ULTRAFILTROS

JORGE BECERRA GARRIDO

Resumen

Los filtros en un espacio topológico generalizan la noción de convergencia de una sucesión. En estas notas nos centraremos en los filtros sobre $\mathbb{N}$, y nos plantearemos como objetivo dar varias caracterizaciones de un tipo particular de filtros, llamados ultrafiltros, desde el punto de vista del Análisis Funcional.

Aprovecharemos además el contexto en el que estamos para definir la completitud en un espacio vectorial topológico cualquiera, y también probar el teorema de Tychonoff.

Este documento pretende ser unas notas sobre filtros y ultrafiltros. Se incluyen resultados y demostraciones que comentarán los compañeros, pero que son necesarios para que éste sea un texto coherente y consistente por sí mismo.

La exposición versará sobre las secciones 3 y 4. En particular, la tarea exacta que debía realizar es el teorema 4.3. En la exposición también se comentará el teorema 4.6, que resume las diferentes caracterizaciones de los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ dadas en este documento. Si queda tiempo, se probará el famoso teorema de Tychonoff mediante el uso de filtros.

1 Redes y filtros

En primer lugar vamos a poner el contexto en el que los ultrafiltros surgen de modo natural. Empezaremos generalizando el concepto de sucesión:

Definición. Un orden $\leq$ (es decir, una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva) en un conjunto $\mathcal{D}$ se dice **filtrante** si para cada $x, y \in \mathcal{D}$ existe $z \in \mathcal{D}$ tal que $x \leq z, y \leq z$. A todo conjunto ordenado $\mathcal{D}$ cuyo orden sea filtrante lo llamaremos **conjunto dirigido**.

Definición. Una **red** en un conjunto X es una aplicación $\mathcal{D} \longrightarrow X$, donde $\mathcal{D}$ es un conjunto dirigido. Si x_d es la imagen de $d \in \mathcal{D}$, a la aplicación se le suele denotar como la familia $(x_d)_{d\in\mathcal{D}}$.

Dado un espacio topológico (X, τ), en adelante denotaremos como $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de los entornos de $x \in X$.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un red (x_d) se dice **convergente** a $x \in X$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists D \in \mathcal{D} : d \geq D \Longrightarrow x_d \in V$$

Es un resultado bien conocido que en $\mathbb{R}$ (con su topología usual) las sucesiones caracterizan la continuidad. Sin embargo, esto no ocurre en espacios topológicos en general. En cambio, las redes sí caracterizan la continuidad en espacios topológicos generales:

Teorema 1.1 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces T es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier red que converja al punto x, la imagen sea una red que converja a $T(x)$.*

Nótese que de la definición de convergencia de una red $(x_d)_{d\in\mathcal{D}}$ se extrae que si $S_d := \{x_e : e \geq d\}$, entonces la convergencia de la red a un punto $x \in X$ equivale a que para cada entorno $V \in \mathcal{V}(x)$ exista un $S_d \subset V$. A los conjuntos S_d de este tipo les llamaremos **secciones finales de la red**.

El concepto de red puede ser a menudo difícil para trabajar. Lo que vamos a hacer es buscar un concepto de convergencia para colecciones de conjuntos que tengan las propiedades de las secciones finales de una red. Aquí es donde surge el concepto de filtro:

Definición. Sea X un conjunto. Un **filtro** $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de X (i.e., $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$) que cumple:

(i) $\mathcal{F} \neq \varnothing$ y $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(ii) $F, F' \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}$.

(iii) $F \in \mathcal{F},\ F \subset F' \Longrightarrow F' \in \mathcal{F}$.

Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ es **libre** si $\bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$.

Nota 1.2 Algunos autores eliminan la condición (i) de la definición y llaman filtros *propios* a los filtros distintos de $\mathcal{P}(X)$. Por simplicidad nosotros no haremos tal distinción.

