I: EL CUERPO $\mathbb{C}$ Y SU TOPOLOGÍA

Definición: Llamaremos cuerpo de los complejos, y lo denotaremos como $\mathbb{C}$, a $\mathbb{R}^2$ con la suma $(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ y el producto $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2):=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$. Así $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

Lema: $\mathbb{C}$ es el menor cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo y soluciona la ecuación $z^2+1=0$.

- $\mathbb{C}$ no es ordenado.
- $\mathbb{C}$ se suele representar en el plano $\mathbb{R}^2$, llamado plano de Gauss. A los ptos de dicho plano se le llaman afijos.

Definición: Sea $z\in\mathbb{C}$. Si $z=(x,y)$, se suele denotar como $z=x+yi$. Se llama conjugado de z a $\overline{z}:=x-yi$, parte real de z a $\mathrm{Re}\, z:=x$, y parte imaginaria a $\mathrm{Im}\, z:=y$.

- Notar que $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Proposición (Propiedades de la conjugación):

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
3) $\overline{z^{-1}}=\overline{z}^{-1}$.

Definición: Se llama módulo de z a $|z|:=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Proposición (Propiedades del módulo):

1) $|z| \geq 0$, y $|z| = 0 \iff z = 0$

2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4) $|\bar{z}| = |z|$

5) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq z$.

• Notar que 1) y 2) dicen que $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ es una distancia sobre $\mathbb{C}$.

Proposición: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo, localmente compacto pero no compacto.

• Sobre $\mathbb{C}$ consideraremos como topología la inducida por $|\cdot|$. Notar que $(\mathbb{C}, |\cdot|) \simeq (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ es una isometría $\Rightarrow$ homeomorfismo.

Proposición: La proyección estereográfica da un homeomorfismo entre la esfera de $\mathbb{R}^3$ y $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$S_2 \xrightarrow[\sim]{\varphi} \overline{\mathbb{C}}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{(|z|^2+1)i}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \longleftarrow z$$

$$(0,0,1) \longleftrightarrow \infty$$

lo que además dice que $S_2 - \{\text{un pto}\} \simeq \mathbb{C}$. Esto dice además que $\mathbb{C}$ no es compacto.

Definición: Si $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, $z' = \varphi(x_1', x_2', x_3')$, llamaremos métrica cordal a la distancia sobre $\mathbb{C}$

$$\chi(z, z') := \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}$$

Scanned by CamScanner

Proposición:

$$\boxed{\chi(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{|z|^2+1}\,\sqrt{|z'|^2+1}}}\ , \quad \boxed{\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}}$$

Lema: Sea $(z_n) \subset \mathbb{C}$ una sucesión. $(z_n) \xrightarrow{|\cdot|} z_0 \iff (z_n) \xrightarrow{\chi} z_0$.

- Esto dice que $(\mathbb{C}, \chi) \simeq (\mathbb{C}, |\cdot|)$ isometría, e inducen la misma topología sobre $\mathbb{C}$.

TOPOLOGÍA EN $\mathbb{C}$

Definición: Se dice que $E \subset (X,\tau)$ ET es no conexo si $\exists A, B \in \tau$: $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, y $E \subset A \cap B$. Se dice que E es conexo si no es no conexo.

- En (E, τ_E) $E \cap A$ y $E \cap B$ son abiertos y cerrados no vacíos cuya unión es el total. Es decir, E es no conexo si $\exists F \subset E$ que sea abierto y cerrado y no sea ni el vacío ni el total.

Proposición: En $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$, I intervalo $\iff I$ conexo.

Corolario: En $A \subset (\mathbb{R}, \tau_{usual})$, conexo = pto.

Teorema: La conexión es una propiedad topológica: la imagen continua de un conexo es conexo.

Definición: Un arco en un ET X es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to X$. Se llama traza de γ a $(\gamma) := \operatorname{Im} \gamma$.

- Puesto que $[a,b] \simeq [0,1]$, se elige siempre este intervalo.

Definición: Se llama arco opuesto de $\gamma : [0,1] \to X$ a $(-\gamma)(t) := \gamma(1-t)$. $(-\gamma)$ es γ recorrido en sentido opuesto.

Proposición: La traza de todo arco es compacta y conexa.

Definición: Sea $\gamma_1 : [a,b] \to X$, $\gamma_2 : [c,d] \to X$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Se llama yuxtaposición de γ_1 y γ_2 a $\gamma_1 \cup \gamma_2$, que es la curva que parametriza a $(\gamma_1) \cup (\gamma_2)$.

Definición: Un conjunto $E \subseteq X$ se dice arco-conexo si $\forall x, y \in E$ $\exists \gamma$ arco en E tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

$(\gamma) \subset E$

Proposición: Arco-conexo $\Longrightarrow$ Conexo.

Definición: Una propiedad topológica se dice que se verifica localmente si en cada pto existe una base de entornos que la verifican.

Proposición: $\mathbb{C}$ y $\overline{\mathbb{C}}$ son localmente conexos, y arco-conexos, luego conexos.

Proposición: En $\mathbb{C}$ ó $\overline{\mathbb{C}}$, abierto conexo $\Longleftrightarrow$ abierto arco-conexo.

Definición: Sea $G \subseteq \mathbb{C}\ (\overline{\mathbb{C}})$ abto, y $z_0 \in G$. Se llama componente conexa de z_0 en G al mayor conexo que contiene a z_0, que es $\mathcal{C}_{z_0} = \{ z \in G : \exists \gamma(z_0, z) \subset G \}$.

Proposición (Propiedades de las componentes conexas):

1) $z_0 \in \mathcal{C}_{z_0}$.
2) $\mathcal{C}_{z_0}$ es abto
3) Dos componentes conexas bien son iguales bien son disjuntas.
4) G es reunión disjunta de sus componentes conexas
5) $E \subseteq G$ conexo y $z_0 \in E \Rightarrow E \subseteq \mathcal{C}_{z_0}$.

6) $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto $\Rightarrow G = K^c$ tiene una única componente conexa no acotada.

7) $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, D abierto de $\mathbb{C}$ y $K \subset D$. $\overline{\mathbb{C}} - D$ conexo $\Rightarrow \mathbb{C} - D$ está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} - K$.

FUNCIONES COMPLEJAS

Definición: Llamaremos función compleja de variable compleja a $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

- Puesto que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, se puede pensar como $f(x,y) = f(z) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y)$

En general se escribirá $\boxed{f(z) = u(z) + i\,v(z)}$

Definición: Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Se llama conjugada de f a $\overline{f}(z) := \overline{f(z)} = u(z) - i\,v(z)$.

- $u = \operatorname{Re} f = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$, $v = \operatorname{Im} f = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$.

IMPORTANTE: Los límites y la continuidad son iguales que en la variable real. Los demostraciones son las mismas haciendo los cambios oportunos. Es decir, la suma, producto y cociente de continuas es continua.

II: SUCESIONES Y SERIES

Definición: Dada una sucesión (a_n) en $\mathbb{C}$, la serie es la sucesión de sumas parciales $(a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots)$.

• $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n+b_n)$, $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$, $(\sum a_n)(\sum b_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n+m=k} a_n b_m \right)$.

Definición: Se dice que $\sum a_n$ es sumable si la suc. de sumas parciales converge, y se dice absolutamente sumable si $\sum |a_n|$ es convergente.

