

I : ECUACIONES NO LINEALES

• Se tratar de resolver $f(x) = 0$.

• MÉTODO DE LA BISECCIÓN (BOLZANO): Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $f(a=x_0) \cdot f(b=y_0) < 0 \stackrel{\text{Th Bolz}}{\Rightarrow} \exists$ una raíz α de f en $[a,b]$. Se evalúa $\frac{x_0+y_0}{2}$: si $f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) = 0$, fin, si no

$$-f(x_0) \cdot f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(x_0, \frac{x_0+y_0}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 := x_0 \\ y_1 := \frac{x_0+y_0}{2} \end{cases}$$

$$> 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{x_0+y_0}{2}, y_0\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 := \frac{x_0+y_0}{2} \\ y_1 := y_0 \end{cases}$$

Y se repite el proceso. Entres de obtener dos sucesiones $(x_n) \subset (y_n), (x_n)$ monótona creciente y acotada por $y_0 = b$; y (y_n) monótona decreciente por $x_0 = a \Rightarrow \exists \lim x_n = x, \exists \lim y_n = y$.

Propiedad (Convergencia de la Bisección): $x = y = \alpha$, i.e., ambas sucesiones convergen al mismo pt., que resulta ser la raíz.

Propiedad (Cota de error de Bisección): Fijado un intervalo de precisión ϵ , el número de iteraciones necesarias para que el error sea $< \epsilon$ es $n \geq \log_2 \frac{b-a}{\epsilon}$.

• MÉTODO DE LA REGLA -FALSI: Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $f(a=x_0) \cdot f(b=y_0) < 0$
 ⇒ $\exists x \in (a,b)$ raiz. Sea x_1 el pto de corte de la recta que une $(x_0, f(x_0))$ con $(y_0, f(y_0))$
 con el eje de abscisas, esto es, $x_1 = \frac{x_0 f(y_0) - y_0 f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$. Entonces si $f(x_1) = 0$, fin, si no

$$\begin{aligned} & \Rightarrow f(x_0) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow x \in (x_0, x_1) \Rightarrow y_1 := x_0 \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow f(x_1) \cdot f(y_1) < 0 \Rightarrow x \in (x_1, y_1) \Rightarrow y_1 := y_0 \end{aligned}$$

y de este modo se obtienen las sucesiones $(x_n) \in (y_n)$ (notar que ya no son crecientes ni
 descienden, ya que van dando "saltos").

Propiedad (Convergencia de la Regla -Falsi): La sucesión (x_n) converge a la raiz de f en $[a,b]$.

• MÉTODO DE NEWTON -RAPHSON:

Teorema (de Banach del punto fijo): Sea (X,d) un espacio métrico completo,
 i.e., hipótesis de cte < 1 . Entonces \exists pto fijo de T en X .

• Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (c,d)$ raiz. Consideremos una función g auxiliar, i.e., a cero de $f \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a$ pto fijo de g . Esto define al método.

Propiedad (Convergencia Global): Sea $g: [c,d] \rightarrow [a,b]$ derivable en (c,d) con
 $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [c,d] \Rightarrow g$ es contractiva y por tanto \exists pto fijo.

Propiedad (Convergencia Local): Sean $g: [c,d] \rightarrow [a,b]$, a un pto fijo, $g \in C^1([c,d])$ y
 $|g'(x)| < 1$. Entonces \exists un entorno de a : Si x_0 está en ese entorno la sucesión
 $(g^n(x_0)) \rightarrow a$.

• Sea $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (c, d)$ y $x_0 \in (c, d)$, con f derivable y $f'(x) \neq 0 \forall x \in [c, d]$.
 Tomar la recta a f en x_0 , y x_1 s el pto de corte con el ejé X : $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si $f(x_1) = 0$, fin; si no, se repite el proceso, y se obtiene la sucesión de Newton-Raphson,
 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; s der., tamb $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $(x_n) = (g^n(x_0))$.
 Notar que $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Propiedad (Convergencia local de NR): Sea $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(c, d)$, con $f'(x) \neq 0 \forall x$.

Entonces la sucesión de NR converge a α en un entorno de α .

