbah bagi keempat – empat sukuan ini kita boleh gunakan “All Students Take Chemistry”.



Apabila kita telah mengetahui tandaan nisbah trigonometri mengikut sukuannya, maka kita boleh menilaikan nisbah trigonometri bagi sebarang sudut. Untuk menentukan nilai nisbah trigonometri ini, terdapat beberapa langkah yang perlu diikuti :-

- Lakarkan θ dalam system koordinat Cartesan.
- Dapatkan sudut setara β (jika perlu).
- Tentukan kedudukan θ dalam sukuan.
- Tentukan sudut rujukan.
- Nilaikan nisbah trigonometri bagi sudut rujukan.

Kalau tak boleh faham cuba ikut langkah ini satu persatu

CONTOH 7.10

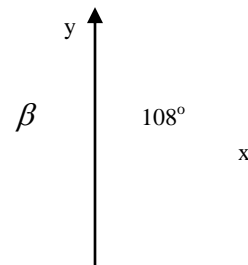
Dapatkan nilai – nilai berikut :-

- Sin 108°
- Kos 253°
- Tan $203^\circ 46'$
- Kos (-255°)

Penyelesaian:-

- Lakarkan 108° , daripada lakaran tersebut kita dapati 108° terletak di sukuan kedua. Sudut rujukan ialah :-

$$\beta = 180^\circ - 108^\circ$$



$$= 72^\circ$$

Oleh itu, $\sin 145^\circ = + \sin 72^\circ$ kerana

Sinus adalah positif di sukuan kedua

$$\text{Maka } \sin 108^\circ = \sin 72^\circ$$

$$= \mathbf{0.9511}$$



- b) Lakarkan 253° , daripada lakaran kita dapati 253° terletak di sukuan ketiga. Sudut rujukan ialah :-

$$\beta = 253^\circ - 180^\circ$$

$$= 73^\circ$$

Oleh itu, $\cos 253^\circ = - \cos 73^\circ$, kerana kosinus adalah negatif di sukuan ketiga.

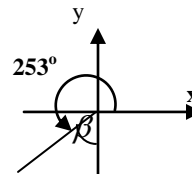
$$\text{Maka } \cos 253^\circ = - \cos 73^\circ$$

$$= \mathbf{-0.2924}$$

Kesilapan Umum ...!!!!

Jangan melakukan kesilapan berikut:-

$$\begin{aligned} \cos 253^\circ &= -\cos (270^\circ - 253^\circ) \\ &= -\cos 17^\circ \\ &= \mathbf{SALAH} \end{aligned}$$



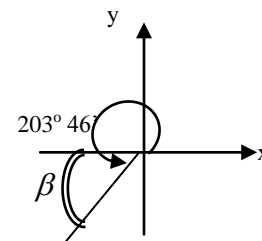
- c) Lakarkan $203^\circ 46'$. Daripada lakaran $203^\circ 46'$ terletak di sukuan ketiga. Sudut rujukan ialah :-

$$\beta = 203^\circ 46' - 180^\circ$$

$$= 23^\circ 46'$$

$$\text{Oleh itu, } \tan 203^\circ 46' = \tan 23^\circ 46'$$

$$= \mathbf{0.4404}$$



- d) Lakarkan (-225°) pada satah Cartesan yang terletak di sukuan kedua.

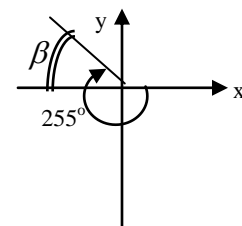
Sudut rujukan ialah :-

$$\beta = 255^\circ - 180^\circ$$

$$= 75^\circ$$

Oleh itu, $\cos (-225^\circ) = - \cos 75^\circ$ kerana kosinus adalah negatif di sukuan kedua.

$$\text{Maka } \cos (-225^\circ) = - \cos 75^\circ$$



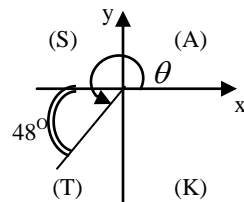
$$= -0.2588$$

CONTOH 7.11

Diberi $\sin \theta = -\sin 48^\circ$. Ini bermakna θ terletak dalam sukuan III atau IV, kerana $\sin \theta$ bernilai negatif. 48° adalah sudut rujukan bagi θ yang mungkin.

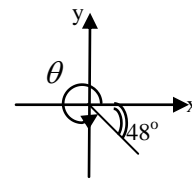
Penyelesaian:-

Diberi $\sin \theta = -\sin 48^\circ$. Ini bermakna θ terletak dalam sukuan III atau IV, kerana $\sin \theta$ bernilai negatif maka 48° adalah sudut rujukan bagi θ .



$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ + 48^\circ \\ &= 228^\circ\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 228^\circ \text{ dan } 312^\circ$$



$$\begin{aligned}\theta &= 360^\circ + 48^\circ \\ &= 312^\circ\end{aligned}$$

CONTOH 7.12

Diberi $\cos y = 0.8660$ dan $0^\circ \leq y \leq 360^\circ$. Cari nilai yang mungkin bagi y .

Penyelesaian:-

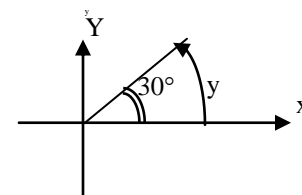
Diberi $\cos y = 0.8660$,

dengan menggunakan kalkulator

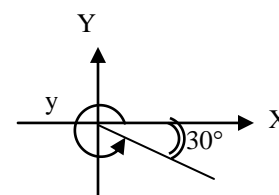
$$y = \cos^{-1} 0.8660$$

$$= 30^\circ \text{ (maka } \cos y = \cos 30^\circ)$$

Dengan ini y terletak dalam



Atau



sukuan I dan IV.

$$\therefore y = 30^\circ \text{ dan } 330^\circ$$



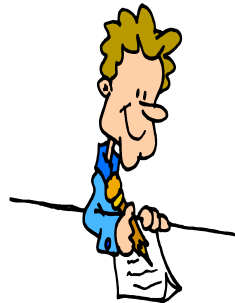
AKTIVITI 7b

Syabas, anda hampir berjaya melalui rintangan bagi input yang kedua. Oleh itu

ujikan kefahaman anda sebelum meneruskan kepada penilaian sendiri.

Untuk kepastian jawapan anda boleh menyemaknya di halaman berikut.

- 7.6 Cari sudut setara di antara 0° dan 360° bagi setiap sudut berikut :-
 a) 470° b) -520° c) 780°
- 7.7 Cari nilai bagi setiap yang berikut :-
 a) $\sin 258^\circ$ b) $\cos 217^\circ$ c) $\tan 238^\circ$
 d) $\sin 213^\circ 20'$ e) $\tan 256.7^\circ$ f) $\cos 305.3^\circ$
- 7.8 Jika $\cos \theta = 0.3082$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Dapatkan nilai θ .
- 7.9 Jika $\tan \theta = -1.048$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Cari nilai θ .



MAKLUM BALAS

- 7.6 a) 110° b) -160° c) 60°
- 7.7 a) -0.9781 b) -0.7986 c) 1.600
 d) -0.5495 e) 4.230 f) 0.5779
- 7.8 $\theta = 72^\circ 3'$ dan $287^\circ 57'$
- 7.9 $\theta = 133^\circ 39'$ dan $313^\circ 39'$



PENILAIAN KENDIRI

mencuba

Anda hampir mencapai kejayaan. Diharap anda

semua soalan dalam penilaian sendiri ini dan semak jawapan anda pada maklum balas yang disediakan. Sekiranya ada masalah yang tidak dapat di selesaikan, sila berbincang dengan kawan atau pensyarah anda. Semoga berjaya....

7.1) Cari nilai – nilai bagi $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$ tertakluk kepada syarat – syarat berikut :

a) $\sin \theta = \frac{12}{13}$, θ dalam sukuan pertama

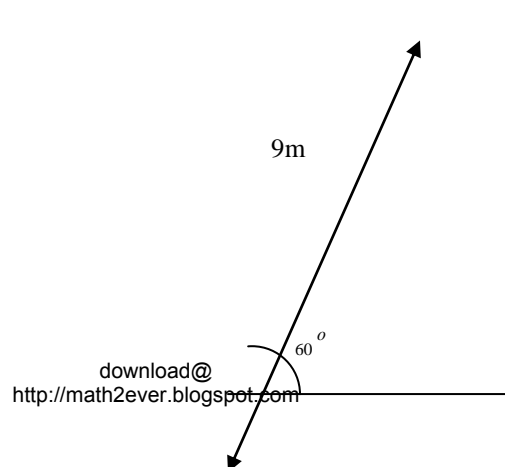
b) $\tan \theta = \frac{-2}{3}$, θ dalam sukuan kedua

7.2) Dengan menggunakan kalkulator, cari nisbah sinus, kosinus dan tangen bagi sudut – sudut berikut :-

a) 5.2° b) 21.4°

c) 76.5° d) 93.7°

7.3) Tangga berukuran 9m disandarkan kepada dinding. Sudut di antara tangga dengan tanah adalah 60° . Berapakah jarak kaki tangga itu daripada dinding.



