Vprašanja za ustni izpit
iz matematike na splošni maturi 2025
za osnovno in višjo raven

Osnovna raven

---

1 Izjavni račun

i. Kaj je izjava? (1 točka)
Odgovor:

- Izjava je poved, ki je lahko resnična ali neresnična, vendar ne oboje hkrati.

ii. Kaj je negacija dane izjave? Kdaj je negacija pravilna (resnična) in kdaj nepravilna (neresnična)? (1 točka)
Odgovor:

- Negacija izjave A, označena z $\neg A$, je izjava, ki je resnična, kadar je A neresnična, in neresnična, kadar je A resnična.

  Na primer, če je A: "Danes je ponedeljek," je $\neg A$: "Danes ni ponedeljek."

iii. Kaj je konjunkcija izjav? Napišite pravilnostno (resničnostno) tabelo za konjunkcijo. (2 točki)
Odgovor:

- Konjunkcija je izjava oblike "A in B", ki je resnična le, kadar sta A in B resnični.

A	B	A $\wedge$ B
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

iv. Kaj je disjunkcija izjav? Napišite pravilnostno (resničnostno) tabelo za disjunkcijo. (2 točki)
Odgovor:

- Disjunkcija je izjava oblike "A ali B", ki je neresnična le, kadar sta A in B neresnični.

A	B	A ∨ B
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

---

2 Izjavni račun

i. Kaj je tavtologija? (1 točka)
Odgovor:

- Tavtologija je logični izraz, ki je vedno resničen ne glede na resničnostne vrednosti njegovih delovnih izjav. V resničnostni tabeli ima tavtologija v vseh vrsticah vrednost R (resnično).

ii. Kaj je implikacija izjav? Napišite pravilnostno (resničnostno tabelo) za implikacijo. (2 točki)
Odgovor:

- Imenovana tudi pogojna izjava. Implikacija "če A, potem B" (zapišemo $A \to B$) je napačna samo takrat, ko je A resnična in B neresnična. V vseh drugih primerih je resnična.

A	B	$A \to B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

iii. Kaj je ekvivalenca izjav? Napišite pravilnostno (resničnostno) tabelo za ekvivalenco (2 točki)
Odgovor:

- Ekvivalenca dveh izjav (zapišemo $A \leftrightarrow B$) pomeni, da imata izjavi enako resničnostno vrednost. Ekvivalenca $A \leftrightarrow B$ je resnična, če imata A in B enako resničnostno vrednost, kar je enakovredno $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

A	B	$A \leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

iv. Povejte primer dveh izjav in ugotovite pravilnost (resničnost) njune ekvivalence. (1 točka)

Odgovor: Naj bosta izjavi:

- A: "Število 4 je sodo." (P)
- B: "Število 10 je sodo." (P)

Obe izjavi sta resnični, zato je njuna ekvivalenca ($A \leftrightarrow B$) resnična.

---

3 Množice

i. Kaj je prazna množica in kaj univerzalna množica? Kaj je moč množice? (2 točki)

Odgovor:

- Prazna množica je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa. Označimo jo z $\emptyset$ ali $\{\}$, vendar nikoli z $\{\emptyset\}$.
- Univerzalna množica je množica vseh možnih elementov v danem kontekstu. Označimo jo z U.
- Moč množice je število elementov v množici. Označimo jo z $|A|$, kjer je A množica.

ii. Kaj je razlika dveh množic? Kaj je komplement množice? (2 točki)

Odgovor:

- Razlika množic $A - B$ je množica vseh elementov, ki so v A, a niso v B.
- Komplement množice A (označimo ga z A' ali $\overline{A}$) je množica vseh elementov iz univerzalne množice U, ki niso v A:

$$A' = U - A$$

iii. Kaj je potenčna množica dane množice? Izberite množico z močjo 3 in zapišite njeno potenčno množico. (2 točki)

Odgovor:

- Potenčna množica je množica vseh podmnožic dane množice. Če ima množica n elementov, ima potenčna množica 2^n elementov.

  Primer: Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$. Potenčna množica $P(A)$ je:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

---

4 Množice

i. Kdaj je množica A podmnožica množice B? Kdaj sta množici enaki? (1 točka)
Odgovor:

- Množica A je podmnožica množice B, če vsak element iz A pripada tudi B, torej $A \subseteq B$.
- Množici A in B sta enaki, če vsebujeta popolnoma enake elemente, torej $A = B$.

ii. Kaj je presek dveh množic? Kdaj sta množici disjunktni? (2 točki)
Odgovor:

- Presek množic A in B (označimo $A \cap B$) je množica vseh elementov, ki so hkrati v A in v B.
- Množici sta disjunktni, če nimata nobenega skupnega elementa, torej je njun presek prazen: $A \cap B = \emptyset$.

iii. Kaj je unija dveh množic? Kako izračunamo moč unije dveh množic? (2 točki)
Odgovor:

- Unija množic A in B (označimo $A \cup B$) je množica vseh elementov, ki so v A, v B ali v obeh.
- Moč unije se izračuna po formuli:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

iv. Izberite taki množici A in B, da je $m(A) = 3$ in $m(B) = 2$. Zapišite njun kartezični produkt. (1 točka)
Odgovor: Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{a, b\}$. Kartezični produkt $A \times B$ je množica urejenih parov:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

---

5 Naravna in cela števila

i. Opišite množici $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ in ju predstavite na številski premici. (1 točka)
Odgovor:

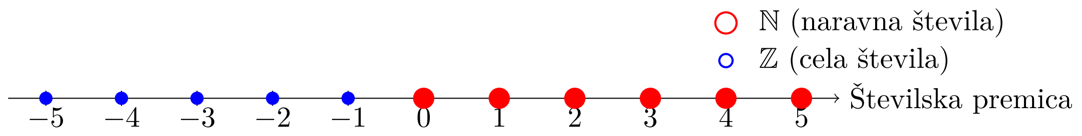
- Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ vsebuje vsa pozitivna cela števila (z ali brez 0):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Množica celih števil $\mathbb{Z}$ vsebuje vsa naravna števila, njihova nasprotja in 0:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Na številski premici:
  - $\mathbb{N}$ so točke od 0 naprej v desno.
  - $\mathbb{Z}$ so vse točke levo in desno od 0.



ii. Naštejte računske operacije v množici $\mathbb{N}$ (1 točka)
Odgovor: V množici $\mathbb{N}$ je definirano **seštevanje, množenje, in potenciranje**. Odštevanje in deljenje nista vedno možna znotraj $\mathbb{N}$, saj rezultat ni vedno naravno število.

iii. Definirajte odštevanje v množici $\mathbb{Z}$. (1 točka)
Odgovor: V množici $\mathbb{Z}$ je odštevanje vedno možno, saj za vsako celo število a in b ($a, b \in \mathbb{Z}$) obstaja tudi njuna razlika $a - b$ v $\mathbb{Z}$. Rezultat odštevanja je lahko pozitiven, negativen ali enak 0.

iv. Napišite vseh pet osnovnih računskih zakonov o seštevanju in množenju v množicah $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ (3 točke)
Odgovor: Osnovni računski zakoni:

1. **Komutativnost:** $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
2. **Asociativnost:** $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. **Distributivnost:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. **Seštevanje z 0:** $a + 0 = a$
5. **Množenje z 1:** $a \cdot 1 = a$

---

6 Liha in soda števila

i. Definirajte soda in liha števila. (2 točki)
Odgovor:

- **Soda števila** so cela števila, pri katerih je ostanek pri deljenju z 2 enak 0. Zapišemo jih kot $n = 2k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.
- **Liha števila** so cela števila, pri katerih je ostanek pri deljenju z 2 enak 1. Zapišemo jih kot $n = 2k + 1$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

ii. Pokažite, da je vsota dveh lihih števil sodo število. (2 točki)
Odgovor: Naj bosta $a = 2k + 1$ in $b = 2m + 1$ dve lihi števili, kjer sta $k, m \in \mathbb{Z}$.
Potem je njuna vsota:

$$a + b = (2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$$

Ker je rezultat deljiv z 2, je vsota lihih števil sodo število.

iii. Pokažite, da je kvadrat lihega števila liho število. (2 točki)
Odgovor: Naj bo $a = 2k + 1$ liho število, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.
Potem je kvadrat:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Ker je rezultat oblike $2n + 1$, je kvadrat lihega števila spet liho število.

---

7 Praštevila

i. Definirajte praštevila in sestavljena števila. Zapišite množico vseh praštevil, ki so manjša od 20. (2 točki)
Odgovor:

- **Praštevila** so naravna števila, večja od 1, ki imajo točno dva delitelja: 1 in samih sebe.
- **Sestavljena števila** so naravna števila, večja od 1, ki imajo več kot dva delitelja (poleg 1 in sebe še kakšnega drugega).
- Praštevila manjša od 20 so:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

ii. Kaj je razcep naravnega števila na prafaktorje? Ali je razcep na prafaktorje enoličen? Koliko je praštevil? (3 točke)

Odgovor:

- Razcep naravnega števila na prafaktorje pomeni, da število zapišemo kot produkt praštevil. Primer: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Po osnovnem izreku aritmetike je razcep vsakega naravnega števila na prafaktorje **enoličen**, razen vrstnega reda faktorjev.
- Praštevil je **neskončno mnogo** (Evklidov izrek).

iii. Opišite enega izmed postopkov za preverjanje, ali je dano število praštevilo. (1 točka)

Odgovor:

Eden izmed postopkov je naslednji:

- Če želimo preveriti, ali je naravno število n praštevilo, delimo n z vsemi praštevili manjšimi ali enakimi $\sqrt{n}$. Če nobeno izmed njih ne deli števila n, potem je število n praštevilo.
- **Primer**: Število 29. $\sqrt{29} \approx 5$. 29 ni deljivo z 2, 3 ali 5, kar pomeni, da je praštevilo.

---

8 Deljivost

i. Kdaj je naravno število a večkratnik naravnega števila b? (1 točka)

Odgovor: Naravno število a je večkratnik naravnega števila b, če obstaja naravno število k, tako da velja:

$$a = k \cdot b$$

V tem primeru rečemo, da je a deljivo z b.

ii. Definirajte relacijo deljivosti v množici N. (1 točka)

Odgovor:

Relacija deljivosti v množici N je definirana naslednje:

- Za števili $a, b \in \mathrm{N}$ rečemo, da a deli b (zapišemo kot $a \mid b$), če obstaja $k \in \mathrm{N}$, tako da je $b = a \cdot k$. Gre za binarno relacijo na množici naravnih števil, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.

iii. Opišite tri lastnosti relacije deljivosti (3 točke)

Odgovor: Relacija deljivosti v N ima naslednje lastnosti:

- **Refleksivnost:** Za vsako $a \in \mathrm{N}$ velja $a \mid a$.
- **Tranzitivnost:** Če $a \mid b$ in $b \mid c$, potem velja tudi $a \mid c$.
- **Antisimetričnost:** Če $a \mid b$ in $b \mid a$, potem velja $a = b$.

iv. Zapišite tri naravna števila a, b in c, večja od 10 , da bo veljalo: a deli b in b ne deli c. (1 točka)

Odgovor: Primer:

$$a = 12, \quad b = 36, \quad c = 50$$

Tukaj velja: $12 \mid 36$ (ker $36 = 12 \cdot 3$), vendar $36 \nmid 50$ (ker $50 : 36$ ni celo število).

---

9 Večkratniki in deljitelji

i. Definirajte največji skupni delitelji dveh naravnih števil. Razložite metodo za izračun največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil. Kdaj sta si dve naravni števili tuji? (3 točke)

Odgovor:

- **Največji skupni delitelj** dveh naravnih števil a in b je največje naravno število, ki deli oba: $d = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \mid a \text{ in } k \mid b\}$.
- **Metoda za izračun:** Evklidov algoritem
  1. Če $a > b$, izračunaj $a \bmod b$ (ostanek pri deljenju).
  2. Zamenjaj a z b, b z ostankom.
  3. Ponavljaj, dokler ostanek ni 0.
  4. Zadnji ostanek v Evklidovem algoritmu je največji skupni delitelj ($r \neq 0$).
- **Tuji števili** sta a in b, če je njun največji skupni delitelj enak 1.

ii. Definirajte najmanjši skupni večkratnik dveh naravnih števil. Razložite metodo za izračun najmanjšega skupnega večkratnika dveh naravnih števil. (2 točki)

Odgovor:

- **Najmanjši skupni večkratnik** dveh naravnih števil a in b je najmanjše naravno število, ki je deljivo z obema.
- **Formula za izračun** (NSD = največji skupni deljitelj, NSV = najmanjši skupni večkratnik):

$$\text{NSV}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{NSD}(a, b)}, \quad \text{NSD(a, b)} \neq 0$$

- Najprej poiščemo največji skupni deljitelj, nato uporabimo zgornjo formulo za izračun najmanjši skupni večkratnik.

iii. Izberite različni naravni števili med 20 in 50 . Določite njun največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik. (1 točka)

Odgovor: Naj bo $a = 36$ in $b = 48$.

- $\text{NSD}(36, 48) = 12$
- $\text{NSV}(36, 48) = \dfrac{36 \cdot 48}{12} = 144$

---

10 Deljenje naravnih števil

i. Povejte osnovni izrek o deljenju naravnih števil. (2 točki)
Odgovor: Za poljubni naravni števili a in b, kjer $b \neq 0$, obstajata natanko določeni naravni števili q (količnik) in r (ostanek), tako da velja:

$$a = b \cdot q + r, \quad \text{kjer } 0 \leqslant r < b$$

To je osnovni izrek o deljenju naravnih števil.

ii. Izberite naravno število med 5 in 10 ter naštejte elemente množice vseh ostankov pri deljenju z izbranim naravnim številom. (2 točki)
Odgovor: Izberimo število $k = 7$. Množica vseh možnih ostankov pri deljenju z 7 je:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Gre za vsa števila r, ki ustrezajo pogoju $0 \leqslant r < 7$.

iii. Naj bo k naravno število. Opišite množico vseh ostankov pri deljenju z naravnim številom k. (2 točki)
Odgovor: Za poljubno naravno število k je množica vseh možnih ostankov pri deljenju z k:

$$\{0, 1, 2, \ldots, k - 1\}$$

Gre za vsa števila r, ki izpolnjujejo pogoj $0 \leqslant r < k$ v osnovnem izreku o deljenju.

---

11 Kriterij deljivosti

i. Za vsako izmed števil 2, 4 in 8 navedite kriterij deljivosti s tem številom. (3 točke)
Odgovor:

- **Deljivost z 2:** Število je deljivo z 2, če se konča na sodo števko (0, 2, 4, 6, 8).
- **Deljivost s 4:** Število je deljivo s 4, če sta zadnji dve števki deljivi s 4.
- **Deljivost z 8:** Število je deljivo z 8, če so zadnje tri števke deljive z 8.

ii. Navedite kriterij deljivosti s številom 3. (1 točka)
Odgovor:

- Število je deljivo s 3, če je vsota vseh njegovih števk deljiva s 3.

iii. Navedite kriterij deljivosti s številom 6. (1 točka)
Odgovor:

- Število je deljivo s 6, če je hkrati deljivo z 2 **in** z 3.

$$(2 \mid n \land 3 \mid n) \implies 6 \mid n$$

iv. Poiščite primer štirimestnega naravnega števila, ki je deljivo s 6. (1 točka)

Odgovor:

- 1236. Deljivo je z 2, ker se konča na 6, in z 3, ker je vsota števk $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, kar je deljivo s 3.

---

12 Ulomki in racionalna števila

i. Kaj je ulomek? Kdaj dva ulomka predstavljata isto racionalno število? (2 točki)

Odgovor:

- **Ulomek** je zapis oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b celi števili, $b \neq 0$. Pomeni del celote ali razmerje med dvema številoma.
- Dva ulomka predstavljata isto racionalno število, če sta enaka po vrednosti. To velja, če je:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

  To pomeni, da ju lahko zapišemo kot ekvivalentna ulomka (skrajšamo ali razširimo z istim številom).

ii. Pojasnite, kako ulomke seštevamo, odštevamo, množimo in delimo. (4 točke)

Odgovor:

- **Seštevanje:** Ulomke pretvorimo na skupni imenovalec:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

- **Odštevanje:** Podobno kot seštevanje, uporabimo skupni imenovalec:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

- **Množenje:** Števec z števcem, imenovalec z imenovalcem:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- **Deljenje:** Prvi ulomek pomnožimo z obratom drugega:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad c \neq 0$$

---

13 Ulomki in decimalni zapis

i. Kako iz decimalnega zapisa števila prepoznamo, da lahko to število zapišemo z ulomkom? Kako poljubnemu ulomku priredimo njegov decimalni zapis? (2 točki)

Odgovor:

- Decimalno število lahko zapišemo z ulomkom, če je:
  - končno decimalno število (npr. 0,25), ali
  - periodično decimalno število (npr. 0,333 ...).
- Vsako končno ali periodično decimalno število je **racionalno** in ga lahko zapišemo z ulomkom. Poljubnemu ulomku $\frac{a}{b}$ priredimo decimalni zapis tako, da izvedemo običajno deljenje števca z imenovalcem, oziroma a z b.

ii. Kateri ulomki imajo končen decimalni zapis? Povejte primer ulomka, ki nima končnega decimalnega zapisa. (2 točki)

Odgovor:

Ulomek $\frac{a}{b}$ ima končen decimalni zapis, če imenovalec b (v skrajšani obliki) vsebuje le praštevili 2 in/ali 5 kot prafaktorja.

- Primer končnega decimalnega zapisa: $\dfrac{3}{8} = 0{,}375$
- Primer ulomka brez končnega decimalnega zapisa: $\dfrac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$

iii. Povejte primer periodičnega decimalnega števila (z dolžino periode vsaj dva) in ga zapišite kot ulomek. (2 točki)

Odgovor:

Primer periodičnega decimalnega števila. Naj bo $a = 0{,}\overline{142857}$ (dolžina periode je 6)
Zapis kot ulomek:

$$a = \frac{1}{7}$$

---

14 Realna števila

i. Kdaj je realno število racionalno in kdaj iracionalno? Kako se razlikujeta njuna decimalna zapisa? (2 točki)

Odgovor:

- **Racionalno število** je realno število, ki ga lahko zapišemo kot ulomek $\dfrac{a}{b}$, kjer sta $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.
- **Iracionalno število** je realno število, ki ga **ni možno** zapisati kot ulomek dveh celih števil.
- Razlika v decimalnem zapisu:
  - Racionalna števila imajo končen ali periodičen decimalni zapis.
  - Iracionalna števila imajo neskončen, neperiodičen decimalni zapis.

ii. Povejte primer racionalnega števila in dva primera iracionalnih števil. (2 točki)

Odgovor:

Primer racionalnega števila: $\dfrac{5}{8} = 0{,}625$

Primera iracionalnih števil:

$$e \approx 2{,}71828\ldots, \quad \pi \approx 3{,}14159\ldots$$

Oba imata neskončen, neponavljajoč decimalni zapis.

iii. Opišite konstrukcijo točke na številski premici, ki predstavlja vrednost ulomka $\frac{m}{n}, m < n$, kjer sta m in n naravni števili in je $n > 2$. (2 točki)

Odgovor: Postopek konstrukcije ulomka $\dfrac{m}{n}$ na številski premici:

1. Na premici označimo točki 0 in 1 (enoto).
2. Interval med 0 in 1 razdelimo na n enakih delov.
3. Od začetka (točke 0) označimo m-ti del.

