

I: FRACTALES Y AUTÓMATAS CELULARES

FRACTALES

Definición (Provisional): Un fractal es una estructura autosemejante que se consigue mediante iteración retroalimentada de escala.

- Dada una estructura inicial, se le aplica un cierto operador L , que convierte la estructura en otra cuyas partes son similares a la original. Se le aplica cada una de esas partes a la operadora L , y así sucesivamente.
- "Autosemejante" indica que partes de la estructura son semejantes a todo, y "de escala" que multiplicando por un cierto factor una parte se obtiene la original.
- Tienen dos tipos de autosemejanza: estricta cuando esas partes son (salvo un factor de prop.) idénticas a la original, y estadística cuando son parecidas (ej.: reños de un río, helechos, nubes, polvo, bárcos rompiendo).

Definición: Una fotocopiadora reductora múltiple (FRM) es un "operador" que transforma un objeto en otro aplicando un cierto algoritmo. "Dónde" se realiza dicho algoritmo se dice unidad procesadora, y "cuán" de los órdenes unidad de control. Tal operador sirve en reducir el tamaño del objeto y poner varios copias.

Definición (Fractal, 1): Un fractal es el límite del sistema dinámico definido por la aplicación iterativa y retroalimentada de una FRM.

Opción: Llamarlos transformaciones de semejanza a las dilataciones, reflexiones, rotaciones, translaciones y composiciones de ellas.

Definición: Un operador de Hutchinson es una aplicación entre subconjuntos de \mathbb{R}^n que es unión de las imágenes de un subconjunto por transformaciones de semejanza:

$$W: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

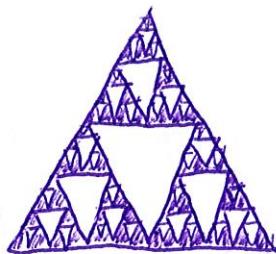
$$A \longmapsto W(A) := w_1(A) \cup \dots \cup w_n(A),$$

donde cada w_i es una transformación de semigrupo. Al conjunto $W(A)$ se le llama huelle del operador.

Definición (Fractal, 2): Un fractal es el límite del sistema dinámico definido por las aplicaciones iterativas y retráctiles de un operador de Hutchinson. A este aplicación iterativa también se le llama sistema de funciones iteradas (SFI).

Ejemplos:

1)



Triángulo de Sierpinski

Prov. A un triángulo Δ se le quita la parte central Δ , y a cada uno de los 3 triángulos restantes se le quita el triáng. central, y sucesivamente.

1. Límite de la FFM $\Delta \rightarrow \Delta$, que enajea y triplica.

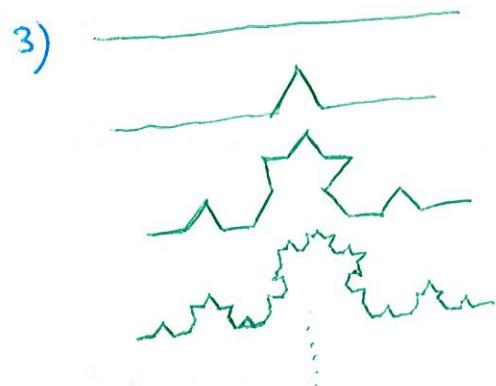
2. Límite del operador de Hutchinson $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$,

donde $A = \Delta$ y $\begin{cases} w_1 = \text{dilatación de razón } \frac{1}{2}, \\ w_2 = \text{ " " " traslado de } (\frac{1}{2}, 0) \\ w_3 = \text{ " " " " } (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$

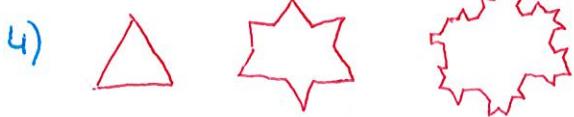
$$\begin{cases} w_2 = \text{ " " " traslado de } (\frac{1}{2}, 0) \\ w_3 = \text{ " " " " } (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



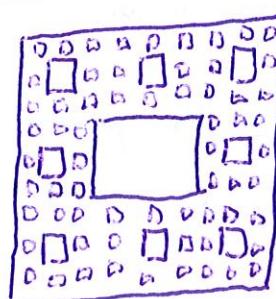
Conjunto de Cantor



Curva de Koch



Lazo (o isla) de Koch



Alfombra de Sierpinski

• onde en frontal K definido por un operador de Hutchinson W_K , es cloro, por construcción, que K sea la única estructura que es invariante mediante el operador W_K . Esto es otra forma de definir fractales (por constructo). Se dice que K es el attractor de W_K .

• Para una trafo de hmt. deben obtenerse sige figuras autosemejantes, pors los transformes de seguida conservan la "forma" de la figura original. Por eso el límite (el fractal) sige es autosemejante.

Ejeh: Triaglo & Sierpinski S : def:

1) S la única figura de \mathbb{R}^2 : $S = W(S)$, donde W fijo punto.

2) $S := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, donde $A_{n+1} := W(A_n)$, y A_0 = triaglo.

Note: El resultado del fractal, en realidad, no depende del cojunto inicial. En el límite coinciden todos. Por eso se dice que es attractor.

• Hay fractales que se pueden formar mediante operadores de Hutchinson pero usando afinidads ("transformaciones") en lugar de transformes de seguida. Estos no conservan la forma de las figuras, pero (Th Fnd. Geom. Afh) tienen rectas en rectas.

Ej.: Laberinto de Cantor, helecho de Barnsley.

(Un poco de rigor)

Definición: Sea (X, d) un espacio métrico completo. Para cada conjunto $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, se llue ε -cubierta de A a

$$A_\varepsilon := \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Definición: Sean $A, B \subset X$ conjuntos. Se llue distanza de Hausdorff de A a B a

$$h(A, B) := \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \text{ y } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Propiedad: Sea W un operador de Hutchinson contractivo, i.e., $h(W(A), W(B)) \leq c \cdot h(A, B)$, $0 < c < 1$. Entonces el límite (attractor) para tal transformación existe, es úno, y es invariante para tal transformación.

Proposición: Si (X, d) es un espacio métrico completo $\rightarrow (\mathcal{E}, h)$ es un espacio ultricompleto; donde

$$\mathcal{E} := \{ A \subseteq X \text{ compacto} \} \subseteq \mathcal{P}(X), \quad h \text{ es la distancia de Hausdorff.}$$

• Esta prop. formaliza el concepto de $\dim A_n$.

DIMENSIÓN FRACTAL

• Hablaremos sobre 3 tipos distintos de dimensiones (3 interpretaciones del mismo nombre): dimen de copias, de autoseñal y de recuento por cajas.

Definición: Supongamos una estructura autoseñalante para la que, midiendo su "longitud" con una regla o copia) de tamaño δ , necesitaremos N copias de la regla (para cubrir el conjunto). Diremos que la dimensión de copias de tal estructura es D_c si $N = \delta^{-D_c}$ ($\text{o } N \sim \delta^{-D_c}$, "del orden").

• Para una figura que es estatísticamente autoseñalante, se toman una serie de δ 's y se registran valores $N(\delta)$ ($\text{o } L(\delta)$). Al ser autoseñalante, se espera una ley de tipo exponencial. Se aplica la $\log \delta^{-1}$ frente $\log N$ ($\text{o } \log L$).

• Si se traza la recta que mejor ajuste. Es de D ($\text{o } D-1$), pues

$$\log N \sim D \cdot \log \delta^{-1} = \log \delta^{-D} \Rightarrow N \sim \delta^{-D}.$$

$$\log L \sim (D-1) \cdot \log \delta^{-1} = \log \delta^{1-D} \Rightarrow L = N \cdot \delta \sim \delta^{1-D} \Rightarrow N \sim \delta^{-D}.$$

$$\text{Ej.: dim. copias curva de Koch} = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4.$$

• Ej.: dim. copias curva de Koch = $\frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4$.

Definición: Supongamos una estructura autoseñalante para la que, aplicando un factor de reducción $\alpha < 1$, se necesitan N copias de la figura reducida para recuperar la original. Se llame dimensión de autoseñal al número D_s tal que $N = \delta^{-D_s}$

• Para estructuras no fractales, D_c y D_s son la versión de dimensiones enteras usuales. En particular, tales definiciones vienen inspiradas de ahí.

$$\boxed{D_c = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}} ; \boxed{D_s = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}} .$$

• Observa que ambos dimensiones deben coincidir, i pf su resultado es lo mismo!