- 7.4) Pada hari panas, bayang – bayang sebuah menara adalah 67.2m. Sudut di antara pancaran matahari dengan tanah ialah θ . Jika tinggi menara itu adalah 80m, apakah nilai θ ?
- 7.5) Dapatkan nilai θ berikut di mana $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
- $\sin \frac{\theta}{2} = -0.2$
 - $\cos 2\theta = -0.5592$
 - $4 \tan 2\theta = -1$
- 7.6) a) Diberi A adalah sudut cakah dari $\cos A = \frac{-2}{3}$, carikan nilai bagi sek A, kosek A dan kot A.
- b) Diberi $\sin 45^\circ = 0.707$ dan $\cos 45^\circ = 0.707$. Cari nilai bagi $\tan 45^\circ$, $\cot 45^\circ$, $\sec 45^\circ$ dan $\csc 45^\circ$.
- c) Diberi $\sin \frac{2}{3}\pi = 0.866$ dan $\cos \frac{2}{3}\pi = -0.5$. Cari nilai bagi $\tan \frac{2}{3}\pi$, $\cot \frac{2}{3}\pi$, $\sec \frac{2}{3}\pi$ dan $\csc \frac{2}{3}\pi$.
- 7.7) Dapatkan sudut setara di antara 0° dan 360° bagi setiap sudut berikut :-
- 425°
 - -390°
 - -1090°
- 7.8) Dapatkan sudut rujukan bagi setiap sudut berikut :-
- -290°
 - -900°
 - 165°
- 7.9) Cari nilai bagi setiap nisbah trigonometri yang berikut :-
- $\sin 150^\circ$
 - $\tan 110^\circ$
 - $\cos 210^\circ$
 - $\csc 350^\circ$
 - $\cot 300^\circ$
- 7.10) Dapatkan semua sudut dalam julat $0^\circ < \theta < 360^\circ$ yang memuaskan bagi setiap persamaan trigonometri berikut :-
- $\sin \theta = 0.6428$
 - $\cos \theta = -0.6428$
 - $\tan \theta = 0.5$
 - $\sin \theta = -0.9421$



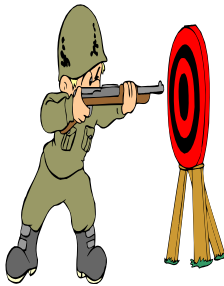
MAKLUM BALAS

Adakah anda telah mencubanya terlebih dahulu ? Sekiranya “YA”, sila semak jawapan anda.

- 7.1) a) $\text{Kos } \theta = \frac{5}{13}, \text{ Tan } \theta = \frac{12}{5}$
 b) $\text{Kos } \theta = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \text{ Sin } \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$
- 7.2) a) 0.0906, 0.9959, 0.0910
 b) 0.3649, 0.9311, 0.3919
 c) 0.9724, 0.2334, 4.1653
 d) 0.9979, -0.0645, -15.464
- 7.3) 4.5m
- 7.4) 50°
- 7.5) a) $214.59^\circ, 325.41^\circ$
 b) $30^\circ, 60^\circ$
 c) $166^\circ, 346^\circ$
- 7.6) a) $\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}$
 b) 1, 1, 1.41, 1.41
 c) -1.73, -0.578, -2, 1.15
- 7.7) a) 65° b) -30° c) -10°
- 7.8) a) 70° b) 0° c) 15°
- 7.9) a) 0.5 b) -2.747 c) -0.866
 d) -5.760 e) -0.5773
- 7.10) a) $40^\circ, 140^\circ$ b) $130^\circ, 230^\circ$
 c) $26^\circ 34', 206^\circ 34'$ d) $250^\circ 24', 289^\circ 36'$

UNIT 8

TRIGONOMETRI (Persamaan Trigonometri, Sinus Dan Kosinus)



OBJEKTIF

Objektif Am : Mempelajari dan memahami persamaan trigonometri serta menggunakan rumus sinus dan kosinus bagi menyelesaikan masalah segitiga.

Objektif Khusus : Di penghujung unit ini pelajar dapat:-

- Menyelesaikan masalah persamaan trigonometri yang mudah.
- Menggunakan hukum sinus dan kosinus untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan segitiga.



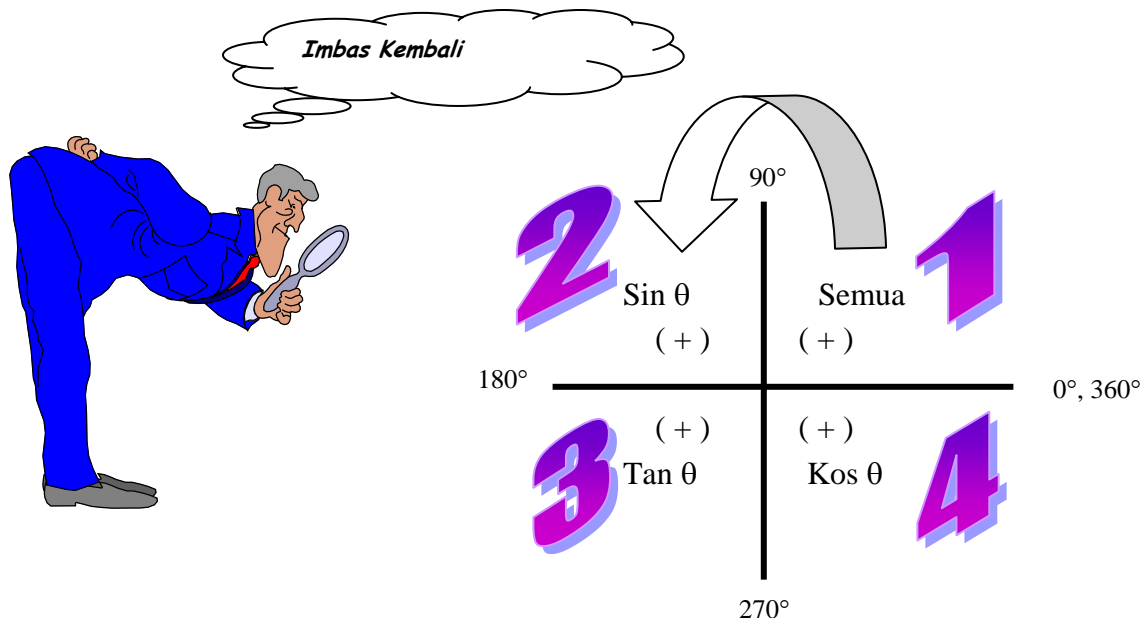
INPUT

8.0 PENGENALAN

Persamaan trigonometri adalah lanjutan dari pelajaran nisbah-nisbah trigonometri yang telah kita pelajari di Unit 7. Dengan pengetahuan itu, ia akan membantu anda untuk mendapatkan kefahaman yang jelas bagi mengenalpasti bentuk-bentuk persamaan trigonometri dan cara penyelesaiannya. Pada asasnya persamaan trigonometri adalah persamaan yang mengandungi nisbah-nisbah trigonometri bagi mencari satu sudut atau beberapa sudut yang menjadikan persamaan tersebut adalah benar. (Sebagai contoh persamaan trigonometri: $\sin 2x = 1$, $\tan 2x = 0.5$, $\cos 3y = \sin y$, dan lain - lain)

8.1 MENYELESAIKAN PERSAMAAN TRIGONOMETRI MUDAH

Dalam unit ini, kita akan menyelesaikan persamaan trigonometri secara algebra dan menghadkan semua jawapan kepada sudut diantara 0° hingga 360° ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$). Kita akan membincangkan pelbagai teknik yang terlibat dalam penyelesaian persamaan trigonometri. Teknik-teknik itu dapat dijelaskan dengan baik bersertakan beberapa contoh mudah.



Nota : Pergerakan sudut positif adalah megikut arah lawan jam di mana:

- Sukuan pertama $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$ adalah positif antara $0^\circ < \theta < 90^\circ$ atau $0 < \theta < \pi/2$
- Sukuan kedua $\sin \theta$ sahaja adalah positif antara $90^\circ < \theta < 180^\circ$ atau $\pi/2 < \theta < \pi$
- Sukuan ketiga $\tan \theta$ sahaja adalah positif antara $180^\circ < \theta < 270^\circ$ atau $\pi < \theta < 3/2\pi$
- Sukuan keempat $\cos \theta$ sahaja adalah positif antara $270^\circ < \theta < 360^\circ$ atau $3/2\pi < \theta < 2\pi$

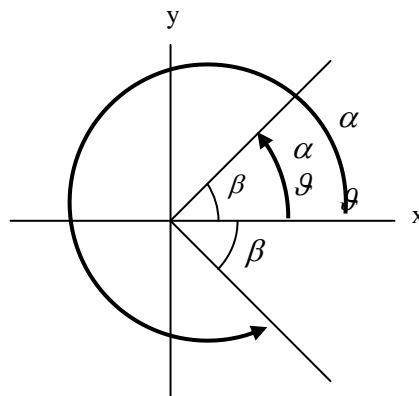
CONTOH 8.1:

Dapatkan sudut diantara 0° dan 360° yang memenuhi persamaan:

- $\cos \alpha = 0.5$
- $2 \sin \theta - 1 = 0$

Penyelesaian :-

- Kita telah mengetahui bahawa kosinus sebarang sudut dalam sukuan pertama dan keempat adalah positif. Oleh itu terdapat 2 jawapan yang mungkin.



