Computação Científica II

Métodos numéricos para resolver equações diferenciais

2020-PLE

Classificação de problemas

- A equação diferencial ordinário (EDO) de primeira ordem é

$$\frac{du}{dt} = f(u,t)$$

- onde t é definido em algum intervalo, limitado ou ilimitado.

$$t \in [0,1] \qquad t \in (-\infty, 1] \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

- A solução u é apenas função de t ($u = u(t)$).
- A variável t é chamada de variável independente.
- A variável u é chamada de variável dependente.
- Vimos que a solução geral estava na forma de $u = u(t, C)$.
- Usando a condição inicial, podemos encontrar a constante C.

Ordinary Differential Equation (ODE)

Classificação de problemas

- A equação diferencial ordinário (EDO) de primeira ordem é

$$\frac{du}{dt} = f(u,t)$$

- Exemplos:

$$\frac{du}{dt} = au \quad \rightarrow \quad u(t) = Ce^{at}$$

$$\frac{du}{dt} = \cos(t) \quad \rightarrow \quad u(t) = \sin(t) + C$$

$$\frac{du}{dt} = m\sin(t) + nt^3 \quad \rightarrow \quad u(t) = -m\cos(t) + \frac{nt^4}{4} + C$$

$$\frac{du}{dt} = t^2 + u^2 \quad \rightarrow \quad u(t) = ???$$

Ordinary Differential Equation (ODE)

Classificação de problemas

- A equação diferencial ordinário (EDO) de segunda ordem é
$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$
- Novamente a solução u é apenas função de t ($u = u(t)$).
- Agora a solução geral tem duas constantes (C_1, C_2).
- Então, precisamos de duas condições para determinar C_1 e C_2.
- Essas condições podem ser dadas de várias maneiras. Uma maneira é fornecer dois t diferentes. Por exemplo
$$u(t = a) = \alpha \qquad u(t = b) = \beta$$
- nós chamamos essas condições de contorno.
- A equação diferencial com essas condições de contorno é chamada de problema de valor contorno.

Boundary Value Problem (BVP)

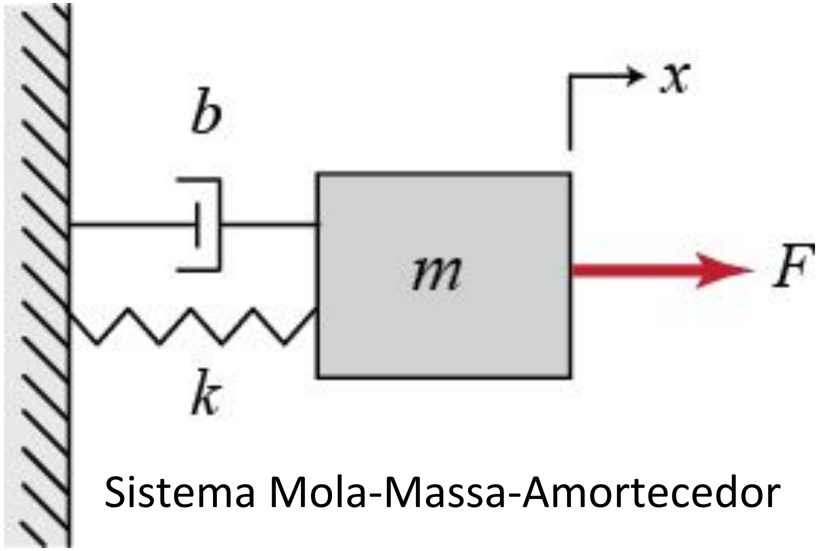
Classificação de problemas

- A equação diferencial ordinário (EDO) de segunda ordem é

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$

- Exemplos:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{du}{dt} - \frac{k}{m}u$$



Sistema Mola-Massa-Amortecedor

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$u(t) = C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2}$$

Second Order Ordinary Differential Equation

Classificação de problemas

- A equação diferencial ordinário (EDO) de segunda ordem é

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$

- A outra maneira de fornecer as condições é a esta equação como um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = f(t, u, v) \end{cases}$$