Ejemplos:

- 1) Triang. de Sierp.: Se reduce el tamaño en la mitad ($s=\frac{1}{2}$) y se doblan N_3 copias: $D = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3$.
- 2) Cuaj. de Cantor: " " en 3 pasos ($s=\frac{1}{3}$) " " 2 " : $D = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$.
- 3) Algoritmo de IFS: " " en un factor $s=\frac{1}{3}$, y se crean 8 cajas: $D = \frac{\log 8}{\log 3} = \log_3 8$.

Definición: Consideremos una estructura autoseñalante, i enciende en un rectángulo, el cual trae en cuadrados de tamaño S . Sea N el número de cuadrados que cubren a la estructura. Se llave dimensión de recuento por cajas al número D_B tal que $N \sim S^{-DB}$.

• Si una estructura sigue una ley patrón de recuento por cajas (o copias), se expresa que sea autoseñalante, sin indicar que se ha repetido el mismo proceso iterativo a todas las escalas. Esto no se representa con $\frac{1}{s}$ vs. $\log N$, y no se le interpola es mas recto.

¡OJO! Con la dim de autoseñalante. Si la figura se supone puede dar valores extraños (p.ej., 72 en el plus). Con la de recuento por caja obtiene este no posee.

• Con un fractal aleatorio (p.ej., la isla de Koch para que los "pies" puedan ir hacia donde quieran abajo) la dimensión de cajas o copias será exacta la misma, i se ponen los mismos cajas/copias genéricamente ordenados en la forma original! Aquí no se produce algo de autoseñalante, debido a que posee exactas.

Mecanismos independientes de la escala dan lugar a estructuras autoseñalantes, i siguen una ley patrón $N \sim S^{-D}$.

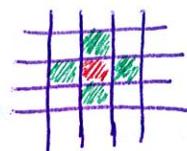
AUTÓMATAS CELULARES

Definición: Un autómata finito de p estados es un sistema (individual) que adopta un nuevo punto p de estado y en el que su futuro está determinado por su estado actual y por las señales externas que le afectan.

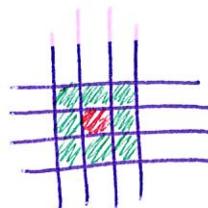
Definición: Un autómata celular es un conjunto de autómatas finitos en los que el estado actual de cada uno de ellos afecta a sus vecinos, i.e., el estado de cada autómata y la señal externa que afecta a otros autómatas. Una vecindad es el conjunto de autómatas que afectan a uno dls. Llamado vecino.

- Los autómatas celulares se definen en rejas discretas: una fila de cuadraditos :: | | | | | ... en el caso 1-dim o en cuadrículas :: | | | | : en el 2-dim.
- La evolución en el tiempo es directa, y las reglas son deterministas.

Definición: En el caso 2-dim definir los tipos de vecindades:



Vecindad de Von Neumann



Vecindad de Moore

• v_0

• Vecinos.

• En una red finita (i.e., un autómata ^{celular} formado por finitos autómatas) se pueden tomar los siguientes tipos toro (identificando los extremos) o tipo absorvente (cayéndose con 0's).

Definición: Un autómata de Wolfram es un autómata celular unidimensional booleano (i.e., cada autómata solo posee 2 estados) y con vecinas simétricas (el de su izq y su dcha). A continuación los estados se denotarán con un 1 ó un 0.

• Una regla queda determinada cuando se dice cuál será el futuro de un autómata dependiendo su estado y el de sus vecinos.

- Una regla queda determinada cuando se dice cuál será el futuro de un autómata dependiendo su estado y el de sus vecinos. Ahora, hay 8 estados posibles, $\boxed{a \ b \ c}$, con $a, b, c = 0 \text{ ó } 1$; y cada uno de ellos puede dar lugar a 2: que b se convierte en 0 ó 1. Total: $2^8 = 256$ diferentes reglas.

- ¿Cuál tiene a cada uno de los estados? Por binario: cada uno de los diferentes 8 estados se define con potencias $2^0, 2^1, \dots, 2^7$; y cada estado 0 o 1 con 0 o 1.

$$\begin{array}{cccccccc} (0,0,0) & (0,0,1) & (0,1,0) & (0,1,1) & (1,0,0) & (1,0,1) & (1,1,0) & (1,1,1) \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \end{array}$$

Si un estado da lugar a 0, etc. no aparece ($0 \cdot 2^t$); y si da lugar a 1 sí que ($1 \cdot 2^t$).

Ej: La regla 45 $\rightarrow 00101101_2$, i.e., $(000) \rightarrow 1$; $(001) \rightarrow 0$,

• En los autómatas 1-dim, se suelen poner las iteraciones sucesivas en una línea inferior, y las sucesivas arriba, y se muestran todas las etapas ($t=0, 1, 2, \dots$).

• Los autómatas celulares son sistemas caóticos: una mínima variación en las c.c. (en $t=0$) puede dar lugar a un resultado completamente distinto.

• En autómatas 2-dim, con vecindad de Moore (p.ej.), hay 2^9 situaciones posibles para que esté vivo y sus vecinos. Si cada una puede dar lugar a 0, 1; entonces hay un conjunto de 2^{2^9} reglas, ¡¡!! $\approx 10^{157}$.

Una de esas 2^{2^9} reglas es la

Definición: Se llena juego de la vida al autómata celular 2-dim con vecindad de Moore regulado por las sg. reglas:

- i) Toda viva (autómata vivo) puede tener dos estados: vive (1) o muere.
- ii) Una vieja muerte (autómata en 0) cobrará vida en $t+1 \iff = 3$ vecinos vivos entre vivos en t .
- iii) Una vieja viva morirá en $t+1$ si en t tiene ≤ 2 vecinos vivos (por soledad), o ≥ 4 (por sobrepopulación).

En otro caso la célula mantiene su estado. Estas reglas se suelen recordar como S23/B3: una célula

vive si tiene 2 ó 3 vecinos vivos; y muere si tiene 3 vivos.

 es un punto fijo en el juego de la vida.

Mediante aproximación, un EDP (p.ej. la ec. de difusión $\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$) se puede adaptar mediante vectores vecinos y autómatas celulares.

Definición: Un medio excitador es un medio que propaga ondas de algún tipo por el que son refractarios durante un cierto tiempo al paso de una onda tras haber sido anteriormente el paso de otra.

Ej: hielo, nubes, gérmenes, tejido neuronal o cardíaco,

Definición: Un autómatas de Greenberg - Nagumo es un sistema celular 2-dim regido por las reglas:

- i) Los círculos pueden estar bien en uno de los $E \in N$ estados excitados (estados $s=1, 2, \dots, E$) o en uno de los R estados refractarios ($s=-R, -R+1, \dots, -1$); o en el estado de reposo $s=0$.
- ii) Si una célula está en estado $s \neq 0$, incrementa su estado en 1. Si alcanza el estado E , el siguiente que tendrá es el $-R$.
- iii) Una célula en reposo se excita si tiene $T \in N$ vecinas excitadas.

- Morfología del teñido: Reglas sencillas pueden conducir a complejas configuraciones.

II: SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

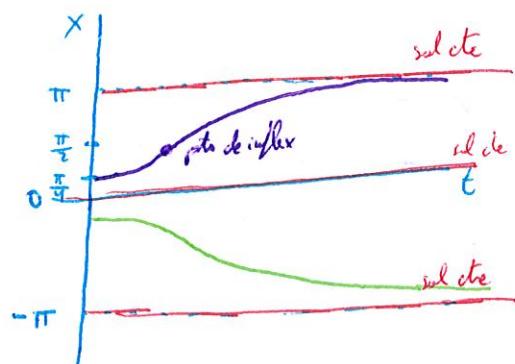
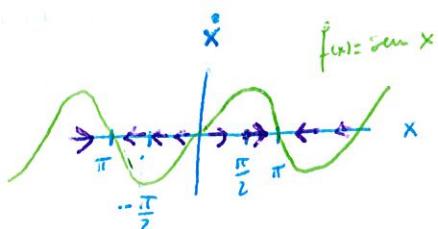
- Toda ecuación diferencial de orden n puede convertirse en un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de orden 1: dado $\dot{x}^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}^{(n-1)})$, definimos

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := x \\ x_2 := \dot{x}^1 (= x'_1) \\ x_3 := \dot{x}^2 (= x'_2) \\ \vdots \\ x_n := \dot{x}^{(n-1)} (= x'_{n-1}) \\ f(t, x, \dots, \dot{x}^{(n-1)}) = \dot{x}^n (= x'_n) \\ x_{n+1} = t \end{array} \right\} \quad \dot{x}^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}^{(n-1)}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \\ x_{n+1}' = 1 \end{array} \right.$$

Por tanto, basta estudiar los st. autónomos. La derivada resg. a t , en adelante, la denotaremos por \dot{x} .