• De la def de convergencia se tiene

Proposición (Criterio de Cauchy): Son equivalentes:

1) $\sum a_n$ es sumable

2) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : p,q > \nu \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| < \varepsilon$

3) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : p > \nu \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon$. A $\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\right|$ se le llama resto de Cauchy.

Corolario (Condición Necesaria de Convergencia): $\sum a_n$ sumable $\Rightarrow (a_n) \longrightarrow 0$.

• Notar que absolut. sumable $\Rightarrow$ sumable.

Proposición (Criterio del Cociente): Sea $\sum a_n$ una serie:

1) $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge (y absolutamente)

2) $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

3) $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow$ CASO DUDOSO

Scanned by CamScanner

Proposición (Criterio de la raíz): Sea $\sum a_n$ una serie

1) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge (y absolutamente)

2) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

3) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$ CASO DUDOSO

Proposición (Criterio de comparación): Sean $a_n, b_n \geq 0$, $\underbrace{\sum a_n}_{\text{minorante}} \leq \underbrace{\sum b_n}_{\text{mayorante}}$

1) $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$ (ambos convergen)

2) $\sum a_n = \infty \Rightarrow \sum b_n = \infty$ (ambos divergen)

Proposición: El producto de series absolutamente convergentes es convergente y converge al producto.

SUCESIONES DE FUNCIONES

Definición: Dada una sucesión de funciones (f_n), la serie $\sum f_n$ es la sucesión de sumas parciales $(f_1, f_1+f_2, \dots) = (F_n)$, donde $F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Supondremos en adelante que $f_n : E \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definición: Sea $\sum f_n$ una serie de funciones. Se dice que $\sum f_n$ converge...

i) puntualmente si la sucesión (F_n) converge puntualmente, i.e., mediante el crit Cauchy, si

$$\forall z \in E,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} : p, q > \nu \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} f_n(z) \right| < \varepsilon.$$

ii) absolutamente si converge $\sum |f_n|$.

iii) uniformemente si la suc. (F_n) converge uniformemente, o mediante el crit. de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} : p, q > \nu \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} f_n \right| < \varepsilon \quad (\forall z \in E).$$

Teorema (Criterio M de Weierstraß): Sea $\sum f_n$ una serie

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n \geq 0 : |f_n(z)| \leq M_n\ \forall z \in E$, y $\sum M_n < \infty \Rightarrow \sum f_n$ converge absol. y uniformemente en E.

Definición: Una serie de potencias es una serie $\sum a_n(z-z_0)^n$. Se dice centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$.

El término general es $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$. Por simplicidad $z_0=0$.

Teorema: Sea $\sum a_n z^n$ una serie de potencias, y sea $\rho := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (fórmula de Hadamard). Se verifica:

1) $\sum a_n z^n$ converge absoluta e uniformemente en $B(0,\rho)$.

2) $\sum a_n z^n$ diverge en $B(0,\rho)^c$

3) En $\{|z|=\rho\} \Rightarrow$ CASO DUDOSO

A ρ se le denomina radio de convergencia y a $B(0,\rho)$ disco de convergencia.

Corolario: $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en compactos de $B(0,\rho)$ a una función continua en $B(0,\rho)$.

Lema (Abel): Sea $0<r<r_0$. Si $\exists M>0$: $|a_n| r_0^n \leq M \ \forall n$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_n z^n$ converge uniformemente en $B[0,r]$.

Proposición: Sea $\sum a_n z^n$, y ρ su radio de convergencia

1) $\rho = \sup\{r \geq 0 : \sum |a_n| r^n < \infty\}$.

2) $\rho = \sup\{r \geq 0 : (|a_n| r^n)$ es una sucesión acotada$\}$.

Teorema: Sean $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ series de potencias de radios de convergencia $\geq \rho > 0$.

1) El radio de convergencia de las series suma y producto es $\geq \rho$.

2) Sean $A(z) := \sum a_n z^n$, $B(z) := \sum b_n z^n$, $S(z) := (\sum a_n z^n) + (\sum b_n z^n)$, $P(z) := (\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$.

$|z|<\rho \Rightarrow S(z) = A(z)+B(z)$, $P(z) = A(z)\cdot B(z)$.

III: FUNCIONES HOLOMORFAS

Definición: Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funci. complej., $z_0 \in \mathring{A}$. Se dice que f es derivable en z_0 si

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

A dicho valor se le llama derivada de f en z_0.

Proposición: f derivable en $z_0 \Rightarrow f$ cont. en z_0.

IMPORTANTE: La derivabilidad de la suma, producto, cociente y regla de la cadena es idéntica a la v. real.

Definición: Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathring{A}$. Se dice que f es diferenciable en z_0 si existe una aplicación lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ie, un $c \in \mathbb{C}$) tal que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Proposición: derivable $\equiv$ diferenciable.

Definición: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Se dice que f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ si existe una aplicación lineal $L = (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - L(x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

<u>Definición</u>. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Se llaman <u>derivadas parciales</u> de f a

$$f_x(x_0,y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = u_x + i v_x \quad , \left(u,v : \mathring{A} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right)$$

$$f_y(x_0,y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = u_y + i v_y \,. \quad (f = u + iv)$$

• Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathring{A}$, así que $\exists f'(z_0) = \lim_{h \to 0}$ ——. Dicho límite existe sea cual sea el camino por el que vayamos a $0 \in \mathbb{C}$. Si hacemos $h \to 0$, $h \in \mathbb{R}-0$, (o vamos por la recta real, tenemos que dicho límite vale $u_x + i v_x \overset{\cdot}{=} f_x$. Sin embargo, si vamos por el eje imaginario $(ih \to 0,\ h \in \mathbb{R}-0)$ tenemos que vale $-i u_y + v_y \overset{\cdot}{=} i f_y = \frac{1}{i} f_y$, y si queremos que sean iguales deben de coincidir.

<u>Definición</u>. Llamamos <u>ecuación de Cauchy-Riemann</u> y <u>ecuaciones CR</u> a

$$\boxed{f_x = \frac{1}{i} f_y}$$

ECUACIÓN DE CAUCHY - RIEMANN (EC CR)

$$\boxed{\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\}}$$

ECUACIONES DE CAUCHY - RIEMANN (ECS CR)

• ¿Qué relación hay entre la diferencia compleja y real?

<u>Teorema</u>: Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ó bien $f: A' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + i y_0$. Son equivalentes:

1) f diferenciable en $z_0 \in \mathbb{C}$

2) f diferenciable en (x_0, y_0) + EC. CR

3) u, v diferenciables en (x_0, y_0) + ECS. CR.

Y

$$\boxed{f' = f_x = \frac{1}{i} f_y = u_x + i v_x = -i u_y + v_y \,.}$$

Proposición (Condición suficiente de diferenciabilidad): $u, v \in C^1$ en un entorno de (x_0, y_0) $+$ ECS CR $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + i y_0$.

Definición: Se dice que una función $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en A, $f \in H(A)$, si existe D abierto, $A \subset D$: $\exists f'(z)$ $\forall z \in D$. f se dice derivable en D abierto si $\exists f'(z)$ $\forall z \in D$.

- $f \in H(A) \Rightarrow f \in C(A)$.

Lema: Sea D abierto. $\quad f \in H(D) \iff \begin{cases} 1) \ f \text{ dif en todo } (x,y) \in D \\ 2) \ \text{EC. CR.} \end{cases}$

Proposición (Condición suficiente de holomorfía): $u, v \in C^1(D)$ + ECS. CR $\Rightarrow f \in H(D)$.