• ¿Qué pasa si $f'(\alpha) = 0$?

Propiedad (Convergencia local de NR con raíces múltiples): Si $f \in C^p(c, d)$, y α es una raíz de multiplicidad p , i.e., $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) \neq 0$, $f^{(p)}(\alpha) = 0$, entonces la sucesión de NR converge en un entorno de α .

Definición: Un método se dice de orden p si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \text{cte.}$

Teorema: Si $g \in C^p(c, d)$, α pto fijo: $g'(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0 \Rightarrow$ el método definido por g , $(g^n(x_0))$, s de orden p.

Prueba: Sea $g: [c, d] \rightarrow [c, d]$, $\alpha \in (c, d)$, pto fijo, y $(x_n) \subset (g^n(x_0))$.

g derivable, $|g'(x)| \leq k < 1 \forall x \in [c, d] \Rightarrow |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - \alpha| \text{ fm.}$

II: SISTEMAS DE ECUACIONES

- $M_n = \{ \text{matrices cuadradas de orden } n \}$ es un EV.

Definición: Una norma metrícica en M_n es una aplicación $\|\cdot\|: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$i) \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$ii) \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

$$iii) \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$iv) \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

si se cumple iv) se dice que es una norma vectorial.

- Son normas vectoriales:

$$\|A\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\| := n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (\text{Frobenius})$$

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \sqrt{\rho(AA^t)}$$

suma de todos los elementos de la fila

suma de todos los elementos de la columna

$\rho = \underline{\text{radiopectral}}$

Definición: Se dice que una norma metrícica $\|\cdot\|_m$ es compatible con una vectorial

Definición: Si se cumple $\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in M_n$.

$\|\cdot\|_v$ (definida en \mathbb{R}^n) cuando

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

Definición: Dada una norma vectorial $\|\cdot\|_v$, llamaremos norma inducida por $\|\cdot\|_v$ a una aplicación sobre M_n definida por

$$\|A\|_m := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_v$$

Proposición: Los normas inducidas son normas matriciales. En particular, son compatibles con la norma vectorial que los induce.

Corolario: $\|\cdot\|_m$ norma inducida $\Rightarrow \|I\|_m = 1$.

• Con esto hemos dicho que cada una norma vectorial podemos centrizar una matricial. Al revisar todo: cada $\|\cdot\|_m$ se define sobre \mathbb{R}^n $\|x\|_v := \|x u^t\|_m$ para $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, y se cumple que es una norma vectorial, porque $\|\cdot\|_m$ es compatible con $\|\cdot\|_v$.

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_1$ inducida por $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ es

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_\infty$ inducida por $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ es

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_2$ inducida por

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

• En lo anterior se ha utilizado:

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Llamemos spectro de A a

$$\text{Spec } A = \{ \text{autovalores de } A \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |A - \lambda I| = 0 \}$$

y radiopectral a

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Spec } A} |\lambda|$$

- $A \in \mathbb{M}_n$ diagonalizable ($\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{M}_n$ invertible: $P^{-1}AP$ es diagonal) $\Rightarrow \exists$ base de autovectores
- A simétrica $\Rightarrow A$ diagonalizable

Proposición: Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Son equivalentes

- 1) A definida (semi-definida) positiva ($\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \forall x$)
- 2) $\Delta_k > 0 \ (\geq 0) \quad \forall k = 1, \dots, n$, donde $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$
- 3) Todas las autovalores de A son $> 0 \ (\geq 0)$.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Se verifica

- 1) $\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall \|\cdot\|$ norma matricial
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \|\cdot\|_\varepsilon$ norma matricial inducida tal que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Definición: Se dice que una sucesión de matrices $(A_n) = (A_1, A_2, A_3, \dots)$ es convergente a $A \in \mathbb{M}_n$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathbb{N}: \forall n > J \Rightarrow \|A_n - A\| < \varepsilon$. Si dice que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Tercera: Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Son equivalentes

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0 \in \mathbb{M}_n \quad (A^n = A \cdot \dots \cdot A)$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- 3) $\rho(A) < 1$
- 4) $\exists \|\cdot\|$ norma matricial inducida tal que $\|A\| < 1$.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{M}_n$ y $\|A\|$ sea una norma. Entonces

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Definición: Se dice que $A \in \mathbb{M}_n$ es invertible, y $\|A\|$ sea una norma. Si tiene números de condición de A a $C(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

- $C(A)$ indica el grado de variación que en un sistema dependiente de A se presenta cuando en las cond. iniciales tiene en el resultado final.