Tako dobljena točka na premici predstavlja ulomek $\dfrac{m}{n}$.

---

15 Absolutna vrednost

i. Definirajte absolutno vrednost realnega števila in pojasnite njen geometrijski pomen. (2 točki)
Odgovor:

- **Absolutna vrednost** realnega števila x je:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

- **Geometrijski pomen:** Absolutna vrednost števila x je njegova razdalja od točke 0 na številski premici.

ii. Naj bosta a in b realni števili. Kaj predstavlja število $|b-a|$? (1 točka)
Odgovor:

- Število $|b-a|$ predstavlja razdaljo med točkama a in b na številski premici, ne glede na vrstni red.

iii. Na številski premici pojasnite rešitev enačbe $|x| = a$, kjer je a pozitivno realno število. Odgovor ponazorite s primerom. (1 točka)
Odgovor:

- Enačba $|x| = a$ ima dve rešitvi:

$$x = a \quad \text{ali} \quad x = -a$$

  To pomeni, da je x oddaljen od 0 za a enot.

- **Primer:** $|x| = 3$ ima rešitvi $x = 3$ in $x = -3$.

iv. Naj bosta a in b realni števili. Primerjajte izraza $|a| + |b|$ ter $|a+b|$. Odgovor ponazorite s primeri. (2 točki)
Odgovor:
Vedno velja:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

To je trikotniška neenakost. Dolžina ene stranice $|a+b|$ bo vedno manjša oziroma enaka vsoti dolžin ostalih dveh stranic $|a| + |b|$.

Primer 1 (enakost): $a = 2$, $b = 3$:

$$|a+b| = |5| = 5, \quad |a| + |b| = 2 + 3 = 5$$

Primer 2 (stroga neenakost): $a = 4$, $b = -6$:

$$|a+b| = |-2| = 2, \quad |a| + |b| = 4 + 6 = 10$$

16 Kompleksna števila

i. Definirajte množico kompleksnih števil. Kako grafično upodobimo (predstavimo) kompleksna števila? (2 točki)
Odgovor:

- **Množica kompleksnih števil** $\mathbb{C}$ je množica vseh števil oblike:

  $$z = a + bi, \quad \text{kjer sta } a, b \in \mathbb{R} \text{ in } i^2 = -1$$

  Število a imenujemo realni del ($\mathrm{Re}(z)$), b pa imaginarni del ($\mathrm{Im}(z)$).

- **Grafična predstavitev:** Kompleksna števila predstavimo v **kompleksni ravnini**, kjer:
  - x-os predstavlja realni del,
  - y-os predstavlja imaginarni del.

  Tako število $z = a + bi$ upodobimo kot točko s koordinatama (a, b).

ii. Definirajte operacijo seštevanja v množici C. Opišite geometrijski pomen seštevanja kompleksnih števil. (2 točki)
Odgovor:

- **Seštevanje kompleksnih števil:**
  Naj bo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, in $z_3 = z_1 + z_2$, kjer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Potem je

  $$z_3 = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

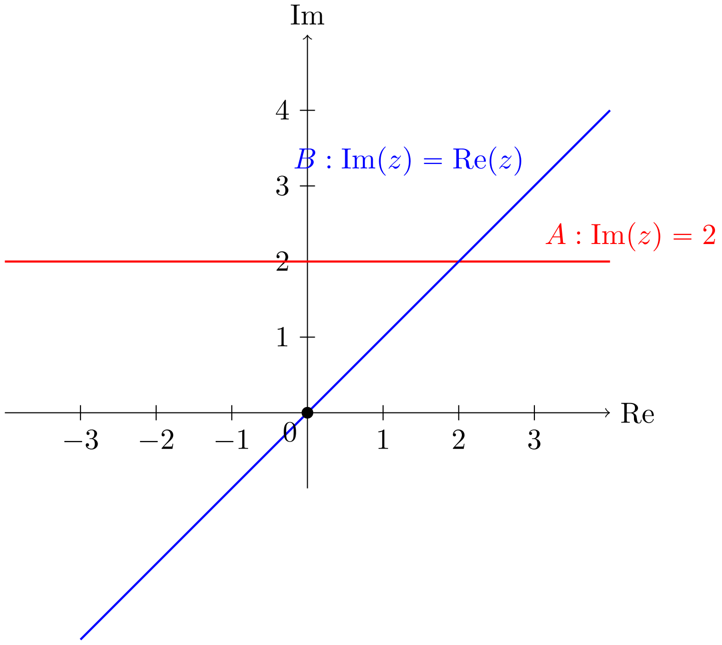
- **Geometrijski pomen:** Seštevanje števil v kompleksni ravnini je vektorsko seštevanje. Če števili predstavimo kot vektorja iz izhodišča $(0, 0)$, je njuna vsota glavna diagonalnega dobljenega paralelograma.

iii. V kompleksni ravnini predstavite podmnožici kompleksnih števil $A = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) = 2\}$ in $B = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)\}$. (2 točki)

Odgovor:

- **Podmnožica A:** Vsa kompleksna števila z imaginarnim delom 2. V kompleksni ravnini je to **vodoravna premica** pri $y = 2$.
- **Podmnožica B:** Vsa kompleksna števila, kjer sta imaginarni in realni del enaka ($\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$). To je **premica skozi izhodišče** z enačbo $y = x$ (diagonala).

Obe podmnožici sta neskončni množici točk v kompleksni ravnini.



---

17 Množenje kompleksnih števil

i. Definirajte operacijo množenja v množici C. Zapišite primer. (2 točki)

Odgovor:

- **Množenje kompleksnih števil:**

  Naj bo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, in $z_3 = z_1 \cdot z_2$, kjer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Potem je

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- **Primer:**

$$(2+3i)(1+4i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 1 + 3i \cdot 4i = 2 + 8i + 3i + 12i^2 = 2 + 11i - 12 = -10 + 11i$$

ii. Opišite geometrijski pomen množenja kompleksnega števila s številom -1 in geometrijski pomen množenja kompleksnega števila s pozitivnim realnim številom. (2 točki)
Odgovor:

- **Množenje s** -1 pomeni **zrcaljenje čez izhodišče** v kompleksni ravnini (obrat za 180°).
- **Množenje s pozitivnim realnim številom** pomeni **razteg ali stisk** v smeri od izhodišča. Vektor ostane v isti smeri, spremeni se le njegova dolžina.

iii. Naj bo n naravno število. Izračunajte i^*, kjer je n letošnja letnica. (1 točka)
Odgovor:

- Naj bo n enako letošnji letnici, potem je $n = 2025$.

  Ker potence imaginarne enote i sledijo ciklu dolžine 4:

  $$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \text{in nato se cikel ponavlja}$$

  Izračunamo ostanek:

  $$2025 \bmod 4 = 1 \Rightarrow i^{2025} = i^1 = i$$

iv. Izberite kompleksno število $z = a + bi$, kjer sta a in b od nič različni realni števili, in izračunajte z^2. (1 točka)
Odgovor:
Izberemo $z = 3 + 2i$.
Izračunamo:

$$z^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

---

18 Absolutna vrednost kompleksnega števila

i. Definirajte absolutno vrednost kompleksnega števila. Na primeru pokažite izračun absolutne vrednosti kompleksnega števila. (2 točki)
Odgovor:

- **Absolutna vrednost** kompleksnega števila $z = a + bi$ je definirana kot:

  $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Primer:** Naj bo $z = 3 - 4i$. Potem je:

  $$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

  To je enako dolžini od izhodišča $(0, 0)$ v kompleksni ravnini.

ii. Na primeru izbranega kompleksnega števila $z = a + bi$, kjer je $a \neq 0$ in $b \neq 0$, pokažite, da je $|2z| = |2|z$. (2 točki)

Odgovor:

- Naj bo $z = 1 + 2i$. Potem je $2z = 2(1 + 2i) = 2 + 4i$.

  Izračunajmo:
  $$|2z| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

  Po drugi strani:
  $$|2| \cdot |z| = 2 \cdot |1 + 2i| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{1 + 4} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

  Ker $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, sledi:
  $$|2z| = |2| \cdot |z|$$

iii. V kompleksni ravnini predstavite množico točk $\{z \in \mathrm{C}; |z| \leqslant 3\}$. Zapišite primer kompleksnega števila $z = a + bi$ iz te množice, kjer je a pozitivno, b pa negativno realno število. (2 točki)

Odgovor:

- Množica $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 3\}$ so vse točke v kompleksni ravnini z razdaljo največ 3 od izhodišča. Geometrijsko je to **krog s središčem v izhodišču in polmerom** 3, vključno z notranjostjo.

- **Primer števila:** $z = 2 - i$

  Izračun:
  $$|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24 < 3$$

  Torej $z = 2 - i$ pripada tej množici, $a > 0$, $b < 0$.

---

19 Konjugirana vrednost kompleksnega števila

i. Definirajte konjugirano vrednost kompleksnega števila in razložite njen geometrijski pomen. (2 točki)

Odgovor:

- **Konjugirana vrednost** kompleksnega števila $z = a + bi$ (kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$) je:
  $$\overline{z} = a - bi$$

- **Geometrijski pomen:** Konjugiranje kompleksnega števila je **zrcaljenje čez realno os** v kompleksni ravnini. To pomeni, da imata točki z in $\overline{z}$ enak realni del, ampak nasprotna imaginarna dela.

ii. Dokažite, da je konjugirana vrednost vsote dveh kompleksnih števil enaka vsoti njunih konjugiranih vrednosti. (2 točki)

Odgovor:

- Naj bo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, kjer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

  Potem je:

  $$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

  Konjugirana vrednost:

  $$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

  Po drugi strani:

  $$\overline{z_1} = a - bi, \quad \overline{z_2} = c - di, \quad \overline{z_1} + \overline{z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

  Torej:

  $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

iii. Izberite kompleksno število $z = a + bi$, kjer sta a in b od nič različni realni števili, in izračunajte z^{-1}. (2 točki)

Odgovor:

- Izberimo $z = 1 + 2i$.

  Obratno število izračunamo tako, da pomnožimo števec in imenovalec z njegovo konjugirano vrednostjo:

  $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

  Torej:

  $$z^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

---

20 Enačbe

i. Kaj je enačba in kaj je rešitev enačbe? Kdaj sta dve enačbi ekvivalentni (enakovredni)? (2 točki)

Odgovor:

- **Enačba** je matematična izjava, v kateri sta dve izraza povezana z enačajem (=) in vsaj en izraz vsebuje neznanko.

- **Rešitev enačbe** je vrednost spremenljivke, ki enačbo spremeni v pravilno trditev (resnično izjavo).

- **Ekvivalentni enačbi** imata enako množico rešitev. To pomeni, da vsaka rešitev ene enačbe zadošča kot rešitev druge enačbe.

ii. Opišite postopke, ki dano enačbo prevedejo v ekvivalentno enačbo. (2 točki)
Odgovor:

- Enačbo lahko preoblikujemo v ekvivalentno enačbo z naslednjimi postopki:
  - Seštevanje ali odštevanje istega števila na obeh straneh.
  - Množenje ali deljenje obeh strani z istim številom a, kjer $a \neq 0$.
  - Uporaba osnovnih računskih zakonov (distributivnost, komutativnost,...).
  - Poenostavljanje izrazov (odpravljanje oklepajev, krajšanje,...).

  Ti postopki ne spremenijo množice rešitev.

iii. Kako rešimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama? Zapišite primer takega sistema in ga rešite. (2 točki)
Odgovor:

- Sistem rešujemo z:
  - metodo **substitucije** (enačimo, nadomestimo),
  - metodo **odštevanja ali seštevanja** (eliminiramo spremenljivko),

  Primer:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Rešitev: Seštejemo enačbi:

$$(x + y) + (2x - y) = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Vstavimo v prvo enačbo: $3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$

Rešitev sistema: $x = 3$, $y = 2$

---

21 Potence z celimi eksponenti

i. Definirajte potenco z naravnim in potenco s celim eksponentom. (1 točka)
Odgovor:

- **Potenca z naravnim eksponentom:** Za $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n\text{-krat})$$

- **Potenca s celim eksponentom:** Če je $n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, potem velja:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

  Za a^0 (kjer $a \neq 0$) velja:

$$a^0 = 1$$

ii. Naštejte tri pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti. (3 točka)
Odgovor:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (množenje z enakimi osnovami)
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (deljenje z enakimi osnovami, $a \neq 0$)
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (potenca potence)

iii. Na primerih potenc s celimi eksponenti pokažite uporabo dveh izmed zgomjih pravil. (2 točki)
Odgovor:

- **Primer 1 (množenje):**

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

- **Primer 2 (deljenje):**

$$5^6 \div 5^2 = 5^{6-2} = 5^4 = 625$$

---

22 Koreni

i. Definirajte $\sqrt[n]{x}$ za poljubno naravno število n. Zakaj je pomembno, ali je n sodo ali liho število? (2 točki)
Odgovor:

- Za poljubno naravno število n in realno število x definiramo:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$$

  – Če je n **sodo**, potem $\sqrt[n]{x}$ obstaja le za $x \geqslant 0$ (rezultat je nenegativen).
  – Če je n **liho**, potem $\sqrt[n]{x}$ obstaja za vsako realno število x (lahko tudi negativno), ker potenca lihe stopnje ohrani predznak.

ii. Kako množimo korene z enakima in kako z različnima korenskima eksponentoma? (1 točka)
Odgovor:

- **Enaka eksponenta:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

- **Različna eksponenta:** Pretvorimo korene v potence:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

  in nato izraz poenostavimo.

iii. Kako korenimo produkt? Kako korenimo korene? (1 točka)
Odgovor:

- **Korenjenje produkta:**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

- **Korenjenje korena:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

iv. Racionalizirajte imenovalec ulomka $\frac{a}{a+\sqrt{b}}$. (2 točka)
Odgovor:

- Imenovalec racionaliziramo tako, da ulomek pomnožimo z $(a - \sqrt{b})/(a - \sqrt{b})$:

$$\frac{a}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{a(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

  Tako dobimo:

$$\frac{a(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

  Imenovalec je zdaj racionalno število.

---

23 Potence z racionalnimi eksponenti

i. Definirajte potenco s pozitivno osnovo in racionalnim eksponentom. (1 točka)

Odgovor:

- Za pozitivno realno število a in racionalno število eksponent $r = \frac{m}{n}$ (kjer sta $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) definiramo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Ta definicija omogoča razširitev pojma potence tudi na racionalne eksponente.

ii. Podajte primera dveh potenc z enakima osnovama in različnima pozitivnima racionalnima eksponentoma (ki nista celi števili) in izračunajte njun produkt. Izrazite ti dve potenci še kot korena in izračunajte njun produkt. (3 točke)

Odgovor:

- Izberimo osnovo $a = 16$ in eksponenta $\frac{1}{2}$ ter $\frac{3}{4}$.

Potenčni zapis:

$$16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = 16^{\frac{5}{4}}$$

Zapis s koreni:

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt[4]{16^3} = 4 \cdot \sqrt[4]{4096} = 4 \cdot 8 = 32$$

Torej je produkt 32.

---

24 Premice

i. Definirajte vzporednost premic v ravnini. (1 točka)

Odgovor:

- Dve premici v ravnini sta **vzporedni**, če ležita v isti ravnini in nimata nobene skupne točke (se ne sekata). Označimo: $p \parallel q$.

ii. Naštejte vse možne medsebojne lege dveh premic v ravnini. (2 točki)

Odgovor:

- Dve premici v ravnini imata lahko naslednje medsebojne lege:
  - sekata se (imata eno skupno točko),
  - sta vzporedni (nimata nobene skupne točke),
  - sta identični (vse točke ene ležijo tudi na drugi).

iii. Naštejte dve lastnosti relacije vzporednosti premic v ravnini. (2 točki)
Odgovor:

- Relacija vzporednosti premic ima naslednji lastnosti:
  - **Refleksivnost:** Vsaka premica je vzporedna sama sebi ($p \parallel p$).
  - **Simetričnost:** Če je $p \parallel q$, potem je tudi $q \parallel p$.

  (Opomba: relacija ni tranzitivna brez dodatnih geometrijskih pogojev.)

iv. Povejte aksiom o vzporednici. (1 točka)
Odgovor:

- **Evklidov aksiom o vzporednici:**

  Če je dana premica p, in točka T izven te premice, potem skozi to točko poteka natanko ena premica, ki je vzporedna premici p.

---

25 Koti

i. Pojasnite pojme ničelni, pravi, iztegnjeni in polni kot. (2 točki)
Odgovor:

- **Ničelni kot:** kot z velikostjo 0°.
- **Pravi kot:** kot z velikostjo 90°.
- **Iztegnjeni kot:** kot z velikostjo 180°, njegova kraka ležita na isti premici.
- **Polni kot:** kot z velikostjo 360°.

ii. Pojasnite pojma sokota in sovršna kota. (2 točki)
Odgovor:

- **Sokota** sta kota, ki imata skupni krak in skupaj tvorita kot 180° (iztegnjeni kot).
- **Sovršna kota** sta kota, ki nastaneta pri sečišču dveh premic in imata skupni vrh ter nasprotna kraka. Sovršna kota sta vedno enaka.

iii. Kdaj je dani kot oster in kdaj top? (1 točka)
Odgovor:

- **Oster kot:** kot, manjši od 90°.
- **Top kot:** kot, večji od 90° in manjši od 180°.

iv. Kdaj sta kota komplementarna in kdaj suplementarna? (1 točka)
Odgovor:

- **Komplementarna kota:** Kota α in β z istim izhodiščem, njuna vsota je 90°.
- **Suplementarna kota:** Kota α in β z istim izhodiščem, njuna vsota je 180°.

26 Koti

i. Definirajte kotno stopinjo, kotno minuto in kotno sekundo. (1 točka)
Odgovor:

- Ena kotna stopinja (1°) je 1/360 polnega kroga oziroma obrata.
- Ena kotna minuta ($1'$) je 1/60 kotne stopinje.
- Ena kotna sekunda ($1''$) je 1/60 kotne minute.

ii. Definirajte radian. (1 točka)
Odgovor:

- En radian je velikost središčnega kota, ki na krožnici dolžine r (polmer) odmeri lok dolžine r.

iii. Zapišite zvezo med stopinjami in radiani. (1 točka)
Odgovor:

- π rad $= 180^\circ$, kjer je rad = radian.
- $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad, kjer je rad = radian.
- $1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$, kjer je rad = radian.

iv. Koliko stopinj meri en radian? (1 točka)
Odgovor:

- En radian meri približno 57,296°, ker je $1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57,296^\circ$

v. Koliko radianov merijo koti $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ in 90° ? (1 točka)
Odgovor:

- $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ rad
- $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ rad
- $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ rad
- $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ rad

vi. Kdaj sta kota skladna? (1 točka)
Odgovor:

- Kota sta skladna, če imata enako velikost oziroma enako merita v stopinjah ali radianih.
- V radianih: kota α in β sta skladna $\iff \alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$

27 Trikotnik

i. Definirajte trikotnik. (1 točka)
Odgovor:

- Trikotnik je geometrijski lik, ki ga določajo tri točke, kjer vsaj en par ne leži na isti premici, ter daljice, ki te točke povezujejo. Je lik, ki zapre prostor in ima 3 kote, ki skupaj merijo 180° (vsota notranjih kotov).
- Trikotnik ima tri stranice, tri oglišča in tri kote.

ii. Definirajte notranji in zunanji kot trikotnika. (2 točki)
Odgovor:

- Notranji kot trikotnika je kot, ki ga tvorita dve stranici trikotnika v istem oglišču.
- Zunanji kot trikotnika pri nekem oglišču je kot, ki ga tvorita stranica trikotnika in podaljšek sosednje stranice iz tega oglišča.
- Notranji in zunanji kot pri istem oglišču sta sosednja kota, ki skupaj tvorita iztegnjeni kot (180°).

iii. Kolikšna je vsota notranjih kotov trikotnika? Trditev dokažite. (2 točki)
Odgovor:

- Vsota notranjih kotov trikotnika je 180° oziroma π radianov.
- **Dokaz:**
  - Narišemo poljuben trikotnik in skozi eno oglišče (npr. C) potegnemo premico, ki je vzporedna nasprotni stranici AB.
  - Zaradi izmeničnih kotov velja, da sta kota pri ogliščih A in B skladna z dvema kotoma ob tej vzporednici.
  - Ker ti trije koti skupaj tvorijo iztegnjeni kot, je njihova vsota 180°.

iv. Kolikšna je vsota zunanjih kotov trikotnika? (1 točka)
Odgovor:

- Vsota zunanjih kotov trikotnika (po enega pri vsakem oglišču) je vedno 360° oziroma 2π radianov.