La resolución analítica de ED es muy problemática. Para que el cálculo numérico sea más fácil, se hace un estudio cualitativo: dada $\dot{x} = f(x)$, y una sol. x ,

- Si $f(x) > 0 \Rightarrow x \xrightarrow{\text{est.}} \text{creciente}$
- Si $f(x) < 0 \Rightarrow x \xrightarrow{\text{est.}} \text{decreciente}$
- Si $f(x) = 0 \Rightarrow x \xrightarrow{\text{est.}} \text{cte.}$
- Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ tiene un pto de inflexión



Definición: Dada $\dot{x} = f(x)$, se dice que $x^* \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o punto de equilibrio si $f(x^*) = 0$.

Definición: Un punto de equilibrio se dice estable si toda perturbación cerca de él desaparece en el tiempo. Dicen que es inestable si tales perturbaciones crecen en el tiempo.

• En s. si x^* estable, toda solución que comienza en $x^* + \epsilon$ (1st peg) tenderá a x^* . Si es instable, se alejará de él.

Definición: Llamanos diagrama de fases a la gráfica de f junto al campo de vectores directores, es decir de vectores en el eje x $\{f(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ (es, en cada pt. del eje x se pone un flechita a la derecha si $f(x) > 0$ y a la izda si $f(x) < 0$). En este diagrama de fases = phase portrait.

Proposición: Sea x s. $\dot{x} = f(x)$, y sea x^* un pt. de equilibrio.

- 1) $f(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ es un punto estable
- 2) $f(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ es un punto inestable.

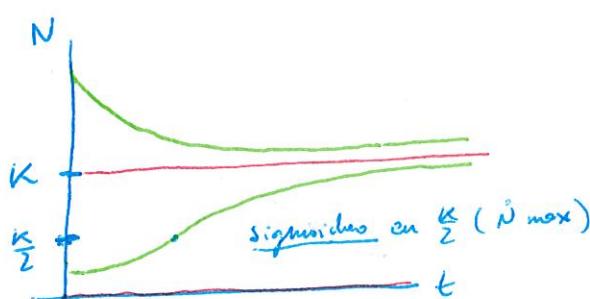
3) $f(x^*) = 0$ no hay criterio general, puede ser de turb! Hay que dibujar $f(x)$ y anclar el diagrama de fases.

Otro pt. puede ser semiestable si el campo nro sentado a derecha e izda del pt. fijo.

• La curva logística (de Verhulst): El crecimiento poblacional viene determinado por la ec. dif

$$\boxed{\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)}$$

- $r > 0$ define la tasa de crecimiento (proporcional al nro de individuos)
- $K > 0$ es la capacidad de carga del ecosistema. Mide la competencia por los recursos que hay. Si $N > K$, est. h. pd. disminuye por la escasez de recursos.



$$y \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K.$$

Solución exacta: si $N(0) = N_0$,

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

Definición: Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la ec. dif. $\dot{x} = f(x)$. Llaves campo vectorial de pendientes (CVP) a la representación en el plano $tx^* (\mathbb{R}^2)$ del campo tangente $D = \{D_{(t,x)} = (\varepsilon, f(x) \cdot \varepsilon)\}_{(t,x) \in \mathbb{R}^2}$. (es decir que $D_{(t,x)}$ es igual en todo una recta horizontal, a x fijo).

Llaves campo vectorial de trayectorias (CVT) a la representación de las trayectorias soluciones en el plano.

- Las trayectorias deben de ser tangentes al campo en todos los ptos, por def de soluci.

BIFURCAZIONES EN SISTEMAS 1-DIM

- Se quiere estudiar cómo un sistema definido por 1 ecuación varía su comportamiento dependiendo de 1 (o más) parámetro. Para ciertos valores del parámetro se producirá un cambio brusco, de ahí el nombre de bifurcación.

- Consideremos una ecuación $\dot{x} = f(r, x)$, dependiente de un parámetro $r \in \mathbb{R}$. Si x^* es un pto fijo, tenemos $0 = f(r, x^*)$.

Definición: Si llamamos diagrama de bifurcación al plano $r-x^* (\mathbb{R}^2)$ juntando la gráfica de la ecuación $f(r, x^*) = 0$.

Al punto (r_c, x_c^*) que hace que varie el comportamiento se le llama punto de bifurcación o punto crítico.

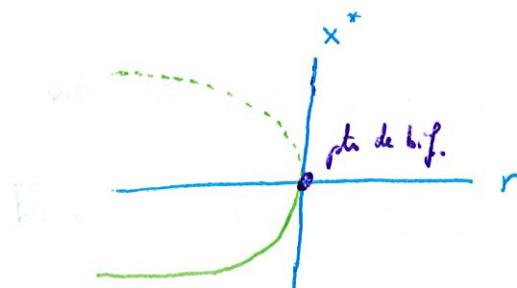
Si $f(r, x^*) = 0$ se divide en dos ramas continuas si el pto fijo es estable y divergente no es instable.

En las ramas de $f(r, x^*) = 0$ se dice q. tienen sentido si el pto fijo es estable y divergente no es instable.

Veas los tipos:

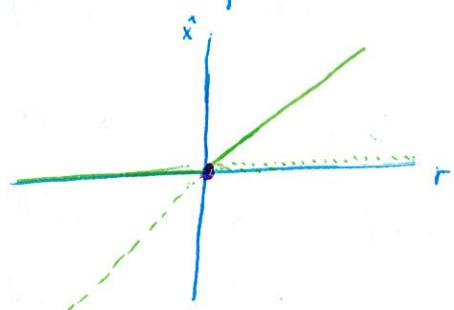
1) Bifurcación silla-nudo :

$$\boxed{\dot{x} = r + x^2} \quad (\text{ec. reducida})$$



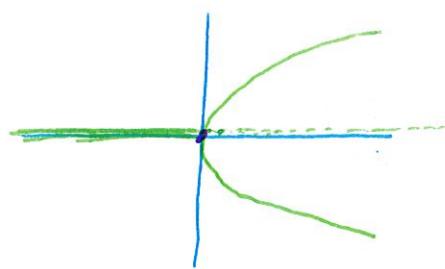
2) Bifurcación transcritical :

$$\boxed{\dot{x} = rx - x^2}$$

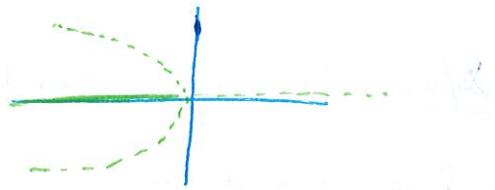


3) Bifurcación pitchfork supercrítica :

$$\boxed{\dot{x} = rx - x^3}$$



4) Bifurcación pitchfork subcritica : $\begin{cases} \dot{x} = rx + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$



- Se le pueden añadir más parámetros, y se tiene una cuspíscica grande.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES 2-DIM

- Trajectorias son sol. de ED de 2 vars, grado 1 y lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ si } \begin{cases} a & \text{lineal} \\ b & \text{lineal} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases}$$

Definición: Llamanos espacio de fases al plano $xy (\mathbb{R}^2)$, y diagrama de fases al espacio de fases juntas las trayectorias solucion de la ED.

Llamanos campo vectorial de direcciones (CVD) al espacio de fases donde se representa el campo tangente.

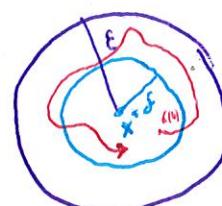
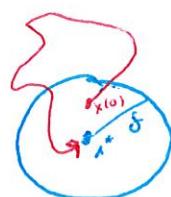
$$D = \left\{ D_{(x,y)} = (\epsilon \cdot f_1(x,y), \epsilon \cdot f_2(x,y)) \right\}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2}, \quad \epsilon \text{ - fijo.}$$

Definición: Sea x^* un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$

a) Se dice que x^* es attractivo si $\exists \delta > 0$: si $\forall x(t) \text{ trayectoria}$ $\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow x^* \text{ cuando } t \rightarrow \infty$.

