Evolución de una Red de Flujo Adaptativa Estudio de un Sistema de Transporte Dinámico

Tu Nombre

Tu Institución

18 de agosto de 2025

Contenido

Modelo del Sistema

- Red de flujo adaptativa tipo árbol
- Fluido ingresa por las puntas y sale por el sumidero
- Modelo puramente topológico (sin restricciones espaciales)
- Sistema siempre en mínimo topológico

Acciones de las puntas (nodos de conectividad 1):

- **Retraerse**: l_{ij} reduce en $l_0\eta(t)$ (probabilidad p_0)
- Crecer: l_{ij} aumenta en $l_0\eta(t)$ (probabilidad p_1)
- **Bifurcarse**: nacen 2 nuevos nodos/ductos (probabilidad p_2)

Modelo Probabilístico Básico

- Probabilidades constantes: p_0 , p_1 , p_2
- Elección aleatoria de la punta que actúa
- Evolución depende de la relación entre probabilidades

graficos_proba/N(t)_comparado.png

Optimización del Flujo

Objetivo: Minimizar pérdida de energía manteniendo volumen constante \mathcal{K} **Conductancia de cada ducto**:

$$C_{ij} = \frac{\pi r_{ij}^4}{8\mu I_{ij}}$$

Conductancia óptima:

$$C_{ij}^* = rac{\langle Q_{ij}(t)^2
angle_T^{2/3}\mathcal{K}}{\left(\sum_{< ij>}\langle Q_{ij}(t)^2
angle_T^{1/3}I_{ij}
ight)^2I_{ij}}$$

En cada iteración se optimizan todas las conductancias de la red.

Evolución de la Conductancia

graficos_proba/Cij_vs_tiempo.png

Probabilidades Dependientes de la Conductancia

Introducimos conductancia crítica \bar{C} :

- $p_0(C_{ij}) = e^{-C_{ij}/\bar{C}}$ (retracción)
- $ullet p_1(\mathit{C}_{ij}) = p_2(\mathit{C}_{ij}) = rac{1 \mathrm{e}^{-\mathit{C}_{ij}/ar{\mathit{C}}}}{2}$ (crecimiento/bifurcación)

Comportamiento:

- Alta conductancia → tiende a crecer/bifurcarse
- ullet Baja conductancia o tiende a retraerse
- Ducto con alto flujo tiende a .explorar"

Algoritmo de Gillespie

Re-escalamiento temporal:

$$\tau = \frac{-\ln(r)}{\sum_{\langle ij \rangle} p_0(C_{ij}) + p_1(C_{ij}) + p_2(C_{ij})} = \frac{-\ln(r)}{N}$$

donde r es número aleatorio en (0,1] y N es el número de puntas.

Elección del evento: Se combinan la elección del nodo y la acción según las probabilidades de cada punta.

Dos Fases de Evolución

Fase 1: Exploración (muy corta)

- ullet Conductancia $\dot{ar{\mathcal{L}}}$ $ar{\mathcal{C}}$ o retracción casi nula
- Crecimiento dominante
- Las conductancias de las puntas disminuyen

Fase 2: Estacionaria

- ullet Conductancia $\simeq ar{\mathcal{C}}
 ightarrow { ext{retracción significativa}}$
- Equilibrio dinámico
- Características del sistema se estabilizan

Ejemplos Visuales de las Fases

graficos_inst/arbol_exp.png

Figura: Fase de exploración (t = 71)

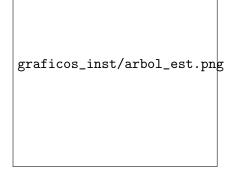


Figura: Fase estacionaria (t = 3924)

Evolución Temporal - Cantidad de Puntas

graficos_inst/N_vs_tiempo.png



Evolución Temporal - Largo Total

graficos_inst/largo_vs_tiempo.png

Evolución de las Probabilidades

graficos_inst/probs_vs_tiempo.png



Convergencia de la Conductancia

graficos_inst/Cij_vs_tiempo.png

Demostración de la Ley de Murray

Configuración: Ducto padre C_0 con hijos C_1 , C_2

Flujos: $Q_0 = Q_1 + Q_2$ Conductancias óptimas:

$$C_i^* = \frac{Q_i^{4/3} K}{S^2 I_i} \quad \text{con } S = \sum_{\langle ij \rangle} Q_{ij}^{2/3} I_{ij}$$

Radio óptimo:

$$r_i = \frac{Q_i^{1/3}}{S^{1/2}} \left(\frac{8K\mu}{\pi} \right)^{1/4}$$

Resultado:

$$r_1^3 + r_2^3 = r_0^3$$

¡La ley emerge naturalmente!



Verificación Numérica - Flujo Promediado

graficos_inst/murray_feo.png

Verificación Numérica - Flujo Instantáneo

graficos_inst/murray_lindo.png

Modelo Más Realista

Adaptación con velocidad máxima v_0 Conservación del material:

$$2\pi r_{ij}(t)I_{ij}(t) = A \text{ (constante)}$$

Evolución temporal:

$$I_{ij}(t+\Delta t)=I_{ij}(t)\pm v_0\Delta t \tag{1}$$

$$\frac{dC_{ij}}{dt} = \frac{-5v_0}{l_{ij}}C_{ij} \tag{2}$$

Consecuencia: El sistema crece más rápido de lo que se puede adaptar \rightarrow fase de crecimiento extendida

Resultados Principales

- Dos regímenes: Modelo probabilístico vs. dependiente del flujo
- Fases dinámicas: Exploración rápida → equilibrio estacionario
- Ley de Murray: Emerge naturalmente del proceso de optimización
- Escalamiento: Tamaño máximo $\exp(K/\bar{C})$
- Realismo: Modelo paulatino introduce limitaciones físicas

Aplicaciones:

- Sistemas vasculares
- Redes de transporte
- Crecimiento de raíces
- Sistemas de drenaje

Perspectivas Futuras

- Estudiar topología en estado estacionario
- Analizar dependencia de parámetros (K, \bar{C}, ν_0)
- Implementar restricciones espaciales
- Comparar con datos experimentales
- Optimización multi-objetivo

¡Gracias por su atención!

¿Preguntas?