28 Znamenite točke trikotnika

i. Opišite konstrukcijo simetrale daljice in simetrale kota. (2 točki)
Odgovor:

- **Simetrala daljice:**
  - Z radijem (r), večjim od polovice dolžine daljice AB, narišemo krožna loka s središčema v točkah A in B.
  - Loka se sekata v dveh točkah — skozi ti točki narišemo premico.
  - Ta premica je simetrala daljice AB — razpolavlja daljico in je nanjo pravokotna.
- **Simetrala kota:**
  - Vzamemo poljuben kot $\angle ABC$.
  - Z enakim radijem zarišemo loka iz točk B, ki sekata kraka kota v točkah D in E.
  - Nato z istim ali poljubnim radijem zarišemo loka iz točk D in E, ki se sekata v točki F.
  - Premica BF je simetrala kota $\angle ABC$ — deli kot na dva enaka dela.

ii. Kako poiščemo težišče trikotnika, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinsko točko? (4 točke)
Odgovor:

- **Težišče trikotnika (oznaka T):**
  - Je presečišče vseh težiščnic trikotnika.
  - Težiščnica je daljica, ki povezuje oglišče s središčem nasprotne stranice.
- **Središče očrtane krožnice (oznaka O):**
  - Je presečišče simetral vseh treh stranic trikotnika.
  - Točka O ni vedno enako oddaljena od vseh treh oglišč trikotnika.
- **Središče včrtane krožnice (oznaka I):**
  - Je presečišče simetral vseh treh kotov trikotnika.
  - Točka I ni vedno enako oddaljena od vseh treh stranic trikotnika.
- **Višinska točka (oznaka H):**
  - Je presečišče vseh treh višin trikotnika.
  - Višina je daljica, ki poteka od oglišča pravokotno na nasprotno stranico (ali njeno nosilko).

---

29 Skladnost likov

i. Definirajte skladnost likov. (1 točka)
Odgovor:

- Dva lika sta skladna, če ju lahko z togimi premiki (premikom, vrtenjem ali zrcaljenjem) prenesemo enega na drugega tako, da se popolnoma pokrijeta.
- Pri tem ohranimo dolžine, kote in oblike — liki so enaki po velikosti in obliki.

ii. Povejte štiri izreke o skladnosti trikotnikov. (4 točke)
Odgovor:

- **Izrek SSS (stranica-stranica-stranica):** Če so vse tri stranice enega trikotnika skladne s tremi stranicami drugega trikotnika, sta trikotnika skladna.
- **Izrek S-K-S (stranica-kot-stranica):** Če imata trikotnika dve skladni stranici in kot med njima, sta skladna.
- **Izrek K-S-K (kot-stranica-kot):** Če imata trikotnika eno skladno stranico in sosednja kota, sta skladna.
- **Izrek K-S-K (kot-stranica-kot):** Če imata trikotnika eno skladno stranico in enakoležna kota ob tej stranici, sta skladna.

iii. V paralelogramu narišemo obe diagonali. Koliko parov skladnih trikotnikov dobimo? (1 točka)
Odgovor:

- Dobili bomo **dva para skladnih trikotnikov**.
- Diagonali razdelita paralelogram na štiri trikotnike.
- Vsaka diagonala tvori par skladnih trikotnikov zaradi skladnih stranic in kotov (izrek SKS).

---

30 Podobnost likov

i. Definirajte podobnost likov. (1 točka)
Odgovor:

- Dva lika sta podobna, če sta enake oblike, vendar se lahko razlikujeta po velikosti.
- Imata enake kote, dolžine stranic pa so v stalnem razmerju ($m : n$).

ii. Povejte tri izreke o podobnosti trikotnikov. (3 točke)
Odgovor:

- **Izrek AA (kot-kot):** Dva trikotnika sta podobna, če imata dva enaka kota.
  - Opomba: Če sta dva kota enaka, je tudi tretji kot samodejno enak (saj je vsota kotov v trikotniku 180°), kar zagotavlja podobnost.
- **Izrek SSS (stranica-stranica-stranica):** Dva trikotnika sta podobna, če so razmerja vseh treh parov ustreznih stranic enaka.
  - Opomba: Če je npr. razmerje stranic $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, kjer so a, b, c stranice enega trikotnika in a', b', c' drugega, sta trikotnika podobna.
- **Izrek SAS (stranica-kot-stranica):** Dva trikotnika sta podobna, če imata enak kot med dvema stranicama in sta razmerji teh dveh parov stranic enaki.
  - Opomba: Če je npr. kot $\angle A = \angle A'$ in velja $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ za stranice, ki obdajata ta kot, sta trikotnika podobna.

iii. Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta podobna. Stranica AB prvega trikotnika meri c, stranica $A'B'$ drugega trikotnika pa meri $k \cdot c$. Kolikšna sta obseg in ploščina trikotnika $A'B'C'$, če je o obseg trikotnika ABC in S ploščina trikotnika ABC? (2 točki)
Odgovor:

- Obseg podobnega trikotnika je enak $k \cdot o$.
- Ploščina podobnega trikotnika je enaka $k^2 \cdot S$.
- Razlaga: Pri podobnosti velja, da se dolžine povečajo za faktor k, kar pomeni, da se obseg tudi poveča za faktor k, ploščina pa za kvadrat faktorja k.

---

31 Paralelogram

i. Definirajte paralelogram. (1 točka)
Odgovor:

- Paralelogram je štirikotnik, katerega nasprotne stranice so paroma vzporedne in enako dolge.

ii. Navedite lastnosti kotov in stranic paralelograma. (2 točki)
Odgovor:

- Nasprotni stranici sta skladni: $AB = CD$, $AD = BC$.
- Nasprotni koti so skladni: $\angle\alpha = \angle\gamma$, $\angle\beta = \angle\delta$.
- Sosednja kota sta suplementarna (njuna vsota je 180°): $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$.

iii. Navedite posebne vrste paralelogramov in opišite njihove lastnosti. (2 točki)
Odgovor:

- **Pravokotnik:**
  - Vsi koti so pravi (90°).
  - Diagonali sta enako dolgi in se razpolavljata.
- **Romb:**
  - Vse stranice so enako dolge.
  - Diagonali se sekata pod pravim kotom in razpolavljata kota.
- **Kvadrat:**
  - Vse stranice so enako dolge (a).
  - Ima vse lastnosti pravokotnika in romba.

iv. Kaj velja za diagonali paralelograma? (1 točka)
Odgovor:

- Diagonali se razpolavljata — to pomeni, da se sekata v svojem središču in vsaka razpolovi drugo.

---

32 Trapez

i. Definirajte trapez. (1 točka)
Odgovor:

- Trapez je štirikotnik, ki ima natanko en par nasprotnih stranic vzporednih. Ti stranici imenujemo osnovnici.

ii. Navedite lastnosti kotov trapeza. (1 točka)
Odgovor:

- Vsota kotov ob istem kraku trapeza je 180°: $\angle\alpha + \angle\delta = 180^\circ$ in $\angle\beta + \angle\gamma = 180^\circ$.

iii. Kaj je srednjica trapeza in katere lastnosti ima? (1 točka)
Odgovor:

- Srednjica trapeza je daljica, ki povezuje sredini krakov.
- Lastnosti:
  - Je vzporedna z osnovnicama.
  - Njena dolžina je enaka aritmetični sredini osnovnic: $s = \dfrac{a+c}{2}$, kjer sta a in c osnovnici.

iv. Kdaj je trapez enakokrak? Kaj velja za kote in diagonali v enakokrakem trapezu? (1 točka)
Odgovor:

- Trapez je enakokrak, če sta njegova kraka enako dolga.
- Lastnosti:
  - Koti ob isti osnovnici so skladni: $\angle\alpha = \angle\delta$, $\angle\beta = \angle\gamma$.
  - Diagonali sta enako dolgi: $AC = BD$.

v. Opišite, kako v enakokrakem trapezu z znanimi dolžinami stranic izračunamo višino trapeza. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bodo dolžine osnovnic a in c, in naj bo dolžina kraka b.
- Višino izračunamo s pomočjo Pitagorovega izreka:
  - Najprej določimo polovico razlike osnovnic: $d = \dfrac{|a-c|}{2}$
  - Višina je nato: $v = \sqrt{b^2 - d^2}$

---

33 Premice in krožnice

i. V kakšni medsebojni legi sta lahko premica in krožnica, ki ležita v isti ravnini? (3 točke)
Odgovor:

- **Premica in krožnica imata lahko tri različne lege:**
  - **Sekanta:** premica seka krožnico v dveh različnih točkah (T_1 in T_2).
  - **Tangenta:** premica se dotika krožnice v eni točki (T).
  - **Mimobežnica:** premica nima skupnih točk s krožnico.

ii. Kako imenujemo daljico, ki povezuje dve točki krožnice? (1 točka)
Odgovor:

- Daljica, ki povezuje dve točki krožnice, se imenuje **tetiva**.

iii. Opišite konstrukcijo tangente na krožnico v dani točki krožnice. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo T točka na krožnici in S središče krožnice.
- Narišemo premico, ki poteka skozi točko T in je pravokotna na polmer ST.
- Tako dobljena premica je tangenta na krožnico v točki T.

---

34 Središčni in obodni kot

i. Definirajte središčni in obodni kot v krogu. (2 točki)
Odgovor:

- **Središčni kot** je kot, katerega vrh je v središču kroga, kraka pa potekata skozi dve točki na krožnici.
- **Obodni kot** je kot, katerega vrh leži na krožnici, kraka pa prav tako potekata skozi dve točki krožnice.

ii. V kakšni zvezi sta, če ležita nad istim lokom kroga? (1 točka)
Odgovor:

- Obodni kot je enak polovici središčnega kota nad istim lokom: $\measuredangle = \dfrac{1}{2} \cdot$ kota.

iii. Povejte in dokažite Talesov izrek o kotu v polkrogu. (2 točki)
Odgovor:

- **Talesov izrek:** Če je trikotnik včrtan v polkrog tako, da je premer kroga ena stranica trikotnika, potem je kot, ki nasproten premeru polkroga, pravi kot.
- **Dokaz:**
  - Naj bo AB premer kroga, in točka C naj bo točka na krožnici.
  - Kot $\measuredangle ACB$ je obodni kot nad lokom AB.
  - Središčni kot nad tem lokom meri $180°$.
  - Zato je obodni kot: $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

iv. V enakostraničnem trikotniku ABC je S središče trikotniku očrtane krožnice. Koliko meri kot $\measuredangle ASB$? (1 točka)
Odgovor:

- V enakostraničnem trikotniku so vsi središčni koti enaki.
- Kot $\measuredangle ASB$ potem meri $120°$.

---

35 Sinusni in kosinusni izrek

i. Povejte kosinusni izrek. Na primeru opišite njegovo uporabo. (2 točki)
Odgovor:

- **Kosinusni izrek:** V trikotniku s stranicami a, b, c in nasprotnim kotom γ velja:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

- **Uporaba:** Uporabimo ga, kadar poznamo dolžini dveh stranic in kot med njima ter želimo izračunati tretjo stranico.

- **Primer:** Če je $a = 5cm$, $b = 7cm$ in $\gamma = 60°$, potem:

$$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos(60°) = 25 + 49 - 70\cdot 0.5 = 74 - 35 = 39 \Rightarrow c = \sqrt{39} \approx 6.245$$

ii. Povejte sinusni izrek. Na primeru opišite njegovo uporabo. (2 točki)
Odgovor:

- **Sinusni izrek:** V trikotniku s stranicami a, b, c in nasprotnimi koti α, β, γ velja:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

- **Uporaba:** Uporabimo ga, kadar poznamo en par (stranica in nasprotni kot) ter še en dodatni kot ali stranico in želimo izračunati manjkajoče elemente trikotnika.

- **Primer:** Če je $a = 6cm$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, potem:

$$\frac{6}{\sin(30°)} = \frac{b}{\sin(45°)} \Rightarrow \frac{6}{0.5} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow 12 = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8.485cm$$

iii. Kateri izrek dobimo, če v pravokotnem trikotniku uporabimo kosinusni izrek za izračun hipotenuze? Odgovor utemeljite. (2 točki)
Odgovor:

- Če v **pravokotnem trikotniku** uporabimo kosinusni izrek za izračun **hipotenuze** c, kjer je kot $\gamma = 90°$, dobimo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(90°)$$

- Ker je $\cos(90°) = 0$, sledi:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- S tem smo izrazili **Pitagorov izrek**.

---

36 Ploščine likov

i. Navedite in utemeljite formulo za ploščino paralelograma, če sta dani: (2 točki)

- **osnovnica in višina na to osnovnico, (1 točka)**
- **dolžini stranic in kot med njima. (1 točka)**

Odgovor:

- Če sta dana osnovnica a in pripadajoča višina v, je ploščina:

  $$P = a \cdot v$$

  Formula izhaja iz dejstva, da lahko paralelogram z razrezom in preurejanjem pretvorimo v pravokotnik z enako osnovnico in višino.

- Če sta dani stranici a in b ter kot φ med njima, potem je ploščina:

  $$P = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$$

  Višina na stranico a je enaka $v = b \cdot \sin(\varphi)$, saj gre za pravokotno projekcijo stranice b na premico, ki je pravokotna na a. Zato je ploščina $P = a \cdot v = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$.

ii. Opišite, kako izračunamo ploščino trikotnika, če poznamo: (4 točke)

- **dolžino stranice in višino na to stranico, (1 točka)**
- **dolžini dveh stranic in velikost kota med njima, (1 točka)**
- **dolžine njegovih stranic. (2 točki)**

Odgovor:

- Če poznamo dolžino stranice a in višino v na to stranico, je ploščina:

  $$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v$$

- Če poznamo dolžini stranic a in b ter kot φ med njima, potem je ploščina:

  $$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$$

- Če poznamo vse tri stranice a, b in c, uporabimo **Heronovo formulo**. Najprej izračunamo polobseg:

  $$s = \frac{a + b + c}{2}$$

  Nato ploščino:

  $$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

---

37 Ploščine likov

i. Navedite in utemeljite formulo za ploščino deltoida. (1 točka)
Odgovor:

- Naj bo e dolžina ene diagonale in f dolžina druge diagonale deltoida, ki se sekata pod pravim kotom.
- Ploščina deltoida je:
$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$
- Utemeljitev: diagonali deltoida se sekata pod pravim kotom in deltoid razdelita na štiri pravokotne trikotnike, zato je ploščina enaka vsoti ploščin teh trikotnikov.

ii. Navedite formulo za ploščino trapeza. (1 točka)
Odgovor:

- Naj bosta a in c dolžini osnovnic, v pa višina trapeza.
- Ploščina trapeza je:
$$P = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$
- Formula sledi iz dejstva, da lahko trapez razdelimo v pravokotnik in dva trikotnika ali obravnavamo kot paralelogram s povprečno osnovnico.

iii. Opišite postopek za izračun višine enakostraničnega trikotnika. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo a dolžina stranice enakostraničnega trikotnika.
- Višina v razdeli trikotnik na dva skladna pravokotna trikotnika z osnovnico $\frac{a}{2}$ in hipotenuzo a.
- Po Pitagorovem izreku velja:
$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

iv. Navedite formuli za izračun ploščine enakostraničnega in ploščine pravokotnega trikotnika. (2 točki)
Odgovor:

- **Enakostranični trikotnik:**
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
kjer je a dolžina stranice.
- **Pravokotni trikotnik:**
$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$
kjer sta a in b kateti trikotnika.

38 Krog

i. Navedite formuli za izračun ploščine in obsega kroga. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo r polmer kroga.
- Obseg kroga je:
$$O = 2\pi r$$
- Ploščina kroga je:
$$P = \pi r^2$$

ii. Navedite formuli za izračun dolžine krožnega loka in ploščine krožnega izseka. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo r polmer kroga in φ središčni kot v stopinjah.
- Dolžina krožnega loka:
$$l = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$
- Ploščina krožnega izseka:
$$P = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

iii. Kaj je krožni odsek? Opišite postopek za izračun ploščine krožnega odseka. (2 točki)
Odgovor:

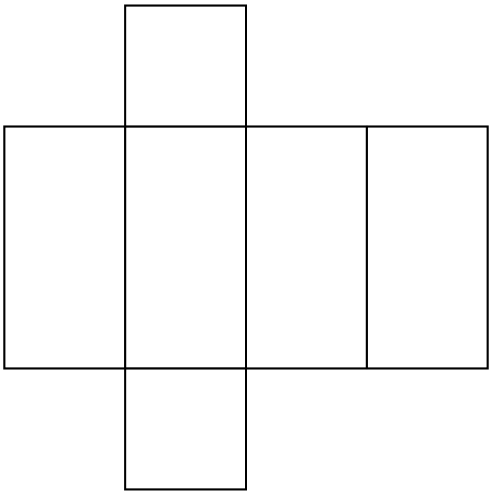
- Krožni odsek je del kroga, omejen z lokom in tetivo, ki povezuje krajišči loka.
- Ploščino krožnega odseka izračunamo tako, da od ploščine krožnega izseka odštejemo ploščino trikotnika, ki ga določajo središče in krajišči loka:
$$P_{\text{odsek}} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - P_{\text{trikotnik}}$$
- Ploščino trikotnika $P_{\text{trikotnik}}$ določimo glede na znani kot φ in dolžino r s formulo:
$$P_{\text{trikotnik}} = \frac{1}{2} r^2 \sin(\varphi)$$
(če je kot podan v radianih, drugače pretvorimo).

---

39 Prizma

i. Opišite pokončno prizmo in narišite njeno mrežo. (2 točki)
Odgovor:

- Pokončna prizma je geometrijsko telo, ki ima dve skladni osnovni ploskvi (osnovnici), povezani s pravokotnimi stranskimi ploskvami.
- Osnovnici sta poljubna skladna lika, stranske ploskve pa so pravokotniki.
- Mreža pokončne prizme je sestavljena iz dveh skladnih osnovnic in pravokotnih stranskih ploskev, ki tvorijo pravokotnik ali pas pravokotnikov.