En otros palabras: todo trayectoria que empieza a distancia $< \delta$ de x^* convergerá a x^* .

b) Se dice que x^* es estable (más preciso, Liapunov estable) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall x(t) \text{ trayect. t.q. } \|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon \quad (t > 0)$. En otros palabras: todo trayectoria que empieza a distancia $< \delta$ de x^* permanece a distancia $< \epsilon$ de x^* .



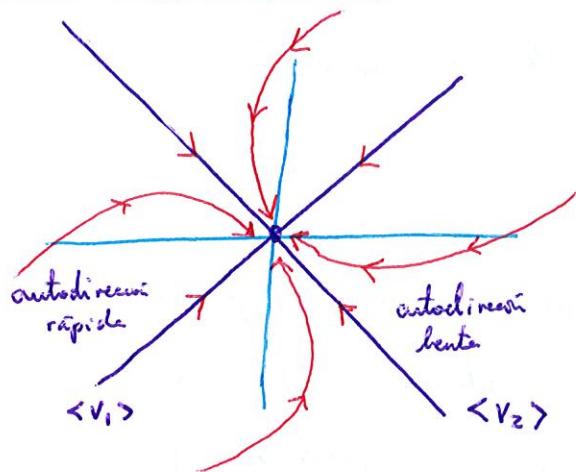
c) Dices que \vec{x}^* es asintóticamente estable si es atractivo y estable.

Teorema (de Clasificación): Sea $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ un sistema de ED lineal de dim 2, y sean λ_1, λ_2 los autovalores de A ($=$ raíces de la ec. char). Entonces el sistema es de uno de los siguientes tipos:

Caso I: A tiene dos autovalores reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\in \mathbb{R}$.

A es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists \vec{v}_1, \vec{v}_2$ autovectores L.I. de autovalores λ_1 y λ_2 , resp.

Caso I.1: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Nudo estable $((0,0))$.

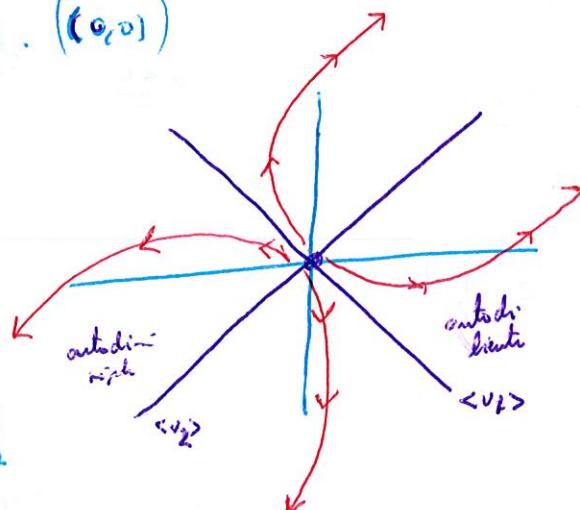


Los solns son de la forma

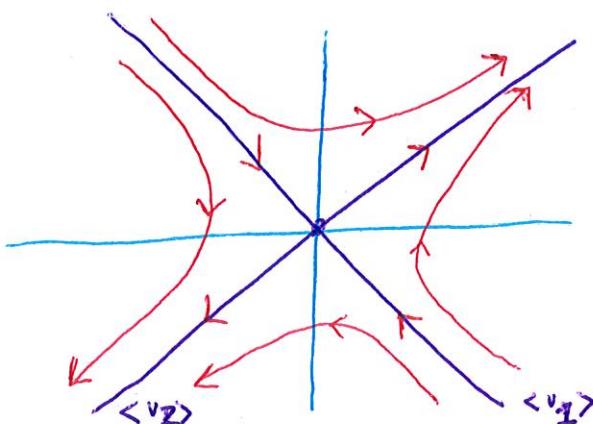
$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

• Como $\lambda_1 < \lambda_2$, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ más rápidamente que $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que la parte de eigenvector \vec{v}_1 más rápida (por lo que tiende a ser "lenta").

Caso I.2: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Nudo instable. $((0,0))$



Caso I.3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Punto de silla



Los sols son

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ mientras que $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$. Toda la tendencia apunta a v_2 .

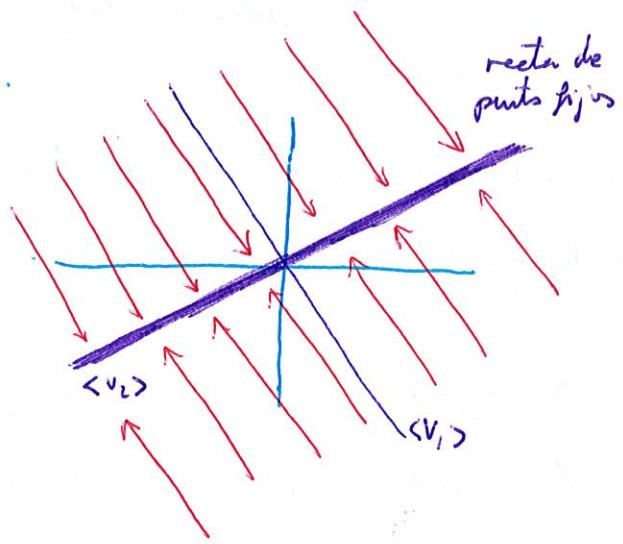
Caso I.4 : $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$: Punto "antena".

La sol son

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

este cayendo es cte.

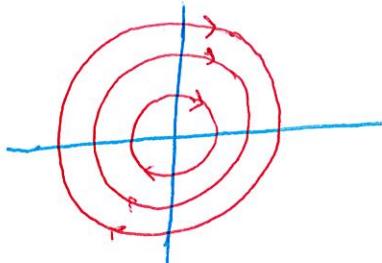
(Si $\lambda_1 > 0$ serían ↘)



Caso II : Raices conjugadas -conjugados $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$.

Si v_i son autovectores de autovalor λ_i , las sol. L.I. son $\operatorname{Re} v_i e^{\lambda_i t}, \operatorname{Im} v_i e^{\lambda_i t}$.

Caso II.1 : $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$: Centro.



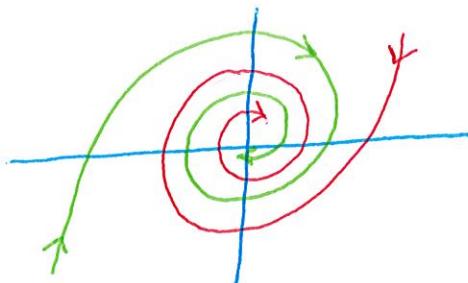
- La sol es un folinero de sen y cos ; periódico.
- El sentido de giro se determina mirando en los ejes (barriendo $x=0$ o $y=0$) y viendo el signo de \dot{x} o \dot{y} , resp.

Caso II.2 : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$: Espiral estable.

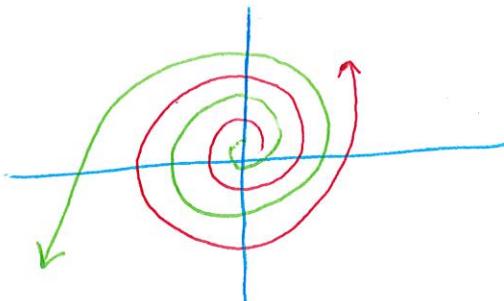
La sol es

$$x(t) = e^{\alpha t} (\text{folin de sen y cos})$$

↓
o si: $t \rightarrow \infty$



Caso II.3 : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$: Espiral inestable



La sol es

$$x(t) = e^{\alpha t} (\text{folin de sen y cos})$$

↓
o si: $t \rightarrow \infty$

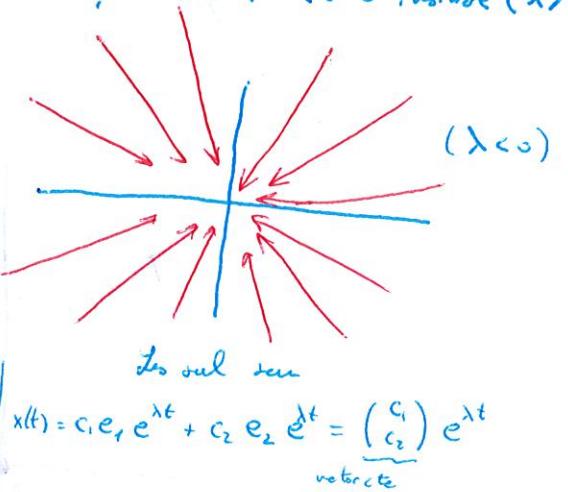
Caso III : Raíces reales e iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$