Proposición: Si $f \in H(D)$ y $f \in C^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{array}\right\}$ (EC. LAPLACE)

(Se dice que u, v son funciones armónicas)

Lema: $f = u + iv : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f' \equiv 0 \Rightarrow f = cte$.

Proposición: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, D abierto convexo, $f_x = f_y \equiv 0 \to f = cte$.

Corolario: $f \in H(D)$, D abierto convexo, $f' \equiv 0 \Rightarrow f = cte$.

* **Teorema**: Sea $f \in H(D)$, D región (abierto conexo). Si alguna de las funciones $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$, $|f|$ ó $\operatorname{sgn} f = \sigma(f)(z) := \dfrac{f}{|f|}$ son ctes $\rightarrow f = cte$.

- Geométricamente, este teorema dice que la imagen de una región no puede ser una recta horizontal, o vertical, o estar en una circunferencia.

*

Teorema: Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, que llamaremos serie derivada, tienen el mismo radio de convergencia ρ. Además, si $A(z) := \sum a_n z^n$ para $|z| < \rho$, existe $A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} z^{n-1}$.

En otras palabras, dentro del radio de convergencia se deriva término a término.

Corolario: Si $A(z) = \sum a_n z^n \in H(B(0,\rho))$, entonces se puede derivar infinitas veces y

$$A^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)\, a_n z^{n-m}$$

En particular $a_m = \dfrac{A^{(m)}(0)}{m!}$.

Definición: Sea f definida en D abto ó $B(z_0,\rho)$. Se dice que f es desarrollable (en series de potencias) en z_0 si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z \in B(z_0, r)$, $0<r<\rho$.

Proposición:

1) El desarrollo en serie de potencias de una función desarrollable es único
2) Si dos series de potencias coinciden en un entorno de z_0 $\Rightarrow$ son la misma serie
3) f, g desarrollables, $f \cdot g \equiv 0$ en un entorno de z_0 $\Rightarrow$ $f \equiv 0$ ó $g \equiv 0$. (en el entorno)
4) f desarrollable en z_0 $\Rightarrow$ $\exists\, g$ desarrollable: $g' = f$. (ie, f también es "integrable")

Definición: Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, D abto. Se dice que f es analítica en D si es desarrollable en series de potencias entorno a cada pto de D.

- f analítica $\overset{\text{en } D}{\Longrightarrow}$ tiene derivadas de todos los órdenes y son analíticas
- f analítica en D $\Rightarrow f \in H(D)$. Ya veremos que $\Leftarrow$ también.

Scanned by CamScanner

IV: FUNCIONES ELEMENTALES

Definición: Llamamos exponencial compleja a la función $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

• Notar que está bien def en todo $\mathbb{C}$ (Crit raíz, cociente). Es analítica, y es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Se dice que es entera.

Proposición (Propiedades):

1) $(e^z)' = e^z$
2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
3) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
4) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

• Dado $z = x+iy$, podemos escribir $e^z = \underbrace{e^x}_{\text{exp. real}} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\text{exp. imaginaria}}$. En particular $e^{iy} = \sum \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$, y $|e^{iy}| = 1$.

Definición: Sea $y \in \mathbb{R}$. Llamamos seno y coseno de y a

$$\operatorname{sen} y := \operatorname{Im} e^{iy} \qquad , \qquad \cos y := \operatorname{Re} e^{iy}$$

• La definición de coseno dice que coincide con el desarrollo de Taylor de la variable real.

Lema: $\{y > 0 : \cos y = 0\} \neq \emptyset$.

Defn: Llamamos $\frac{\pi}{2} := \inf \{y > 0 : \cos y = 0\}$ ($\exists$ por TFO).

• En particular es un mínimo, $\cos y$ es continua.

• Lo del sen y cos dice que $\boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y}$

<u>Lema</u>: Sea $T_1 = \{(u,v) \in \mathbb{C} : u^2+v^2=1,\ u,v \geq 0\} \equiv 1^{er}$ cuarto de la circuf. unidad. Entonces

$$\begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & T_1 \\ y & \longmapsto & e^{iy} \end{array}$$ es un homeomorfismo.

<u>Teorema</u>: Sea $T = \{|z| = 1\} \equiv$ circuf. unidad. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}, +) & \xrightarrow{h} & (T, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ y & \longmapsto & e^{iy} \end{array}$$

es un morfismo de grupos, y $\operatorname{Ker} h = 2\pi\mathbb{Z}$.

<u>Teorema</u>: La aplicación $(0, 2\pi) \xrightarrow{h} T - \{1\}$ es un difeomorfismo.

<u>Definición</u>: Se dice que $\theta \in \mathbb{R}$ es un <u>argumento</u> de $z \in \mathbb{C}^*$ si $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

• θ está bien def por el Th. Además, $\boxed{z = |z| e^{i\theta}}$. Diremos que $\theta = \arg z$.

<u>Proposición</u>: Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argumento de z. Entonces

$$\{\text{argumentos de } z\} = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}.$$

<u>Corolario</u>: Todo intervalo semiabierto de $\mathbb{R}$ de longitud 2π tiene un único argumento de $z \in \mathbb{C}^*$.

<u>Definición</u>: Llamaremos <u>argumento principal</u> de $z \in \mathbb{C}^*$, y lo denotaremos como $\operatorname{Arg} z$, al único $\theta \in (-\pi, \pi]$ argumento de z.

Proposición: Arg. es una función continua en $\mathbb{C} - \{x \geq 0\}$

Proposición: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. (mod 2π)

Proposición: $\forall \omega \in \mathbb{C}^* \ \exists z \in \mathbb{C} : e^z = \omega$. $\quad (z = \ln|\omega| + i \cdot \arg \omega)$.

Definición: Llamaremos logaritmo de $\omega \in \mathbb{C}^*$, y lo denotaremos $\log \omega$, a cualquier $z : e^z = \omega$

Llamaremos logaritmo principal de ω a $\operatorname{Log} \omega := \ln|\omega| + i \cdot \operatorname{Arg} \omega$.

Lema. Sea z_0 un log. de $\omega \in \mathbb{C}^*$. Entonces

$$\{\text{logaritmos de } z_0\} = z_0 + 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Proposición: $\log(\omega_1 \cdot \omega_2) = \log \omega_1 + \log \omega_2 \quad (\text{mod } 2\pi i)$.

Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $0 \notin D$ región. Se dice que f es una determinación o rama del logaritmo (argumento) si f es cont. en D y $f(z)$ es un log de z $\forall z \in D$ ($f(z)$ es un argumento de z $\forall z \in D$); i.e, si $e^{f(z)} = z$ $\forall z \in D$ (i.e, si $e^{if(z)} = \frac{z}{|z|}$ $\forall z \in D$).

Proposición: Sea $f_0(z)$ una determinación del logaritmo (argumento). Entonces

$$\{\text{determinaciones del logaritmo}\} = f_0(z) + 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\left(\{\text{determinaciones del argumento}\} = f_0(z) + 2\pi \mathbb{Z} \right)$$

Proposición: Una determinación del log da una del arg y viceversa. Con precisión,

1) $f(z)$ det. del arg $\Rightarrow \ln|z| + i f(z)$ det del log

2) $f(z)$ det. del log $\Rightarrow \frac{1}{i}(f(z) - \ln|z|)$ det del arg.