Ejemplos 1.3

1. Dado un conjunto X arbitrario podemos definir un filtro sobre él: el **filtro trivial** $\mathcal{F} := \{X\}$.

2. Sobre $\mathbb{N}$ podemos definir el siguiente filtro: para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{U}_n := \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}.$$
A este filtro, que no es libre (pues $n \in \bigcap \mathcal{U}_n$) se le llama **filtro principal** centrado en $n \in \mathbb{N}$.

3. Sobre $\mathbb{N}$,
$$\mathcal{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A^c \text{ sea finito}\}$$
es un filtro, llamado **filtro de Fréchet**. Necesariamente es libre pues, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{m\}^c \in \mathcal{F}$.

4. Si (X, τ) es un espacio topológico, dado $x_0 \in X$, $\mathcal{V}(x_0)$ también es un filtro, llamado **filtro de entornos**. Es claro que no es libre, pues $x_0 \in \cap \mathcal{V}(x_0)$.

5. Si (x_d) es una red, el conjunto de secciones finales no forman un filtro (no cumple (iii)), pero los superconjuntos de las secciones (es decir, los $A \subset X$ tales que $S_d \subset A$) sí forman un filtro. A tal filtro le llamaremos **filtro de secciones de la red**.

Estudiemos la noción de convergencia de filtros en espacios topológicos:

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un filtro $\mathcal{F}$ en X se dice **convergente** a $x \in X$ si $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, es decir, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de x.

Llegados a este punto, merece la pena enunciar la noción de completitud en espacios vectoriales topológicos. La noción que hasta ahora conocíamos de completitud sólo tiene sentido en espacios métricos.

Definición. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico, y $\mathcal{F}$ un filtro. Se dice que $\mathcal{F}$ es un **filtro de Cauchy** si

$$\forall V \in \mathcal{V}(0)\ \exists F \in \mathcal{F} : x, y \in \mathcal{F} \Longrightarrow x - y \in V.$$

Una red $(x_d)_{d \in \mathcal{D}}$ se dice **de Cauchy** si el filtro de secciones de la red es de Cauchy. Si $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, a la red se le llama **sucesión de Cauchy**.

Definición. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Se dice que X es **completo** si todo filtro de Cauchy es convergente. Equivalentemente: si toda red de Cauchy es convergente.

A partir de ahora nuestro objetivo va a ser generalizar la noción de límite de una sucesión en espacios topológicos (o mas concretamente, espacios de Banach). En particular, vamos a definir la noción de convergencia de una sucesión según un filtro en $\mathbb{N}$. Para ello, en primer lugar, necesitamos el siguiente

Lema 1.4 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación, y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces*

$$f_*\mathcal{F} := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

*es un filtro en Y, que llamaremos **imagen directa** de $\mathcal{F}$ por f.*

Demostración. Solo hay que comprobar que se cumplen las propiedades de filtro:

1. Es claro que $\varnothing \notin f_*\mathcal{F}$, y que $f_*\mathcal{F}$ no es vacío pues $Y \in f_*\mathcal{F}$ porque $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{F}$.

2. Si $A, B \in f_*\mathcal{F}$, entonces $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, luego $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, por lo que $A \cap B \in f_*\mathcal{F}$.

3. Supongamos que $A \in f_*\mathcal{F}$ y sea B verificando $A \subseteq B$. Entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Como $A \in f_*\mathcal{F}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, luego $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, con lo que resulta que $B \in f_*\mathcal{F}$. $\square$

Definición. Sea (x_d) una red en un espacio topológico X, es decir, una aplicación $f : \mathcal{D} \longrightarrow X$; y sea $\mathcal{F}$ un filtro en $\mathcal{D}$. Se dice que la red (x_d) **converge a** $x \in X$ **según el filtro** $\mathcal{F}$ si el filtro $f_*\mathcal{F}$ converge en X. Se dice también que x es el $\mathcal{F}$-límite de (x_d), o que $x = \lim_{\mathcal{F}} x_d$.