Mreža pokončne 4-strane prizme

ii. Kdaj je prizma enakoroba in kdaj pravilna? (2 točki)
Odgovor:

- Prizma je **enakoroba**, če so vse njene stranice (vsi robovi) enako dolge/i.
- Prizma je **pravilna**, če ima za osnovnico pravilni mnogokotnik in je pokončna (stranske ploskve so pravokotniki).

iii. Navedite formulo za izračun prostornine pokončne prizme. (1 točka)
Odgovor:

$$V = p \cdot v$$

kjer je p ploščina osnovne ploskve, v pa višina prizme.

iv. Izpeljite formulo za izračun površine pravilne enakorobe štiristrane prizme z robom a. (1 točka)

Odgovor:

- Osnovnica je kvadrat s ploščino a^2.
- Višina prizme je tudi a, saj je enakoroba.
- Površina je:

$$P = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot a = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$$

---

40 Valj

i. Opišite pokončni valj. (1 točka)

Odgovor:

- Pokončni valj je geometrijsko telo, ki je omejeno z dvema osnovnima ploskvama in plaščem. Osnovni ploskvi sta skladna in vzporedna kroga. Plašč je kriva ploskev, ki povezuje oboda obeh krogov
- Če plašč razgrnemo v ravnino, dobimo pravokotnik. Pokončni krožni valj je rotacijsko simetričen glede na premico, ki jo imenujemo os valja.

ii. Narišite mrežo valja. (1 točka)

Odgovor:

- Mreža valja je sestavljena iz dveh krogov (osnovni ploskvi) in pravokotnika (plašč).
- Pravokotnik ima dolžino enako višini valja v in širino enako obsegu osnovnice $2\pi r$.

iii. Kaj je osni presek valja? (1 točka)

Odgovor:

- Osni presek valja je ravninski presek, ki poteka skozi os valja.
- Rez je pravokotnik, dimenzij višina valja v in premer osnovne ploskve $2r$.

iv. Navedite formuli za izračun površine in prostornine pokončnega valja. (2 točki)

Odgovor:

- Površina valja:

$$P = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$$

- Prostornina valja:

$$V = \pi r^2 v$$

v. Izrazite prostornino enakostraničnega valja s polmerom osnovne ploskve r. (1 točka)

Odgovor:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot (2r) = 2\pi r^3$$

kjer je višina valja enaka premeru osnovnice, torej $h = 2r$.

---

41 Piramida

i. Opišite pokončno piramido. (1 točka)

Odgovor:

- Pokončna piramida je piramida, katere vrh leži neposredno nad središčem osnovne ploskve.
- Vsi stranski robovi pokončne piramide so enako dolgi (a).
- Osnovna ploskev je lahko poljuben n-kotnik, stranske ploskve pa so trikotniki, ki se stikajo v vrhu.

ii. Kdaj je piramida enakoroba in kdaj pravilna? (2 točki)

Odgovor:

- Piramida je enakoroba, če so vsi njeni robovi enako dolgi, tako osnovni kot stranski.
- Piramida je pravilna, če ima za osnovno ploskev pravilni n-kotnik in so vsi stranski robovi enako dolgi.

iii. Zapišite formulo za plašč pravilne n-strane piramide z osnovnim robom a in višino stranske ploskve v_a. (1 točka)

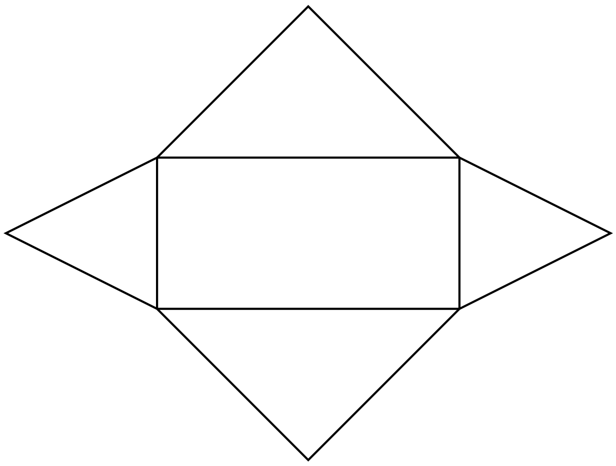
Odgovor:

- Plašč pravilne n-strane piramide je sestavljen iz n enakih enakokrakih trikotnikov.
- Ploščina enega trikotnika je $\frac{a \cdot v_a}{2}$.
- Ploščina plašča je torej $n \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{n \cdot a \cdot v_a}{2}$.

iv. Narišite mrežo piramide, ki ima osnovno ploskev pravokotnik s stranicama a in b in stranskim robom s. (1 točka)

Odgovor:

- Mreža piramide je sestavljena iz osnovne ploskve, ki je pravokotnik s stranicama a in b, ter štirih trikotnikov (stranske ploskve).
- Vsak trikotnik ima osnovnico a ali b in stranski rob s.
- Trikotne ploskve so paroma enakokrake, višina trikotne ploskve pa je višina stranske ploskve piramide.



Mreža piramide s pravokotno osnovo $a \times b$ in stranskimi robovi dolžine s

---

42 Stožec

i. Opišite pokončni stožec. (1 točka)

Odgovor:

- Pokončni stožec je geometrijsko telo, ki nastane, ko točko (vrh stožca) povežemo z vsemi točkami osnovne ploskve (krožnica), pri čemer je vrh pravokotno nad središčem osnovne ploskve.

ii. Narišite mrežo stožca. (1 točka)

Odgovor:

- Mreža stožca je sestavljena iz osnovne ploskve (krožnica) in odskega kroga, ki predstavlja plašč stožca.

iii. Opišite presek stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca. (1 točka)

Odgovor:

- Presek stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca, je enakokrak trikotnik, katerega osnovnica je premer osnovne ploskve, stranici pa sta stranska robova stožca.

iv. Navedite formuli za izračun površine in prostornine pokončnega stožca. (2 točki)
Odgovor:

- Površina pokončnega stožca je vsota ploščine osnovne ploskve in plašča:

$$P = \pi r^2 + \pi r s,$$

  kjer je r polmer osnovne ploskve in s poševna višina (stranska višina) stožca.

- Prostornina pokončnega stožca je:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

  kjer je v višina stožca.

v. Izrazite višino enakostraničnega stožca s polmerom osnovne ploskve r. (1 točka)
Odgovor:

- Višina enakostraničnega stožca je izražena kot

$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

  kjer je s dolžina poševne višine, ki je enaka stranskem robu enakostraničnega stožca. Pri enakostraničnem stožcu, kjer je osnovna ploskev krog in vsi robovi enaki, velja, da $s = 2r$, torej

$$v = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

---

43 Vekotrji

i. Kaj je vektor? (1 točka)
Odgovor:

- Vektor je usmerjen daljica, ki jo določata smer, velikost (dolžina) in orientacija. Z njim ponazorimo premik iz ene točke v drugo.

ii. Definirajte seštevanje vektorjev. (1 točka)
Odgovor:

- Seštevanje vektorjev pomeni, da začetku drugega vektorja prislonimo konec prvega, rezultat pa je vektor od začetka prvega do konca drugega vektorja. Pomembno je da ohranimo smer, dolžino in orientacijo. Ni nujno, da je seštevek dveh vektorjev vzporeden vektorjema $\vec{a}$ ali $\vec{b}$.

iii. Definirajte ničelni vektor in nasprotni vektor danega vektorja. (1 točka)
Odgovor:

- Ničelni vektor je vektor z dolžino 0 in nima določene smeri. Označimo ga z $\vec{0}$. Nasprotni vektor danega vektorja ima enako dolžino, a nasprotno smer.

iv. Definirajte odštevanje vektorjev. (1 točka)
Odgovor:

- Odštevanje vektorjev $\vec{a}-\vec{b}$ je enako seštevku vektorja $\vec{a}$ in nasprotnega vektorja $-\vec{b}$: $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

v. Povejte dve lastnosti seštevanja vektorjev. (2 točka)
Odgovor:

- **Komutativnost**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- **Asociativnost**: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

---

44 Vekotrji

i. Definirajte množenje vektorja s skalarjem. (1 točka)
Odgovor:

- Množenje vektorja s skalarjem pomeni, da vektor pomnožimo s številom, kar spremeni njegovo dolžino in lahko tudi smer, če je skalar negativen.
- **Primer:** Naj bo $\vec{a} = (4, 1, 2)$, in skalar $k = 2$

  Potem:
  $$k\vec{a} = (4k, 1k, 2k) = (8, 2, 4)$$

ii. Kaj je enotski vektor? (1 točka)
Odgovor:

- Enotski vektor je vektor, ki ima dolžino (normo) enako 1. Označuje le smer.

iii. Kakšna zveza velja med dvema neničelnima vzporednima vektorjema $\bar{a}$ in $\bar{b}$? (1 točka)
Odgovor:

- Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna, potem obstaja skalar $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, da velja $\vec{a} = k\vec{b}$.

iii. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s S označimo presečišče najdaljših diagonal. Med vektorji $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{SE}$ poiščite:

- vse vzporedne vektorje (1 točka)
- par nasprotnih vektorjev (1 točka)
- par nekolinearnih vektorjev (1 točka)

Odgovor:

- Vzporedni vektorji: $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$
- Nasprotna vektorja: $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{EF}$
- Nekolinearna vektorja: $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$

---

45 Vekotrji

i. Opišite pravokotni koordinatni sistem v prostoru $\mathbb{R}^3$. (1 točka)
Odgovor:

- Pravokotni koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ določajo tri med seboj pravokotne koordinatne osi: x (abcisna os), y (ordinatna os) in z (aplikatna os).
- Vsaka točka v prostoru je določena z urejeno trojico realnih števil (x, y, z).
- Izhodišče je točka, kjer se vse tri osi sekajo, označimo jo z $O(0, 0, 0)$.

ii. Definirajte standardno ortonormirano bazo v prostoru $\mathbb{R}^3$. (1 točka)
Odgovor:

- Standardna ortonormirana baza v $\mathbb{R}^3$ je množica treh med seboj pravokotnih enotskih vektorjev.
- Ta baza je: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

iii. Definirajte krajevni vektor dane točke v prostoru $\mathbb{R}^3$. (1 točka)
Odgovor:

- Krajevni vektor točke $A(a_1, a_2, a_3)$ je vektor, ki ima začetek v izhodišču $O(0, 0, 0)$ in konec v točki A.
- Označimo ga z $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ in ima komponente (a_1, a_2, a_3).

iv. Izrazite krajevni vektor r_{A} točke $A\,(a_1, a_2, a_3)$ kot linearno kombinacijo vektorjev standardne ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^3$. (1 točka)
Odgovor:

- Krajevni vektor $\vec{r}_A = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.
- To pomeni, da vektor izrazimo kot linearno kombinacijo enotskih vektorjev baze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

v. Naj bosta A in B točki v prostoru $\mathbb{R}^3$. Izrazite vektor $\overrightarrow{AB}$ s koordinatami točk A in B in odgovor utemejite. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo $A(a_1, a_2, a_3)$ in $B(b_1, b_2, b_3)$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ ima koordinate $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$.
- Utemeljitev: Vektor $\overrightarrow{AB}$ dobimo tako, da od krajevnega vektorja točke B odštejemo krajevni vektor točke A: $\vec{r}_B - \vec{r}_A$.

---

46 Skalarni produkt

i. Kako izračunamo skalarni produkt dveh vektorjev, če poznamo njuni dolžini in kot med njima? (1 točka)
Odgovor:

- Skalarni produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema.

ii. Naštejte dve lastnosti skalarnega produkta. (2 točki)
Odgovor:

- **Komutativnost**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- **Distributivnost glede na seštevanje**: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

iii. Kako s skalarnim produktom ugotovimo, ali sta dana vektorja pravokotna? Pokažite s primerom. (2 točka)
Odgovor:

- Dva vektorja sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Primer: naj bo $\vec{a} = (1, 2)$ in $\vec{b} = (2, -1)$. Potem je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$, torej sta vektorja pravokotna.

iv. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{a}$ in razložite dobljeno zvezo. (1 točka)
Odgovor:

- Skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, torej kvadrat dolžine vektorja.
- Primer: če je $\vec{a} = (3, 4)$, potem $\vec{a} \cdot \vec{a} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, kar je $|\vec{a}|^2 = 5^2$.

---

47 Skalarni produkt v standardni ortonormirani bazi

i. Kako izračunamo skalarni produkt dveh vektorjev v standardni ortonormirani bazi? (1 točka)

Odgovor:

- Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Potem je skalarni produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

ii. Kako izračunamo dolžino vektorja v standardni ortonormirani bazi? Odgovor utemeljite. (2 točki)

Odgovor:

- Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Dolžino vektorja izračunamo po formuli:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

- Utemeljitev: To sledi iz Pitagorovega izreka v prostoru, saj standardna ortonormirana baza pomeni, da so bazni vektorji med seboj pravokotni in enotni po dolžini.

iii. Kako izračunamo kot med vektorjema v standardni ortonormirani bazi? (1 točka)

Odgovor:

- Kot φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dobimo iz formule:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

- Nato kot izračunamo z inverzno funkcijo: $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$.

iv. Ponazorite izračun kota med vektorjema s primerom. (2 točki)

Odgovor:

- Naj bosta $\vec{a} = (1, 2, 2)$ in $\vec{b} = (2, 0, 1)$.
- Skalarni produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 + 0 + 2 = 4$.
- Dolžini: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- Kot:

$$\cos\varphi = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{5}}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 70.402^\circ.$$

---

48 Koordniatni sistem v ravnini

i. Opišite pravokotni koordinatni sistem v ravnini $\mathbb{R}^2$. (1 točka)
Odgovor:

- Pravokotni koordinatni sistem v ravnini $\mathbb{R}^2$ sestavljata dve med seboj pravokotni premici: abscisna os (x-os) in ordinatna os (y-os), ki se sekata v koordinatnem izhodišču.
- Vsaka točka v ravnini je določena z urejenim parom (x, y), kjer je x razdalja od ordinatne osi, y pa od abscisne osi.

ii. Izpeljite formulo za računanje razdalje med dvema točkama. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bosta dani točki $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$.
- Razdaljo med njima dobimo s Pitagorovim izrekom:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

iii. Povejte koordinati razpolovišča daljice z danima krajiščema. (1 točka)
Odgovor:

- Naj bosta krajišči $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$.
- Koordinati razpolovišča S sta:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

iv. Točko $T(x, y)$ prezrcalite čez koordinatno izhodišče. Povejte koordinati tako dobljene točke. (1 točka)
Odgovor:

- Prezrcaljena točka ima koordinati:

$$T' = (-x, -y).$$

v. Točko $T(x, y)$ prezrcalite čez ordinatno os. Povejte koordinati tako dobljene točke. (1 točka)
Odgovor:

- Prezrcaljena točka ima koordinati:

$$T' = (-x, y).$$

49 Funkcije

i. Definirajte pojem funkcije (preslikave) iz množice A v množico B. (1 točka)

Odgovor:

- Funkcija (ali preslikava) f iz množice A v množico B je pravilo, ki vsakemu elementu $a \in A$ priredi natanko en element $b \in B$, torej $f : A \to B$.

ii. Definirajte pojme definicijsko območje, zaloga vrednosti in graf funkcije. (3 točke)

Odgovor:

- **Definicijsko območje** funkcije je množica vseh tistih vrednosti x, za katere je funkcija $f(x)$ definirana.
- **Zaloga vrednosti** funkcije je množica vseh možnih vrednosti $f(x)$.
- **Graf funkcije** je množica točk v ravnini, ki imajo koordinate oblike $(x, f(x))$, kjer x teče po definicijskem območju.

iii. Narišite graf ali povejte predpis funkcije f, ki ima zalogo vrednosti $Z_f = (2, \infty)$. (1 točka)

Odgovor:

- Primer funkcije: $f(x) = \mathrm{e}^x + 2$.
- Zaloga vrednosti te funkcije je $Z_f = (2, \infty)$.

iv. Narišite graf ali povejte predpis funkcije g, ki ima definicijsko območje $D_s = (2, \infty)$. (1 točka)

Odgovor:

- Primer funkcije: $g(x) = \ln(x - 2)$.
- Definicijsko območje te funkcije je $D_s = (2, \infty)$.

---

50 Lastnosti funkcij

i. Kdaj je funkcija na intervalu narašajoča in kdaj padajoča? (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija f je na intervalu **naraščajoča**, če za vsak $x_1 < x_2$ v tem intervalu velja $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- Funkcija f je na intervalu **strogo naraščajoča**, če velja $f(x_1) < f(x_2)$ za vsak $x_1 < x_2$.
- Funkcija f je na intervalu **padajoča**, če za vsak $x_1 < x_2$ v tem intervalu velja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- Funkcija f je na intervalu **strogo padajoča**, če velja $f(x_1) > f(x_2)$ za vsak $x_1 < x_2$.

ii. Narišite graf ali povejte predpis funkcije, ki ni niti narašajoča niti padajoča. (1 točka)
Odgovor:

- Primer funkcije: $f(x) = \sin x$.
- Ta funkcija izmenično narašča in pada, zato ni niti naraščajoča niti padajoča v celoti. Naraščajoča: $(0, \frac{\pi}{2})$, padajoča $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

iii. Kdaj je funkcija f omejena? (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija f je **omejena navzgor**, če obstaja realno število M, da za vsak x v njenem definicijskem območju velja $f(x) \leqslant M$.
- Funkcija f je **omejena navzdol**, če obstaja realno število m, da za vsak x v njenem definicijskem območju velja $f(x) \geqslant m$.
- Funkcija f je **omejena**, če obstajata realni števili m in M, da za vsak x velja $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

iv. Narišite graf ali povejte predpis padajoče funkcije, ki je navzgor omejena, navzdol pa neomejena. (1 točka)
Odgovor:

- Primer funkcije: $f(x) = -\mathrm{e}^x$.
- Ta funkcija je strogo padajoča, njena največja vrednost je $f(x) \to 0$ (ko $x \to -\infty$), zato je navzgor omejena.
- Navzdol pa ni omejena, saj $f(x) \to -\infty$ (ko $x \to \infty$).

---

51 Lastnosti funkcij

i. Kdaj je funkcija f liha in kdaj soda? (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija f je **soda**, če za vsak x iz definicijskega območja velja: $f(-x) = f(x)$.
- Funkcija f je **liha**, če za vsak x iz definicijskega območja velja: $f(-x) = -f(x)$.

ii. Kako iz grafa funkcije f vidimo, ali je funkcija f soda oziroma liha? (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija f je **soda**, če je njen graf simetričen glede na ordinatno os (os y).
- Funkcija f je **liha**, če je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

iii. Naj bo funkcija f bijektivna. Kako poišemo predpis inverzne funkcije f^{-1} ? (1 točka)
Odgovor:

- Zapišemo enačbo $y = f(x)$.
- Zamenjamo vlogi x in y: $x = f(y)$.
- Izražamo y iz dobljene enačbe, tako dobimo $f^{-1}(x)$.

iv. Kaj velja za grafa funkcij f in f^{-1} ? (1 točka)
Odgovor:

- Graf funkcije f^{-1} je simetričen z grafom funkcije f glede na premico $y = x$ (simetrala lihih kvadrantov).