Proposición: $\operatorname{Log} z \left(= \ln|z| + \operatorname{Arg} z\right)$ es una determinación del logaritmo en $\mathbb{C} - \{x \geq 0\}$, que denominamos determinación o rama principal del logaritmo

Proposición: $f(z)$ det del log en $D \subseteq \mathbb{C}$ región $\Rightarrow \exists f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in D$.

Proposición: $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ en $\{|z| < 1\}$.

Definición: Sea $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Llamamos $a^b := e^{b \cdot \log a}$

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = |a|^{1/n} \cdot e^{i \frac{\arg a + 2\pi k}{n}}$.

Definición: $\quad \operatorname{sen} z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

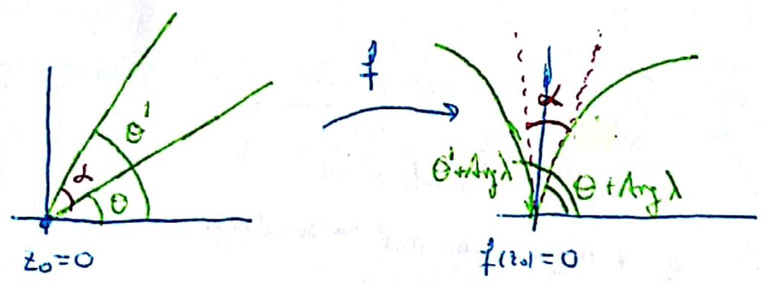
- OJO!: sen y cos en $\mathbb{C}$ no están acotadas!

Scanned by CamScanner

V: APLICACIONES CONFORMES

Definición: Diremos que una aplicación $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ conserva ángulos en $z_0 \in D$ si es inyectiva en un entorno de z_0 (i.e, $\exists B(z_0) : f(z) \neq f(z_0)\ \forall z \in B(z_0) - \{z_0\}$) y $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ ($|\lambda| = 1$) : $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} = \lambda e^{i\theta} = e^{i(\theta + \operatorname{Arg} \lambda)}$$



• Que f conserve ángulos en 0, p.ej., significa que las rectas que parten del origen, al aplicarles la f, las curvas resultantes, tangentes en el 0, están giradas una amplitud de $\operatorname{Arg} \lambda$. Por tanto la dif entre dos se conserva, i.e., conserva ángulos.

Teorema: Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ inyectiva en un entorno de z_0. Si $\exists f'(z_0) \neq 0 \implies f$ conserva ángulos en z_0

Definición: Se dice que $f: D \overset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es conforme si es biyectiva, holomorfa y $\exists f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$ (y por tanto conserva ángulos en D)

TRANSFORMACIONES BILINEALES

Definición: Llamaremos transformación bilineal a toda aplicación de la forma $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Si $ad - bc \neq 0$, f se dice transformación de Möbius.

• Todas las transf. son de Möbius, pues otra igual al caso $\frac{0}{0}$. Además, f está def en $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ y es holomorfa. En dicho pto se va a ∞, pero podemos extenderla a $\overline{\mathbb{C}}$ por continuidad:

$$\bullet\ S(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty, -\dfrac{d}{c} \\ \infty & z = \dfrac{-d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & z = \infty \end{cases} \quad , \quad S: D \subset \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

Lema: Toda transformación bilineal es conforme.

· La composición de transf. b.l. es una transf. bil.

Definición: Sea $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ transf. bil. Diremos que f es...

i) una traslación si $f(z) = z + a$.

ii) una dilatación si $f(z) = az$ $(a \neq 0)$. Si $a \in \mathbb{R}$ se dice homotecia

iii) una rotación si $f(z) = e^{i\theta} z$ $\quad$ * dilat = homot + rot

iv) una inversión si $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\quad$ * inversión = inv. real + simetría

Proposición: Toda transf. bil. es composición de traslaciones, dilataciones e inversiones: $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \dfrac{a}{c}$.

Proposición. Toda transf. bil $\neq Id$ tiene, a lo sumo, 2 ptos fijos.

Corolario: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Si S, T son dos trnf. bil : $S(z_j) = T(z_j)$ $j = 1,2,3 \Longrightarrow S = T$.

Corolario: Toda transf. bil. queda determinada por la imagen de 3 ptos distintos.

Teorema: Dados $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos, existe una única transformación bilineal $f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$, $f(z_4) = \infty$. A la imagen por z de dicha f, $f(z) = \dfrac{z - z_3}{z - z_4} \Big/ \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ la llamamos razón doble de z, z_2, z_3, z_4 y la denotamos como $(z, z_2; z_3, z_4)$.

☆ Proposición: La razón doble se conserva por transformaciones bilineales.

Proposición: Dados $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_2, w_3, w_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, existe una única trf. bil : $f(z_j) = w_j$.

• Tres ptos $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ determinan un círculo (puede ser una recta si están alineados), que denotamos C_{z_2,z_3,z_4}

* **Teorema**: Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos.

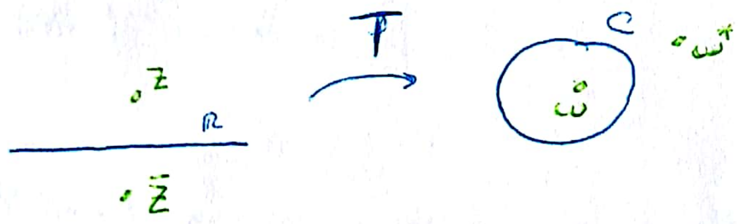
$$(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R} \iff z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ están en un círculo.}$$

Corolario: Toda transfor. bil transforma círculos en círculos.

Corolario: Dados dos círculos C, C', existe una trf. bil. f tal que $f(C) = C'$. Si hacemos que 3 ptos distintos se correspondan a otros 3 distintos $\Longrightarrow$ es única

Lema: Si una trf. bil lleva reales en reales $\Rightarrow$ lleva simétricos en simétricos. (resp. eje real)

Definición: Dos ptos w, w^* se dicen simétricos respecto un círculo C si existe una trf. bil T que cumple $T(\mathbb{R} \cup \infty) = C$ y un pto z tal que $w = T(z)$ y $w^* = T(\bar{z})$



Proposición: Sean $z_2, z_3, z_4 \in C$ distintos.

$$z, z^* \text{ simétricos respecto } C \iff (z^*, z_2; z_3, z_4) = \overline{(z, z_2; z_3, z_4)}.$$

Proposición: Sea $C = \{|z-a| = R\}$ $\equiv$ circunf. de radio $R > 0$ y centro $a \in \mathbb{C}$. Sea $z \notin C$. Entonces el simétrico de z resp. C es $\boxed{z^* = a + \dfrac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}}$

* **Proposición** (Principio de Simetría): Si una trf. bil. transforma C_1 en C_2 $\Rightarrow$ ptos simétricos resp. C_1 se transforman en ptos simétricos resp. C_2.

VI. INTEGRACIÓN EN $\mathbb{C}$

Definición: Sea $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, $f = u + iv$. Llamaremos integral de f a

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Proposición (Propiedades):

1) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

2) $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

3) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Teorema (de Cambio de Variable): Sea $[\alpha,\beta] \xrightarrow{x} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $t \longmapsto x(t) = x \longmapsto f(x)$, x dif., $\begin{pmatrix} x(\alpha) = a \\ x(\beta) = b \end{pmatrix}$. Et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Definición: Un camino, arco ó curva es una aplicación $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que γ es un camino cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Diremos que γ es un camino regular (a trozos) si es diferenciable con continuidad (a trozos).