MÉTODOS DIRECTOS DE RESOLUCIÓN

- Tratar de resolver $Ax=b$ mediante transformaciones elementales, transformar A en una matriz diagonal, triangular, ...
- MÉTODO DE GAUSS: Se trata de transformar A en una matriz triangular superior:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{i=2, \dots, n \\ F_i = F_i - \frac{a_{ii}}{a_{11}} F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b'_n \end{array} \right) \xrightarrow{\dots \text{ } n-1 \text{ pasos}} \dots$$

$$\xrightarrow{T} \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & | & b'_n \end{array} \right) \quad \alpha^k = \text{paso } k-\text{elim.}$$

- Estas transformaciones son pasos inversamente multiplicables por rotinas de paso $L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{kk} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donde } \alpha_{ij} = -\frac{a'_{ij}}{a'_{jj}}.$$

- Por lo tanto, $T = L_{n_1} L_{n_2} \dots L_2 L_1 A$. Nota que los pivotes que $a_{kk}^{k^*} \neq 0 \forall k$, j) podés dividir. Si en algún paso es 0 debes intercambiar alguna fila para poder redividir el siguiente paso. Matriculto, conste en multiplicar por un matriz de permutación.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & k) & l) \\ & \ddots & & & 0 & 1 \\ & & 1 & & 0 & \dots \\ l) & & & \ddots & & 1 \end{pmatrix}$$

matriz que intercambia la fila k y l - escribir.

luego en general se tiene una factorización $T = P_{n_1} P_{n_2} \dots L_1 P_1 A$.

- Al redividir cada paso, para reducir errores de redondeos, se puede usar Gauss con pivote, que consiste en elegir de forma conveniente el dato por el que se divide.

- Pivote parcial: Se elige en cada paso el menor dato de la columna que tiene: se intercambian las filas correspondientes con tal de que se divida por dicho dato.

- Pivote total: Se elige en cada paso el menor dato de la matriz. Se deben intercambiar filas y columnas.

MÉTODO LU: Se tratará de encontrar una factorización $A = LU$, L triangular inferior y U triangular superior, lo que equivale a resolver un sistema de n^2 ecuaciones con n^2 incógnitas.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Fijando los n incógnitas sobrantes surgen los diferentes métodos de resolución:

- Doolittle: $l_{11} = \dots = l_{nn} = 1$.

- CROUT: $u_{11} = \dots = u_{nn} = 1$

- Choleski: $l_{ii} = u_{ii} \quad \forall i$, con A simétrica y definida positiva.

• OJO: La factorización LU no es única.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{M}_n$.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k=1,\dots,n \implies \exists L, U : A = LU.$$

Corolario: Si $l_{11} = \dots = l_{nn} = 1 \implies$ La factorización LU es única.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_n$ invertible.

$$A \text{ admite factorización LU} \iff \Delta_k \neq 0 \quad \forall k=1,\dots,n.$$

• FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY: Se trata de encontrar $B \in \mathbb{M}_n$ triángular inferior real tal que $A = BB^t$.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_n$ simétrica, invertible y real.

$$A \text{ admite factorización de Cholesky} \iff \Delta_k > 0 \quad \forall k=1,\dots,n.$$

Corolario: $b_{ii} > 0 \quad \forall i \implies$ La factorización es única.

• FACTORIZACIÓN QR: Se trata de another $Q \in \mathbb{M}$ ortogonal y $R \in \mathbb{M}$ triangular superior tal que $A = QR$.

Definición: Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, se llave matriz de Householder a una otra $H \in \mathbb{M}$ de la forma $H := I - 2 \frac{u u^t}{u^t u}$.

Propiedad: Sea $H \in \mathbb{M}$ de Householder.