Caso III.1 : A diagonalizable : Nodos radiales o estrella; estrella ($\lambda < 0$) o inestable ($\lambda > 0$)

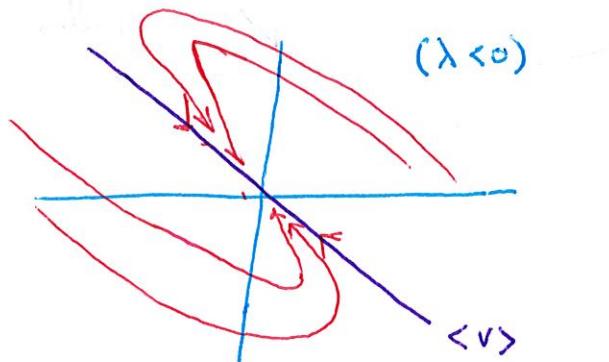
Si A diag. $\exists v_1, v_2$ L.I. autovectores de λ , luego
en una base canónica $(\lambda) = \lambda \text{Id}$, luego tendríamos
en todo caso : $P \lambda \text{Id} P^{-1} = \lambda \text{Id}$. El st. es

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad \text{Tb se le llama caso desacoplado}$$

- Si $\lambda = 0$; est. A = 0 y todo punto es punto fijo. $x(t) = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 e_2 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$



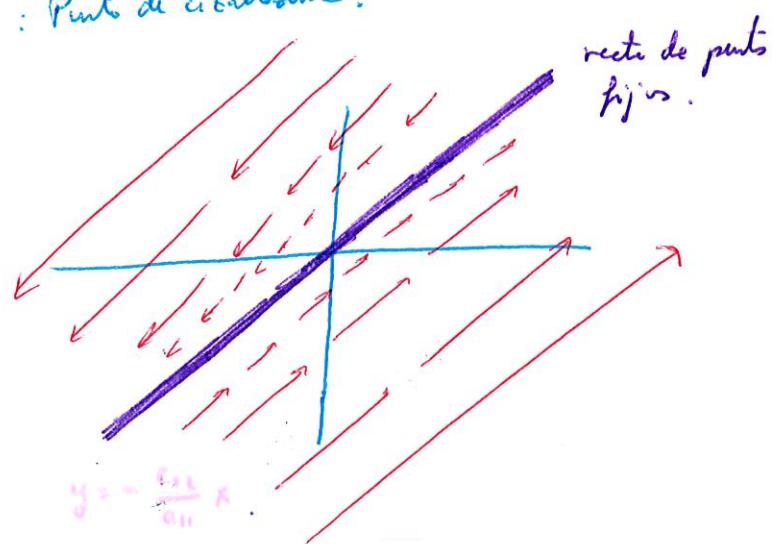
Caso III.2 : A no diagonalizable, $\lambda \neq 0$: Nodos degenerados; estrella ($\lambda < 0$) o inestable ($\lambda > 0$)



$$x(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (w + vt) e^{\lambda t},$$

donde v es un autovector de orden λ , (w otro vector)

Caso III.3 : A no diagonalizable, $\lambda = 0$: Punto de círculo.



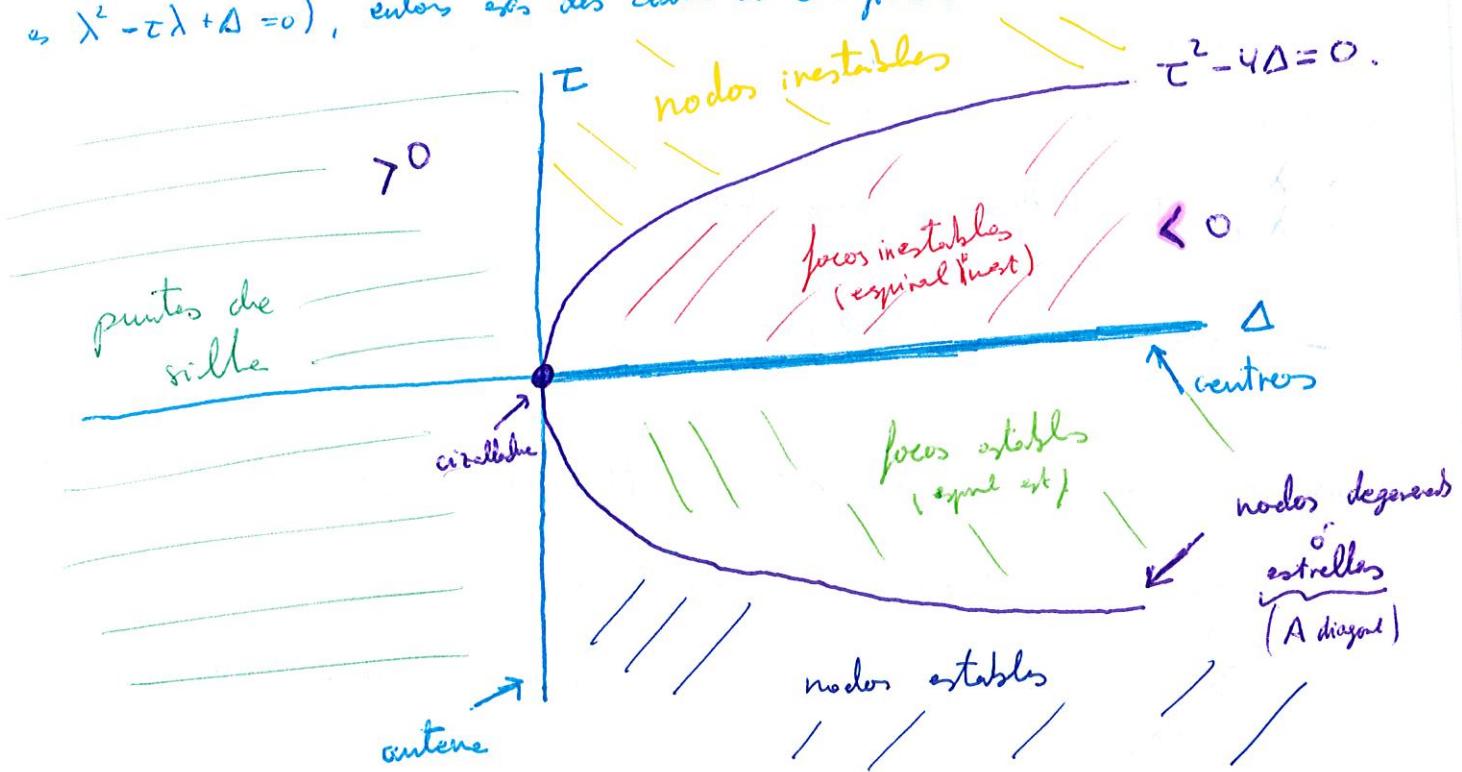
todos los casos se refieren al punto $(0,0)$.

Misión, punto que las raíces de la ec. característica quedan determinadas por los invariantes

$$\tau = \text{tr}(A)$$

$$\Delta = \det(A)$$

[pues $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$], estos son los criterios clasifican autovectores la ec. dif:



SISTEMAS NO LINEALES

• Se trata de graficar el gráfico en un entorno limitado o no limitado: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$

Definición: Pongamos el sistema (*) . Una orbita es una curva en el plano de fase donde $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0$. (no son trayectorias solas!). A donde ambas variables se cogen, sea un pto $fijo$.

• Podemos linearizar (*) en torno a un pto fijo (\bar{x}, \bar{y}) para ver su estabilidad local:

Lema: Sea (\bar{x}, \bar{y}) un pto fijo de (*). Si $u = \bar{x} - x$, $v = \bar{y} - y$, entonces el sistema linealizado en torno (\bar{x}, \bar{y}) es

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(\bar{x}, \bar{y}) & f_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

• ¿Cuándo es correcto extender el concepto de un pto fijo del sistema linealizado al sistema no lineal? Con un gráfico se ve que centros .. lejos de la orilla..

Definición: Damos casos marginales a los centros y los atractores con $\lambda \leq 0$ (S. estables), y, a los ptes que son fronteras de zonas de estabilidad diferente, que separan zonas estables de instables. El resto se llaman casos robustos.

Definición: Consideremos un sistema no lineal, y sea M la matriz del sistema linealizado, esto es

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f(x,y) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + g(x,y) \end{cases} \quad , \quad M = (a_{ij}).$$

Se dice que el punto $(0,0)$ es un punto fijo simple del sistema (no lineal) si

- i) $\det M \neq 0$
- ii) f, g, f_x, f_y, g_x, g_y son continuas en un entorno de $(0,0)$.