Rajah 8.1

Oleh kerana $\cos \alpha = 0.5$
 $\alpha = \cos^{-1} 0.5$
 $= 60^\circ$
 \therefore sudut rujukan, β ialah 60° .

Merujuk rajah 8.1, kita memperoleh,

Sukuan 1 : $\alpha = \beta = 60^\circ$

Sukuan 4 : $\alpha = 360^\circ - \beta$
 $= 300^\circ$

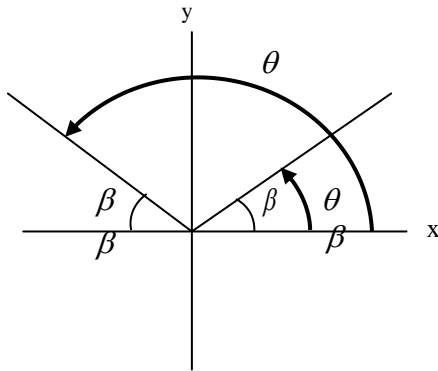
$\therefore \theta = 60^\circ \text{ atau } 300^\circ$

- $2 \sin \theta - 1 = 0$
 $2 \sin \theta = 1$
 $\sin \theta = \frac{1}{2}$
 $= 0.5$

$$\theta = \sin^{-1} 0.5$$

$$\theta = 30^\circ$$

Oleh kerana $\sin 30^\circ = 0.5$, sudut rujukan β ialah 30° .



Rajah 8.2

Sinus bagi sebarang sudut dalam sukuan pertama dan kedua adalah positif. Oleh itu terdapat 2 jawapan yang mungkin.

Merujuk kepada Rajah 8.2, Kita memperolehi:

$$\text{Sukuan 1 : } \theta = \beta = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Sukuan 2 : } \theta &= 180^\circ - \beta \\ &= 180^\circ - 30^\circ \\ &= 150^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \text{ atau } 150^\circ$$

CONTOH 8.2 :

Selesaikan persamaan yang berikut bagi $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

a). $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$

b). $3 \tan x - \cot x = 2$

Perhatian!!! persamaan ini adalah dalam bentuk kuadratik dan boleh difaktor

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 &= 0 \\ (2 \sin \theta + 1)(\sin \theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Seperti penyelesaian persamaan algebra, kita memperolehi:

$$2 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

Oleh kerana, $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ (nilai negatif), θ terletak dalam sukuan 3 dan sukuan 4 (rujuk Rajah 8.3).



Andaian,

Sudut rujukan ialah β

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1} -\frac{1}{2}$$

$$\theta = -30^\circ, \text{ atau}$$

$$\therefore \beta = 30^\circ$$

Bagi Sukuan 3:

$$\theta = 180^\circ + \beta$$

$$= 180^\circ + 30^\circ$$

$$= 210^\circ$$

Bagi Sukuan 4:

$$\theta = 360^\circ - \beta$$

$$= 360^\circ - 30^\circ$$

$$= 330^\circ$$

Manakala bagi $\sin \theta - 1 = 0$

$$\sin \theta = 1$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$

Dapatkan G.S.T.K seperti algebra biasa

b) $3 \tan x - \cot x = 2$

$$\therefore 3 \tan x - \frac{1}{\tan x} = 2$$

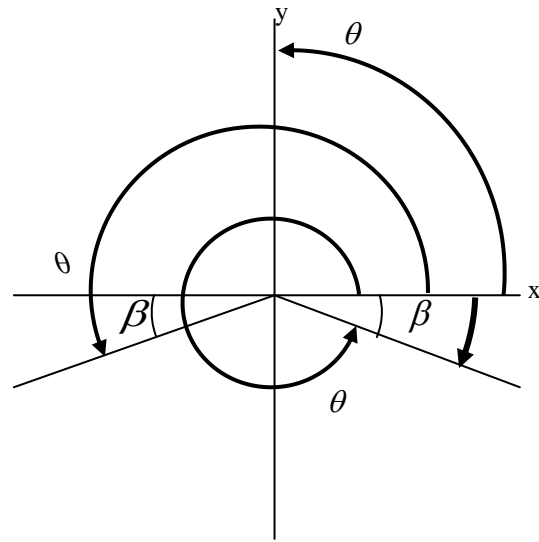
$$\frac{3 \tan^2 x - 1}{\tan x} = 2$$

$$3 \tan^2 x - 1 = 2 \tan x$$

$$3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$$

$$3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$$

Darab silang bagi sebutan kiri dan kanan



Rajah 8.3

Persamaan kuadratik ini boleh difaktorkan sebagai.

$$(3 \tan x + 1)(\tan x - 1) = 0$$

$$3 \tan x + 1 = 0$$

$$\tan x = -\frac{1}{3}$$

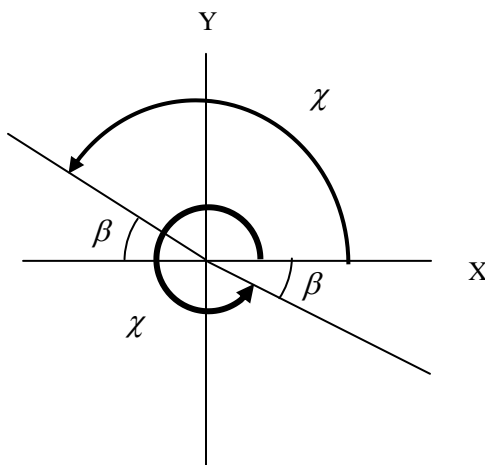
$$x = \tan^{-1} -\frac{1}{3}$$

$$= -18^{\circ} 26'$$

\therefore Sudut rujukan $\beta = 18^{\circ} 26'$

Oleh kerana $\tan x$ adalah negatif, x terletak dalam sukuan 2 dan 4.

Merujuk Rajah 8.4, kita memperolehi:



Sukuan 2:

$$\begin{aligned} \chi &= 180^{\circ} - \beta \\ &= 180^{\circ} - 18^{\circ} 26' \\ &= 161^{\circ} 34' \end{aligned}$$

Sukuan 4:

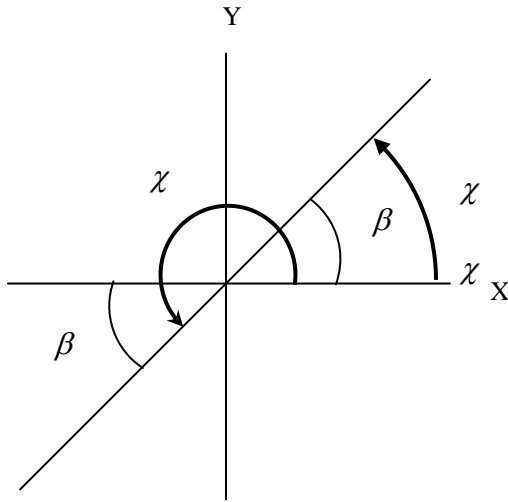
$$\begin{aligned} \chi &= 360^{\circ} - \beta \\ &= 360^{\circ} - 18^{\circ} 26' \\ &= 341^{\circ} 34' \end{aligned}$$

Rajah 8.4

Manakala, $\tan x - 1 = 0$

$$\tan x = 1$$

$$x = 45^{\circ}$$



Rajah 8.5

Oleh kerana $\tan x$ adalah positif, x terletak dalam sukuan 1 dan sukuan 3. Seperti yang ditunjukkan Rajah 8.5 kita memperolehi:

Sukuan 1: $\chi = \beta = 45^\circ$

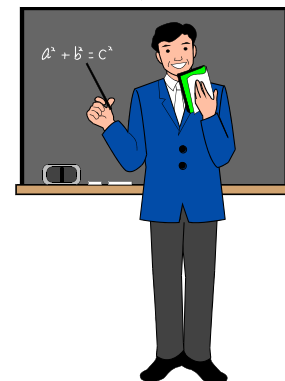
Sukuan 3: $\chi = 180^\circ + \beta$
 $= 180^\circ + 45^\circ$
 $= 225^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ, 161^\circ 34', 225^\circ$
 atau $341^\circ 34'$

PERINGATAN :

- Bagi persamaan yang mempunyai hanya satu nisbah trigonometri, selesaikan terus sudutnya
- Bagi persamaan yang mempunyai lebih dari satu nisbah trigonometri, cuba susun semula dan samakan persamaan dengan 0 dan faktorkan atau gunakan rumus kuadratik.