- 1) H es simétrica y ortogonal
- 2) $\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^n \exists 0 \neq u \in \mathbb{R}^n : Hv = v - u$.

• El método de Householder para la factorización QR consiste en usar matrices de paso unitarios de Householder.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix} ; \text{ dada } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \text{ se dice } u = \begin{pmatrix} a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + \dots + a_{1n}^2} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \text{ luego } H_1 A_1 = A_1 - u \\ = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\dots} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } H_1 A = \begin{pmatrix} \sqrt{\dots} & \cdots & \cdot \\ 0 & \ddots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \text{ Se trata de seguir estos pasos mediante el método de Gauss hasta obtener una matriz triángular superior } T = \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1}_{H} A = H A. \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Householder}} A = H^{-1} T = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1} T \xrightarrow{\text{H es ortogonal}} \underbrace{H_1 \cdots H_{n-1}}_{\text{ortogonal}} \underbrace{T}_{R} = \underline{QR}.$$

Corolario: $r_{ii} > 0 \ \forall i \Rightarrow$ La factorización QR es única.

• Cómo resolver $Ax=b$ con estas factorizaciones:

- Gauss: $Ax=b \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow Tx=c$, T triangular.

- LU: $Ax=b \Rightarrow \underbrace{LUx=b}_{y} \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases} \rightarrow$ una vez tenemos y

- Cholesky: $Ax=b \Rightarrow \underbrace{BB^t x=b}_{y} \Rightarrow \begin{cases} B^t y = b \\ B^t x = y \end{cases} \rightarrow$ una vez tenemos y

- QR: $Ax=b \Rightarrow QRx=b \Rightarrow Rx=Q^{-1}b = Q^t b \stackrel{\text{nor}}{=} c \Rightarrow Rx=c$, R tri.

MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN

• Dado $Ax=b$, se tratará de crear una sucesión $(x_m) = (g^m(x_0))$ que converge a la solución para cierto función g . El límite será un pto. fijo de la g . Si: $F(x) = Ax - b$, se tratará de buscar el equilibrio x pto. fijo de $g \Leftrightarrow x$ n.c. de F .

• Si: $A = M - N$, M invertible, entonces $g(x) := M^{-1}(Nx + b)$ converge bajo ciertas hipó.

Proposición: Sea $A = M - N$ como ant., y considera la suces. $(x_{m+1}) = (M^{-1}(Nx^m + b))$

(x_m) es convergente $\Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$
a un pto. fijo

Lema: $\rho(M^{-1}N) < 1 \Rightarrow g(x) = M^{-1}(Nx + b)$ es contractiva

• Para aplicar la prueba de la prop. (\Leftarrow) hace falta tener en cuenta que si $\rho(M^{-1}N) < 1 \stackrel{\text{lue}}{\Rightarrow} g$ es continua $\stackrel{\text{teorema Bolzano}}{\Rightarrow}$ \exists pto. fijo.

- Considerons pour les systèmes linéaires descriptifs de A :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D + L + U$$

- MÉTHODE DE JACOBI : $M := D$, $N := -(L+U)$

- $M = D \Rightarrow$ inversible pas possible car les diagonales sont toutes nulles et l'intersection de deux lignes ou colonnes est nulle.

- Le système $x^{m+1} = D^{-1}[-(L+U)x^m + b]$ $\Leftrightarrow x_i^{m+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^m + b_i$.

- MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL : $M := D + L$, $N := -U$

- M inversible, cas des SPS.

- Le système $x^{m+1} = (D+L)^{-1}[-Ux^m + b] \Rightarrow x_i^{m+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j<i} a_{ij} x_j^{m+1} + \sum_{j>i} a_{ij} x_j^m \right] + b_i$.

- MÉTHODES SOR : $M := \frac{1-w}{w} D + L$, $N := \frac{1-w}{w} D - U$ ($w > 0$)

- M inversible SPS

- Noter que Gauss-Seidel \Rightarrow SOR avec $w=1$.

Definición: Una matriz A se dice diagonal dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| (=$
 \geq suma de todos los demás elementos de la diagonal) $\forall i, j$ estrictamente diagonal dominante si $>_x$.