---

52 Linearna funkcija

i. Definirajte linearno funkcijo in povejte, kaj je njen graf. (2 točki)
Odgovor:

- Linearna funkcija je funkcija oblike $f(x) = kx + n$, kjer sta k in n realni števili ($k, n \in \mathbb{R}$).
- Graf linearne funkcije je premica.

ii. V odvisnosti od diferenčnega količnika k preučite naraščanje in padanje linearne funkcije f. (2 točki)
Odgovor:

- Če je $k > 0$, je funkcija **naraščajoča**.
- Če je $k < 0$, je funkcija **padajoča**.
- Če je $k = 0$, je funkcija **konstantna**.

iii. Za koliko se spremeni vrednost funkcije f, če vrednost neodvisne spremenljivke povečamo za 2? (1 točka)

Odgovor:

- Vrednost funkcije se poveča za $2k$, kjer je k smerni koeficient linearne funkcije.

iv. Kaj velja za grafa linearnih funkcij z enakima smernima koeficientoma? (1 točka)

Odgovor:

- Grafa sta par **vzporednih premic**.

---

53 Enačba premice

i. Zapišite eksplicitno obliko enačbe premice. Enačbe katerih premic lahko zapišemo v tej obliki? (2 točki)

Odgovor:

- Eksplicitna oblika enačbe premice je

$$y = kx + n$$

  kjer je k smerni koeficient in n začetna vrednost.

- V tej obliki lahko zapišemo enačbe vseh premic, ki **niso navpične** (to pomeni, da imajo določen k).

ii. Zapišite implicitno obliko enačbe premice. Enačbe katerih premic lahko zapišemo v tej obliki? (2 točki)

Odgovor:

- Implicitna oblika enačbe premice je

$$ax + by + c = 0$$

  kjer a, b in c pripadajo množici realnih števil.

- V tej obliki lahko zapišemo **enačbo vsake premice** v ravnini $\mathbb{R}^2$ (vključno z vodoravnimi in navpičnimi).

iii. Zapišite odsekovno obliko enačbe premice. Enačbe katerih premic lahko zapišemo v tej obliki? (2 točki)
Odgovor:

- Odsekovna oblika enačbe premice je

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

  kjer a in b sta realni števili različni od 0.

- V tej obliki lahko zapišemo enačbe vseh premic, ki **presekata koordinatni osi** (torej ne smejo biti vzporedne nobeni od obeh osi).

---

54 Premice v ravnini

i. Definirajte naklonski kot premice v ravnini ter razložite zvezo med naklonskim kotom in smernim koeficientom dane premice (če ta obstaja). (2 točki)
Odgovor:

- Naklonski kot φ premice je orientirani kot med pozitivno smerjo osi x in premico.
- Če premica ni navpična, ima smerni koeficient k in velja zveza $\tan(\varphi) = k$.

ii. Kako izračunamo kot med premicama, če poznamo njuna smerna koeficienta? (1 točka)
Odgovor:

- Če sta k_1 in k_2 smerna koeficienta, potem kot α med premicama izračunamo z:

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

iii. Kaj velja za smerna koeficienta vzporednih premic? (1 točka)
Odgovor:

- Premici sta vzporedni, če imata enaka smerna koeficienta: $k_1 = k_2$.

iv. Kaj velja za smerna koeficienta pravokotnih premic? (1 točka)
Odgovor:

- Premici sta pravokotni, če je produkt njunih smernih koeficientov $k_1 \cdot k_2 = -1$.

v. Kolikšen je smerni koeficient premice, ki je pravokotna na simetralo lihih kvadrantov? (1 točka)
Odgovor:

- Simetrala lihih kvadrantov ima enačbo $y = x$, torej $k = 1$.
- Premica, pravokotna nanjo, ima smerni koeficient $k = -1$.

---

55 Linearne neenačbe

i. Kaj je linearna neenačba z eno neznanko? (1 točka)
Odgovor:

- Linearna neenačba z eno neznanko je neenačba oblike $ax + b \square 0$, kjer je $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, x je neznanka, $\square$ pa je eden izmed simbolov $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.

ii. Na primeru opišite reševanje linearnih neenačb z eno neznanko. (2 točki)
Odgovor:

- Primer: $3x - 5 < 7$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &< 7 \\ 3x &< 12 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Rešitev je množica vseh realnih števil, manjših od 4: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

iii. Opišite vse možne množice rešitev poljubne linearne neenačbe z eno neznanko. (3 točke)
Odgovor:

- Rešitev linearne neenačbe z eno neznanko je lahko:
  - Interval neskončno mnogo rešitev (npr. $x > 2$, rešitev: $(2, \infty)$).
  - Množica realnih števil (npr. $2x + 3 > 2x - 1$, rešitev: $\mathbb{R}$).
  - Brez rešitve (npr. $3x + 1 < 3x - 2$, rešitev: $\varnothing$ oz. $\{\}$).

---

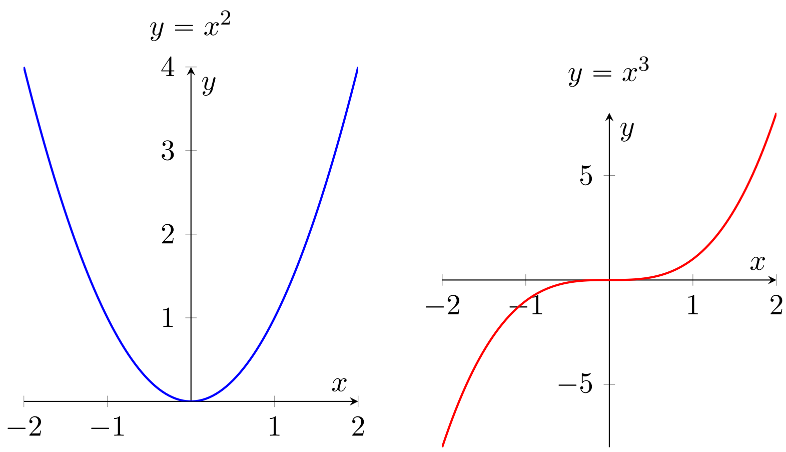
56 Potenčna funkcija

i. Definirajte potenčno funkcijo z naravnim eksponentom. (1 točka)
Odgovor:

- Potenčna funkcija z naravnim eksponentom je funkcija oblike $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

ii. Narišite grafa potenčnih funkcij, ki imata eksponenta 2 in 3. (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija $f(x) = x^2$: parabola, simetrična glede na ordinatno os (y), minimum v točki $(0, 0)$.
- Funkcija $g(x) = x^3$: krivulja, simetrična glede na izhodišče, naraščujoča od $(-\infty, \infty)$.



Grafi funkcij $y = x^2$ in $y = x^3$

iii. Navedite vsaj dve lastnosti potenčnih funkcij. (1 točka)
Odgovor:

- So zvezne in definirane za vsak n, kjer $n \in \mathbb{R}$.
- Za lih n je funkcija liha in strogo monotona, za sod n je soda in ima minimum v $(0, 0)$.

iv. Navedite osnovne razlike v lastnostih med potenčnimi funkcijami s sodim in potenčnimi funkcijami z lihim naravnim eksponentom. (2 točki)
Odgovor:

- Funkcija s sodim eksponentom (n sodo) je **soda** funkcija (simetrična glede na y-os), ima minimum v $(0, 0)$ in je nenegativna.
- Funkcija z lihim eksponentom (n liho) je **liha** funkcija (simetrična glede na izhodišče), njen graf poteka skozi vse kvadrante, je strogo rastoča.

57 Korenska funkcija

i. Za poljubno naravno število n definirajte korensko funkcijo f s predpisom $f(z) = \sqrt[n]{x}$. (2 točki)

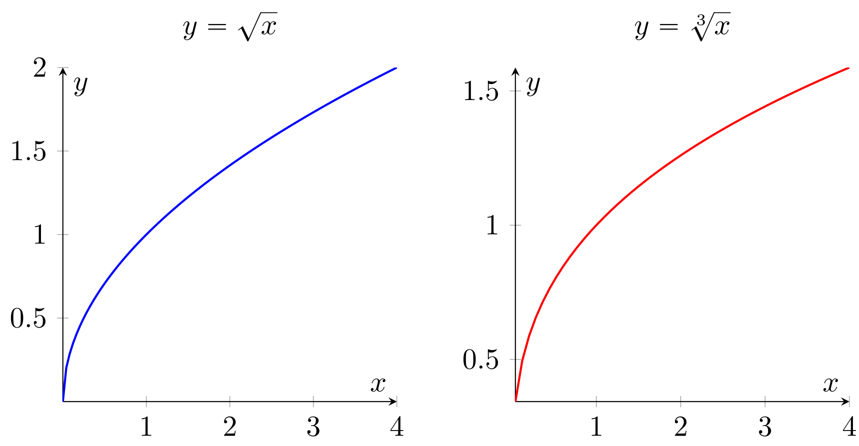
Odgovor:

- Korenska funkcija s predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x}$ za poljubno naravno število n je inverzna funkcija potenčne funkcije x^n.
- Če je n liho (npr. $n = 3$), potem je $f(x) = \sqrt[3]{x}$ definirana za vsa realna števila x, njen graf je zvezna in liha funkcija.
- Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je strogo naraščajoča.

ii. Narišite grafa korenskih funkcij za $n = 2$ in $n = 3$. (2 točki)

Odgovor:

- Opis grafov:
  - $f(x) = \sqrt{x}$: definiran za $x \geqslant 0$, graf leži v prvem kvadrantu, narašča, ni linearen.
  - $g(x) = \sqrt[3]{x}$: definiran za vsa realna x, graf poteka skozi izhodišče in je simetričen glede na izhodišče (liha funkcija).



Grafi korenskih funkcij $y = \sqrt{x}$ in $y = \sqrt[3]{x}$

iii. Navedite definicijski območji in zalogi vrednosti korenskih funkcij za $n = 2$ in $n = 3$. (2 točki)

Odgovor:

- **Za $n = 2$ (kvadratni koren):**
  - Definicijsko območje: $D_f = [0, \infty)$
  - Zaloga vrednosti: $Z_f = [0, \infty)$
- **Za $n = 3$ (kubični koren):**
  - Definicijsko območje: $D_g = \mathbb{R}$
  - Zaloga vrednosti: $Z_g = \mathbb{R}$

58 Kvadratna funkcija

i. Definirajte kvadratno funkcijo. (1 točka)
Odgovor:

- Kvadratna funkcija je funkcija oblike $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a \neq 0$ in a, b, c realna števila. Graf funkcije je parabola.

ii. Naštejte vsaj štiri lastnosti kvadratne funkcije in jih razložite. (4 točke)
Odgovor:

- **Graf**: graf kvadratne funkcije je *parabola.*
- **Odprtost**: če je $a > 0$, je parabola odprta navzgor; če je $a < 0$, je odprta navzdol.
- **Teme (vrh) parabole**: koordinati temena sta $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = -\frac{D}{4a}$.
- **Os simetrije**: premica $x = -\frac{b}{2a}$ je os simetrije grafa.
- **Zaloga vrednosti**: če je $a > 0$, je zaloga $[\min, \infty)$; če je $a < 0$, pa $(-\infty, \max]$.

iii. Povejte primer navzgor omejene kvadratne funkcije, katere graf seka ordinatno os v točki $N(0, 3)$. (1 točka)
Odgovor:

- Primer take funkcije je $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Ker je $a = -1 < 0$, je funkcija navzgor omejena. Za $x = 0$ je $f(0) = 3$, torej graf seka ordinatno os v točki $N(0, 3)$.

---

59 Teme grafa kvadratne funkcije

i. Kaj je teme grafa kvadratne funkcije? Kako ga izračunamo? (2 točki)
Odgovor:

- Teme grafa kvadratne funkcije je najvišja ali najnižja točka grafa (parabole), odvisno od tega, ali je parabola odprta navzgor ali navzdol.
- Koordinati temena funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ izračunamo po obrazcu:

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = -\frac{D}{4a}, \text{kjer je } D = b^2 - 4ac$$

ii. Povejte temensko obliko predpisa kvadratne funkcije. Kako je njen graf odvisen od vodilnega koeficienta ter koordinat temena? (3 točk3)
Odgovor:

- Temenska oblika kvadratne funkcije je:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

  kjer je (p, q) teme parabole.

- Parameter a določa:
  - smer odprtosti (če je $a > 0$, je parabola odprta navzgor, konveksna; če je $a < 0$, navzdol, konkavna),
  - širino parabole (večja kot je absolutna vrednost $|a|$ ožja je parabola).

- Koordinati (p, q) določata lego temena in s tem tudi lego celotne parabole v koordinatnem sistemu.

iii. Povejte primer navzgor omejene kvadratne funkcije, katere graf ima teme v prvem kvadrantu. (1 točka)
Odgovor:

- Primer take funkcije je:

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 3$$

- Graf ima teme v točki $(1, 3)$, ki leži v prvem kvadrantu, in ker je $a = -2 < 0$, je funkcija navzgor omejena.

---

60 Ničle kvadratne funkcije

i. Definirajte ničlo funkcije. (1 točka)
Odgovor:

- Ničla funkcije je vrednost spremenljivke x, pri kateri je vrednost funkcije enaka 0:

$$f(x) = 0$$

- To pomeni, da graf funkcije seka abcisno os (os x) v tej točki.

ii. Povejte ničelno obliko predpisa kvadratne funkcije. (1 točka)
Odgovor:

- Ničelna oblika kvadratne funkcije je:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- kjer sta x_1 in x_2 ničli funkcije.

iii. Razložite pomen diskriminante kvadratne funkcije pri iskanju njenih ničel. (3 točka)
Odgovor:

- Diskriminanta kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je:

$$D = b^2 - 4ac$$

- Pomen:
  - Če $D > 0$: funkcija ima dve različni realni ničli.
  - Če $D = 0$: funkcija ima eno (dvojno) realno ničlo.
  - Če $D < 0$: funkcija nima realnih ničel (ničli sta kompleksni).
- Diskriminanta nam torej pove, koliko realnih rešitev ima enačba $f(x) = 0$.

---

61 Kvadratna enačba

i. Kaj je kvadratna enačba? (1 točka)
Odgovor:

- Kvadratna enačba je enačba oblike:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

  kjer je $a \neq 0$, in $b, c \in \mathbb{R}$.

ii. Kako izračunamo rešitve kvadratne enačbe? (1 točka)
Odgovor:

- Rešitve kvadratne enačbe izračunamo s pomočjo naslednje formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  kjer je D diskriminanta, in $D = b^2 - 4ac$.

iii. Kako je z rešljivostjo kvadratne enačbe v množici realnih števil in kako v množici kompleksnih števil? (2 točki)
Odgovor:

- V množici realnih števil:
  - če $D > 0$: dve različni realni rešitvi,
  - če $D = 0$: ena dvojna realna rešitev,
  - če $D < 0$: ni realnih rešitev.
- V množici kompleksnih števil:
  - kvadratna enačba ima vedno dve rešitvi (lahko sta realni ali konjugirano kompleksni).

iv. Povejte in rešite primer kvadratne enačbe, ki ima dve konjugirano kompleksni rešitvi. (2 točki)
Odgovor:

- Primer enačbe:
$$x^2 + 4 = 0$$
- Rešitev:
$$x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$
- Rešitvi sta $x_1 = 2i$ in $x_2 = -2i$, to sta konjugirano kompleksni števili.

---

62 Kvadratna neenačba

i. Kaj je kvadratna neenačba? (1 točka)
Odgovor:

- Kvadratna neenačba je neenačba oblike:
$$ax^2 + bx + c \;\square\; 0,$$
  kjer je $a \neq 0$, in $b, c \in \mathbb{R}$, $\square$ pa eno izmed: $<, \leqslant, >, \geqslant$.

ii. Kako rešujemo kvadratno neenačbo? (1 točka)
Odgovor:

- Najprej rešimo pripadajočo kvadratno enačbo $ax^2 + bx + c = 0$ in določimo ničli.
- Nato s pomočjo parabole (grafa ali predznakov) razdelimo realno os v intervale.
- V vsakem intervalu preverimo predznak izraza $ax^2 + bx + c$ in izberemo tiste intervale, ki ustrezajo neenačbi.

iii. Kaj je množica rešitev poljubne kvadratne neenačbe? Povejte vse možnosti. (3 točke)

Odgovor:

- Če ima kvadratna funkcija dve različni realni ničli:
  - za $a > 0$: rešitev neenačbe < 0 je odprti interval med ničlama,
  - za $a < 0$: rešitev neenačbe > 0 je unija dveh odprtih intervalov zunaj ničel.
- Če ima funkcija eno dvojno ničlo:
  - za $\leqslant$ ali $\geqslant$: rešitev je množica, ki vsebuje samo to eno ničlo,
  - za $<$ ali $>$: ni rešitev.
- Če nima realnih ničel:
  - za $a > 0$: rešitev neenačbe > 0 je celotna realna os,
  - za $a < 0$: rešitev neenačbe < 0 je celotna realna os,
  - v ostalih primerih ni rešitev.

iv. Povejte primer kvadratne neenačbe, katere množica rešitev je interval $[1, 2]$. (1 točka)

Odgovor:

- Primer:
$$(x-1)(x-2) \leqslant 0$$
- To je enakovredno kvadratni neenačbi:
$$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$$
- Rešitev te neenačbe je interval $[1, 2]$.

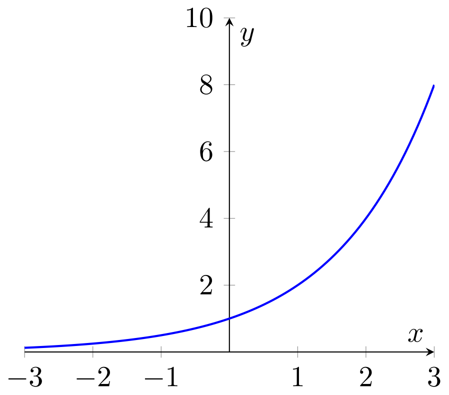
---

63 Eksponentna funkcija

i. Naj bo $a > 1$. Narišite graf funkcije s predpisom $f(x) = a^x$. (2 točki)
Odgovor:

- Graf funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 1$ je eksponentna krivulja, ki:
  - poteka skozi točko $(0, 1)$,
  - hitro narašča za $x > 0$,
  - se približuje osi x za $x \to -\infty$ (asimptota $y = 0$),
  - je strogo naraščajoča.

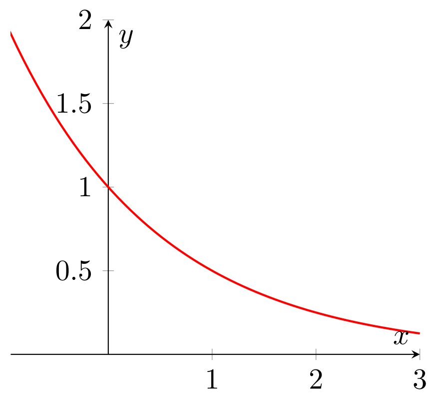
$f(x) = a^x$, $a = 2$



ii. Naj bo $0 < a < 1$. Narišite graf funkcije s predpisom $f(x) = a^x$. (2 točki)
Odgovor:

- Graf funkcije $f(x) = a^x$ za $0 < a < 1$ je eksponentna krivulja, ki:
  - poteka skozi točko $(0, 1)$,
  - hitro pada za $x > 0$,
  - se približuje osi x za $x \to \infty$ (asimptota $y = 0$),
  - je strogo padajoča.