Definición: Sea γ un camino regular (a trozos), y f cont. en (γ). Llamaremos integral de f a lo largo de γ a

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

(o la suma correspondiente salvando los ptos donde no es regular).

• IMPORTANTE: $\underbrace{\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|}_{\in \mathbb{R}} \leq \underbrace{\int_\gamma |f(z)|\,dz}_{\in \mathbb{C}}$ no tiene sentido.

Proposición: Si γ, σ son dos curvas equivalentes (ie $\sigma = \gamma \circ t$) cambio de parámetro $\Longrightarrow \int_\gamma f = \int_\sigma f$.

Proposición: La integral a lo largo de un camino regular a trozos no depende del punto inicial para recorrerlo.

Proposición: $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$.

Proposición: Sean $(f_n), f \in C(\gamma)$. $(f_n) \xrightarrow{u} f$ en $(\gamma) \Longrightarrow \left(\int_\gamma f_n\right) \longrightarrow \int_\gamma f$.

* **Teorema** (Integrales paramétricas): Sea γ un camino regular y $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto

1) Sea $f \in C(D \times (\gamma))$. Entonces la función $g(z) := \int_\gamma f(z,w)\,dw$ es cont. en D

2) Sea $f \in C(\gamma)$. Entonces la función $g(z) := \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$ es analítica en $(\gamma)^c$ y verifica $g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$.

$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum \ldots$ conv. uniforme

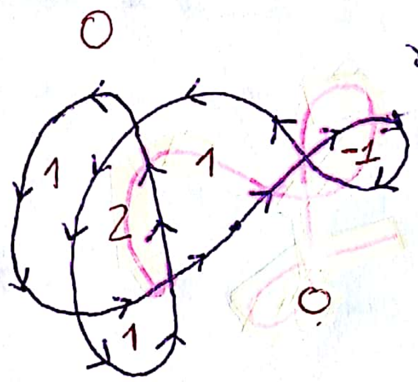
Lema: Sea $f \in C(D)$, D abto. Si f tiene primitiva holomorfa en D, $F \in H(D): F' = f$, $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Proposición: Si $f: [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ continua, las funciones $\int_0^a f(t)\,e^{-tz}\,dt$ y $\int_0^a -t\,f(t)\,e^{-tz}$ son enteras (ie, $H(\mathbb{C})$) y la segunda es la derivada de la primera.

Definición: Sea γ un camino cerrado regular (a trozos). Se llama índice de γ en $z \notin (\gamma)$ a

$$\boxed{I(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}}$$



El índice cuenta el número de veces que γ rodea a z_0 en sentido positivo. Es la variación de cualquier argumento continuo.

* **Teorema** (del Índice): El índice de un camino cerrado γ

1) Es una función continua definida en $(\gamma)^c$
2) Valores en $\mathbb{Z}$
3) Es cte en cada componente conexa de $(\gamma)^c$
4) Es 0 en la componente conexa no acotada de $(\gamma)^c$

VII : TEOREMAS DE CAUCHY

Definición: Una curva de Jordán es un camino cerrado e inyectivo (también se dice simple), i.e., que sólo se corta a sí mismo en los extremos.

Teorema (de la curva de Jordán): Toda curva de Jordán divide al plano en dos componentes conexas disjuntas cuyas fronteras es (γ). Una de esas componentes es acotada (se dice que es el interior de γ) y la otra es no acotada (el exterior de γ).

Definición: Sea $f \in C(D)$. Se dice que $\int_\gamma f$ depende sólo de los extremos de γ (cualquiera que sea γ camino en D) si $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$ con los mismos extremos.

Proposición: $\int_\gamma f$ depende sólo de los extremos de $\gamma \iff \int_\sigma f = 0 \quad \forall \sigma$ camino cerrado en D.

Teorema: Sea D región y $f \in C(D)$.

$\int_\gamma f$ depende sólo de los extremos de $\gamma \iff f$ tiene una primitiva holomorfa en D $(\exists F \in H(D): F' = f)$

$F(z) = \int_{\gamma(z_0, z)} f(\xi)\, d\xi$

Teorema: Sea B un disco abierto y $f \in C(B)$. Son equivalentes:

1) $\int_\gamma f$ sólo depende de los extremos de γ ($\forall \gamma$ curva en B)

2) $\int_\sigma f = 0 \quad \forall \sigma$ curva cerrada en B

3) $\int_{\partial R} f = 0 \quad \forall R$ rectángulo cerrado en B

4) f tiene primitiva holomorfa en B.

Teorema (Goursat, o Cauchy para rectángulos): Sea D abierto y $R \subset D$ rectángulo cerrado.

$$f \in H(D) \implies \int_{\partial R} f = 0.$$

Teorema (de Cauchy Local): Sea B un disco abierto.

$$f \in H(B) \Longrightarrow \int_\sigma f = 0 \quad \forall \sigma \text{ camino cerrado en } B.$$

Proposición: Sea D abierto y Δ una recta paralela al eje real.

$$f \in C(D),\ f \in H(D - \{\text{ptos de } \Delta\}) \Longrightarrow \int_{\partial R} f = 0 \quad (\forall R \subset D \text{ rect. cerrado}).$$

* **Teorema** (Fórmula Integral de Cauchy): Sea B un disco abierto, $f \in H(B)$ y σ un camino cerrado.

Entonces $\forall z \in B \cap (\sigma)^c$, se cumple

1) $$\boxed{I(\sigma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

2) $$\boxed{I(\sigma, z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY DE LAS DERIVADAS

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ 0 & = \end{cases}$$

Lemas (de Jordan):

1) $\lim_{|z| \to \infty} z \cdot f(z) = 0 \longrightarrow \lim_{r \to \infty} \int_\Gamma f(z)\, dz \to 0$

2) $\lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = 0 \longrightarrow \lim_{r \to 0} \int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$

3) $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0 \to \lim \int_\Gamma f(z)\, e^{iaz}\, dz = 0.$

VIII. FUNCIONES ENTERAS

* **Teorema** (Desarrollo en serie de Taylor): Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, y $f \in H(D)$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

$\forall z \in B(z_0, \rho) \subset D$, donde $C_r = \{|\xi - z_0| = r\}$, $0 < r < \rho$, recorrida una vez en sentido positivo. Por tanto

$$\boxed{f \text{ holomorfa en } D \iff f \text{ analítica en } D}$$

y si $f \in H(D)$, $f', f'', \ldots \in H(D)$.

Proposición (Desigualdad de Cauchy): Si $f \in H(D)$, $B(z_0, \rho) \subset D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ y

$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, donde $M(r) = \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$.

* **Teorema** (Liouville): f entera + acotada $\Rightarrow$ f cte. (¡En la variable real es una barbaridad

Proposición: Si f es entera y $M(r) = \max_{|z| = r} |f(z)| \leq A r^{\alpha}$, $\forall r \geq r_0$, $A > 0$ y $\alpha \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ f es un polinomio de gr $\leq \alpha$. Recíprocamente, si f es un pol de gr α, entonces $M(r) \leq A r^{\alpha}$ $\forall r \geq r_0$.