Lema: A estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow A$ invertible.

Proposición: $A \circ A^t$ estrictamente diag. dom. \Rightarrow El método de Jacobi es convergente.

Proposición: $A \circ A^t$ estrictamente diag. dom. \Rightarrow SOR, $0 < w \leq 1$, es convergente.

Corolario: $A \circ A^t$ estrict. diag. dom. \Rightarrow Gauss-Seidel es convergente.

* Un método S.O.R. se dice subrelajado si $0 < w < 1$, y sobrerelajado si
 $1 < w < 2$. ¿Y para $w \geq 2$?

Proposición: S.O.R. para $w \geq 2$ no es convergente.

III : AUTOVALORES

Teorema (Gershgorin): Sea $A = (a_{ij})$. Entonces $\text{Spec } A \subset \bigcup_{i=1}^n B[a_{ii}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|]$.

• MÉTODO DE KLYKOV: Se trata de obtener el pol. caract. de una matriz A , digamos $p(x) = \sum a_i x^i$. Por Hamilton-Cayley, $p(A) = 0$, luego $V_j \in \mathbb{C}^n$, $\sum a_i A^i y = 0$. Entonces $a_{n-1} A^{n-1} y + \dots + a_0 y = (-1)^{n+1} A^n y$ es un s.t. de n ec. con n incognitas: a_0, \dots, a_{n-1} (pues $a_n = 1$). Si elegimos $y \in \mathbb{C}^n$: $\exists y, A_j, \dots, A^n y$ sea L.I. ((165) , no sigue de punto!) entonces una única sol., y el pol. caract. determinado.

• MÉTODO DE HEISENBERG:

Definición: Una matriz se dice de Heisenberg si es triangular superior con una subdiagonal: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & a_{jj} & \\ 0 & \ddots & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

• Sea A de Heisenberg, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces λ es autovalor $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_d) = 0$ \Leftrightarrow \exists sol. no nula (infinita) de $(A - \lambda I_d)x = 0$. Supongamos $x_n = 1$, se van a determinar los demás x_i de la primera, los valores de los x_i , en función de λ . Si $g(\lambda)$ es divisible por 1^{er} ec., entonces $g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor, i.e., $g(x) \geq 0$ (un múltiplo de) el pol. característico.

- MÉTODO DE LA POTENCIA: Se trata de calcular $\rho(A)$, Supón A diagonalizable, sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$, y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{Spec } A$. Sea $(x^n) := (A^n x^0)$, i.e., $x^{n+1} = Ax^n$.
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$, $|\lambda_i| = \rho(A)$. Se define $\beta_n := \frac{v^t x^n}{v^t x^0}$, con $v^t x^0 \neq 0$, donde v es un vector arbitrario (se suele elegir $v = x^n$, y a la β_n le llaman racorán de los coeientes de Rayleigh). Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lambda_1$.
 - Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, se elige una subsecuencia $(Y_k) \subset (\beta_n)$ formada por los términos pares (o impares), i.e., $Y_k = \frac{v^t x^{2k+2}}{v^t x^0}$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \lambda_1^2$.
- MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA: Se trata de calcular el autovalor más próximo a un cierto $\alpha \in \mathbb{C}$ elegido. ($\alpha = 0$, es el de módulo mínimo). Dado α , si w es autoval.
- $\det(A - \alpha I) \neq 0$ y $\exists (A - \alpha I)^{-1} := B$. Se elige $y^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y se construye la sucesión $(y^n) = (B^n y^0)$ (i.e. $y^{n+1} = B y^n$) como en el método de la potencia, y se sucesión (β_n) o (Y_n) , y se aplica, obteniendo μ_1 ó μ_1^2 (μ_1 = autoval. de mód. máximo de B). Puesto que $\lambda \in \text{Spec } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \alpha} \in \text{Spec } B$, cada $\mu_i \in \text{Spec } B$ $\Rightarrow \mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \alpha}$. Entonces $\frac{1}{|\mu_i|} = |\lambda_i - \alpha| < |\lambda_2 - \alpha| < \dots$, luego $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} + \alpha$.