Equivalentemente para $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: una sucesión (x_n) en un espacio topológico X converge a x según un filtro $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ ,\ \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{V}(x)\} \in \mathcal{F}.$$

Para en el caso en el que además $X = \mathbb{R}$, puesto que los entornos básicos son los intervalos abiertos, la definición se reduce a que

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

Ejemplos 1.5 1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos el filtro principal centrado en m, $\mathcal{U}_m = \{A \subseteq \mathbb{N} : m \in A\}$. Entonces, si (x_n) es una sucesión cualquiera en $\mathbb{R}$, se cumple que $x_m = \lim_{\mathcal{U}_m} x_n$. En efecto, basta darse cuenta que para cada $\varepsilon > 0$, los conjuntos del tipo $\{n : |x_n - x_m| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_m$ porque m siempre está en ellos, ya que $|x_m - x_m| = 0 < \varepsilon$.

2. Si $\mathcal{F}$ es el filtro de Fréchet, y (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a un punto x en el sentido usual, $x = \lim x_n$, entonces $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n$. En efecto, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para cualquier $n > \nu$. Luego entonces $\{n : |x_n - x| < \varepsilon\}^c \subseteq \{1, \ldots, \nu\}$, luego es finito, y por tanto $\{n : |x_n - x| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son filtros sobre un conjunto X, su intersección $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 := \{F \subseteq X : F \in \mathcal{F}_1 \text{ y } F \in \mathcal{F}_2\}$ es un filtro, y menos fino que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$. Sin embargo, dada una familia de filtros dada, en general no hay un filtro más fino que todos lo de la familia. Sin embargo, cuando dicha familia es una cadena, la unión de los filtros que la forman (entiéndase $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 := \{F \subseteq X : F \in \mathcal{F}_1 \text{ ó } F \in \mathcal{F}_2\}$) es un filtro más fino que todos los de la cadena. Puesto que el conjunto de todos los filtros sobre un conjunto X está parcialmente ordenado respecto la inclusión, el lema de Zörn afirma que existen filtros maximales:

Definición. Llamaremos **ultrafiltros** a los filtros maximales de un conjunto X. En otras palabras: un filtro $\mathcal{U}$ será un ultrafiltro si cada vez que para otro filtro $\mathcal{F}$ se verifique que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces deberá ser $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Teorema 1.6 (Tarski) *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Dado un filtro $\mathcal{F}$, basta aplicar el argumento anterior del lema de Zörn sobre el conjunto

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{F}} := \{\text{filtros en } X \text{ que contengan a } \mathcal{F}\}.$$

En efecto, dada una cadena $\{\mathcal{F}_i\}$ en $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, la unión $\cup_i \mathcal{F}_i$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}$, y más fino que todos los de la cadena; luego es cota superior de ésta. El lema de Zörn afirma por tanto la existencia de elementos maximales en $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, esto es, de ultrafiltros que contienen a $\mathcal{F}$. □

Teorema 1.7 (Propiedad básica de los ultrafiltros) *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X. Entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si para cualquier $A \subseteq X$ se cumple que o bien $A \in \mathcal{F}$ o bien $A^c \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $\Rightarrow$). Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que $A^c \notin \mathcal{F}$, y veamos que debe ser $A \in \mathcal{F}$. Como $A^c \notin \mathcal{F}$, entonces A^c no contiene a ningún elemento de $\mathcal{F}$ (pues si contuviera a alguno entonces también estaría, por (*iii*)), así que A corta a todos los elementos de $\mathcal{F}$. Tomemos la colección $\{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$. Tal familia de conjuntos no forma un filtro, pero sí genera el filtro $\mathcal{F}_A$ de superconjuntos de esos elementos. Pero ahora bien, ya que para cada $B \in \mathcal{F}, A \cap B \subset B$, se tiene que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$, y como $\mathcal{F}$ es maximal, debe ser $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$. Así que $A \in \mathcal{F}_A = \mathcal{F}$, y hemos terminado.