YANG PALING PENTING ANDA DINASIHATKAN UNTUK MELAKARKAN SUDUT DALAM SISTEM KOORDINAT CARTESAN.





INPUT

Perhatian!!!, anda hampir berjaya melalui rintangan bagi input pertama. Oleh itu uji kefahaman anda sebelum meneruskan kepada input yang kedua dalam unit ini. Untuk kepastian jawapan yang dibuat, anda boleh menyemak di halaman berikut:-

8.1 Dapatkan sudut di antara 0° dan 360° yang memenuhi persamaan :-

- a) $\sin \theta = 0.5$
- b) $2 \cos \theta - 1 = 0$
- c) $2 \sin \theta - \sec \theta = 1$
- d) $\tan \theta = 0.4404$

8.2 Selesaikan persamaan berikut bagi sudut diantara 0° dan 360° :-

- a) $2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1$
- b) $\sin \theta + \cos \theta = 1$
- c) $\tan^2 \theta - 3 = 0$
- d) $\tan A = -\sin A$



MAKLUM BALAS

- 8.1
- a) 30° , 150°
 - b) 60° , 300°
 - c) 90° , 210° , 330°
 - d) $23^\circ 46'$, $203^\circ 46'$
- 8.2
- a) 60° , 180° , 300°
 - b) 0° , 45° , 90° , 135°
 - c) 60° , 240° , 120° , 300°
 - d) 0° , 180°

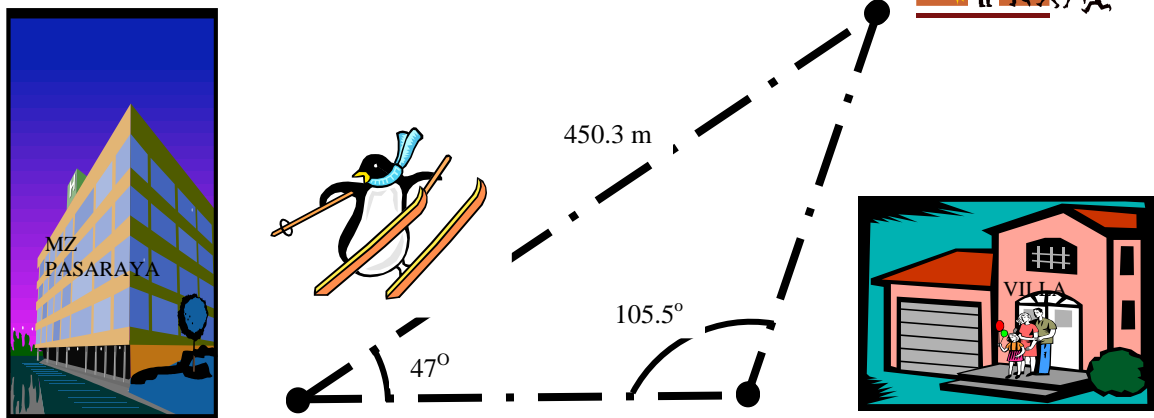


INPUT

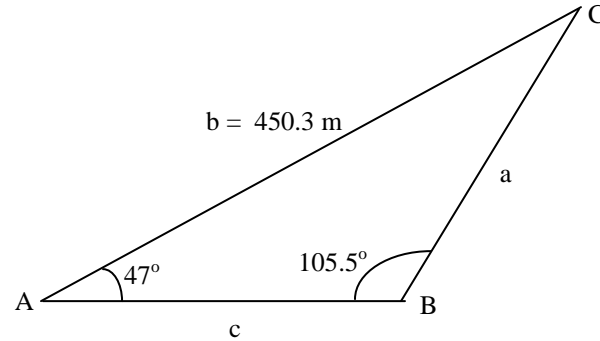
8.2 Menyelesaikan Masalah Segitiga Menggunakan Rumus Sinus dan Kosinus.

Trigonometri juga boleh dikembangkan untuk mencari panjang sisi suatu segitiga dan ukuran sudutnya. Seperti yang telah kita lihat dalam Unit 7, kita menghadkan skopnya kepada menyelesaikan segitiga bersudut tegak. Tetapi, harus kita ingat tidak semua keadaan fizikal melibatkan segitiga bersudut tegak.

Cuba kita lihat keadaan dalam Rajah 8.6. Bolehkah kita mencari jarak di antara MZ Pasaraya dengan sekolah membentuk satu segitiga bukan bersudut tegak. Untuk satu segitiga bukan bersudut tegak seperti Rajah 8.7, kita gunakan A, B dan C untuk mewakili sudut- sudut yang puncaknya adalah A, B dan C. Panjang sisi yang bertentangan dengan sudut- sudut dilabelkan sebagai a, b & c. Sudut B (ditulis sebagai $\angle B$ atau $\angle CBA$) di antara c dan a di sebut *sudut kandung* bagi c dan a.



Rajah 8.6

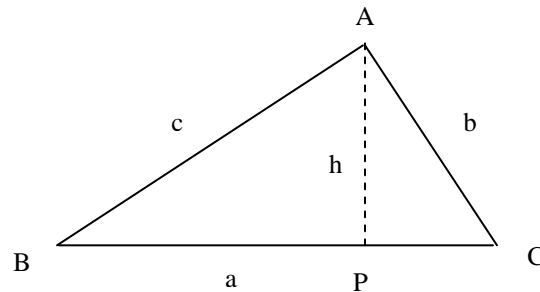


Rajah 8.7

Dalam menyelesaikan segitiga bukan bersudut tepat, terdapat 2 hukum yang akan kita gunakan iaitu **Hukum Sinus** dan **Hukum Kosinus**.

8.2.1 Hukum Sinus

Bagi menerbitkan Hukum Sinus, kita perlu pertimbangkan satu segitiga bukan bersudut tegak dengan sudut tirus seperti Rajah 8.8



Rajah 8.8

Merujuk Rajah 8.8:

Dari $\triangle APB$;

$$\sin B = \frac{h}{c} \text{ atau } h = c \sin B \dots\dots(1)$$

Dan dari $\triangle APC$;

$$\sin C = \frac{h}{b} \text{ atau } h = b \sin C \dots\dots(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2),

$$h = c \sin B \dots\dots(1)$$

$$h = b \sin C \dots\dots(2)$$

Dengan menyamakan kedua-dua persamaan, kita dapati;

$$c \sin B = b \sin C$$

atau,

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

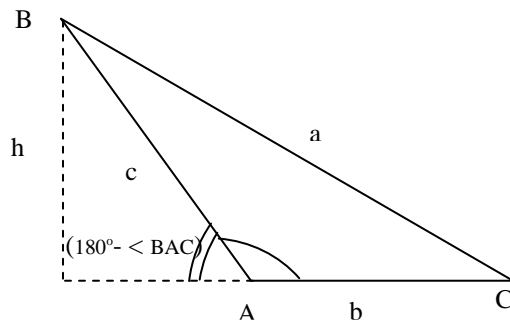
Dengan cara yang sama boleh di buktikan

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

Dengan itu, kita memperolehi jaringan berikut;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cuba kita pertimbangkan satu segi tiga bukan bersudut tegak dengan salah satu sudutnya adalah cakuk.



Rajah 8.9

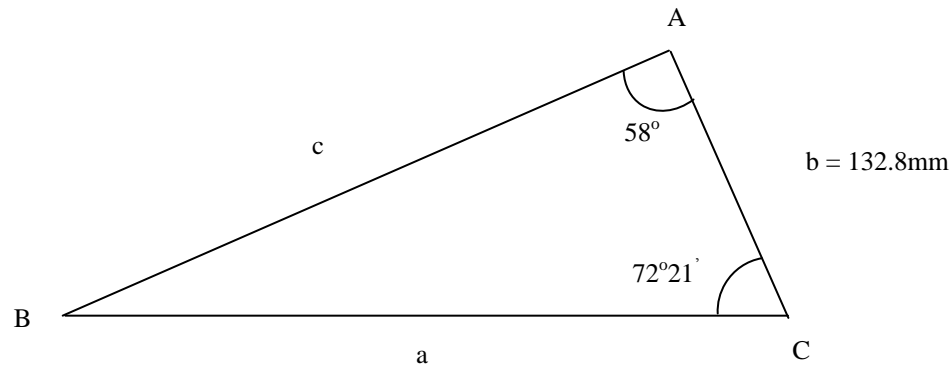
Merujuk kepada Rajah 8.9;
Kita unjurkan sisi b supaya altitud h boleh dilukis daripada puncak B bertemu sisi b . Jika kita menggunakan fakta bahawa
 $\sin (180^\circ - \angle BAC) = \sin \angle BAC$
Dengan cara yang sama kita boleh tunjukkan bahawa:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Perkaitan ini dikenali sebagai **Hukum Sinus**

CONTOH 8.3

Selesaikan Segitiga ABC berikut jika $\angle A = 58^\circ$,
 $\angle C = 72^\circ 21'$ dan $b = 132.8\text{mm}$



Penyelesaian:

Dengan menggunakan fakta bahawa jumlah sudut dalam satu
 segitiga adalah 180°

$$\angle B = 180^\circ - (58^\circ + 72^\circ 21') \\ = 49^\circ 39'$$

Hukum Sinus menyatakan bahawa:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

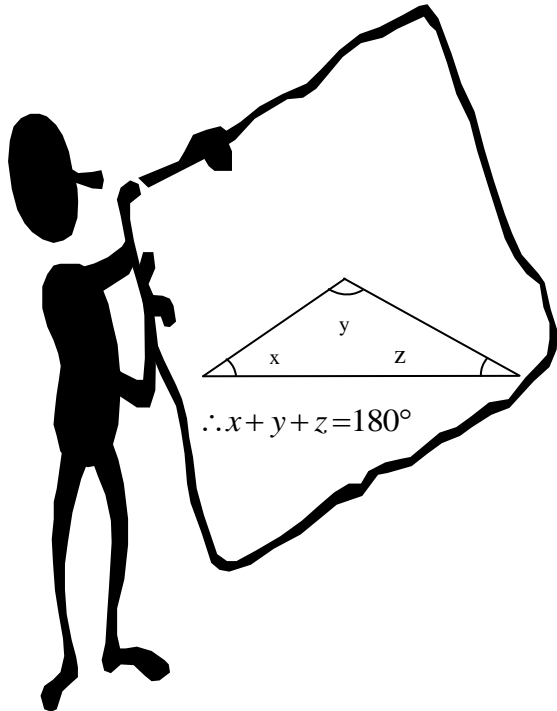
$$\frac{a}{\sin 58^\circ} = \frac{132.8}{\sin 49^\circ 39'} = \frac{c}{\sin 72^\circ 21'}$$

Selesaikan untuk a;

$$\frac{a}{\sin 58^\circ} = \frac{132.8}{\sin 49^\circ 39'}$$

$$a = \frac{132.8 \sin 58^\circ}{\sin 49^\circ 39'}$$

$$= 147.8 \text{ mm}$$



Selesaikan untuk c ;

$$\frac{132.8}{\sin 49^{\circ}39'} = \frac{c}{\sin 72^{\circ}21'}$$

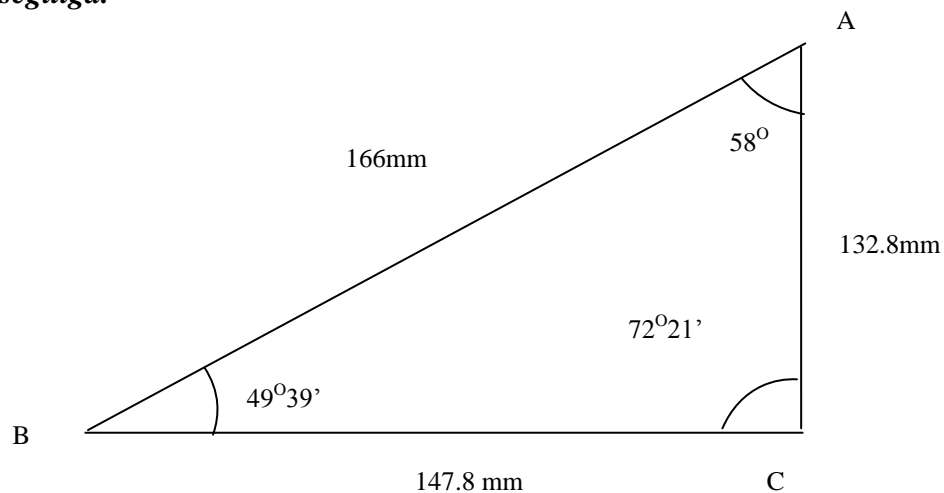
Boleh juga ditulis;

$$\frac{c}{\sin 72^{\circ}21'} = \frac{132.8}{\sin 49^{\circ}39'}$$

$$c = \frac{132.8 \sin 72^{\circ}21'}{\sin 49^{\circ}39'}$$

$$c = 166.1 \text{ mm}$$

Daripada penyelesaian yang diperolehi kita labelkan segitiga seperti Rajah 8.10. Kita dapat lihat **sisi yang terpanjang adalah bertentangan dengan sudut yang terbesar dan sisi yang terpendek adalah bertentangan dengan sudut yang terkecil. Kenyataan ini adalah benar untuk semua segitiga.**



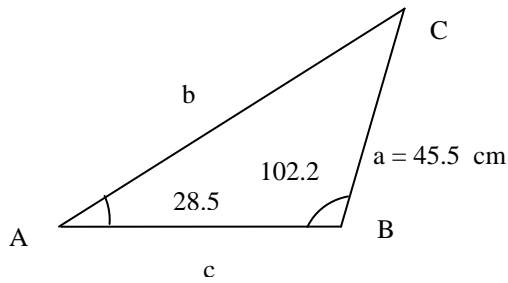
Rajah 8.10

CONTOH 8.4

Carikan sudut dan sisi-sisi yang lain bagi segitiga dengan
 $A = 28.5^\circ$, $B = 102.2^\circ$ dan $a = 45.5\text{cm}$.

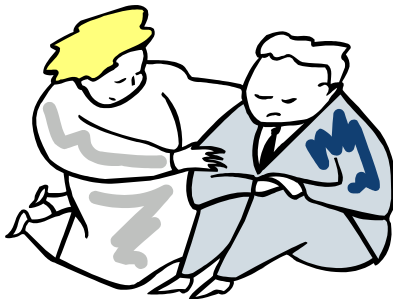
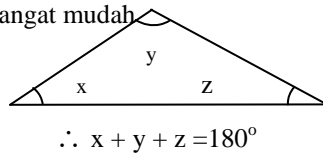
Penyelesaian :

Dengan maklumat yang diberi, kita lakar dan labelkan segitiga ABC seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 8.11. Kita dapati:



Rajah 8.11

Jangan putus asa, penyelesaiannya sangat mudah



$$\frac{45.5}{\sin 28.5^\circ} = \frac{b}{\sin 102.2^\circ} = \frac{c}{\sin C}$$

Lebih senang kita selesaikan $\angle C$ sebelum sisi b & c.

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - (28.5^\circ + 102.2^\circ) \\ &= 49.3^\circ \\ &= 49^\circ 18'\end{aligned}$$

Penyelesaian bagi b,

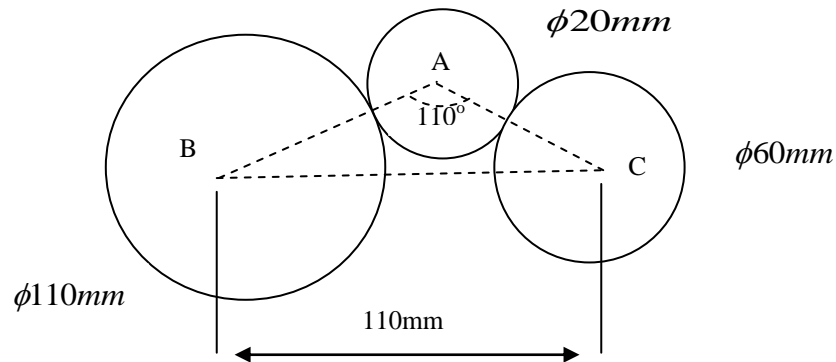
$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin 102.2^\circ} &= \frac{45.5}{\sin 28.5^\circ} \\ b &= \frac{45.5 \sin 102.2^\circ}{\sin 28.5^\circ} \\ &= 93.2 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Penyelesaian bagi C,

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin 49^\circ 18'} &= \frac{45.5}{\sin 28.5^\circ} \\ c &= \frac{45.5 \sin 49^\circ 18'}{\sin 28.5^\circ} \\ &= 72.29 \text{ cm.}\end{aligned}$$

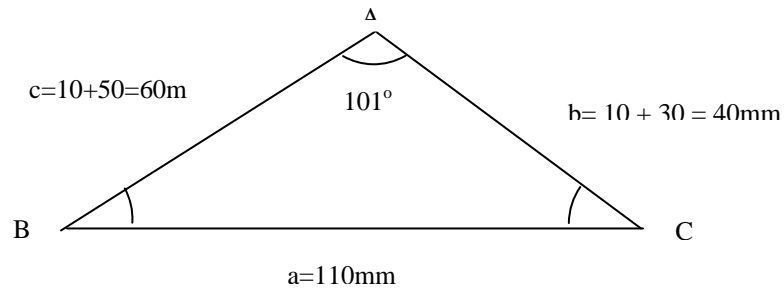
CONTOH 8.5

Bagi kedudukan gear di bawah, dapatkan sudut B & C.