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Tecorres (A, de tipo de punto): Si $(0,0)$ es un punto fijo nífle del sistema no lineal, y γ es un punto fijo no fronterizo (ie, pt. nlla, o modo estable/instable) o císpide) $\xrightarrow{\text{del límite}}$ el pto fijo del sistema no lineal es del mismo tipo que el del sistema lineal.

Teorema (B, de tipo de estabilidad): Si $(0,0)$ es un punto fijo simple del sistema no lineal, y es un punto fijo robusto del lineal \Rightarrow el pto fijo del sistema no lineal tiene la misma estabilidad que el del lineal.

Proposición. Sea $\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \exists F(x,y) : C = \{F=0\}$, y

dåta upptar $\frac{\partial F}{\partial y} = f$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -g$ (k värde integrand).

Definición: Un sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice conservativo si existe una función $E(x)$ que sea constante en las trayectorias, i.e., tal que $\widehat{E(x_t)} = \circ$ $\forall x(t)$ trayectoria

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \ddot{y} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \end{cases} \quad E(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \text{cte.} \quad (\text{se mantiene } \underline{\text{desacoplado}})$$

Proposición:

- 1) Los sistemas conservativos no pueden tener puntos fijos attractivos.
- 2) En los sistemas conservativos los centros son hiperbólicos. Con precisión: sea $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1$, en el sistema conservativo. Si x^* es un punto fijo atráctivo (i.e., no hay más pts fijos en un entorno S_0) \exists una trayectoria γ que converge a x^* .

Definición: Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es reversible si se cumple que $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow x$.

por el cual $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow -x$. Esto dice que el CVD es simétrico w.r.t. eje x (resp. eje y), más

$$(x, y) \rightarrow (f(x), g(x))$$

$$(x, -y) \rightarrow (-f(x_0), g(x_0))$$

$$f(x,y) \quad g(x,y)$$

Definición: Un círculo límite es una trayectoria cerrada atrásped (esto es, que las trayectorias próximas no son cerradas), espirales tienden hacia el círculo límite (son secciónes de él). En el caso son estables, y en el caso instables (si abren medio estables).

- Son propias de los sistemas no lineales. Típico en los límites (por $x(t)$ satisface $\Rightarrow \lambda x(t)$ satisface).

Definición: Se dice $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ una solucion, y sea $E(x)$ un función escalar ^{difinida en una región} que corresponde a $\vec{r}(t)$. Se dice velocidad de cambio de $E(x(t))$ a lo largo de la trayectoria es

$$\dot{E}(x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{E}(t) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g.$$

Definición: Un sistema gradiente es un sistema $\dot{x} = -\nabla V$, donde V es una función escalar de clase C^1 , llamado potencial. I.e., $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \end{cases}$.

Propiedad: En sistemas gradientes no hay órbitas cerradas.

Definición: Se $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $E(0,0) = 0$ y sea R una región que contiene a $(0,0)$. Se dice que E es

a) definida positiva si $E(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ en R

b) definida negativa $<$

c) semidefinida positiva \geq

d) semidefinida negativa \leq

Definición: Se $E \in C^1(R)$, $(0,0) \in R$ región. Se dice que $E(x,y)$ es función de tipo de Liapunov de un sistema $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ si

i) $E(x,y)$ es definida positiva

ii) La velocidad de cambio $\dot{E}(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g$ es semidefinida negativa.

iii) E es definida negativa, se dice que E es función fuerte de Liapunov.

Teorema (Método de Liapunov) : Sea el sistema $\begin{cases} \dot{x} = f \\ \dot{y} = g \end{cases}$

- 1) Si existe un función definitiva de Liapunov $E(x)$ para el sistema en una región que contiene $x_0(0)$ \Rightarrow el punto fijo $(x_0, 0)$ es estable.
- 2) Si existe una función fuerte de Liapunov $E(x)$ para el sistema en una región que contiene $x_0(0)$ \Rightarrow el punto fijo $(x_0, 0)$ es asintóticamente estable.

Lema: Sea $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

- 1) E def. positiva $\Leftrightarrow a > 0, 4ac - b^2 > 0$
- 2) E def. negativa $\Leftrightarrow a < 0, 4ac - b^2 > 0$

Teorema (Criterio de Dulac) : Sea $\dot{x} = f(x)$ en \mathbb{R} , $f \in C^1(\mathbb{R})$, \mathbb{R} simplemente conexo en \mathbb{R}^2 .

Si existe $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{sgn} \nabla^+(gf)$ no continúa en $\mathbb{R} \Rightarrow$ \mathbb{R} no tiene caminos cerrados completamente dentro de \mathbb{R} .

Teorema (Poincaré - Bendixson). Supongamos que

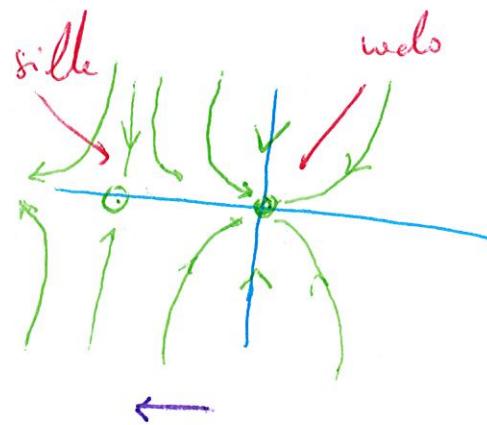
- 1) \mathbb{R} es un conjunto del plano cerrado conexo
 - 2) $f \in C^1$ en un ST que contiene a \mathbb{R}
 - 3) \mathbb{R} no contiene puntos fijos
 - 4) \exists una trayectoria C contenida en \mathbb{R}
- $\Rightarrow \mathbb{R}$ contiene una trayectoria cerrada. (que sea C , y si $x \in C$ gire en torno de x (tradicional)).
- El límite gr no puede haber caos en \mathbb{R}^2 (mg)

Cor: ~~En \mathbb{R}^2 no existe caos~~

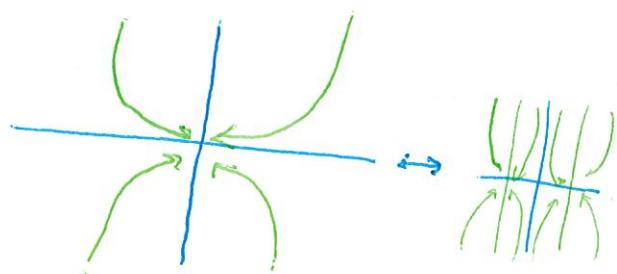
BIFURCACIONES EN $n > 2$

1) Bifurcación de la nula:

Crear - destruir de los pts fijos de estabilidad opuesta



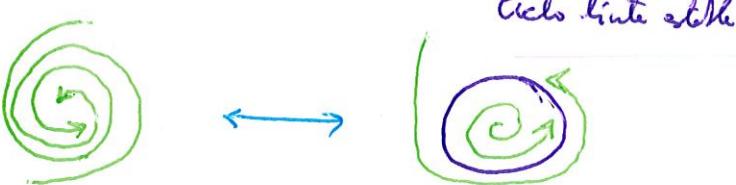
2) Bifurcación de horca supercrítica



3) Bifurcación de Hopf supercrítica :

Si tocas un pt. fijo estable, girando un parámetro conseguimos entrar al modo agitado de los anteriores.

"diente": $\xrightarrow{\text{pt. estab}} \xrightarrow{\text{estab}} \xrightarrow{\text{estab instab}} \text{PFE} \leftrightarrow \text{CLE}$
 $\xrightarrow{\text{estab instab}}$ \rightarrow espiral instable con ciclo límite.



4) Bifurcación de Hopf subcritica :

Un ciclo límite instable colapsa a radio 0 y renace hacia el que da origen



PFI \leftrightarrow CLI

ciclo límite en
espiral estable \rightarrow pt. \rightarrow espiral
instable.

III : SISTEMAS CAÓTICOS

Definición: Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Una síntesis de x_0 bajo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector

R_p se convierte con origen o semilla.

Ejeh (Tipos de artes):

1. Pts fijos : (x_0, x_0, x_0, \dots)
 2. Periódicas: $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_1, \dots)$ (\Rightarrow dice que tiene un ciclo de periodo n).
 3. Finitas fijas (avanzando ctes) : $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_n, x_n, \dots)$
 4. Finitas periódicas: $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+s-1}, x_{n+s} = x_n, x_{n+1}, \dots)$
 5. Convergentes.