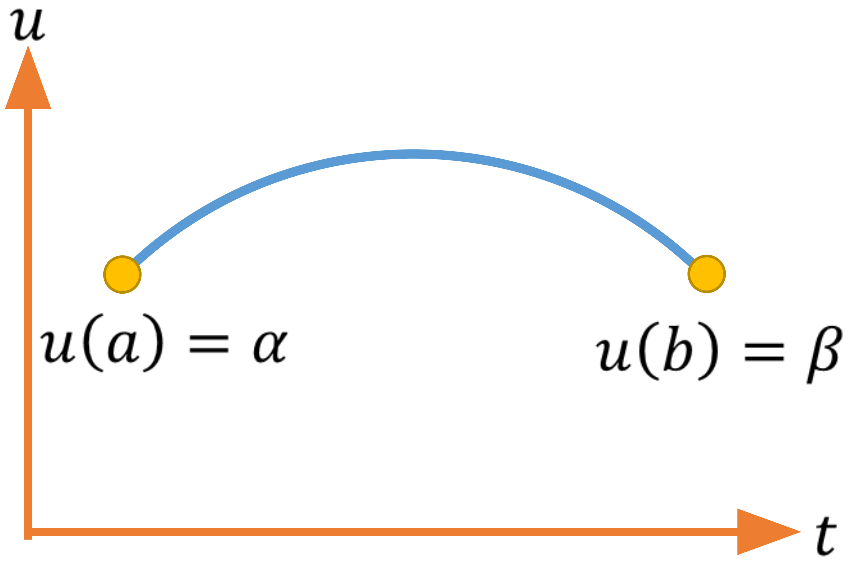
- Agora, se fornecermos duas condições iniciais para este sistema, é possível obter a solução particular.
- Desta forma, resulta em problema de valor inicial.

Initial Value Problem (IVP)

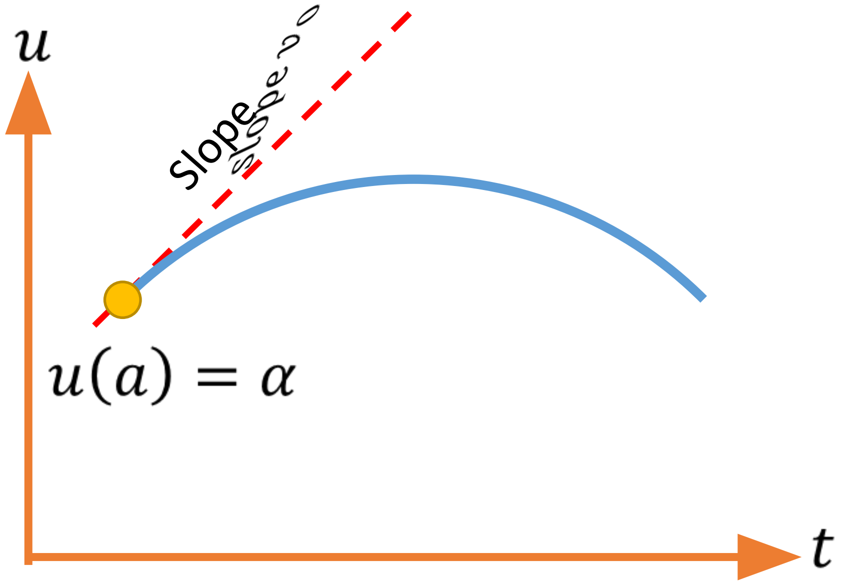
Contorno vs. Inicial

- A equação diferencial ordinário (EDO) de segunda ordem

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$



problema de valor contorno



problema de valor inicial

Exemplo

- Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 0 \qquad (IC) \quad u(0) = 4, \qquad \frac{du}{dt}(0) = 2$$

- Nós sabemos como encontrar a solução geral

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{cases} \rightarrow u(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$$

- Considerando as condições iniciais, é possível encontrar as constantes

$$\left.\begin{aligned} u(0) = 4 \rightarrow C_1 + C_2 = 4 \\ \frac{du}{dt}(0) = 2 \rightarrow C_1 + 2C_2 = 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow C_1 = 6, \qquad C_2 = -2$$

Exemplo

- Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 0 \qquad\qquad (IC) \quad u(0) = 4, \frac{du}{dt}(0) = 2$$

- Então, a solução particular é

$$u(t) = 6e^t - 2e^{2t}$$

- O valor desta função em $t = 1$ é 1.53178. Portanto, se eu definir o problema como

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 0 \qquad\qquad (BV) \quad u(0) = 4, u(1) = 1.53178$$

A solução de dois problemas é a mesma, mas o segundo é o problema de valor contorno.

Sistema de equações

- Um sistema de EDO de primeira ordem é definido como (agora temos outras variáveis dependentes, em vez de apenas u)

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, \dots, u_n)$$
$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, \dots, u_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{du_n}{dt} = f_n(t, u_1, \dots, u_n)$$

- Ou pode ser escrito em forma vetorial como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_n]^T \qquad \boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

System of ODE

Sistema de equações

- $$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$$
- Agora o sistema de EDO resultará na seguinte solução geral
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{C} = [C_1, \dots, C_n]^T$$
onde $\boldsymbol{C}$ é um vetor constante.
- Para encontrar a solução específica do sistema, precisamos fornecer condições iniciais como $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$.
- Aqui, $\boldsymbol{u}_0$ é um vetor de condições iniciais.