Penyelesaian :

Keluarkan segitiga ABC;



Dengan menggunakan Hukum Sinus, kita dapati:

$$\frac{110}{\sin 101^\circ} = \frac{40}{\sin B} = \frac{60}{\sin C}$$

Penyelesaian bagi $\angle B$;

$$\frac{40}{\sin B} = \frac{110}{\sin 101^\circ} \quad (\text{darabkan silang})$$

$$110 \sin B = 40 \sin 101^\circ$$

$$\sin B = \frac{40 \sin 101^\circ}{110}$$

$$= 0.3569$$

Oleh kerana Sinus berada dalam sukuan 1 & 2 , ia adalah positif;

$$\angle B = \sin^{-1} 0.3569$$

$$= 20.91^\circ$$

atau

$$\angle B = 180^\circ - 20.91^\circ$$

$$= 159.09^\circ$$

Tetapi , $\angle B$ adalah sudut cakah dan $a > b$, maka $\angle B$ adalah lebih kecil dari $\angle A$;

$$\therefore \angle B = 20.91^\circ$$

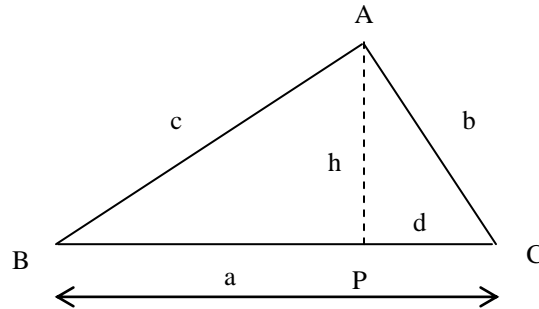
Penyelesaian bagi $\angle C$;

$$\angle C = 180^\circ - 101^\circ - 20.91$$

$$= 58^\circ 5' 24''.$$

8.2.2 Hukum Kosinus

Untuk menggunakan Hukum Sinus kita perlu tahu sekurang – kurangnya satu sisi dan sudut yang bersejajaran. Jika kita di beri 3 sisi atau 2 sisi dan satu sudut kandung maka dalam masalah seperti ini Hukum Sinus tidak boleh digunakan. Oleh itu Hukum Kosinus diperlukan. Kita pertimbangkan satu segitiga bukan bersudut tegak ABC dalam Rajah 8.12.



Rajah 8.12

Merujuk Rajah 8.12:

Dari $\triangle APB$; dengan Teorem Pythagoras,

$$(AB)^2 = (BP)^2 + (AP)^2$$

$$c^2 = (a - d)^2 + h^2 \dots\dots(1)$$

Dan dari $\triangle APC$;

$$(AP)^2 = (AC)^2 - (PC)^2$$

$$h^2 = b^2 - d^2 \dots\dots(2)$$

Dari persamaan (1),

$$c^2 = (a - d)^2 + h^2 \dots\dots(1)$$

Gantikan persamaan (2) dalam persamaan (1)

$$c^2 = (a - d)^2 + (b^2 - d^2)$$

$$c^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - d^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ad + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ad \dots\dots(3)$$

dan

$$\frac{PC}{AC} = \cos C$$

$$\frac{d}{b} = \cos C$$

$$d = b \cos C \dots\dots(4)$$

Kembangkan
(a - d) (a - d)

Gantikan persamaan (4) dalam persamaan (3)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a(b \cos C)$$

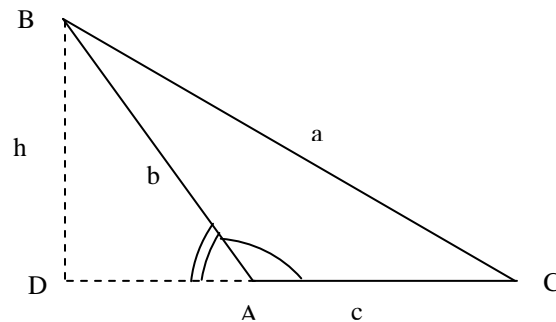
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Hubungan ini dikenali sebagai **Hukum Kosinus**. Dengan cara yang sama, kita dapat tunjukkan bahawa :

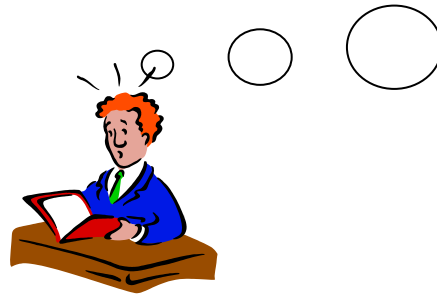
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Hukum Kosinus juga boleh digunakan untuk segitiga bukan bersudut tegak seperti rajah 8.13 yang mana sudut A adalah sudut cakah. Kenyataan ini boleh diperjelaskan lagi dengan menggunakan fakta bahawa $\cos (180^\circ - A) = -\cos A$



Rajah 8.13



INGAT.....

Jika ABC adalah segitiga dengan sisi a,b dan c maka....

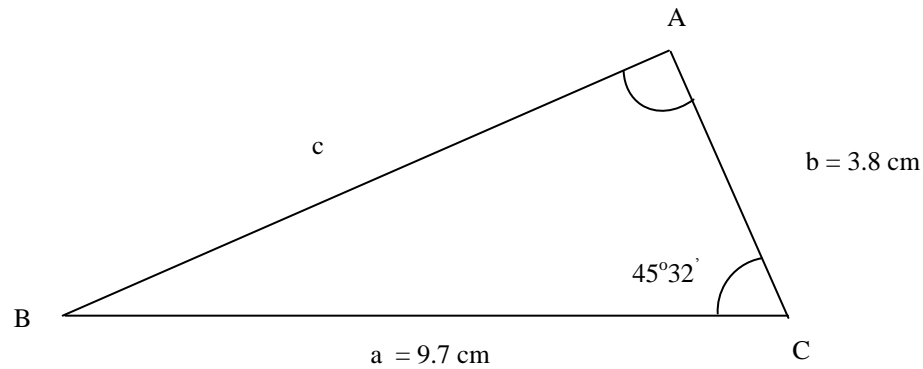
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

CONTOH 8.6

Dapatkan panjang c untuk rajah 8.14.



Rajah 8.14

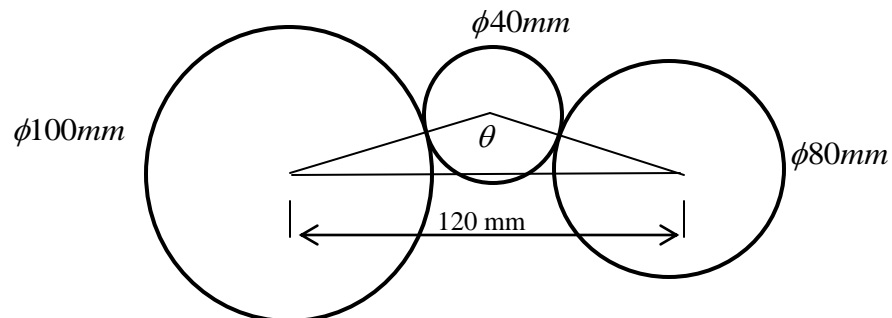
Penyelesaian:

Dengan menggunakan Hukum Kosinus.

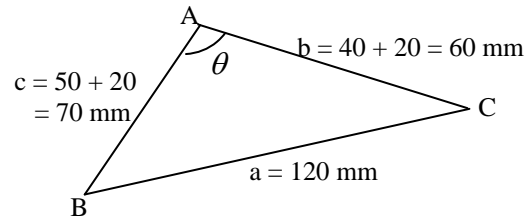
$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\
 &= (3.8)^2 + (9.7)^2 - 2(3.8)(9.7)\cos 45^\circ 32' \\
 &= 56.8896 \\
 c &= \sqrt{56.8896} \\
 &= 7.54 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

CONTOH 8.7

Untuk kedudukan gear di bawah, dapatkan sudut θ .



Penyelesaian :

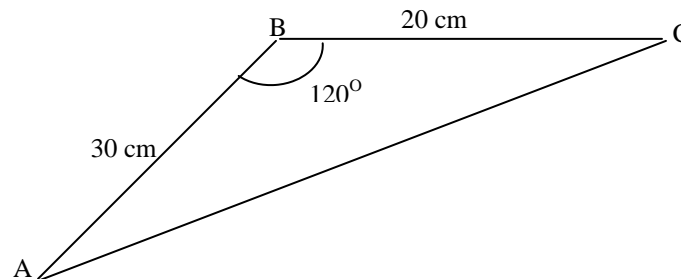


Untuk dapatkan sudut θ , kita perlu gunakan Hukum Kosinus.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
 (120)^2 &= (60)^2 + (70)^2 - 2(60)(70)\cos A \\
 14400 &= 3600 + 4900 - 8400 \cos A \\
 8400 \cos A &= 3600 + 4900 - 14400 \\
 &= -5900 \\
 \cos A &= \frac{-5900}{8400} \\
 &= -0.7024 \\
 A &= \cos^{-1} - 0.7024 \\
 &= 134.62^\circ \\
 \therefore \text{sudut A} &= \text{sudut } \theta \\
 &= 134.62^\circ
 \end{aligned}$$

CONTOH 8.8

Dapatkan sudut dan sisi yang tidak diketahui dalam segitiga ini.