*6. *Castanea*: madera de los astervios. Hace parte de la flora.

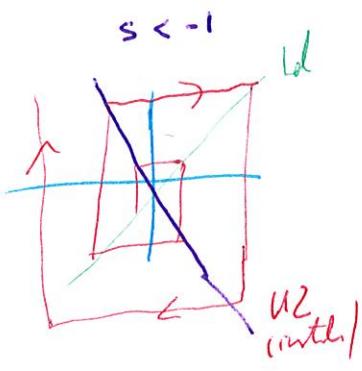
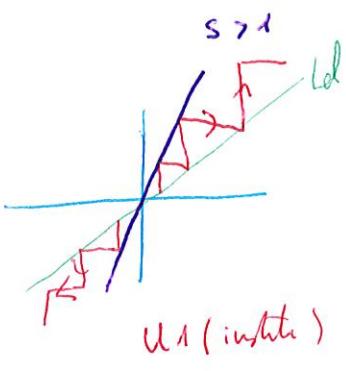
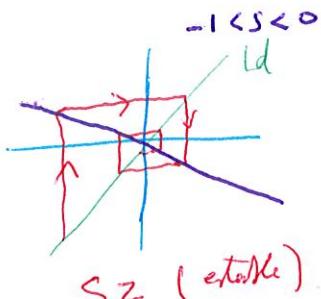
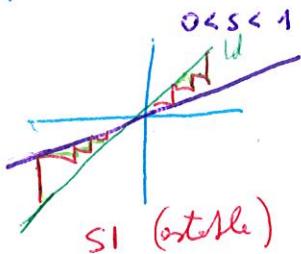
- Sensibilidad:** Grado de dependencia del algoritmo (inter) entre los parámetros en los c.i. Será más sensible si $p_{ij} = \text{constante}$ en los c.i., dan lugar a resultados distintos cuando $n \rightarrow \infty$. Otra rama: medida de como se definen los c.i. Los errores crecen en cada iteración, por tanto se debe considerar un criterio de proximidad, cuando la diferencia entre el resultado y el anterior sea menor que un criterio fijo.

Propriété. Considérons la suite $x_{n+1} = f(x_n)$. Excluons, si $x_n \rightarrow x$, que

- 1) $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^* \text{ is stable or attractor}$

2) $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^* \text{ is unstable or repeller}$

• Tipos de establecimientos: $S = pte$



SEÑALES DEL CAOS

1. Sensibilidad
2. Mixto
3. Imóviles pto. periódicos.

\leftarrow Leyes

Difini: Llaves iterador logístico a $x_{n+1} = f_a(x_n) = ax_n(1-x_n)$, $0 < a < 4$.

Sensibilidad según Lorenz: el error ilige a la del orden de la señal. Si los errores son grandes, pero los valores son muchos, no es sensibilidad.

• Sea x_0 y sea éste x_n , si ponen $x_0 := x_0 + \epsilon$, ϵ p. q.; y se obtiene x_n . Queremos saber $E_n = |x_n - x'_n|$.

Difini: Representemos n vs. λn , con f un sistema caótico. Los errores el punto, crecen de forma lineal.

Llaves expónete de Liapunov a la pte de tal recta.

• Si $\ln E_n \approx a + \lambda n \Rightarrow E_n \approx e^a \cdot e^{\lambda n} = e^a \cdot c^n$, donde $c > 1$. Se dice que c es el factor de crecimiento (medio) del error. Si $c=2$, entonces el error se dobla en cada iteración.

• $\lambda > 0$: los órbitas se separan. Se dice que hay sensibilidad a los c.i.

• $\lambda < 0$: " " juntas. Se dice que hay insensibilidad a los c.i.

Proposici: Sea x_0 el punto initial de un órbita.

$$\boxed{\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k+1})|}$$

• Con $E_n \approx E_0 c^n \rightarrow \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{E_n}{E_0} \right)$.

El exp. de Liapunov se puede interpretar como el valor medio de la expansión a lo largo de la órbita que empieza en x_0 . Los valores $\ln |f'|$ representan (el logaritmo de) la tasa a la que crece la señal en cada iteración.

Mixto: Los órbitas se distribuyen, se separan por todo el espacio. Otra df.: para cualquier punto de intersección I y J , se pueden encontrar pts en I que llegan a J tras T iteraciones. Otrs: qd cada órbita viene dada el ap. de fases.

$$f_4(\sin^2 \varphi) = \sin^2 2\varphi.$$

• S tiene ergodicidad, i.e., la órbita de un cierto "tipo" (no periódico) de $[0,1]$ es ergódica.

S caótica p.g. } 1. Sensibilidad
} 2. Mixtura
} 3. Pts. periódicos densos

$$T^n = TS^{n-1}$$

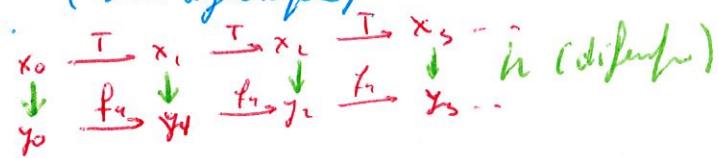
$$\downarrow \Rightarrow T \text{ caótica.}$$

Paso 3):

Ley: $w = S^n(w)$ (pto de periodo n) $\Rightarrow x_0 := T(w) \rightarrow$ un pto de periodo n para T .

Paso: Pts. periódicos de S densos \Rightarrow los de T tb.

Proposición: Los dinámicos bajo T y f_T son equivalentes en el sentido de que es posible pasar de la órbita de T $(x_0, T(x_0), \dots)$ a la de f_T $(y_0, f_T(y_0), f_T^2(y_0), \dots)$ mediante un cambio de escala, $y = h(x) = \sin^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)$. (son difeomorfos)



Puntos periódicos de $f_T(x_0)$:

w pto periodo de S (p.g. $w = 0, \overline{001}_2$) $\Rightarrow x_0 = T(w) = \frac{2}{7}$ periodo para $T = \frac{11}{7}$

 $\Rightarrow y = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \text{ tb.}$

(Ley del Ladrón): Una órbita generada por ordenador de f_T a partir de x_0 , no da el resultado de la verdadera órbita exacta (x_0, x_1, x_2, \dots) , por los errores (debido al sistema sensible). Pero el resultado que se obtiene existe (z_0, z_1, z_2, \dots) de la cual f_T sigue una buena aproximación. Los (y_0, y_1, \dots) no es útil

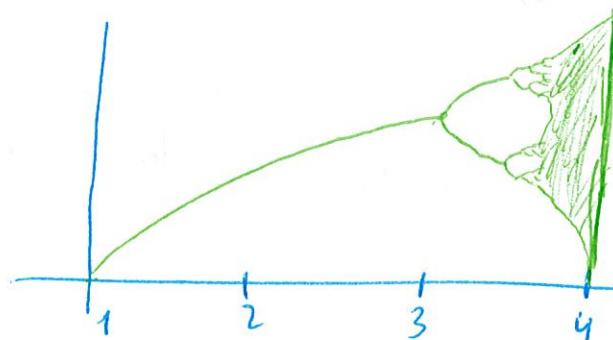
• \Rightarrow predicción a los z_j a partir de (x_0, x_1, \dots) .

• \Rightarrow se ven las propiedades.

RUTAS AL CAOS

- Ceros para \dot{x} recibido un punto del orden al caos

Diagrama de Feigenbaum o diagrama de estados finales: queremos conocer el comportamiento de los órbitas del iterado logístico, con $a \in [0,1]$. Si es, estados finales = órbitas sin transitorios ~~estas~~. Se representan los puntos finales de las órbitas, en eje a vs. x .
"pts de atracción"



- El diagrama de Feigenbaum del iterado logístico es una estructura fractal!! No es auto-similitud, clara, más geométrica.