System of ODE

Exemplo

- Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dt} = -5u_1 + 2u_2 \end{cases}$$

- Na forma vetorial, podemos escrevê-lo como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -5u_1 + 2u_2 \end{bmatrix}$$

- Podemos transferir o vetor $\boldsymbol{f}$ para a produção de uma matiz e vetor tambem,

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

Sistema de equações

- Um EDO de ordem n é definido como

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right)$$

- Igual à equação de segunda ordem, é possível transferir essa equação para o sistema de EDOs de primeira ordem .

$$\frac{du}{dt} = u_1$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_{n-1}}{dt} = f(t, u, u_1, \dots, u_{n-1})$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = u_1 \qquad \frac{du_1}{dt} = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = f(t, u, u_1, u_2)$$

Sumário

- O que vimos até agora é
  1. Equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira/segunda/n ordem,
  2. Problema de valor contorno (BVP),
  3. Problema de valor inicial (IVP),
  4. Sistema de EDOs de primeira ordem
- Agora, vamos concentrar em uma subclasse do último item.

Sistema de EDOs de primeira ordem

- A forma geral do sistema de EDOs de primeira ordem é

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$$

- O sistema EDO linear com coeficientes constantes é

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t),$$

Onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz constante $(n \times n)$, e $\boldsymbol{g}(t)$ é um vetor do n funções de tempo. Para este caso, chamamos a função $\boldsymbol{g}(t)$, “driving function”.

- Se $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{0}$, então chamamos o sistema homogêneo. Caso contrario, chamamos não homogêneo.
- É importante na vibrações mecânicas, circuitos elétricos e reações químicas de primeira ordem .

Linear system of first order ODE with constant coefficients

Sistema de EDOs de primeira ordem

- O sistema EDO linear com coeficientes constantes é

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t),$$

- Para o caso especial ($n = 1$) e homogêneo, temos

$$\frac{du}{dt} = au \qquad u(0) = u_0$$

- A solução é

$$u(t) = u_0 e^{at}$$

- Mas como podemos encontrar a solução para caso $n > 1$?

Linear system of first order ODE with constant coefficients

Lembrete

- $$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t),$$
- Como podemos encontrar a solução para caso $n > 1$?
- Para responder isso, precisamos de alguns conhecimentos de cursos anteriores (Álgebra Linear).
- Primeiro, precisamos saber autovalores e autovetores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \boldsymbol{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues and Eigenvectors

Lembrete

- Primeiro precisamos saber autovalores e autovetores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \boldsymbol{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 3 \rightarrow \boldsymbol{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se os autovetors forem linearmente independentes, chamamos a matriz não-defeituosa.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Defective Matrix

Exemplo

- Primeiro precisamos saber autovalores e autovetores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \to \boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 3 \to \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se os autovetores forem linearmente independentes, chamamos a matriz não-defeituosa.

- Uma matriz não defeituosa pode ser fatorada como $A = S\Lambda S^{-1}$, onde $S = [\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{s}_2]$ e Λ é uma matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de EDOs de primeira ordem

- $$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$$

- Como podemos encontrar a solução para caso $n > 1$?
- Uma matriz não defeituosa pode ser fatorada como $A = S\Lambda S^{-1}$.
- Vamos substituir a fatoração no EDO.

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{S}^{-1}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda S}^{-1}\boldsymbol{u} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda S}^{-1}\boldsymbol{u}$$

- Agora, se mudarmos a variável para $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}$, temos

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{v}$$

Linear system of first order ODE with constant coefficients

Sistema de EDOs de primeira ordem

- Agora, se mudarmos a variável para $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}$, temos

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{v}$$

- Vamos escrever desta maneira

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{Ou} \quad \frac{dv_i}{dt} = \lambda_i v_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

- Mas sabemos a solução da última foram

$$v_i = C_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Linear system of first order ODE with constant coefficients

Sistema de EDOs de primeira ordem

- $$v_i = C_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Agora nos invertemos e encontramos o vetor $\boldsymbol{u}$. Tínhamos
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$$

- Portanto,
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{s_1}| \dots |\boldsymbol{s_n}] \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Finalmente $\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{n} C_i \, \boldsymbol{s}_i e^{\lambda_i t}$.