MÉTODO QR DE FRANÇOIS: Sea $A \in M_n$. Considera $A_0 := A$, y luego se factoriza QR de A_0 : $A_0 = Q_0 R_0$. Entonces define $A_1 := R_0 Q_0^{-1}$, y luego se factoriza QR de A_1 : $A_1 = Q_1 R_1$, y $A_2 := R_1 Q_1^{-1}, \dots$. Puesto que $A_n = R_n Q_n \Rightarrow Q_n A_n Q_n^{-1} = Q_n R_n = A_0 \Leftrightarrow A_0$ es igual a su conjugado, se sigue a A_1 , etc. que todas las A_i son simétricas, i.e., tienen los mismos autovalores. Se prueba faltante que si $B := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$, y que si $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, y $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$, entonces B es triangular, y si A es real y simétrica, B es diagonal.

RESUMEN DE CLASE:

IV : ESPACIOS PREMILBERTIANOS

Definición: Se E un K -EV, $K = \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$. Un producto escalar es una aplicación $\bullet : E \times E \rightarrow K$, $(e, v) \mapsto e \cdot v \stackrel{\text{NOT}}{=} \langle e, v \rangle \stackrel{\text{NOT}}{=} e | v$, que satisface:

i) Definición positiva: $e \cdot e \geq 0$, y $e \cdot e = 0 \iff e = 0$.

ii) Hermitia (Sierto): $e \cdot v = \overline{v \cdot e}$

iii) Sesquilineal: $(\lambda e + \mu v) \cdot w = \lambda(e \cdot w) + \mu(v \cdot w)$.

• i) tiene sentido por ii): $e \cdot e = \overline{e \cdot e}$; $\forall e \in E$.

• $0 \cdot e = e \cdot 0 = 0$

• $w \cdot (\lambda e + \mu v) = \overline{\lambda}(w \cdot e) + \overline{\mu}(w \cdot v)$.

• Dentro de $\|e\| := \sqrt{e \cdot e}$.

Teorema: Se E un EV con un producto satisface:

1) Desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$|e \cdot v| \leq \|e\| \|v\|$$

2) Desigualdad de Minkowski o triangular

$$|e + v| \leq \|e\| + \|v\|$$

• La designada fórmula dice que la función $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{K}$, $\| e \| := \sqrt{e \cdot e}$ es una norma sobre E .

Definición: Un espacio prehilbertiano es un espacio vectorial E dotado de una norma $\| \cdot \|$ que procede de un producto escalar. Diremos que el espacio es de Hilbert si ademáis es completo, i.e., Cauchy \Rightarrow convergente.

Teatrero (von Neumann): Sea $(E, \| \cdot \|)$ un K -EV ($K = \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$).

E es prehilbertiano \iff Se verifica la Identidad del Paralelogramo:

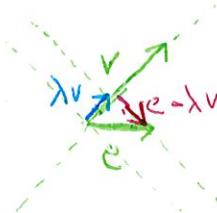
$$\| e+v \|^2 + \| e-v \|^2 = 2(\| e \|^2 + \| v \|^2).$$

Definición: Sea E un esp. prehil. Se dice que e, v son ortogonales, $e \perp v$, si $e \cdot v = 0$.

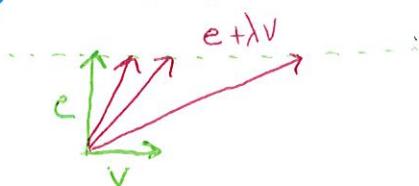
Teatrero (de Pitágoras): $e \perp v \Rightarrow \| e+v \|^2 = \| e \|^2 + \| v \|^2$.

Definición: Dados $e, v \neq 0$ en E , al único $\lambda \in \mathbb{K}$: $e - \lambda v \perp v$ se le llama coeficiente de Fourier de e .

$$\lambda = \frac{e \cdot v}{\| v \|^2}$$



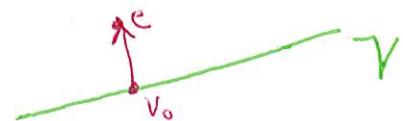
Definición: Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normado (no nec. prehil.). Se dice que $e, v \in E$ son ortogonales Birkhoff, $e \perp_B v$, si $\| e \| \leq \| e+\lambda v \| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$



Teatrero: Sea (E, \cdot) un espacio preh. y $e, v \in E$. Entonces

$$e \perp v \iff e \perp_{\mathbb{B}} v$$

Teatrero (de la proyección ortogonal): Sea (E, \cdot) un esp. preh., $R \in E$, y $V \subseteq E$ un subespacio de E . Entonces $\exists v_0 \in V : e - v_0 \perp V$.