$f(x) = a^x$, $a = 0.5$



iii. Povejte štiri lastnosti eksponentne funkcije. (2 točki)
Odgovor:

- Definicijsko območje je $\mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti je $(0, \infty)$.
- Graf poteka skozi točko $(0, 1)$.
- Je strogo monotona (narašča za $a > 1$, pada za $0 < a < 1$).

---

64 Logaritemska funkcija

i. Naj bo a pozitivno realno število, $a \neq 1$. Definirajte logaritemsko funkcijo z osnovo a. (1 točka)
Odgovor:

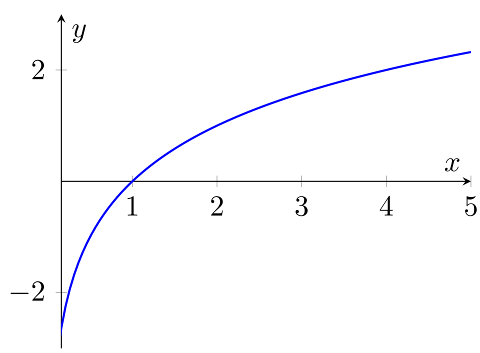
- Logaritemska funkcija z osnovo a je funkcija $f(x) = \log_a x$, kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$.
- Določa potenco, na katero moramo potencirati število a, da dobimo x, torej:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

ii. Naj bo $a > 1$. Narišite graf logaritemske funkcije z osnovo a. (2 točki)
Odgovor:

- Graf funkcije $f(x) = \log_a x$ za $a > 1$:
  - poteka skozi točko $(1, 0)$,
  - je strogo naraščajoč,
  - se približuje osi y (asimptota $x = 0$),
  - definiran je za $x > 0$.

$f(x) = \log_2 x$

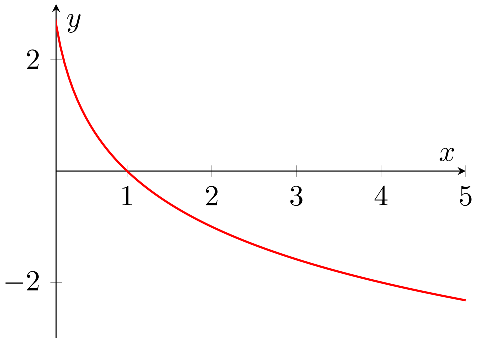


iii. Naj bo $0 < a < 1$. Narišite graf logaritemske funkcije z osnovo a. (2 točki)

Odgovor:

- Graf funkcije $f(x) = \log_a x$ za $0 < a < 1$:
  - poteka skozi točko $(1, 0)$,
  - je strogo padajoč,
  - se približuje osi y (asimptota $x = 0$),
  - definiran je za $x > 0$.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



iv. Povejte dve lastnosti logaritemske funkcije. (1 točka)

Odgovor:

- Definicijsko območje je $(0, \infty)$.
- Zaloga vrednosti je $\mathbb{R}$.

---

65 Računanje z logaritmi

i. Povejte definicijo logaritma $\log_e x$. (1 točka)

Odgovor:

- Logaritem z osnovo e (Eulerjevo število) je naravni logaritem: $\log_e x = \ln x$.
- To je potenca, na katero moramo potencirati število $e \approx 2{,}718$ (Eulerjevo število), da dobimo x.

ii. Povejte pravila za logaritem produkta, logaritem kvocienta in logaritem potence. (3 točke)

Odgovor:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (produkt)
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (kvocient)
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$ (potenca)

iii. Koliko je $\log_0 1, \log_0 a, e^{i\pi x}$ in $\log 10^x$? (2 točki)
Odgovor:

- $\log_0 1$ ni definiran, ker osnova logaritma ne sme biti 0.
- $\log_0 a$ prav tako ni definiran (enak razlog).
- $e^{i\pi x} = \cos(\pi x) + i \sin(\pi x)$ (Eulerjeva formula)
- $\log 10^x = x \cdot \log 10 = x$ (ker log pomeni $\log_{10}$)

---

66 Polinomi

i. Definirajte polinom (polinomsko funkcijo). Kaj so stopnja, vodilni koeficient in prosti člen polinoma? (2 točki)
Odgovor:

- Polinom je funkcija oblike $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kjer so $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- Stopnja polinoma je največji eksponent pri x z neničelnim koeficientom (n).
- Vodilni koeficient je koeficient ob najvišji potenci (a_n).
- Prosti člen je člen brez spremenljivke (a_0).

ii. Kako množimo polinome? Kakšna je stopnja produkta dveh polinomov? (2 točki)
Odgovor:

- Vsak člen prvega polinoma pomnožimo z vsakim členom drugega polinoma.
- Nato poenostavimo: združimo podobne člene.
- Stopnja produkta je vsota stopenj obeh polinomov.

iii. Povejte osnovni izrek o deljenju polinomov. (2 točki)
Odgovor:

- Za polinoma $f(x)$ in $g(x) \neq 0$ obstajata enolično določena polinoma $q(x)$ in $r(x)$, da velja:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

- pri čemer je $r(x)$ ničelni polinom ali pa ima **stopnjo manjšo od stopnje polinoma** $g(x)$.

---

67 Ničle polinomov

i. Največ koliko realnih ničel ima lahko polinom stopnje n ? (1 točka)
Odgovor:

- Polinom stopnje n ima lahko največ n realnih ničel.

ii. Polinom p stopnje n naj ima n paroma različnih ničel Kako lahko zapišemo predpis polinoma p, da bodo iz njega razvidne vse njegove ničle? (1 točka)
Odgovor:

- Polinom zapišemo kot: $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, kjer so $x_1, \ldots, x_n$ njegove ničle.

iii. Koliko realnih ničel ima lahko polinom tretje stopnje? Navedite vse možnosti. (2 točki)
Odgovor:

- Polinom tretje stopnje ima lahko:
  - eno realno ničlo (in dve kompleksni konjugirani),
  - tri realne ničle (vse različne ali nekatere enake).

iv. Povejte primer polinoma četrte stopnje z realnimi koeficienti, ki ima natanko dve različni realni ničli. (2 točki)
Odgovor:

- Primer: $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$
- Realni ničli sta $x = 1$ in $x = -2$.

---

68 Racionalna funkcija

i. Kako poiščemo ničle in pole racionalne funkcije? (2 točki)
Odgovor:

- Racionalna funkcija je oblike $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma.
- **Ničle funkcije**: rešimo enačbo $p(x) = 0$ in hkrati preverimo, da $q(x) \neq 0$.
- **Poli funkcije**: poiščemo vrednosti x, za katere velja $q(x) = 0$, a $p(x) \neq 0$.

ii. Naj bo x_0 ničla racionalne funkcije f. Razložite obnašanje funkcije f v dovolj majhni okolici ničle x_0. Navedite vse možnosti. (2 točki)

Odgovor:

- Če je x_0 ničla **sode** stopnje: funkcija ne spremeni predznaka pri prehodu skozi x_0 (graf se dotakne osi x).
- Če je x_0 ničla **lihe** stopnje: funkcija spremeni predznak (graf seka os x).
- V obeh primerih je $f(x_0) = 0$.

iii. Naj bo x_0 pol racionalne funkcije f. Razložite obnašanje funkcije f v dovolj majhni okolici pola x_0. Navedite vse možnosti. (2 točki)

Odgovor:

- Če ima pol x_0 **lihe** stopnje: funkcija ima predznak različne strani odvisno od lim $x \to x_0^{\pm}$.
- Če ima pol x_0 **sode** stopnje: funkcija se z obeh strani približuje isti neskončnosti ($+\infty$ ali $-\infty$).
- V vsakem primeru je $f(x)$ v okolici x_0 neskončno velika (navzgor ali navzdol), funkcija tam ni definirana.

---

69 Racionalna funkcija

i. Naj ima racionalna funkcija f vse ničle in pole na intervalu (a, b). Razložite obnašanje racionalne funkcije f izven intervala (a, b). Navedite vse možnosti. (3 točke)

Odgovor:

- Ker zunaj intervala (a, b) ni ničel in polov, je funkcija tam zvezna in definirana.
- Možnosti za obnašanje funkcije:
  - Lahko se približuje vodoravni asimptoti (če obstaja).
  - Lahko se približuje poševni asimptoti (če obstaja).
  - Lahko raste ali pada proti $\pm\infty$, če ni asimptote.
- Funkcija izven (a, b) nima prekinitev ali nedefiniranih točk.

ii. Kdaj ima graf racionalne funkcije vodoravno asimptoto? Kako izračunamo njeno enačbo? (2 točki)

Odgovor:

- Če sta n in m stopnji števca in imenovalca:
  - Če $n < m$: $y = 0$ je vodoravna asimptota.
  - Če $n = m$: $y = \frac{a_n}{b_m}$, kjer sta a_n, b_m vodilna koeficienta.
  - Če $n > m$: vodoravne asimptote ne obstajajo.

iii. Povejte primer racionalne funkcije, katere graf ima asimptoto z enačbo $y = 2$. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: $f(x) = \frac{6x^2+1}{3x^2-4}$
- V tem primeru sta stopnji enaki ($n = m = 2$) in $\frac{6}{3} = 2$.

---

70 Funkcija sinus

i. Definirajte funkcijo sinus. (1 točka)
Odgovor:

- Funkcija sinus je definirana kot $f(x) = \sin(x)$, kjer je x realno število, ki predstavlja kot v radianih.
- V pravokotnem trikotniku je sinus razmerje med dolžino nasprotne katete in dolžino hipotenuze.
- V enotskem krogu je $\sin(x)$ ordinata točke na krožnici, ki jo opiše kot x.

ii. Koliko je osnovna perioda funkcije sinus? Povejte vse ničle funkcije sinus. (2 točki)
Odgovor:

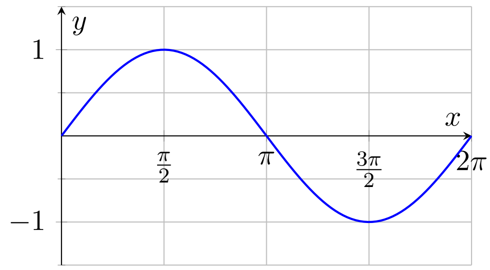
- Osnovna perioda funkcije sinus je 2π.
- Vse ničle so točke $x = k\pi$, kjer je k poljubno celo število ($k \in \mathbb{Z}$).

iii. V katerih točkah ima funkcija sinus maksimum in v katerih minimum? (2 točki)
Odgovor:

- Maksimumi so v točkah $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kjer je vrednost $\sin x = 1$.
- Minimumi so v točkah $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, kjer je vrednost $\sin x = -1$.
- k je poljubno celo število ($k \in \mathbb{Z}$).

iv. Narišite graf funkcije sinus. (1 točka)
Odgovor:

- Graf funkcije sinus je gladka, periodična valovita krivulja, ki se ponavlja vsakih 2π.
- Začne se v koordinatnem izhodišču $(0, 0)$, se povzpne do maksimuma 1 pri $\pi/2$, nato spusti do ničle pri π, nadaljuje do minimuma -1 pri $3\pi/2$ in se vrne do ničle pri 2π.



---

71 Funkcija kosinus

i. Definirajte funkcijo kosinus. (1 točka)
Odgovor:

- Funkcija kosinus je definirana kot $f(x) = \cos(x)$, kjer je x realno število, ki predstavlja kot v radianih.
- V pravokotnem trikotniku je kosinus razmerje med dolžino pripadajoče katete in dolžino hipotenuze.
- V enotskem krogu je $\cos(x)$ abscisa točke na krožnici, ki jo opiše kot x.

ii. Koliko je osnovna perioda funkcije kosinus? Povejte vse ničle funkcije kosinus. (2 točki)
Odgovor:

- Osnovna perioda funkcije kosinus je 2π.
- Vse ničle so točke $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kjer je k poljubno celo število.

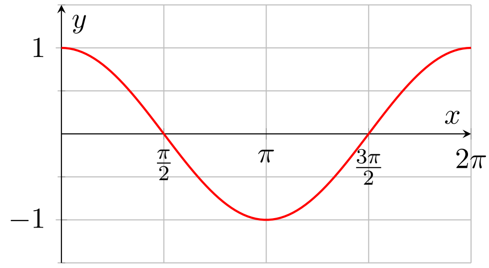
iii. V katerih točkah ima funkcija kosinus maksimum in v katerih minimum? (2 točki)
Odgovor:

- Maksimumi so v točkah $x = 2k\pi$, kjer je vrednost $\cos x = 1$.
- Minimumi so v točkah $x = \pi + 2k\pi$, kjer je vrednost $\cos x = -1$.
- k je poljubno celo število.

iv. Narišite graf funkcije kosinus. (1 točka)

Odgovor:

- Graf funkcije kosinus je gladka, periodična valovita krivulja s periodo 2π.
- Začne se v točki $(0, 1)$, pada do ničle pri $\frac{\pi}{2}$, doseže minimum -1 pri π, se vrne do ničle pri $\frac{3\pi}{2}$ in zaključuje cikel pri 2π na vrednosti 1.



---

72 Funkcija tangens

i. Definirajte funkcijo tangens. (1 točka)

Odgovor:

- Funkcija tangens je definirana kot $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- V pravokotnem trikotniku je tangens razmerje med nasprotno kateto in pripadajočo kateto.

ii. Povejte definicijsko območje funkcije tangens. (1 točka)

Odgovor:

- Tangens ni definiran tam, kjer je $\cos(x) = 0$.
- Definicijsko območje je množica vseh realnih števil razen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

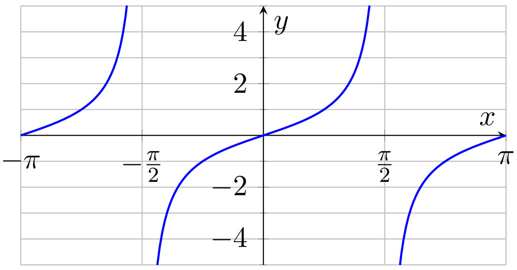
iii. Koliko je osnovna perioda funkcije tangens? Povejte vse ničle funkcije tangens. (2 točki)

Odgovor:

- Osnovna perioda funkcije tangens je π.
- Vse ničle so v točkah $x = k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

iv. Narišite graf funkcije tangens. (2 točki)
Odgovor:

- Graf funkcije tangens je sestavljen iz ponavljajočih se "vej" z navpičnimi asimptotami v točkah $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Vsaka veja se dviga iz $-\infty$ v $+\infty$ in prečka izhodišče (0,0).
- Graf nima maksimumov ali minimumov.



---

73 Kotne funkcije

i. Za vsako izmed kotnih funkcij sinus, kosinus in tangens povejte, ali je soda oziroma liha. (2 točki)
Odgovor:

- Sinus: liha funkcija.
- Kosinus: soda funkcija.
- Tangens: liha funkcija.

ii. Utemeljite odgovore iz prvega vprašanja. (2 točki)
Odgovor:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (definicija lihe funkcije)
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (definicija sode funkcije)
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ (definicija lihe funkcije, saj je tangens količnik lihe in sode funkcije: $\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$)

iii. Izrazite $\sin(200°)$ in $\cos(115°)$ z vrednostjo kotne funkcije ostrega kota. (2 točki)
Odgovor:

- $\sin(200°) = -\sin(20°)$, ker je $200° = 180° + 20°$ in sinus je v tretjem kvadrantu negativen.
- $\cos(115°) = -\cos(65°)$, ker je $115° = 180° - 65°$ in kosinus je v drugem kvadrantu negativen.

---

74 Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

i. Naj bo α ostri kot v danem pravokotnem trikotniku. Definirajte sinus, kosinus, tangens in kotangens kota α. (2 točki)

Odgovor:

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}}$

ii. Naj bo α točka v prostoru $\mathbb{R}^3$. Povejte osnovno zvezo med $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$ ter jo dokažite. (2 točki)

Odgovor: **Zveza:** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **Dokaz:** Naj bo α ostri kot v pravokotnem trikotniku. Označimo dolžino nasprotne katete z a, sosednje s b, in hipotenuze s c. Tedaj:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Po Pitagorovem izreku je $a^2 + b^2 = c^2$, zato:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

iii. Povejte še štiri zveze med kotnimi funkcijami v pravokotnem trikotniku. (2 točki)

Odgovor:

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

---

75 Kotne funkcije

i. Povejte adicijska izreka za funkciji sinus in kosinus. (2 točki)
Odgovor:

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

ii. Izrazite $\sin(2x)$ in $\cos(2x)$ s $\sin x$ in $\cos x$. (2 točki)
Odgovor:

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

iii. Rešite enačbo $\sin(2x) = \sin x$. (2 točki)
Odgovor:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin x \\ 2\sin x \cos x &= \sin x \\ \sin x(2\cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Enačba je izpolnjena, če je:

- $\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Skupna rešitev:

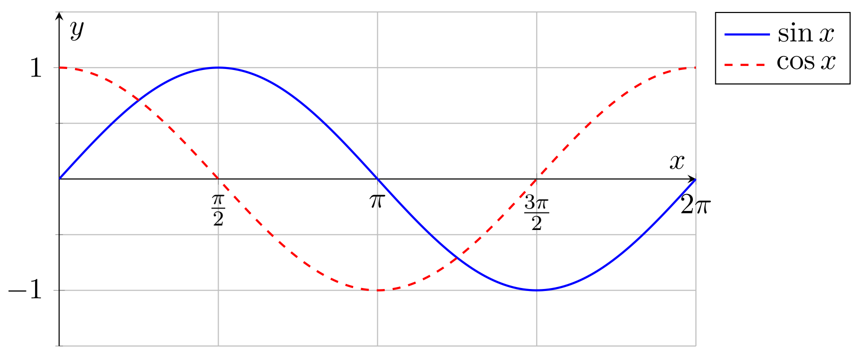
$$x = k\pi \quad \text{ali} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

---

76 Kotne funkcije

i. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij sinus in kosinus. (2 točki)
Odgovor:

- Graf funkcije $\sin x$ je valovanje, ki se začne v točki $(0,0)$, medtem ko se $\cos x$ začne v točki $(0,1)$. Oba grafa imata osnovno periodo 2π, amplitudo 1, in potekata med -1 in 1.



ii. Povejte vsaj dve lastnosti funkcij, ki sta skupni funkcijama sinus in kosinus. (1 točka)

Odgovor:

- Obe funkciji sta periodični z osnovno periodo 2π.
- Obe funkciji sta omejeni z vrednostmi med -1 in 1.

iii. Povejte vsaj dve lastnosti funkcij, v katerih se funkciji sinus in kosinus razlikujeta. (1 točka)

Odgovor:

- Funkcija $\sin x$ je liha, $\cos x$ pa je soda.
- $\sin x$ ima ničlo pri $x = 0$, $\cos x$ pa ima tam maksimum.

iv. Izračunajte vsa presečišča grafov funkcij sinus in kosinus. (2 točki)

Odgovor:

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos x \\ \tan x &= 1 \\ x &= \tfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Presečišča: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej točke:

$$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right)$$

---

77 Krožnica

i. Povejte geometrijsko definicijo krožnice. (1 točka)

Odgovor:

- Krožnica je množica vseh točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke, imenovane središče krožnice (S).

ii. Povejte in izpeljite enačbo krožnice s polmerom r in s središčem v koordinatnem izhodišču. (2 točki)

Odgovor:

- Naj bo $S(0,0)$ središče krožnice in $T(x,y)$ poljubna točka na krožnici.
- Razdalja med S in T mora biti enaka r: $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$.
- Kvadriramo: $x^2 + y^2 = r^2$.
- To je enačba krožnice s središčem v izhodišču in polmerom r.

iii. Povejte enačbo krožnice s polmerom r in s središčem v točki $S(p, q)$. (1 točka)
Odgovor:

- Enačba krožnice s središčem $S(p, q)$ in polmerom r je: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

iv. Izpeljite zvezo med realnima številoma a in b, da bo enačba $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 4 = 0$ predstavljala krožnico. (2 točka)
Odgovor:

- Preoblikujemo enačbo z dopolnjevanjem kvadratov:
- $x^2 + 2ax + y^2 + 2by + 4 = 0$
- $(x + a)^2 - a^2 + (y + b)^2 - b^2 + 4 = 0$
- $(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - 4$
- To je enačba krožnice, če je desna stran pozitivna: $a^2 + b^2 - 4 > 0$
- Torej mora veljati: $a^2 + b^2 > 4$

---

78 Elipsa

i. Povejte geometrijsko definicijo elipse. (2 točki)
Odgovor:

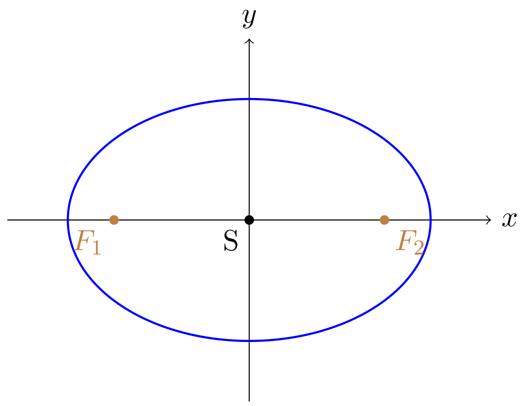
- Elipsa je množica vseh točk v ravnini, za katere je vsota razdalj do dveh danih točk (gorišč) stalna.
- Gorišči elipse imenujemo točki F_1 in F_2, stalna vsota razdalj pa je enaka dolžini velike osi.

ii. Povejte enačbo elipse s središčem v koordinatnem izhodišču in enačbo elipse s središčem v točki $S(p, q)$. V obeh primerih naj bosta osi elipse vzporedni koordinatnima osema. (2 točki)
Odgovor:

- Središče v izhodišču $(0, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
kjer je a dolžina velike osi, b pa dolžina male osi.
- Središče v točki $S(p, q)$:
$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$$

iii. Povejte primer enačbe elipse s središčem v koordinatnem izhodišču in jo narišite. Izračunajte tudi njeni gorišči. (2 točki)
Odgovor:

- Primer enačbe: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- To je elipsa s veliko osjo $a = 3$ in malo osjo $b = 2$.
- Razdalja od središča do gorišč je $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$
- Gorišči sta: $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ in $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$



---

79 Hiperbola

i. Povejte geometrijsko definicijo hiperbole. (2 točki)
Odgovor:

- Hiperbola je množica vseh točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do dveh danih točk (gorišč) stalna.
- Gorišči hiperbole imenujemo točki F_1 in F_2, ta stalna razlika pa je enaka dolžini velike osi.

ii. Povejte enačbo hiperbole s središčem v koordinatnem izhodišču, katere osi ležita na koordinatnih oseh. Kako izračunamo enačbi njenih asimptot? (2 točki)

Odgovor:

- Enačba hiperbole z vodoravno osjo: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- Enačba hiperbole z navpično osjo: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$
- Enačbi asimptot hiperbole z vodoravno osjo:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

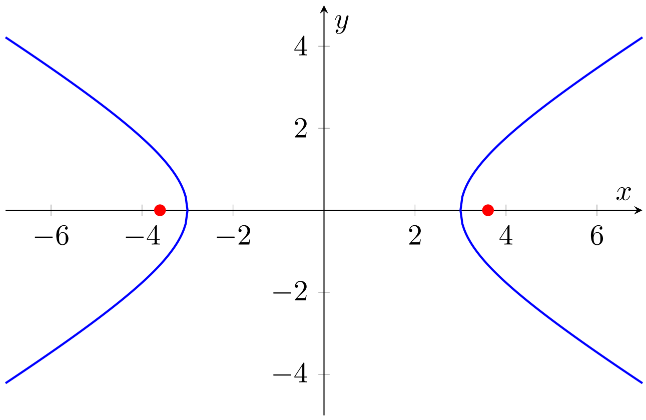
- Enačbi asimptot hiperbole z navpično osjo:

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

iii. Povejte primer enačbe hiperbole s središčem v koordinatnem izhodišču in jo narišite. Izračunajte tudí njeni gorišči. (2 točki)

Odgovor:

- Primer enačbe: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
- To je hiperbola z vodoravno osjo, kjer je $a = 3$ in $b = 2$
- Razdalja od središča do gorišč: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
- Gorišči sta: $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$ in $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$



---

80 Parabola

i. Povejte geometrijsko definicijo parabole. (2 točki)

Odgovor:

- Parabola je množica vseh točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke (gorišča) in dane premice (vodnice).

ii. Povejte enačbo parabole s temenom v koordinatnem izhodišču in z goriščem na abscisni osi. Kako izračunamo gorišče in enačbo premice vodnice te parabole? (3 točke)

Odgovor:

- Enačba parabole z osjo simetrije vzporedno z x-osjo: $y^2 = 4px$
- Gorišče ima koordinati: $F = (p, 0)$
- Premica vodnica ima enačbo: $x = -p$
- Parameter p določa razdaljo od temena do gorišča

iii. Povejte primer enačbe parabole s temenom v koordinatnem izhodišču in z goriščem na ordinatni osi. (1 točka)

Odgovor:

- Primer: $x^2 = 8y$
- To je parabola z osjo simetrije vzporedno z y-osjo in $p = 2$
- Gorišče ima koordinati: $F = (0, 2)$

---

81 Zaporedja

i. Definirajte zaporedje. Kaj je graf zaporedja? (2 točki)

Odgovor:

- Zaporedje je funkcija, ki vsakemu naravnemu številu n "priredi" realno število a_n, tj. $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Graf zaporedja je množica točk v ravnini s koordinatami (n, a_n), kjer je $n \in \mathbb{N}$

ii. Kdaj je zaporedje naraščajoče? (1 točka)

Odgovor:

- Zaporedje je naraščajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} > a_n$

iii. Predstavite primer padajočega zaporedja. (1 točka)

Odgovor:

- Primer: $a_n = \frac{1}{n}$
- Velja $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$

iv. Kdaj je zaporedje omejeno? (1 točka)

Odgovor:

- Zaporedje je omejeno, če obstajata realni števili m in M, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $m \leqslant a_n \leqslant M$

v. Predstavite primer zaporedja, ki je navzgor omejeno, navzdol pa neomejeno. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: $a_n = -n$
- Za vse n velja $a_n \leqslant -1$, torej je zaporedje navzgor omejeno (npr. z $M = -1$), navzdol pa ni omejeno

---

82 Aritmetično zaporedje

i. Definirajte aritmetično zaporedje in povejte njegov splošni člen. (2 točki)
Odgovor:

- Aritmetično zaporedje je zaporedje, kjer je razlika med zaporednima členoma vedno enaka, torej $a_{n+1} = a_n + d$
- Splošni člen aritmetičnega zaporedja je: $a_n = a_1 + (n-1)d$

ii. Predstavite primer padajočega aritmetičnega zaporedja. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: $a_n = 10 - 2(n-1)$, torej zaporedje $10, 8, 6, 4, \ldots$
- Diferenca je negativna ($d = -2$), zato zaporedje pada

iii. Kako izračunamo vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja, če poznamo prvi člen in diferenco? (1 točka)
Odgovor:

- Vsoto izračunamo po formuli: $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

iv. Pokažite, da za poljubne tri zaporedne člene a, b in c aritmetičnega zaporedja velja, da je srednji člen b enak aritmetični sredini sosednjih členov a in c. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bodo a, b, c trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, in d diferenca. Torej velja:
- $b = a + d, \quad c = a + 2d$
- Potem je $\frac{a+c}{2} = \frac{a + (a+2d)}{2} = \frac{2a+2d}{2} = a + d = b$
- Torej velja: $b = \frac{a+c}{2}$

---

83 Geometrijsko zaporedje

i. Definirajte geometrijsko zaporedje in povejte njegov splošni člen. (1 točka)

Odgovor:

- Geometrijsko zaporedje je zaporedje, kjer je razmerje med zaporednima členoma vedno enako, torej $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- Splošni člen geometrijskega zaporedja je: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

ii. Predstavite primer padajočega geometrijskega zaporedja. (1 točka)

Odgovor:

- Primer: $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, torej zaporedje $16, 8, 4, 2, \ldots$
- Količnik je $q = \frac{1}{2}$, zato zaporedje pada

iii. Kako izračunamo vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja, če poznamo prvi člen in količnik? Kako izračunamo to vsoto, če je količnik enak 1? (2 točka)

Odgovor:

- Če $q \neq 1$: $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- Če $q = 1$: $S_n = n \cdot a_1$

iv. Pokažite, da za poljubne tri zaporedne člene a, b in c geometrijskega zaporedja s pozitivnimi členi velja, da je srednji člen b enak geometrijski sredini sosednjih členov a in c. (2 točka)

Odgovor:

- Naj bo $b = a \cdot q, \quad c = a \cdot q^2, \quad$ in q količnik te vrste
- Potem je $\sqrt{a \cdot c} = \sqrt{a \cdot aq^2} = \sqrt{a^2 q^2} = aq = b$
- Torej velja: $b = \sqrt{a \cdot c}$

---

84 Geometrijska vrsta

i. Definiraj geometrijsko vrsto. Kako ugotovimo, ali je geometrijska vrsta konvergentna? (2 točki)

Odgovor:

- Geometrijska vrsta je vsota členov geometrijskega zaporedja: $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$
- Vrsta je konvergentna, če je absolutna vrednost količnika $|q| < 1$

ii. Predstavite primer konvergentne in primer divergentne geometrijske vrste. (2 točki)
Odgovor:

- Konvergentna: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \quad (q = \frac{1}{2})$
- Divergentna: $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \quad (q = 2)$

iii. Kako izračunamo vsoto konvergentne geometrijske vrste, če poznamo prvi člen in količnik? (1 točka)
Odgovor:

- Če $|q| < 1$, potem je vsota: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

iv. Izračunajte $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ (1 točka)
Odgovor:

- Gre za konvergentno geometrijsko vrsto s $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$
- Vsota je: $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

---

85 Obrestni račun

i. Opišite osnovne pojme obrestno obrestnega računa: glavnica, obresti, obrestovalni faktor, kapitalizacijsko obdobje. (4 točke)
Odgovor:

- **Glavnica** (G_0): začetni vložek oziroma znesek denarja, ki ga vložimo na račun.
- **Obresti**: znesek, ki ga banka pripiše na glavnico kot nagrado za uporabo denarja.
- **Obrestovalni faktor** (q): faktor rasti kapitala v enem kapitalizacijskem obdobju, izražen kot $q = 1 + \frac{p}{100}$, kjer je p letna obrestna mera v odstotkih.
- **Kapitalizacijsko obdobje**: časovni interval, po katerem se obresti pripišejo glavnici in se obrestujejo v naslednjih obdobjih (pri letnem pripisu je to eno leto).

ii. Kolikšen je privarčevani znesek po n letih, če v banko vložimo glavnico G_0 po letni obrestni meri $p\%$? Banka uporablja obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. (2 točki)
Odgovor:

- Privarčevani znesek po n letih je:

$$G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = G_0 \cdot q^n,$$

  kjer je $q = 1 + \frac{p}{100}$ obrestovalni faktor.

---

86 Odvod

i. Definirajte odvod funkcije v dani točki in opišite njegov geometrijski pomen. (2 točka)
Odgovor:

- Odvod predstavlja spremembo funkcije pri spremembi njenega argumenta. Opisuje najboljšo linearno aproksimacijo funkcije v bližini vrednosti funkcije z nekim argumentom.
- Odvod funkcije f v točki x_0 je diferenčni količnik:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

  če ta limit obstaja.
- Geometrijski pomen: odvod v točki x_0 predstavlja naklon tangente na graf funkcije f v tej točki.

ii. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0. Kako izračunamo enačbo tangente na graf funkcije f v točki x_0 ? (2 točki)
Odgovor:

- Enačba tangente je:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

iii. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0 in naj bo $f'(x_0) \neq 0$. Kako izračunamo enačbo normale na graf funkcije f v točki x_0 ? (2 točki)
Odgovor:

- Normalna je pravokotna na tangento, zato je njen naklon $m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$.
- Enačba normale je:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

---

87 Lokalni ekstremi

i. Definirajte lokalni maksimum in lokalni minimum funkcije. (2 točki)
Odgovor:

- Lokalni maksimum funkcije f v točki x_0 je tak, da obstaja okolica I točke x_0, kjer za vsak $x \in I$ velja:

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

- Lokalni minimum funkcije f v točki x_0 je tak, da obstaja okolica I točke x_0, kjer za vsak $x \in I$ velja:

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

ii. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in x_0 njena stacionarna točka. Kako s pomočjo odvoda ugotovimo, ali ima funkcija v točki x_0 lokalni ekstrem? (2 točki)

Odgovor:

- x_0 je stacionarna točka, če je $f'(x_0) = 0$.
- Če je drugi odvod $f''(x_0) > 0$, ima funkcija v x_0 lokalni minimum.
- Če je drugi odvod $f''(x_0) < 0$, ima funkcija v x_0 lokalni maksimum.
- Če je $f''(x_0) = 0$, test je nezanesljiv in uporabimo test spremembe znaka odvoda, kjer:
  - Analiziramo spremembo znaka odvoda $f'(x_0)$ okoli točke x_0.
  - Če $f'(x_0)$ prehaja iz $+$ v $-$, je lokalni maksimum.
  - Če $f'(x_0)$ prehaja iz $-$ v $+$ znak, je lokalni minimum.
  - Če se znak ne spremeni, ni lokalnega ekstrema.

iii. Povejte primer funkcije, ki ima lokalni maksimum $M = 3$ v točki $x_0 = 2$. (1 točka)

Odgovor:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3.$$

iv. Povejte primer funkcije, ki nima lokalnih ekstremov. (1 točka)

Odgovor:

$$f(x) = x^3.$$

Funkcija nima lokalnih maksimumov ali minimumov.

---

88 Odvod

i. Naj bodo a, b, c, k in r poljubna realna števila. Izračunajte odvode funkcij: (6 točk)

$f(x) = x^r$ **(1 točka)**

$g(x) = ax^2 + bx + c$ **(1 točka)**

$h(x) = \sin(ax) + b\cos x$ **(1 točka)**

$t(x) = \tan x$ **(1 točka)**

$s(x) = \mathrm{e}^{ix}$ **(1 točka)**

$a(x) = \ln(\pi x + \pi^2)$ **(1 točka)**

Odgovor:

$f(x) = x^r \implies f'(x) = rx^{r-1}$

$g(x) = ax^2 + bx + c \implies g'(x) = 2ax + b$

$h(x) = \sin(ax) + b\cos x \implies h'(x) = a\cos(ax) - b\sin x$

$t(x) = \tan x \implies t'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$s(x) = \mathrm{e}^{ix} \implies s'(x) = i\mathrm{e}^{ix}$

$a(x) = \ln(\pi x + \pi^2) \implies a'(x) = \frac{\pi}{\pi x + \pi^2} = \frac{1}{x+\pi}$

---

89 Odvod

i. Naj graf odvedljive funkcije f seka abcisno os v točki $T(x_0, 0)$. Povejte definicijo kota α med grafom funkcije f in abcisno osjo v točki T. Kako izračunamo kot α, če poznamo $f'(x_0)$? (2 točki)

Odgovor:

- Kot α je kot med tangento na graf funkcije f v točki T in abcisno osjo (osjo x).
- Če je $f'(x_0)$ odvod v točki x_0, potem velja:

$$\tan(\alpha) = f'(x_0) \implies \alpha = \arctan\big(f'(x_0)\big).$$

ii. Naj se grafa odvedljivih funkcij f in g sekata v točki $T(x_0, y_0)$. Povejte definicijo kota ϕ med grafoma funkcij f in g v točki T. Kako izračunamo kot ϕ, če poznamo $f'(x_0)$ in $g'(x_0)$? Kdaj sta grafa pravokotna? (3 točki)

Odgovor:

- Kot ϕ je kot med tangentama na grafa funkcij f in g v točki T.
- Izračunamo ga po formuli:

$$\tan(\phi) = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|.$$

- Grafa sta pravokotna, če je produkt njunih odvodov:

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1.$$

iii. Povejte primer odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere graf seka abcisno os v točki $T(1, 0)$ pod kotom $45°$. (1 točka)

Odgovor:

$$f(x) = (x - 1).$$

- Graf seka abcisno os v točki $T(1, 0)$, saj $f(1) = 0$.
- Odvod je $f'(x) = 1$, torej kot med grafom in abcisno osjo je $\alpha = \arctan(1) = 45°$.

---

90 Nedoločeni integral

i. Definirajte nedoločeni integral funkcije. (2 točki)

Odgovor:

- Nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je množica vseh funkcij $F(x)$, katerih odvod je $f(x)$, torej

$$F'(x) = f(x).$$

- Zapišemo ga kot

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kjer je C poljuben konstanta (konstanta integracije).

ii. Povejte pravili za integriranje vsote funkcij in za integriranje produkta funkcije s konstanto. (2 točki)
Odgovor:

- Integral vsote funkcij je vsota integralov:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

- Integral produkta funkcije s konstanto je konstanta krat integral funkcije:

$$\int c \cdot f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx,$$

  kjer je c konstanta.

iii. Izberite primera dveh funkcij in izračunajte nedoločeni integral vsote teh dveh funkcij. (2 točki)
Odgovor:

- Izberemo funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$.
- Izračun integral vsote:

$$\int (x^2 + \sin x)\, dx = \int x^2\, dx + \int \sin x\, dx.$$

- Integrali posameznih funkcij so:

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C_2.$$

- Skupaj:

$$\int (x^2 + \sin x)\, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C,$$

  kjer je $C = C_1 + C_2$ poljubna konstanta.