- Si $b_i = \text{radio de la rama } i\text{-era} \quad (b_0 = 1, b_1 = 3, b_2 = 3,45, \dots)$, y

$$s_i = b_i - b_{i-1}$$

La longitud de las ~~ramas~~ parece decrecer de modo geométrico, $\frac{s_{k+1}}{s_k} \in (4,5, 5)$.

$$\text{En particular, } \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_{k+1}}{s_k} = \delta = \underline{\text{cte de Feigenbaum}} \approx 4,669$$

Aparece en otras dinámicas caóticas, en la naturaleza;

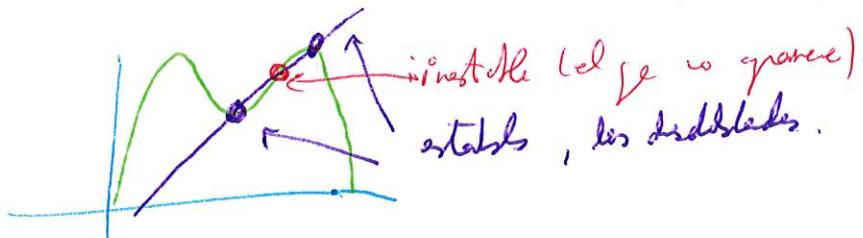
- Si los rens avientan cada vez nuevos, ¿cuál es el valor límite?

$$s_{\text{res}} = \log \frac{s_1}{1-\text{rama}} + \log \frac{s_2}{2-\text{rama}} + \dots = 2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \frac{1}{8} + \dots + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 8^{-n} = 2 \frac{1}{1-8^{-1}} = 3,5699 = \underline{\text{pt de Feigenbaum}}$$

At
↑ equivale a 1!

- Tabar la autoenjorza con los desplazamientos entre los copias.
- Teóricamente, deberíamos ver un recto de pto fijo tres 3, ademas de desdoblarse. Pero es instable, y por eso no aparece. $f_a'(p_0) = 2 - a$, con $a > 3$ es instable.

• Los reves se desdoblaron pq $g_a(x) = f_a^2(x)$, $g_a'(x) = [f_a'(x)]^2$, tan γ para $a > a > 3$,



• ¿Pj autoenjorza?



- Para $a > s_{\text{cr}}$, la ingen aparece s cogito: hay vectores periódicos, bandas indiferentes, superpuntos, ...

• Hay infinitas ventanas periódicas. En cada ventana de periodo n hay n copias del diagrama de Feigenbaum cuyas:

- Intermitencia: Aparecen periodos turbulentos irregulares, de duración cada vez más grande.

SISTEMAS CAÓTICOS DISCRETOS 2D



(T)

• Transformación de Bernoulli: Amasar y doblar una "hoja" (o una masa de pan)



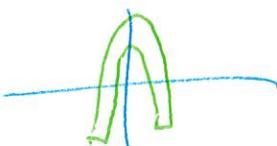
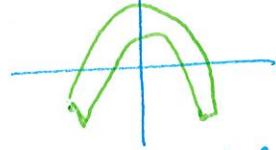
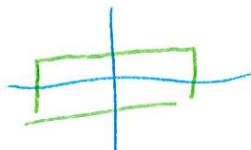
(S)

• Transformación del panadero: Amasar, cortar y pegar



→ Si $a < \frac{1}{2}$, al aplicar el proceso infinito sale un "cajita de Gálatas 2D".

• Transformación de Henon: Estirar, doblar un poco, encajar deje x , y reflexión (síntesis) en la recta $y=x$



→ Tiene un atractor, que es fractal

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

- Si $|b| < 1 \Rightarrow$ los atraerán infinitamente las trayectorias en la forma de un bucle.

Definición

def: Un attractor es un attractor de los puntos que

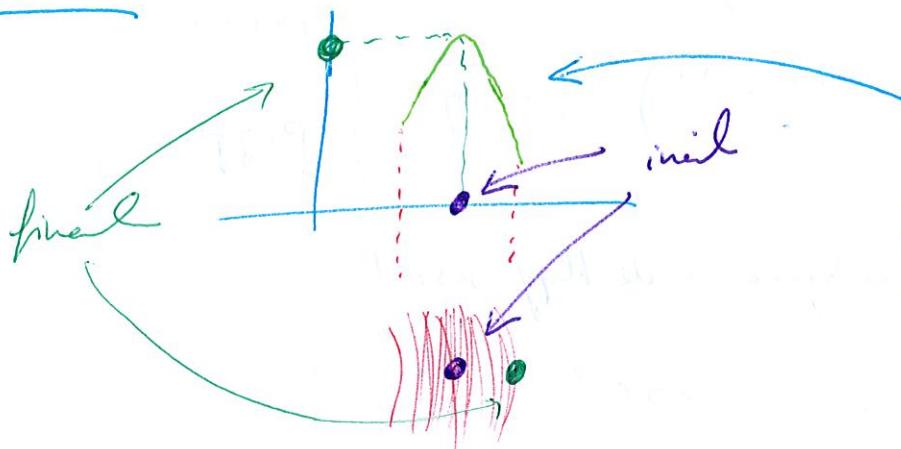
- i) Atracción: Existe una región $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y los puntos que convergen a A quedan atrapados en A .
- ii) Sensibilidad: Los puntos que convergen a A tienen sensibilidad al inicial.
- iii) Fractalidad: A es fractal.
- iv) Mixtura: Los puntos recorren todo A .

CAOS CONTINUO

• Sistema de Rossler: $\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + xz - cz \end{cases}$

Hay atractores y desplazamientos. Tú ve la fase!! (Al desplazarse)

- Maya de Lerma: Al dar un golpe, ¿a dónde va a parar el punto?



La linea
tiene grosor.
(los desplazamientos del atractor)

• Ecuaciones de Lorenz : Modelan la vía caótica de Lorentz.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = r x - y - x z \\ \dot{z} = b z + x y \end{cases}$$

- Modela el comportamiento de una capa de fluido calentado desde abajo

- Es sistema rep. $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

- Centra el volumen líquido (pequeña región del espacio de fases).

\Rightarrow - no puede haber ptos fijos repulsivos
- no puede haber órbitas cerradas repulsivas.

Ptos fijos:

$r \leq 1$: Solo uno: $P_1 = (0, 0, 0)$

$r > 1$: Hay 3: P_1, P_2, P_3

$\uparrow \quad \uparrow$
 "centros de giro"

Ejemplo: $r < 1$: No hay caos.

- Para el rto r_c ($= \frac{\alpha(1+\beta+3)}{\alpha-\beta-1}$)

, se verifica: $\left. \begin{array}{l} 1 \leq r < r_c : P_2 \text{ y } P_3 \text{ estables} \\ r > r_c : P_2 \text{ y } P_3 \text{ inestables.} \end{array} \right\}$

C^+ C^-

||

- Para $r = r_c$, hay una bifurcación de Hopf subcrítica

- ¿Dónde van las trayectorias w $r > r_c$? Quedan atrapadas entre P_2 y P_3

- Hay aneado.

Si $r > 1$, P_1 es instable

• No hay una definición de "caos" globálite aceptada, aunque

Def: El caos es un comportamiento no periódico y de larga duración en un sistema determinista que muestra la sensibilidad a los c.i.

Def: Un atractor es un conjunto ~~abierto~~ cerrado A con las siguientes propiedades:

- i) A es un conjunto invariante: si $x(t)$ espira en A, se quedará permanentemente en A
- ii) A atrae: by un abt. U : $A \subseteq U$: $x(0) \in U \Rightarrow d(x(t), A) \rightarrow 0$ $\text{cuando } t \rightarrow \infty$
- iii) A es minimo: no hay un subconjunto menor de A que cumpla i) y ii)

Def: Un atractor extraño es un atractor que muestra sensibilidad a los c.i.

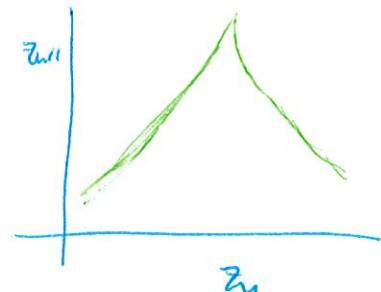
• ¿Es la nube de Lorenz un atractor extraño?

- 1) La trayectoria pasea que ~~esta~~ abandona la órbita una vez ^{ha alcanzado un atractor} cerca del centro
- 2) El aterriza con la que el catálogo es excedida pasea determinar el punto en el que el atractor entre en la órbita original
- 3) Esto determina el número de vueltas que da redondo alrededor del centro de equilibrio de nuevo.

Por tanto para que una órbita característica ^{en una vuelta} sea predecir tal característica en la otra vuelta.

Una otra cosa es el valor negativo de Z

• Tiende
de caerse!



el otro extremo

- Con el resto de puntos fijos, cambiando r , veremos que aparecen muchos otros óptimos.
- Pueden incluso convivir ptos fijos y óptimos extremos, dependiendo de los ~~c.c.~~ del resultado final.