Definición: Sea (E, \cdot) preh. y $V \subseteq E$ subespacio de E . Se llama aplicación proyección ortogonal a

$$\begin{aligned} P_V : E &\longrightarrow V \\ e &\longmapsto v_0 \end{aligned}$$

* Cálculo de la proj. ortogonal: Sea $V \neq \{0\}$. Si $v_0 = P_V(e)$, y $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V ,

$v_0 = \sum d_i u_i$. Sea $U = (u_i \cdot u_j)$, $\alpha = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} e \cdot u_1 \\ \vdots \\ e \cdot u_n \end{pmatrix}$. Entonces basta resolver

el sistema $U\alpha = \beta$.

APPROXIMACIÓN EN $C(I)$

• Sea $C(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$, que es un $\mathbb{E}V$ de dim ∞ . Además,

$\|f\|_\infty := \max_{x \in I} |f(x)|$ es una norma, llamada norma uniforme.

• La aplicación $(f \circ g)_2 := \int_a^b f(x) g(x) dx$ es un producto escalar, y la norma que induce se

llama norma cuadrática: $\|f\|_2 := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$. $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ es un espacio prehilbertiano.

• Dentro de $P_n := \{ \text{polinomios de grado } \leq n \text{ } f \subseteq C(I) \}$, sea $w(x)$ constante, luego dado $f \in C(I)$, $\exists p(x) \in P_n : f - p(x) \perp P_n$.

Proposición (Propiedades de pol. ortogonales): Sea $\{ \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \}$ una base de polinomios ortogonales en $C(I)$, tales que $\text{gr } \varphi_k = k \quad \forall k$.

- 1) $\{ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$ es una base de $P_n \quad \forall n$.
- 2) No hay un polinomio de grado n ortogonal a φ_n , pero todo pol. de grado $< n$ es ortogonal a φ_n .
- 3) Si la base esortonormal, es única salvo signo.
- 4) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio de norma mínima es φ_n .
- 5) Para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n tiene todas sus raíces simples y están en $\overset{\circ}{I}$.

Polinomios de Legendre: Consideremos $(C[-1,1], \| \cdot \|_2)$. Los polinomios de grado $\leq n$ son una base ortogonal. $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \cdot \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)}$; o bien: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \times P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

• Sobre $C(I)$, dado $w(x)$ una función, un producto escalar es $(g, f)_w := \int_a^b g(x) f(x) w(x) dx$.
Este $w(x)$ se le llama peso.

Polinomios de Tchebycheff: Sobre $(C[-1,1], \| \cdot \|_w)$, con $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se definen

los polinomios de Tchebycheff $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$; ó $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Los pol. $T_n(x)$ son los pol. de grado n más "ortogonales" al eje X , i.e., $\|T_n\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| = \|P_n\|_\infty$, $\text{gr}(P_n) = n$.

- En general S_Δ es una función polinómica definida en trozos.
 - Puesto que $S_\Delta^i := S_\Delta|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3$, tiene 4 coef. y hay n trozos.
x Tarea de recordar un resumen de la teoría con más info:
 - $S_\Delta^{(k)}(x_i) = S_\Delta^{(k+1)}(x_{i+1})$, $i=1, \dots, n-1$; $k=0, 1, 2$ = derivadas.
 - $S_\Delta^i(x_i) = y_i$.
 - $S_\Delta''(a) = 0 = S_\Delta''(b)$, da la unicidad del spline (que el s.t. sea SCP).