Teorema (Fundamental del Álgebra): Todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene n raíces complejas.

IX: TH DE MORERA.

Teorema (Morera): Sea $D \subset \mathbb{C}$ abto. y $f \in C(D)$. Si $\int_{\partial R} f = 0 \ \forall R \subset D \Rightarrow f \in H(D)$.

• Por tanto,

Teorema: Sea $D \subset \mathbb{C}$ abto y $f \in C(D)$. Entonces

$$\boxed{f \in H(D) \Longleftrightarrow \int_{\partial R} f = 0 \quad \forall R \subset D}$$

$\Rightarrow$). Goursat
$\Leftarrow$). Morera.

Definición: Un ciclo es una expresión formal $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, donde cada γ_j es un camino cerrado que expresa $\int_\Gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f\,dz$, $f \in C((\gamma_1) \cup \dots \cup (\gamma_n))$.

Si D es un abto: $(\gamma_j) \subset D \ \forall j$, decimos que Γ es un ciclo en D. $(\Gamma) := (\gamma_1) \cup \dots \cup (\gamma_n)$.

Definición: Sea Γ un ciclo y $a \notin (\Gamma)$. Se llama índice de Γ en a a $I(\Gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$.

• El índice es un entero, es cte en cada cpte conexa de $(\Gamma)^c$ y nulo en la no acotada.

• $I(-\Gamma, a) = -I(\Gamma, a)$, donde $-\Gamma = -\gamma_1 + -\gamma_2 + \dots + -\gamma_n$.

• $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ se define como $\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$.

Lema: Sea $f \in H(D)$. La función $g: D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w \\ f'(z), & z = w \end{cases}$

es continua en $D \times D$.

Teorema (Cauchy): Sea $f \in H(D)$, D abto de $\mathbb{C}$. Si Γ es un ciclo en D que cumple $I(\Gamma, a) = 0 \ \forall a \notin D$, entonces

$$\boxed{f(z) \cdot I(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, d\xi.} \quad , \quad \boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 0}$$

$\forall z \in D - (\Gamma) \quad (= D \cap (\Gamma)^c)$

En particular, si Γ_0 y Γ_1 son ciclos en D tales que $I(\Gamma_0, a) = I(\Gamma_1, a) \quad \forall a \notin D$, entonces $\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$.

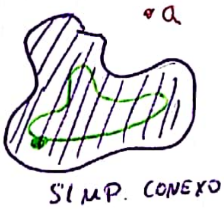
Corolario (Fórmula Integral de las Derivadas): En las condiciones del Teorema anterior,

$$\boxed{I(\Gamma, z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi}$$

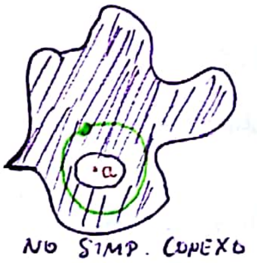
REGIONES SIMPL. CONEXAS

Definición: Una región D se dice simplemente conexa si $I(\gamma, a) = 0 \quad \forall a \notin D, \forall \gamma$ camino cerrado en D

- En Román Paladino significa "no tener agujeros"



SIMP. CONEXO



NO SIMP. CONEXO

~~Lema. Sea D una región. Son equivalentes:~~

~~1) D simplemente conexo~~

~~2) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in H(D), \forall \gamma$ camino cerrado en D~~

~~3) $\forall f \in H(D) \; \exists F \in H(D) : F' = f$.~~

Definición: D se dice estrellado respecto $z_0 \in D$ si $[z, z_0] \subset D \quad \forall z \in D$

Proposición. Sea D abto. Estrellado $\Rightarrow$ simplemente conexo.

Proposición: Si D región tal que $\overline{\mathbb{C}} - D$ conexo $\Rightarrow$ D simplemente conexo.

Proposición: Sea $f \in H(D)$ en D simplemente conexo, y f no tiene ceros en D. Entonces "f tiene logaritmo en D", i.e, $\exists g \in H(D) : f = e^g$.

Corolario: Sea $f \in H(D)$, D simpl. conexo y f sin ceros en D. Entonces f tiene primitiva holomorfa en D, i.e, $\exists F \in H(D) : F' = f$.

X: CEROS DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Definición: Sea $f \in H(D)$, $D \subseteq \mathbb{C}$ abto. Se dice que $z_0 \in D$ es un cero de orden k de f si

$f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Teorema (Caracterización de ceros): Sea $f \in H(D)$ en D abto y $z_0 \in D$. Son equivalentes:

1) z_0 es un cero de orden k de f

2) $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0)$, $c_k \neq 0$.

3) $f(z) = (z-z_0)^k \cdot f_k(z)$, $\forall z \in B(z_0)$, $f_k(z_0) \neq 0$ y $f_k \in H(B(z_0))$

4) $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$, $\forall z \in D$, $g \in H(D)$ y $g(z_0) \neq 0$.

Proposición: Si una función holomorfa $f \in H(D)$, D región, tiene en $z_0 \in D$ un cero de orden k $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f \equiv 0$ en D.

¡En la variable real es una burrada!

Corolario: $f \in H(D)$, D región, $f \not\equiv 0$ en D. Si $f(z_0) = 0$ $(z_0 \in D)$, entonces hay alguna derivada en la que no se anula, i.e, $\exists k$: $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, i.e, z_0 es un cero de orden k de f.

Corolario: Los ceros de una función holomorfa $f \not\equiv 0$ son aislados (no tienen ptos de acumulación)

Corolario (Principio de Prolongación Analítica): Sean $f, g \in H(D)$, $A \subset D$, A tiene ptos de acumulación

$$f \equiv g \text{ en } A \Rightarrow f \equiv g \text{ en } D.$$

Corolario (Principio de Simetría de Schwarz): Sea D una región simétrica respecto al eje real, y $f \in H(D)$. Si f es real en los reales, i.e., $f(D\cap\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\Rightarrow f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

* **Teorema** (Fórmula de las aplicaciones locales): Sea $f \in H(D)$, D región, y $f \not\equiv 0$. Si γ es un camino cerrado que $I(\gamma,\alpha) = 0 \ \forall \alpha \notin D$ y γ no pasa por los ceros $\underbrace{\{z_j\}}_{``Z_f"}$ de f en D (contados con sus órdenes de multiplicidad), entonces

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{\substack{z_j \in Z_f \\ \text{(con sus órdenes)}}} I(\gamma, z_j)}$$

FÓRMULA DE LAS APLICACIONES LOCALES

Corolario I: En el Th anterior, si $\Gamma := f\circ\gamma$ (camino regular cerrado). Entonces $I(\Gamma,0) = \sum_{z_j \in Z_f \cap D} I(\gamma, z_j)$

Corolario II: En el Th anterior, si γ es un camino cerrado simple de Jordan $\left(I(\gamma,z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_j \text{ int. a } \gamma \\ 0 & \text{si exterior} \end{cases}\right)$

entonces
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 \equiv \text{número de ceros en el interior de } \gamma.$$

Corolario III: En el Th anterior, sea $a \in \mathbb{C}$ y $f(z) \neq 0 \ \forall z \in (\gamma)$. Sea $Z_f(a)$ los "a-valores" (raíces de $f(z)-a=0$), contados con sus órdenes, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \sum_{z_j \in Z_f(a)} I(\gamma, z_j) = I(\Gamma, a).$$

Si además $I(\gamma, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{interior,} \\ 0 & \text{ext,} \end{cases}$ entonces $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = N_a \equiv$ nº de raíces de $f(z)-a$ en el interior de γ.