Penyelesaian :

Kita di beri 2 sisi dan satu sudut kandung. Oleh kerana kita tahu $\angle B$, kita dapat mengira b dengan menggunakan Hukum Kosinus.

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ &= (20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30) \cos 120^\circ \\ &= 400 + 900 - (-600) \\ &= 1900 \\ b &= \sqrt{1900} \\ &= 43.59 \text{ cm} \end{aligned}$$

Bagi menentukan sudut A,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ 400 &= 900 + 1900 - 2(43.59)(30) \cos A \\ \cos A &= \frac{2400}{2615.4} \\ &= 0.9176 \\ A &= \cos^{-1} 0.9176 \\ &= 23.42^\circ \end{aligned}$$

Bagi menentukan sudut C,

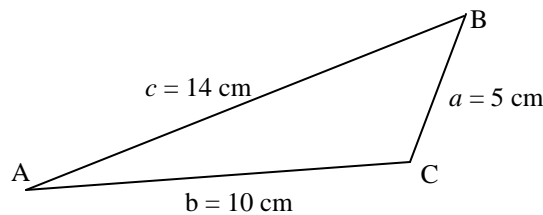
$$\begin{aligned} \angle C &= 180^\circ - 120^\circ - 23.42^\circ \\ &= 36.58^\circ \end{aligned}$$

CONTOH 8.9

Dapatkan semua sudut untuk segitiga yang sisinya ialah $a = 5$ cm, $b = 10$ cm dan $c = 14$ cm.

Penyelesaian:

Maklumat yang di beri di lakarkan seperti Rajah 13.15.



Rajah 13.15

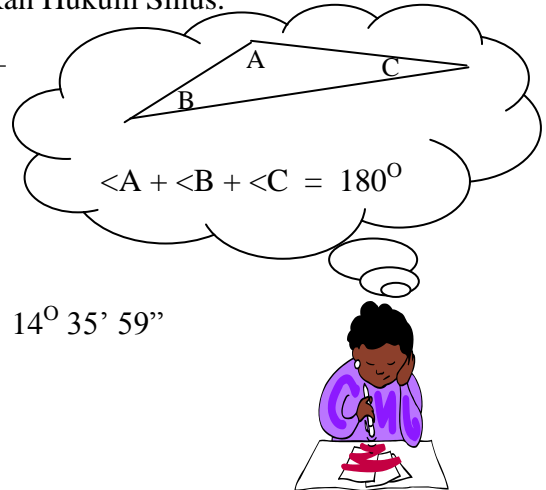
Untuk menyelesaikan masalah ini, kita boleh dapatkan sebarang sudut terlebih dahulu. Pengiraan untuk mendapatkan $\angle B$,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ (10)^2 &= 5^2 + (14)^2 - 2(5)(14) \cos B \\ 100 &= 25 + 196 - 140 \cos B \\ 140 \cos B &= 25 + 196 - 100 \\ &= 121 \\ \cos B &= \frac{121}{140} \\ &= 0.8643 \\ B &= \cos^{-1} 0.8643 \\ &= 30.2^\circ \end{aligned}$$

Bagi mencari nilai $\angle A$, kita boleh gunakan Hukum Kosinus dan juga Hukum Sinus. Oleh itu anda boleh pilih yang mana – mana kaedah yang senang bagi anda.

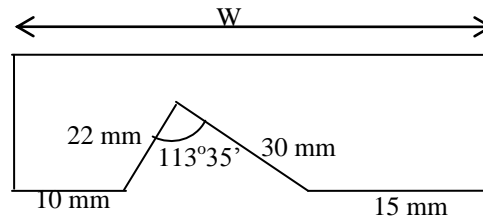
Untuk kes ini, kita akan gunakan Hukum Sinus.

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sin A} &= \frac{10}{\sin 30.2^\circ} \\ \sin A &= \frac{5 \sin 30.2^\circ}{10} \\ &= 0.2515 \\ \therefore \angle A &= 14^\circ 35' 59'' \\ \text{Maka } \angle C &= 180^\circ - 30.2^\circ - 14^\circ 35' 59'' \\ &= 135^\circ 12' 1'' \end{aligned}$$



CONTOH 8.10

Dapatkan jarak W untuk bongkah ini.



Penyelesaian :-

Keluarkan segitiga dari bongkah tersebut. Dengan menggunakan

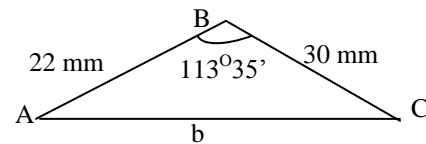
Hukum Kosinus :-

$$\begin{aligned} b^2 &= (22)^2 + (30)^2 - 2(22)(30)\cos 113^\circ 35' \\ &= 484 + 900 - (-528.109) \\ &= 1912.109 \end{aligned}$$

$$b = \sqrt{1912.109}$$

$$b = 43.73 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \therefore W &= 10 + b + 15 \\ &= 68.73 \text{ mm} \end{aligned}$$



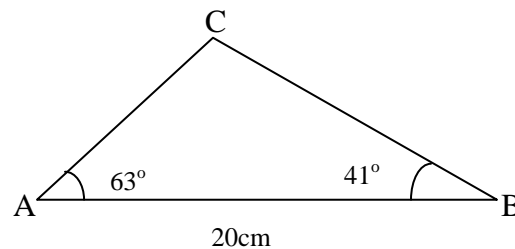


AKTIVITI 8b

Perhatian!!!, anda hampir berjaya melalui rintangan bagi input pertama. Oleh itu ujikan kefahaman anda sebelum meneruskan kepada input yang kedua dalam unit ini. Untuk kepastian jawapan yang di buat anda boleh menyemak di halaman berikut:-

8.3 Dapatkan semua sudut dan sisi segitiga ABC berikut:-

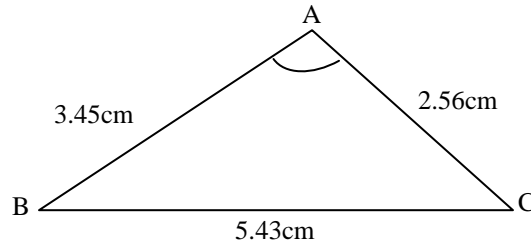
- a) $a = 22\text{m}$, $b = 12\text{m}$, $A = 42^\circ$
- b) $a = 50\text{cm}$, $b = 30\text{cm}$, $A = 48^\circ$
- c) Dapatkan sudut C dan sisi yang tidak diketahui bagi segitiga ini.



- d) Cari sudut dan sisi-sisi yang lain bagi segitiga dengan , $A = 32.5^\circ$, $B = 100.2^\circ$ dan $a = 54.5\text{cm}$.
- e) Selesaikan segitiga ABC dengan , $A = 50^\circ$, $a = 9\text{cm}$ dan $b = 11\text{cm}$.

8.4 Dapatkan semua sudut dan sisi segitiga ABC berikut dengan:-

- a) $a = 8\text{cm}$, $b = 19\text{cm}$ dan $c = 14\text{cm}$
- b) $A = 121^\circ$, $b = 25\text{m}$ dan $c = 37\text{m}$
- c) $a = b = 9\text{cm}$ dan $C = 55^\circ$
- d) Selesaikan segitiga ABC di mana $A = 47^\circ 36'$, $b = 3.89\text{cm}$ dan $c = 4.25$
- e) Cari sudut yang paling besar bagi satu segitiga seperti Rajah 8.16.



Rajah 8.16



MAKLUM BALAS

- 8.3 a) $B = 21.41^\circ$
 $C = 116.59^\circ$
 $c = 29.40\text{m}$
- b) $B = 26.48^\circ$
 $C = 105.52^\circ$
 $c = 64.83 \text{ cm}$
- c) $C = 76^\circ$
 $a = 18.37 \text{ cm}$
 $b = 13.53\text{cm}$
- d) $C = 47.3^\circ$
 $b = 99.83\text{cm}$
 $c = 74.54\text{cm}$
- e) $B = 69.44^\circ, 110.56^\circ$
 $C = 60.56^\circ, 19.44^\circ$
 $c = 10.23\text{cm}, 3.91\text{cm}$
- 8.4 a) $A = 22.08^\circ$
 $B = 116.8^\circ$
 $C = 41.12^\circ$
- b) $a = 54\text{cm}$
 $B = 23^\circ$
 $C = 36^\circ$
- c) $c = 8.31\text{cm}$
 $A = B = 62.5^\circ$
- d) $a = 3.302\text{cm}$
 $B = 60^\circ 31'$
 $C = 71^\circ 53'$
- e) $A = 124^\circ 13'$