---

91 Nedoločeni integral

i. Naj bodo a, b, c, k in r poljubna realna števila. Izračunajte odvode funkcij: (6 točk)

$f(x) = x^r$ **(1 točka)**

$g(x) = ax^2 + bx + c$ **(1 točka)**

$h(x) = \sin(ax) + b\cos x$ **(1 točka)**

$t(x) = \tan x$ **(1 točka)**

$s(x) = \mathrm{e}^{ix}$ **(1 točka)**

$a(x) = \ln(\pi x + \pi^2)$ **(1 točka)**

Odgovor:

$f'(x) = rx^{r-1}$

$g'(x) = 2ax + b$

$h'(x) = a\cos(ax) - b\sin x$

$t'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$s'(x) = i\,\mathrm{e}^{ix}$

$a'(x) = \frac{\pi}{\pi x + \pi^2}$

---

92 Določeni integral

i. Skicirajte krivočrtni lik, ki ga na intervalu $[a, b]$ omejujejo graf pozitivne zvezne funkcije f, abscisna os in premici $x = a$ in $x = b$. Kako izračunamo ploscino tega krivočrtnega lika? (2 točki)

Odgovor:

- Ploščino krivočrtnega lika izračunamo z določenim integralom:

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Ta integral predstavlja ploščino med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$, če je $f(x) \geqslant 0$ za vse $x \in [a, b]$.

ii. Naj se grafa zveznih funkcij f in g sekata pri $x = a$ in $x = b$. Kako z določenim integralom izračunamo ploscino območja, ki ga na intervalu $[a, b]$ omejujeta grafa funkcij f in g ? (2 točki)

Odgovor:

- Če je $f(x) \geqslant g(x)$ za vse $x \in [a, b]$, je ploščina med grafoma dana z izrazom:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

- To integralno razliko uporabimo, ker $f(x) - g(x)$ predstavlja navpično razdaljo med grafoma.

iii. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liha zvezna funkcija in a pozitivno število. Koliko je $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$? Ponazorite s primerom. (2 točki)

Odgovor:

- Če je f liha funkcija, potem velja $f(-x) = -f(x)$. Zaradi simetrije glede na izhodišče velja:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

- **Primer:** Funkcija $f(x) = x^3$ je liha, ker velja $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Integral:

$$\int_{-2}^{2} x^3, dx = 0$$

---

93 Določeni integral

i. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pojasnite geometrijski pomen določenega integrala funkcije f na intervalu $[a, b]$. (1 točka)

Odgovor:

- Določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$ predstavlja ploščino med grafom funkcije f, abscisno osjo in premicama $x = a$ in $x = b$.
- Če je funkcija pozitivna na $[a, b]$, je vrednost integrala enaka ploščini tega območja.

ii. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in a, b in c taka realna števila, da je $a < b < c$. Izrazite vsoto $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ z enim določenim integralom. (1 točka)

Odgovor:

- Uporabimo lastnost $\int_c^b f(x)\, dx = -\int_b^c f(x)\, dx$, zato:

$$\int_c^b f(x)\, dx + \int_0^b f(x)\, dx = -\int_b^c f(x)\, dx + \int_0^b f(x)\, dx = \int_0^c f(x)\, dx$$

iii. Povejte zvezo med določenim in nedoločenim integralom (Newton-Leibnizeva formula). (2 točki)
Odgovor:

- Če je F nedoločeni integral funkcije f (torej $F'(x) = f(x)$), potem velja:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Ta zveza omogoča izračun določenega integrala s pomočjo primitivne funkcije.

iv. S primerom ponazorite zvezo med določenim in nedoločenim integralom. (2 točki)
Odgovor:

- Naj bo $f(x) = x^2$. Primitivna funkcija je $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
- Uporabimo Newton-Leibnizovo formulo:

$$\int_1^2 x^2\,dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{7}{3}$$

- To pomeni, da je ploščina pod grafom funkcije $f(x) = x^2$ od $x = 1$ do $x = 2$ enaka $\frac{7}{3}$.

---

94 Kombinatorika

i. Povejte osnovni izrek kombinatorike. (1 točka)
Odgovor:

- Če neko opravilo sestavlja k zaporednih korakov, pri čemer lahko prvi korak izvedemo na n_1 načinov, drugi na n_2 načinov, ..., k-ti korak pa na n_k načinov, potem lahko celotno opravilo izvedemo na $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ načinov.

ii. Uporabo osnovnega izreka kombinatorike razložite na primeru. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Učitelj izbira geslo, ki je sestavljeno iz 1 črke in nato 1 številke. Koliko različnih gesel lahko sestavi?

$$\textbf{Število gesel} = 25 \cdot 10 = 250$$

iii. Povejte pravilo vsote. (1 točka)
Odgovor:

- Če lahko neko opravilo izvedemo na n načinov ali na m načinov (in se ti načini ne prekrivajo), potem lahko opravilo izvedemo na $n + m$ načinov.

iv. Uporabo pravila vsote razložite na primeru. (1 točka)
Odgovor:

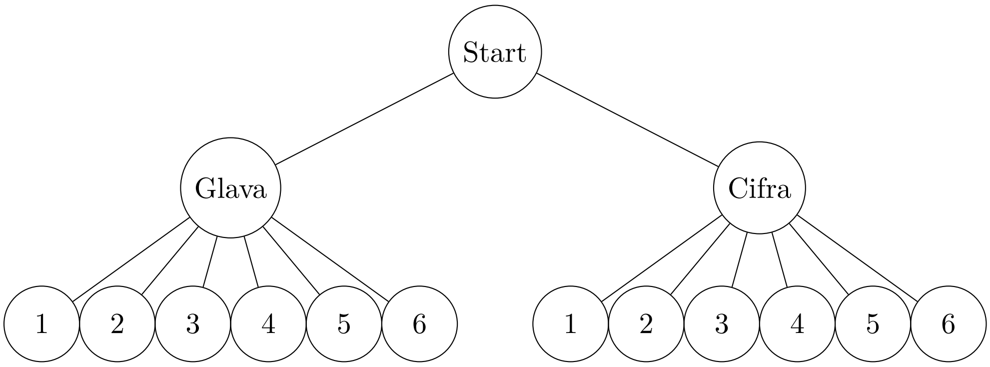
- Primer: Učitelj ima na voljo 3 knjige iz matematike in 5 knjig iz fizike. Na mizo želi postaviti eno knjigo. Na koliko načinov jo lahko izbere?
- Skupno število izbir: $3 + 5 = 8$ možnosti.

v. Kaj je kombinatorično drevo? (1 točka)
Odgovor:

- Kombinatorično drevo je prikaz (shema) vseh možnih zaporedij odločitev ali izbir v nekem postopku.
- Vsaka veja predstavlja eno možno izbiro, vsak nivo pa en korak postopka.

vi. Prikažite primer kombinatoričnega drevesa. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Met kovanca in nato met kocke.



---

95 Permutacije

i. Kaj so permutacije brez ponavljanja in koliko jih je? (2 točki)
Odgovor:

- Permutacije brez ponavljanja so razporeditve vseh elementov množice, kjer noben element ni ponovljen.
- Če imamo n različnih elementov, je število takšnih permutacij enako $n!$ („n faktorsko").

ii. Povejte primer permutacije brez ponavljanja. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Permutacije množice $\{1, 2, 3\}$ so npr. 123, 132, 213, 231, 312, 321.

iii. Kaj so permutacije s ponavljanjem in koliko jih je? (2 točki)
Odgovor:

- Permutacije s ponavljanjem nastanejo, kadar imamo več enakih elementov.
- Če imamo n elementov, med katerimi se k_1 elementov ponavlja enako, k_2 drugače, ..., potem je število takšnih permutacij:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$$

iv. Povejte primer permutacije s ponavljanjem. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Permutacije črk v besedi "ANA": $\frac{3!}{2!} = 3$ (ANA, AAN, NAA).

---

96 Variacije

i. Kaj so variacije brez ponavljanja in koliko jih je? (2 točki)
Odgovor:

- Variacije brez ponavljanja so razporeditve k različnih elementov izmed n različnih elementov, kjer vrstni red šteje in elementi niso ponovljeni.
- Število takih variacij je $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

ii. Povejte primer variacije brez ponavljanja. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Variacije brez ponavljanja dolžine 2 iz množice $\{A, B, C\}$ so: AB, AC, BA, BC, CA, CB.

iii. Kaj so variacije s ponavljanjem in koliko jih je? (2 točki)
Odgovor:

- Variacije s ponavljanjem so razporeditve k elementov izmed n različnih elementov, kjer je vrstni red pomemben, in elementi se ne smejo ponovljati.
- Število takih variacij je $V^*(n,k) = n^k$.

iv. Povejte primer variacije s ponavljanjem. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Variacije s ponavljanjem dolžine 2 iz množice $\{A, B\}$ so: AA, AB, BA, BB.

---

97 Kombinacije

i. Kaj je binomski simbol in kako izračunamo njegovo vrednost? (1 točka)
Odgovor:

- Binomski simbol $\binom{n}{k}$ predstavlja število načinov, kako iz množice n različnih elementov izbrati k elementov ne glede na vrstni red.
- Izračunamo ga po formuli: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

ii. Opišite tri lastnosti računanja z binomskimi simboli. (3 točke)
Odgovor:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (simetričnost).
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (Pascalovo pravilo).

iii. Kaj so kombinacije brez ponavljanja in koliko jih je? (1 točka)
Odgovor:

- Kombinacije brez ponavljanja so izbire k elementov iz množice n različnih elementov, kjer vrstni red ne igra vloge in elementov ne ponavljamo.
- Število takih kombinacij je $\binom{n}{k}$.

iv. Povejte primer kombinacije brez ponavljanja. (1 točka)
Odgovor:

- Primer: Iz množice $\{A, B, C\}$ izberemo 2 elementa. Kombinacije so: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$.

---

98 Binomski izrek

i. Povejte binomski izrek in razčlenite izraz $(a + b)^4$. (2 točki)
Odgovor:

- Binomski izrek: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Za $n = 4$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ii. Naj bo n naravno število. Koliko podmnožic ima množica z n elementi? (1 točka)
Odgovor:

- Množica z n elementi ima 2^n podmnožic.

iii. Opišite povezavo med binomskim izrekom in Pascalovim trikotnikom. (1 točka)

Odgovor:

- Koeficienti v razvoju binomskega izraza $(a+b)^n$ po binomskem izreku so enaki številom v n-ti vrstici Pascalovega trikotnika.

iv. Opišite dve lastnosti binomskih koeficientov v Pascalovem trikotniku. (2 točki)

Odgovor:

- Vsaka vrstica se začne in konča z 1.
- Vsako notranje število je vsota dveh števil neposredno nad njim: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

---

99 Verjetnostni račun

i. **Pojasnite osnovne pojme verjetnostnega računa:** (6 točk)

→ poskus, (1 točka)

→ dogodek (slučajni dogodki, nemogoči in gotovi dogodki, elementarni dogodki, sestavljeni dogodki), (2 točki)

→ vzorčni prostor. (1 točka)

Povejte primer poskusa in navedite nekaj dogodkov v tem poskusu. Kateri med njimi so nemogoči, gotovi, elementarni in kateri sestavljeni dogodki? (2 točki)

Odgovor:

- **Poskus** je dejanje, katerega rezultat je odvisen od naključja in ga opazujemo (npr. met kovanca).
- **Dogodek** je rezultat ali množica rezultatov poskusa.
  - **Slučajni dogodek** se lahko zgodi ali pa ne (npr. pade cifra pri metu kovanca).
  - **Nemogoči dogodek** se ne more zgoditi (npr. pri metu kovanca pade število 3).
  - **Gotovi dogodek** se vedno zgodi (npr. pri metu kovanca pade ali cifra ali grb).
  - **Elementarni dogodek** vsebuje natanko en izid (npr. pade cifra).
  - **Sestavljeni dogodek** vsebuje več možnih izidov (npr. pri metu kocke pade sodo število).
- **Vzorčni prostor** je množica vseh možnih rezultatov poskusa (npr. pri metu kocke je vzorčni prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
- **Primer poskusa:** met standardne igralne kocke.
  - **Elementarni dogodek:** pade število 4.
  - **Sestavljeni dogodek:** pade sodo število (2, 4, 6).
  - **Nemogoči dogodek:** pade število 7.
  - **Gotovi dogodek:** pade število med 1 in 6.

---

i. Definirajte vsoto in produkt dogodkov. (2 točki)
Odgovor:

- **Vsota dogodkov** $A \cup B$ je dogodek, ki nastopi, če nastopi vsaj eden od dogodkov A ali B.
- **Produkt dogodkov** $A \cap B$ je dogodek, ki nastopi, če nastopita oba dogodka hkrati, torej A in B.

ii. Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva in kdaj združljiva? Kako izračunamo verjetnost vsote dveh združljivih dogodkov? (2 točki)
Odgovor:

- **Nezdružljiva dogodka** sta dogodka, ki ne moreta nastopiti hkrati, torej $A \cap B = \emptyset$.
- **Združljiva dogodka** sta dogodka, ki lahko nastopita hkrati, torej $A \cap B \neq \emptyset$.
- **Verjetnost vsote združljivih dogodkov:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

iii. Kaj je nasprotni dogodek danega dogodka in kako izračunamo njegovo verjetnost? (1 točka)
Odgovor:

- **Nasprotni dogodek** dogodka A je dogodek $\bar{A}$, ki nastopi, če A ne nastopi.
- **Verjetnost:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iv. Povejte primer dveh nezdružljivih dogodkov ter primer dogodka in njemu nasprotnega dogodka. (1 točka)
Odgovor:

- **Nezdružljiva dogodka:** pri metu kocke dogodka A: "pade 1" in B: "pade 6" (ne moreta nastopiti hkrati).
- **Dogodek in nasprotni dogodek:** A: "pade sodo število", $\bar{A}$: "pade liho število".

---

101 Verjetnostni račun

i. Kaj je relativna frekvenca danega dogodka? Definirajte empirično (statistično) verjetnost. Povejte primer. (2 točki)

Odgovor:

- **Relativna frekvenca** dogodka A je količnik med številom pojavitev dogodka A in številom vseh ponovitev poskusa.
$$f(A) = \frac{n_A}{n}$$
- **Empirična verjetnost** dogodka A je približek verjetnosti, dobljen z opazovanjem ali poskusi, in je enaka relativni frekvenci za veliko število ponovitev.
- **Primer:** Če pri 100 metih kovanca pade glava 47-krat, je empirična verjetnost dogodka "pade glava" enaka $\frac{47}{100} = 0{,}47$.

ii. Povejte klasično (matematično) definioijo verjetnosti. Navedite primer. (2 točki)

Odgovor:

- **Klasična verjetnost** dogodka A je definirana kot količnik med številom ugodnih izidov za dogodek A in številom vseh enako verjetnih izidov.
$$P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh možnih izidov}}$$
- **Primer:** Pri metu pravilne šeststranske kocke je verjetnost dogodka A: "pade število večje od 4" enaka:
$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

iii. Povejte dve lastnosti verjetnosti. (2 točki)

Odgovor:

- Verjetnost dogodka A je vedno med 0 in 1: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- Verjetnost gotovega dogodka je 1, verjetnost nemogočega dogodka je 0:
$$P(\text{gotovi dogodek}) = 1, \quad P(\text{nemogoči dogodek}) = 0$$

---

102 Statistika

i. Opišite osnovne statistične pojme: (6 točk)

→ populacija in vzorec, **(1 točka)**

→ statistična enota in statistična spremenljivka (znak), **(1 točka)**

→ statistični parameter, **(1 točka)**

Na konkretnem primeru statistične raziskave razložite osnovne statistične pojme. **(3 točke)**

Odgovor:

- **Populacija** je celota vseh enot, ki jih raziskujemo. **Vzorček** je podmnožica populacije, ki jo dejansko opazujemo ali merimo.
- **Statistična enota** je posamezni element populacije (npr. oseba, podjetje). **Statistična spremenljivka (znak)** je lastnost, ki jo pri enotah merimo (npr. višina, starost).
- **Statistični parameter** je številska značilnost populacije (npr. povprečna višina vseh dijakov v državi).
- **Primer:** V raziskavi merimo višino dijakov v Sloveniji.
  - Populacija: vsi dijaki v Sloveniji.
  - Vzorček: 500 dijakov, izbranih iz različnih šol.
  - Statistična enota: en dijak.
  - Statistična spremenljivka: višina dijaka.
  - Statistični parameter: povprečna višina vseh dijakov v Sloveniji.

---

103 Statistika

i. Definirajte frekvenco in relativno frekvenco dane statistične spremenljivke (znaka). (2 točki)

Odgovor:

- **Frekvenca** določenega podatka je število pojavitev tega podatka v vzorcu.
- **Relativna frekvenca** je delež pojavitev določenega podatka glede na celotno število podatkov in jo izračunamo kot:

$$\text{relativna frekvenca} = \frac{\text{frekvenca}}{\text{skupno število podatkov}}$$

ii. Kako izračunamo aritmetično sredino (povprečje) posamičnih podatkov in kako grupiranih podatkov? (2 točki)
Odgovor:

- **Posamični podatki:**
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
kjer je x_i posamezen podatek in n število podatkov.

- **Grupirani podatki:**
$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$
kjer je x_i središče razreda (sredina intervala), f_i pa frekvenca posameznega razreda.

iii. Definirajte modus podatkov. Kako ga določimo? (2 točki)
Odgovor:

- **Modus** je tisti podatek (ali razred pri grupiranih podatkih), ki se v podatkih pojavi največkrat.
- **Določimo ga** tako, da poiščemo podatek z največjo frekvenco. Če obstaja več takih podatkov, je lahko modus večvreden.

---

104 Statistika

i. Definirajte mediano podatkov. Kako jo določimo v odvisnosti od števila podatkov? (2 točki)
Odgovor:

- **Mediana** je srednja vrednost urejenih podatkov.
- Če je število podatkov n:
  - **liho** (n je liho): mediana je srednji podatek.
  - **sodo** (n je sodo): mediana je povprečje dveh srednjih podatkov.

ii. Definirajte kvartile. Kaj je medčetrinski razmik? (2 točki)
Odgovor:

- **Kvartili** razdelijo urejene podatke na štiri enako velike dele:
  - Q_1 – prvi kvartil: spodnja četrtina (25%)
  - Q_2 – drugi kvartil: mediana (50%)
  - Q_3 – tretji kvartil: zgornja četrtina (75%)
- **Medčetrtinski razmik** je razlika med tretjim in prvim kvartilom:
$$IQR = Q_3 - Q_1$$

iii. Kako narišemo škatlo z brki? Kolikšen delež podatkov leži med prvim in tretjim kvartilom? (2 točki)
Odgovor:

- **Škatlo z brki** narišemo tako:
  - Na številskem polju označimo Q_1, Q_2 (mediano) in Q_3.
  - Narišemo škatlo od Q_1 do Q_3.
  - V škatli označimo črto za Q_2.
  - Narišemo brke (črte) od škatle do najmanjše in največje vrednosti (brez izstopajočih vrednosti).
- **Delež podatkov** med Q_1 in Q_3 je približno 50 %.

---

105 Statistika

i. Kaj je standardni odklon? Kako ga izračunamo? (2 točki)
Odgovor:

- **Standardni odklon** meri razpršenost podatkov okoli aritmetične sredine.
- Računamo ga kot:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

  kjer je x_i posamezni podatek, $\bar{x}$ aritmetična sredina, n število podatkov.

ii. Narišite normalno (Gaussovo) krivuljo in na njej označite μ. Kakšen je pomen parametra σ ? (Število μ je srednja vrednost, σ pa standardni odklon porazdelitve.) (2 točki)
Odgovor:

- μ je srednja vrednost – krivulja je simetrična glede na μ.
- σ določa razpršenost: večji kot je σ, širša je krivulja.
- Slika: zvonasta krivulja z označeno točko μ na sredini in točkama $\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$ levo in desno.

iii. Kolikšen odstotek vrednosti spremenljivke, ki je normalno porazdeljena, leži na intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$? (1 točka)
Odgovor:

- Približno **68 %** vseh vrednosti.

iv. Kolikšna je ploščina območja med normalno (Gaussovo) krivuljo in abscisno osjo? (1 točka)
Odgovor:

- Ploščina pod celotno krivuljo je **1** (kar pomeni 100 % verjetnost).