Corolario IV: Si a y b pertenecen a la misma componente conexa de $(\Gamma)^c$, entonces $I(\Gamma,a) = I(\Gamma,b)$, y $\sum I(\gamma, Z_f(a)) = \sum I(\gamma, Z_f(b))$. Si además los índices son 0 ó 1, entonces $N_a = N_b$.

Teorema (del comportamiento local): Sea $f \in H(D)$, D región, $f \neq cte$ y z_0 un cero de orden $n \geq 1$ de $f(z) - w_0 = 0$. Entonces existe un ε_0 : $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists$ $\delta > 0$: $f(z) - w = 0$ tiene exactamente n raíces en $B(z_0, \varepsilon)$ (contando con sus órdenes) $\forall w \in B(w_0, \delta)$. Más aún, se puede garantizar que las raíces sean simples (orden 1), excepto posiblemente el z_0.

Corolario: $f \in H(D)$, D región y $f \neq cte$. $\Rightarrow$ f es abierta.

Corolario: Toda función holomorfa en un abierto, y no cte en ningún abierto de D (en cualquier componente conexa), es abierta.

Corolario: Sea $f \in H(D)$, D abierto. Si $z_0 \in D$: $f'(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ f aplica topológicamente y conformemente un entorno abierto de z_0 sobre un disco abierto.

Proposición: Sea $f \in H(D)$, D abierto y f inyectiva. Entonces $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$, f es abierta y $\exists \left(f^{-1}\right)'(w_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$ $\forall w_0 \in f(D)$.

XI: TH ROUCHÉ. P.M.M. LEMA DE SCHWARZ

Teorema (Rouché): Sea D una región, $f, g \in H(D)$ y γ un camino cerrado simple de Jordan (en D), y $I(\gamma, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \notin D$.

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \ \forall z \in (\gamma) \Rightarrow N_0(f) = N_0(g)$$

donde $N_0(f)$ y $N_0(g)$ indican el nº de ceros de f y g en el interior de γ, contados con su multiplicidad.

Teorema (Fundamental del Álgebra): $\mathbb{C}$ es alg. cerrado.

Teorema (Principio del Módulo Máximo): Si $f \in H(D)$ y $\neq$ cte en D región, entonces $|f|$ no tiene ni máximo absoluto ni local en D.

Corolario: Sea $K \subset D$, K compacto y D región. Entonces $\forall f \in H(D)$,

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|.$$

Lema (Schwarz): Sea $f \in H(B(0,1))$, con $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$ y $f(0) = 0$. Entonces $|f(z)| \leq |z| \ \forall z \in B(0,1)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Únicamente se da alguna igualdad en lo anterior si $f(z) = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| = 1$.

XII: SERIES DE LAURENT

<u>Proposición</u>: Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en D que convergen uniformemente en compactos de D a una función f, $(f_n) \xrightarrow{u} f$. Entonces $\underline{f \in H(D)}$ y $\forall k \geq 1$ $(f_n^{(k)}) \xrightarrow{u} f^{(k)}$ en compactos de D.

<u>Corolario</u>: Si las $f_n \in H(D)$ $\forall n$ y $\sum f_n$ converge uniformemente en compactos de D, entonces define una función holomorfa que se puede derivar término a término: si $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in H(D)$, entonces
$$\exists f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

<u>Definición</u>: Llamaremos <u>serie de Laurent</u> a $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n := \lim_{p,q\to\infty} \sum_{n=-p}^{q} a_n (z-z_0)^n$, en el caso de que ambos límites existan, i.e., que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$ sean convergentes. A la primera parte se le llama <u>parte regular</u> y a la segunda <u>parte singular</u>.

<u>Proposición</u>: La serie de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge absolutamente en la corona

$$\{ r_1 < |z-z_0| < r_2 \},$$

donde $r_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|} < r_2 = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, y diverge en

$$\{ |z-z_0| < r_1 \} \cup \{ |z-z_0| > r_2 \}$$

<u>Corolario</u>: Una serie de Laurent y su serie derivada tienen la misma corona de convergencia.

Teorema (Desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa): Sea $f \in H(D)$, $D := \{ 0 \le r_1 < |z - z_0| < r_2 \le \infty \}$ una corona. Entonces $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D$, y dichos an están univocamente determinados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \quad , \forall n \in \mathbb{Z} \quad , (\forall r : r_1 < r < r_2)$$

donde $C_r = \{ |\xi - z_0| = r \}$ recorrida una vez en sentido positivo.

Corolario: Sea f holomorfa en $\{ r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$ y $M(r) := \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$. Entonces los coef. de ésta cumplen $|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}$.

XIII: SINGULARIDADES Y TH. RESIDUOS

Definición: Sea $f \in H(B(z_0,r) - z_0)$. Por el Th anterior, $f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0,r) - z_0$.

Se dice que z_0 es...

i) un punto regular de f si $a_n = 0 \quad \forall n < 0$, y $f(z_0) = a_0$ (ie, f holomorfa en z_0).

ii) una singularidad evitable si $a_n = 0 \quad \forall n < 0$, pero bien f no está definida en z_0, bien $f(z_0) \neq a_0$.

iii) un polo de orden h de f si $a_n = 0 \quad \forall n < -h$ y $a_{-h} \neq 0 \quad (h \in \mathbb{N})$

iv) una singularidad esencial de f si $a_n \neq 0$ para infinitos índices negativos

Definición: En los casos iii) y iv), se llama residuo de f en z_0 a $Res(f, z_0) := a_{-1}$.

Proposición: f tiene un polo de orden h en $z_0 \iff \begin{cases} 1)\ g(z) := (z-z_0)^h f(z) \in H(B(z_0) - z_0) \\ 2)\ \exists \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \end{cases}$

Corolario: z_0 polo de orden h de f, y polo de orden h' de $g \Rightarrow f \cdot g$ tiene un polo de orden $h+h'$ en z_0.

Corolario: z_0 es un cero de orden h de $f \Rightarrow \frac{1}{f}$ tiene un polo de orden h en z_0.

Teorema: Sea z_0 un polo de orden h de f. Entonces

$$\boxed{Res(f, z_0) = \frac{1}{(h-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big(\underbrace{(z-z_0)^h f(z)}_{g(z)} \Big)^{(h-1)}}$$

• Papel de los residuos. γ ciclo cerrado en $B(z_0)-z_0$, f holomorfa ahí, y $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot I(\gamma, z_0)\cdot \mathrm{Res}(f, z_0)}$$

• Si f es holomorfa en un entorno reducido de ∞, hacemos el desarrollo en serie de Laurent en $\{r_2 < |z| < \infty\}$: $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Las definiciones previas son análogas pero cambiando índices positivos por negativos y viceversa. También vemos el residuo, que es

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,\infty) = -a_{-1}}.$$

Proposición: El residuo de f en ∞ no depende del punto donde hagas el desarrollo en serie de Laurent.

Teorema (Singularidad Evitable de Riemann): Sea f holomorfa en la corona $\{0<|z-z_0|<r_2\} = B(z_0, r_2) - z_0$.

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$ en la misma corona, ie, f se puede extender como holomorfa en $B(z_0, r_2)$, definiendo $f(z_0)=a_0$.

