Evolución de una Red de Flujo Adaptativa

Estudio de un Sistema de Transporte Dinámico

Tu Nombre

Tu Institución

18 de agosto de 2025

Contenido

Modelo del Sistema

- Red de flujo adaptativa tipo árbol
- Fluido ingresa por las puntas y sale por el sumidero
- Modelo puramente topológico (sin restricciones espaciales)
- Sistema siempre en mínimo topológico

Acciones de las puntas (nodos de conectividad 1):

- **Retraerse**: l_{ij} reduce en $l_0\eta(t)$ (probabilidad p_0)
- **Crecer**: l_{ij} aumenta en $l_0\eta(t)$ (probabilidad p_1)
- **Bifurcarse**: nacen 2 nuevos nodos/ductos (probabilidad p_2)

Modelo Probabilístico Básico

- Probabilidades constantes: p_0, p_1, p_2
- Elección aleatoria de la punta que actúa
- Evolución depende de la relación entre probabilidades

graficos_proba/N(t)_comparado.png

Optimización del Flujo

Objetivo: Minimizar pérdida de energía manteniendo volumen constante $\mathcal{K}$
Conductancia de cada ducto:

$$C_{ij} = \frac{\pi r_{ij}^4}{8\mu l_{ij}}$$

Conductancia óptima:

$$C_{ij}^* = \frac{\langle Q_{ij}(t)^2\rangle_T^{2/3}\mathcal{K}}{\left(\sum_{<ij>}\langle Q_{ij}(t)^2\rangle_T^{1/3} l_{ij}\right)^2 l_{ij}}$$

En cada iteración se optimizan todas las conductancias de la red.

Evolución de la Conductancia

graficos_proba/Cij_vs_tiempo.png

Probabilidades Dependientes de la Conductancia

Introducimos conductancia crítica $\bar{C}$:

- $p_0(C_{ij}) = e^{-C_{ij}/\bar{C}}$ (retracción)
- $p_1(C_{ij}) = p_2(C_{ij}) = \dfrac{1 - e^{-C_{ij}/\bar{C}}}{2}$ (crecimiento/bifurcación)

Comportamiento:

- Alta conductancia $\rightarrow$ tiende a crecer/bifurcarse
- Baja conductancia $\rightarrow$ tiende a retraerse
- Ducto con alto flujo tiende a .explorar"

Algoritmo de Gillespie

Re-escalamiento temporal:

$$\tau = \frac{-\ln(r)}{\sum_{<ij>} p_0(C_{ij}) + p_1(C_{ij}) + p_2(C_{ij})} = \frac{-\ln(r)}{N}$$

donde r es número aleatorio en $(0, 1]$ y N es el número de puntas.

Elección del evento: Se combinan la elección del nodo y la acción según las probabilidades de cada punta.

Dos Fases de Evolución

Fase 1: Exploración (muy corta)

- Conductancia ¿¿ $\bar{C} \rightarrow$ retracción casi nula
- Crecimiento dominante
- Las conductancias de las puntas disminuyen

Fase 2: Estacionaria

- Conductancia $\simeq \bar{C} \rightarrow$ retracción significativa
- Equilibrio dinámico
- Características del sistema se estabilizan

Ejemplos Visuales de las Fases

graficos_inst/arbol_exp.png

Figura: Fase de exploración ($t = 71$)

graficos_inst/arbol_est.png

Figura: Fase estacionaria ($t = 3924$)

Evolución Temporal - Cantidad de Puntas

graficos_inst/N_vs_tiempo.png

Evolución Temporal - Largo Total

graficos_inst/largo_vs_tiempo.png

Evolución de las Probabilidades

graficos_inst/probs_vs_tiempo.png

Convergencia de la Conductancia

graficos_inst/Cij_vs_tiempo.png

Demostración de la Ley de Murray

Configuración: Ducto padre C_0 con hijos C_1, C_2
Flujos: $Q_0 = Q_1 + Q_2$
Conductancias óptimas:

$$C_i^* = \frac{Q_i^{4/3} K}{S^2 l_i} \quad \text{con } S = \sum_{<ij>} Q_{ij}^{2/3} l_{ij}$$

Radio óptimo:

$$r_i = \frac{Q_i^{1/3}}{S^{1/2}} \left(\frac{8K\mu}{\pi} \right)^{1/4}$$

Resultado:

$$r_1^3 + r_2^3 = r_0^3$$

¡La ley emerge naturalmente!

Verificación Numérica - Flujo Promediado

graficos_inst/murray_feo.png

Verificación Numérica - Flujo Instantáneo

graficos_inst/murray_lindo.png

Modelo Más Realista

Adaptación con velocidad máxima v_0
Conservación del material:

$$2\pi r_{ij}(t) l_{ij}(t) = A \text{ (constante)}$$

Evolución temporal:

$$l_{ij}(t + \Delta t) = l_{ij}(t) \pm v_0 \Delta t \quad (1)$$

$$\frac{dC_{ij}}{dt} = \frac{-5v_0}{l_{ij}} C_{ij} \quad (2)$$

Consecuencia: El sistema crece más rápido de lo que se puede adaptar → fase de crecimiento extendida

Resultados Principales

- **Dos regímenes**: Modelo probabilístico vs. dependiente del flujo
- **Fases dinámicas**: Exploración rápida $\rightarrow$ equilibrio estacionario
- **Ley de Murray**: Emerge naturalmente del proceso de optimización
- **Escalamiento**: Tamaño máximo $\exp(K/\bar{C})$
- **Realismo**: Modelo paulatino introduce limitaciones físicas

Aplicaciones:

- Sistemas vasculares
- Redes de transporte
- Crecimiento de raíces
- Sistemas de drenaje

Perspectivas Futuras

- Estudiar topología en estado estacionario
- Analizar dependencia de parámetros (K, $\bar{C}$, v_0)
- Implementar restricciones espaciales
- Comparar con datos experimentales
- Optimización multi-objetivo

¡Gracias por su atención!

¿Preguntas?