Sistema de EDOs de primeira ordem

- $$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, \boldsymbol{s}_i e^{\lambda_i t} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{C}$$

- Agora, se temos condições iniciais como $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u_0}$, podemos encontrar as constantes C_i como

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{SC} = \boldsymbol{u_0} \rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S^{-1}u_0}$$

- Portanto,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{S^{-1}u_0} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{u}_0$$

- Aqui definimos o exponencial da matriz $\boldsymbol{A}$ como

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{S^{-1}} \qquad\qquad e^{\Lambda t} = diag\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$$

Exemplo

- Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = 2u_1 + u_2 \\ \dfrac{du_2}{dt} = 1u_1 + 2u_2 \end{cases} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

- Nós apenas mostramos que a matriz A tem a seguinte fatoração,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Portanto a solução será

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{S} e^{\Lambda t} \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_0$$

Exemplo

- Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = 2u_1 + u_2 \\ \dfrac{du_2}{dt} = 1u_1 + 2u_2 \end{cases} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

- Portanto a solução será

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{S} e^{\Lambda t} \boldsymbol{S}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_0$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} & -e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} & e^t + e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

Sistema de EDOs de primeira ordem

- $$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u_0} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{u} = e^{At}\boldsymbol{u}_0 \qquad \begin{cases} e^{At} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{S}^{-1} \\ e^{\Lambda t} = diag\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right) \end{cases}$$

- Esta expressão só pode ser usada se $\boldsymbol{S}$ tiver inverso.

- Pode ser mostrada que, se todos os autovalores do $\boldsymbol{A}$ forem distintos, tal fatoração existirá.

- Isso também é verdade se $\boldsymbol{A}$ for simétrico.

Sistema de EDOs de primeira ordem

- Para matriz não defeituosa

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u_0} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{u} = e^{At}\boldsymbol{u}_0 \qquad \begin{cases} e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{S}e^{\Lambda t}\boldsymbol{S}^{-\mathbf{1}} \\ e^{\Lambda t} = diag\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right) \end{cases}$$

- Se a matriz A estiver com defeito, a fatoração não existe. Nesse caso, calculamos $e^{\boldsymbol{A}t}$ como (Expansão do Taylor)

$$e^{\boldsymbol{A}t} = I + At + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{m!}(tA)^m + \cdots$$

Não homogêneo sistema

- Agora, vamos resolver a equação não homogênea.

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t),$$

- Para apenas mostrar o método, vou resolver para o caso $n = 1$.

$$\frac{du}{dt} = au + g(t)$$

- Permite multiplicar ambos os lados por e^{-at}.

$$e^{-at}\frac{du}{dt} = ae^{-at}u + e^{-at}g(t)$$

Não homogêneo sistema

- Permite multiplicar ambos os lados por e^{-at}.

$$e^{-at}\frac{du}{dt} = ae^{-at}u + e^{-at}g(t)$$

- Agora é possível reorganizar a equação como

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u) = e^{-at}g(t)$$

- Então, pela simples integração, teremos

$$e^{-at}u = \int_0^t e^{-a\tau}g(\tau)d\tau \rightarrow u(t) = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}g(\tau)d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)}g(\tau)d\tau$$

Não homogêneo sistema

- $$u = \int_0^t e^{-a\tau} g(\tau) d\tau \rightarrow u(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$
- Para o sistema a mesma coisa pode ser feita. O resultado será
$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$
- A solução do sistema é a soma do homogêneo e não homogêneo.
$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$
- se $g(\tau)$ é constante?

Exercícios

- Por favor, resolva estes exercícios dos capítulos 1 e 2.
  - 1.2.1 / 1.2.2
  - 2.1.5
  - 2.1.7
  - 2.2.1/2.2.2/2.2.3
  - 2.2.6/2.2.7

Projeto 1

- Escreva um código para resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficiente constante.
  - O código deve ter uma variável para especificar o número de equações (Inp_Nequs), por exemplo se temos duas equações então Inp_Nequs=2.
  - uma matriz 2D para especificar equações (Inp_Equs). por exemplo, a primeira equação pode ser especificada como,

$$a\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = d$$

Inp_Equs[0][0] = 2 (ordem de equação)
Inp_Equs[0][1] = a
Inp_Equs[0][2] = b
Inp_Equs[0][3] = c
Inp_Equs[0][4] = d

Projeto 1

- A segunda equação pode ser especificada como,

$$a\frac{du}{dt} + bu = c$$

  Inp_Equs[1][0] = 1 (ordem de equação)

  Inp_Equs[1][1] = a

  Inp_Equs[1][2] = b

  Inp_Equs[1][3] = c

- Salve a condição inicial em vetor Inp_U0.
- Então transforme essas equações em um sistema de primeira ordem. Salve os coeficientes do sistema (matriz A) em variável Aux_A (2D).

Projeto 1

- Então transforme essas equações em um sistema de primeira ordem. Salve os coeficientes do sistema (matriz A) em variável Aux_A.
- Então calcule e^{At}. Você deve verificar se a matriz A está com defeito ou não está com defeito. Com base no tipo, use decomposição de matriz ou expansão de Taylor.
- Encontre a solução final. Gere a solução de 0 a Inp_Tfinal. Salve esses resultados no formato CSV.

Time, u_0, u_1, ..., u_n

0,1.25,2.25,..,3.25

1,1.75,2.75,...,3.75

Projeto 1

- Use bibliotecas disponíveis para encontrar autovalores e autovetores.
- Verifique seu código