PENILAIAN KENDIRI

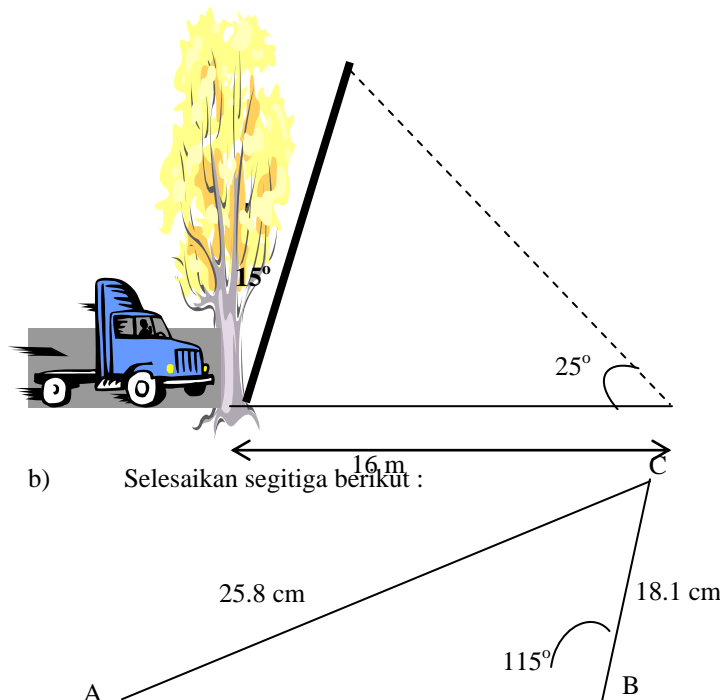
mencapai kejayaan. Diharap anda mencuba semua soalan dalam penilaian sendiri ini dan semak jawapan anda pada maklumbalas yang di sediakan. Sekiranya ada masalah yang tidak dapat diselesaikan, sila berbincang dengan kawan atau pensyarah anda. Semoga berjaya....

8.1 Tanpa menggunakan kalkulator dapatkan nilai θ bagi setiap yang berikut.

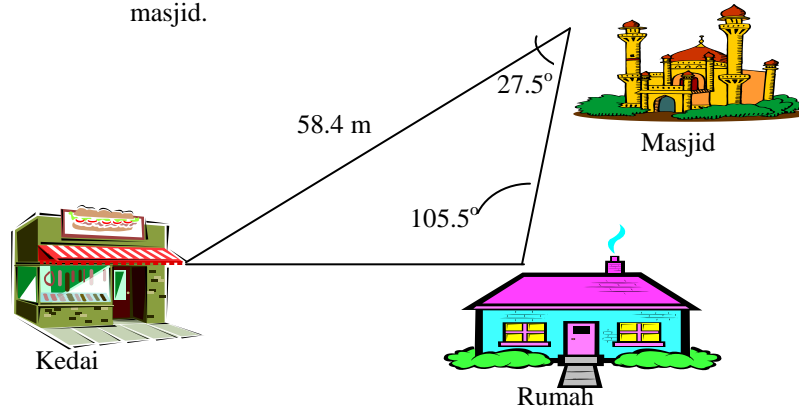
$$(0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

- a) $\cos \theta \sin \theta - \cos \theta = 0$
- b) $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$
- c) $\cos 2A = 1 - \sin A$
- d) $\sec C = \tan C + \cos C$

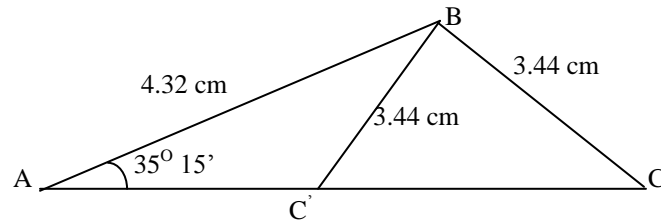
- 8.2 a) Sebatang pokok telah dilanggar oleh sebuah lori dan condong 15° daripada kedudukan asal. Pokok itu membentuk bayang – bayang sepanjang 16 m pada tanah rata. Sudut dongak ialah 25° . Kirakan tinggi pokok tersebut?



- c) Rujuk pada rajah yang di beri, tentukan jarak antara rumah dengan masjid.

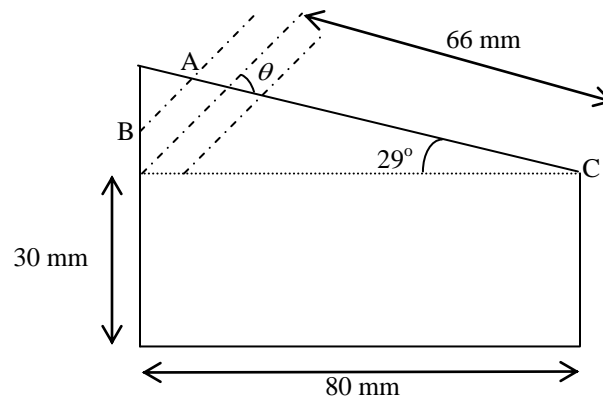


- d) Selesaikan segitiga ABC di mana $A = 35^\circ 15'$, $a = 3.44$ cm dan $c = 3.44$ cm seperti rajah berikut:

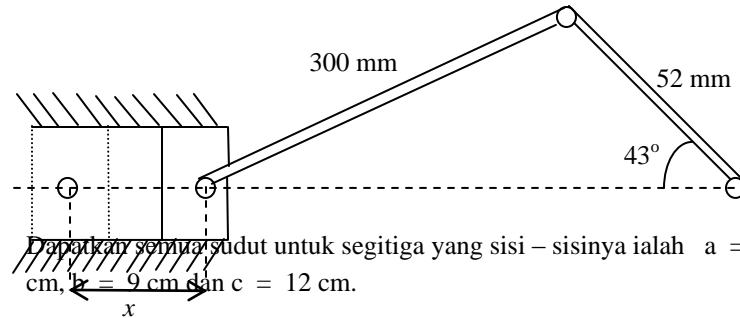


8.3

- a) Satu lubang perlu digerudi pada satu bongkah seperti rajah. Dapatkan sudut θ .

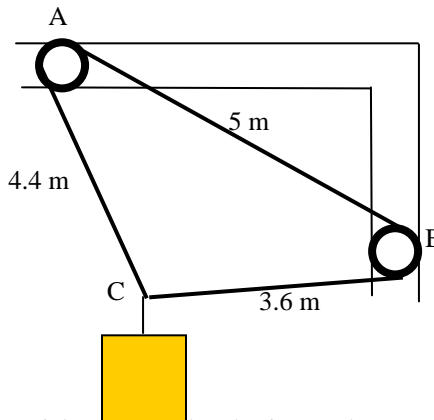


- b) Rajah menunjukkan satu mekanisma sebuah enjin. Dapatkan jarak x , iaitu gerakan ombok dari kedudukan maksimum ketika sudut engkol 43° .

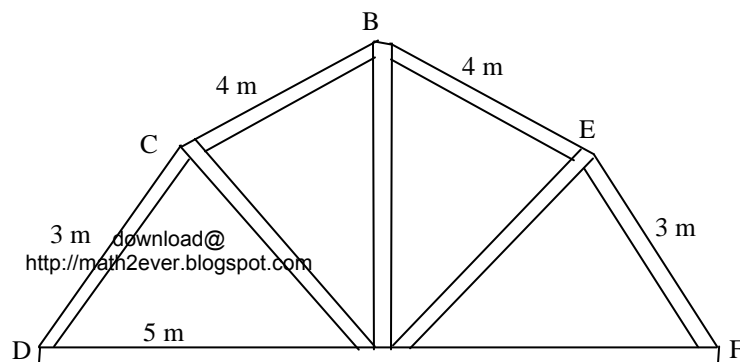


- c) Dapatkan semua sudut untuk segitiga yang sisi – sisinya ialah $a = 6$ cm, $b = 9$ cm dan $c = 12$ cm.

- d) 2 takal dipaku kepada 2 alang yang berserenjang di antara satu sama lain. Tali yang melalui takal itu menyokong satu pemberat. Pemberat itu berada 4.4 m daripada takal A dan 3.6 m daripada takal B. Jika takal itu berada 5 m di antara satu sama lain, cari sudut di antara tali pada pemberat.



- e) Rajah menunjukkan besi penyokong yang simetri terhadap AB yang mana AB adalah tegak. Cari panjang AC & AB.





MAKLUM BALAS

ibanya terlebih dahulu? Sekiranya “YA”, sila semak jawapan anda.

- 8.1 a) $90^\circ, 270^\circ$
 b) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$
 c) $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ$
 d) $0^\circ, 180^\circ$
- 8.2 a) 6.86 m
 b) $A = 39.5^\circ, C = 25.5^\circ, c = 12.3 \text{ cm}$
 c) 45.3 m
 d) $\angle C = 46^\circ 26'$
 $\angle C' = 133^\circ 34'$
 $B = 98^\circ 19'$
 $b = 5.899 \text{ cm}$
 $\angle ABC' = 11^\circ 11'$
 $AC' = 1.156 \text{ cm}$
- 8.3 a) $\theta = 96^\circ 2'$
 b) $x = 16 \text{ mm}$
 c) $B = 46.57^\circ, A = 28.95^\circ, C = 104.48^\circ$
 d) 76.64°
 e) $AC = \sqrt{19} \text{ m}, AB = 4.54 \text{ m @ } 0.66 \text{ m}$