Corolario: Si f es holomorfa en un entorno reducido de ∞ y $\exists \lim_{z\to\infty} z f(z) = \lambda$, entonces

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,\infty) = -\lambda}.$$

¡Aunque ∞ sea una sing. evitable, Res puede no ser 0!

Teorema (Casoratti-Weierstraß): Si $f\in H(D-z_0)$, D abierto y $z_0\in D$ es una singularidad esencial de f, entonces $\forall B(z_0)\subset D$, el conjunto $f(B(z_0))$ es denso en $\mathbb{C}$, ie,

$$\overline{f(B(z_0))} = \mathbb{C}.$$

Scanned by CamScanner

(del Th Riemann)

Corolario: Sea $A \subset D$ un conjunto finito, y $f \in H(D-A)$.

f tiene extensión holomorfa en $D \iff \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0 \quad \forall a \in A$.

Teorema: Sea f, $z_0 \in \mathbb{C}$ un pto de no holomorfía.

1) z_0 singularidad esencial $\iff \forall w \in \mathbb{C} \; \exists (z_n) \to z_0 : f(z_n) \to w$.

2) z_0 polo $\iff \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

3) z_0 singularidad evitable $\iff \exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

NOTA: Esto vale para $z_0 = \infty$, pero estudiando $f(\frac{1}{z})$ en el 0.

Definición: Se dice que f es meromorfa en un abierto D si es holomorfa en todo D salvo en singularidades aisladas que sean polos. Pondremos $f \in \mathcal{M}(D)$.

Localmente, si f es meromorfa es cociente de holomorfas: $f(z) = \frac{f_k(z)}{(z-z_0)^k}$.

• D región, $f, g \in \mathcal{M}(D)$, $g \not\equiv 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$. Además, Z_g no puede tener ptos de acumulación en D, pues $g \equiv 0$ en D. Luego $\frac{f}{g}$ deja de ser holomorfa en los ceros de g que no lo son de f: son polos.

• Si z_0 es cero de f y g, de orden k y k' resp. $\Rightarrow$ en $\frac{f}{g}$ $\begin{cases} k \geq k' \Rightarrow \text{sing evitable} \\ k < k' \Rightarrow \text{polo de orden } k'-k \end{cases}$

Teorema (de los residuos): Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abto $A \subset D$ a lo sumo numerable y sin ptos de acumulación en D, $f \in H(D-A)$ con singularidades aisladas en los ptos de A. Si Γ es un ciclo en D que no pase por A ($(\Gamma) \cap A = \emptyset$) y $I(\Gamma, a) = 0 \; \forall a \notin D$, entonces

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) \cdot I(\Gamma, a)}$$

(la suma es finita)

Corolario: Sea f holomorfa en $\mathbb{C} - \{a_1, \dots a_n\}$, sus sing. ~~aisladas~~ aisladas. Entonces

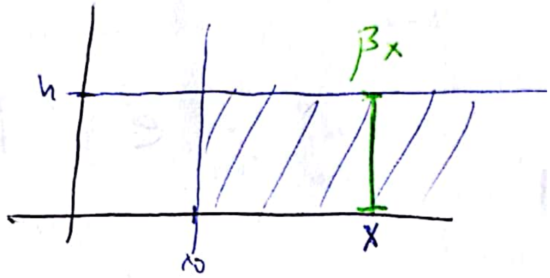
$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j) = - \operatorname{Res}(f, \infty)}$$

- Polos de un cociente $=$ ceros del denominador

Lemas (de Jordan):

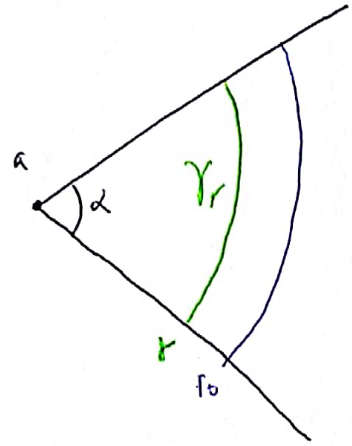
1) f cont. en la semibanda $\{x \geq x_0,\ 0 \leq y \leq h\}$ y $\lim_{x\to\infty} f(x+iy) = A$, indep. de y, y es uniforme en la y, entonces si $\beta_x = \{x+ti\}_{t\in[0,h]}$,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\beta_x} f(z)\,dz = i\cdot h\cdot A.$$



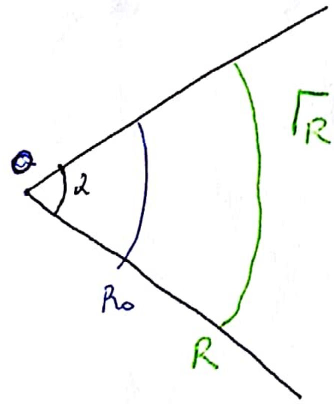
2) f cont en $\{0 < |z-a| < r_0,\ 0 \leq \arg(z-a) \leq \alpha\}$, $r_0 > 0$ y $0 < \alpha \leq 2\pi$. Si $\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = A$, y $\gamma_r \subset \{|z-a| = r\}$ es un trozo del arco recorrido en sentido positivo, entonces

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i\cdot\alpha\cdot A$$



3) f cont. en $\{|z| \geq R_0,\ 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$, $\alpha \in (0, 2\pi]$, y $\exists \lim_{z\to\infty} z\cdot f(z) = A$ (z en el recinto), entonces, si $\Gamma_R \subset \{|z| = R\}$ es un trozo del arco en sentido positivo, entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = i\cdot\alpha\cdot A$$



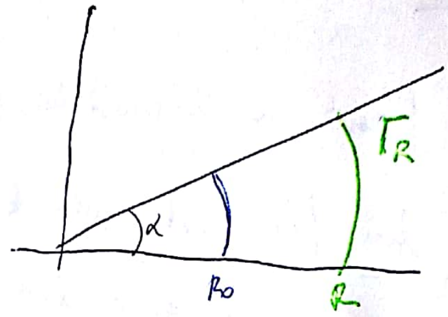
Scanned by CamScanner

4) Si f cont en $\{|z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, y

$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, z en el recinto, entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i \cdot m \cdot t} \cdot f(z) dz = 0$$

$(m > 0)$



Polos

- En un cociente, ceros del denominador.
  - Polo simple si es un cero simple del num. que no anule al den.
  - doble " " " " doble " " " " " "

$$z_0 \text{ polo de orden } h \text{ de } f \iff \begin{cases} g(z) = (z-z_0)^h f(z) \in \mathcal{H}(D) \\ \exists \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Singularidad evitable

- f no def en z_0 pero $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Singularidad esencial

e^{algo}, sen algo, cos algo ... se desarrolla en serie de Laurent y se ve si tiene infinitos términos negativos. Si z_0 es un pto regular (holomorfa) y no es ni polo ni sing. evitable debe ser esencial. ($\nexists \lim f$).

Singularidades en el ∞

Se estudia $f\left(\frac{1}{z}\right)$ en el 0. ($f(z) = z^3 \rightsquigarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^3}$. Tiene un polo de orden 3 en 0. Luego f tiene un polo de orden 3 en ∞).

$f(z) = e^z$ tiene sing. esencial en ∞ porque $e^{\frac{1}{z}}$ tiene sing. esencial en 0: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$.