Método de los momentos: Se llave momento del spline $S_A(x)$, $A = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$, al vector $(M_0, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde $M_i := S_A^{(i)}(x_i)$. Si S_A es natural, $M_0 = M_{n+1} = 0$. Si trae de calcular el spline en función de los momentos y luego bajar los momentos. Para cada i , $S_A^{(i)}$ es un pol. de gr. 3, luego $(S_A^{(i)})''$ es una recta $\alpha x + b$. Los momentos se han exigido que en las nodos $S_A^{(i)}$ valgan M_i 's. A continuación se integra y se baje $S_A^{(i)}$, en función de los momentos y ctes de integración. Aplicando los condic. de interp. se bajan los ctes de integración. Luego se tiene en total $S_A(x)$ en función de los momentos. Para bajar los momentos se exige la continuidad de S_A' en los nodos.

VI : INTEGRACIÓN

• Se trata de crear una fórmula $I_n(f)$ que approxime a $I(f) := \int_a^b f$, $f \in \mathcal{R}[c, d]$.

Definición: Una fórmula de cuadratura es una expresión del tipo

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

donde los $a_i \in \mathbb{R}$ se llaman pesos y los $x_i \in [c, d]$ nodos. El error de la fórmula es $E_n(f) := I(f) - I_n(f)$. En todos los $\{x_0, \dots, x_n\} \subset [c, d]$.

Definición: Se dice que una fórmula de cuadratura $I_n(f)$ tiene un grado de precisión $\geq k$ si es exacta para $p(x) \in P_k$, i.e., $E_n(p) = 0 \quad \forall j=0, \dots, k$. Se dice que el grado de precisión es k si $E_n(x^{k+1}) \neq 0$.

FÓRMULAS INTERPOLADORAS: Se trata de aproximar f por su pol. de interpolación: $\int f \approx \int p_n$.

Usando la fórmula de Lagrange, dados $\{x_0, \dots, x_n\}$, $I_n(f) = \int_a^b p_n = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$, donde $a_i = \int_a^b l_i(x) dx$.

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES: Si son más equiespaciadas. Para los casos simples, se obtienen las mismas fórmulas de cuadratura que crean el pol. de interp.

- Trapezio: $I_T(f) = \frac{f(c) + f(d)}{2} (b - c)$

- Simpson: $I_S(f) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$; $h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = b$.

• Las fórmulas compuestas consisten en aplicar el Trapecio o Simpson en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I_{Tc}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{Ti}(f) \quad ; \quad I_{Sc}(f) = \sum_i I_{Si}(f).$$

• Si llame ene de interpolación a $f - p_n$. Entonces $E_n(f) = \int_a^b f - p_n$.

Proposición: Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, f suf. lisa, $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in [a,b]$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Entonces

$$1) E_T(f) = -\frac{f''(y)}{12} (b-a), \quad y \in (a,b).$$

$$2) E_S(f) = -\frac{1}{90} \frac{(b-a)^5}{z^5} f^{(4)}(y), \quad y \in (a,b)$$

$$3) E_{Sc}(f) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(y), \quad y \in (a,b)$$

• Para acotar el error, en general, se acota $f^{(4)}(y)$ por $\|f^{(4)}\|_\infty$, i.e., $\max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Proposición: Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, d $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y sea $I_n(f) = \sum a_i f(x_i)$ una fórmula de cuadratura.

$I_n(f)$ tiene un grado de precisión $\geq n \iff I_n(f) \ni$ fórmula de interpolación.

Proposición: Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 < \dots < x_n$, $I_n(f) = \sum a_i f(x_i)$, $r > 0$

$I_n(f)$ tiene un grado de precisión $n+r \iff \int_a^b x^r (x-x_0) \cdots (x-x_n) = 0 \quad \forall j=0, \dots, r+1$.

Teorema (Gauss): Sea (Q_n) una suc. de polin. ortogonales en $(C[-1, 1], \| \cdot \|_2)$, y sea $I_n(f)$ una fórmula de cuadratura.

$I_n(f)$ tiene un grado de precisión de $2n+1$ \iff los pts x_0, \dots, x_n son los ceros de Qntif los coef. a_0, \dots, a_n por procedimiento de interpolación

Corolario: El grado de precisión máximo que se puede obtener de una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es $2n+1$.