$\Leftarrow$). Procedamos por reducción al absurdo: si $\mathcal{F}$ no fuera maximal, existiría otro filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Así podríamos encontrar $A \in \mathcal{G}$ tal que $A \notin \mathcal{F}$. Por hipótesis debe ser que $A^c \in \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$, por lo que tendríamos que $\varnothing = A \cap A^c \in \mathcal{G}$, lo cual es absurdo. $\square$

Ejemplos 1.8 1. Sobre $\mathbb{N}$, el filtro $\mathcal{U}_n := \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$ es un ultrafiltro, pues para $A \subseteq \mathbb{N}$ bien A bien A^c contienen a n.

2. El filtro de Fréchet $\mathcal{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A^c \text{ sea finito}\}$ no es un ultrafiltro: tanto el subconjunto $\mathbb{P} := \{\text{números pares}\}$ como su complementario $\mathbb{I} := \{\text{números impares}\}$ son infinitos.

3. Dar un ejemplo de un ultrafiltro libre de forma explícita no es trivial. Sin embargo sí podemos *rozar* alguno mediante el lema de Zörn: sea $\mathcal{F}$ un filtro libre (por ejemplo, el filtro de Fréchet). Consideremos ahora el conjunto

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}^{\text{libres}} := \{\text{filtros libres en } X \text{ que contengan a } \mathcal{F}\}.$$

Dada una cadena $\{\mathcal{F}_i\}$ en $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}^{\text{libres}}$, la unión $\cup_i \mathcal{F}_i$ es un filtro libre, pues

$$\bigcap_{\substack{B \in \mathcal{F}_i \\ \text{para cierto } i}} B \subset \bigcap_{B \in \mathcal{F}_1} B = \varnothing,$$

y contiene a todos los filtros de la cadena, por lo que el lema de Zörn afirma la existencia de ultrafiltros libres.

2 Filtros y compacidad

Aunque se desvíe ligeramente del objetivo de estas notas, llegados a este punto aprovecharemos para probar un importante teorema de la Topología que no se ha probado en el grado: el teorema de Tychonoff. Haremos uso del concepto de ultrafiltro para dar su demostración. Antes necesitaremos algunos resultados previos que también nos harán falta más adelante:

Lema 2.1 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto X, y sean $A_1, \ldots, A_n \subset X$. Se cumple que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U} \iff A_j \in \mathcal{U} \textit{ para algún } j = 1, \ldots, n.$$

Demostración. $\Leftarrow$). Es evidente por ser $\mathcal{U}$ un filtro.

$\Rightarrow$). Por reducción al absurdo: si $A_i \notin \mathcal{U}$ para todo i, entonces por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro tendríamos que $A_i^c \in \mathcal{U}$ para todo i, y por tanto

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathcal{U},$$

lo cual es absurdo pues entonces $\varnothing = (\cup_{i=1}^n A_i)^c \cap (\cup_{i=1}^n A_i) \in \mathcal{U}$. $\square$

Definición. Sea X un conjunto y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** (en adelante PIF) si para todo subconjunto <u>finito</u> de índices $J \subseteq I$ se tiene que

$$\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing.$$

Lema 2.2 *Sea X un conjunto y tomemos una colección $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ tiene la PIF entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que los contiene.*

Demostración. Sea

$$\Gamma := \left\{ \bigcap_{\text{finita}} A_i \right\}_{i\in I},$$

que no contiene al vacío por verificarse la PIF. Este conjunto genera un filtro

$$\mathcal{F} := \{\text{superconjuntos de elementos de } \Gamma\},$$

y por el teorema de Tarski está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$. El hecho de que para cada $i \in I$

$$A_i \in \Gamma \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$$

termina la prueba. $\square$

Teorema 2.3 *Sea X un espacio topológico.*

(1) X es compacto si y sólo si todo ultrafiltro en X converge a al menos un punto.

(2) X es Hausdorff si y sólo si todo ultrafiltro en X converge a lo sumo a un punto.

Demostración. (1) $\Rightarrow$). Por reducción al absurdo: si X fuera un espacio topológico compacto donde hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que no converge a ningún punto, entonces para cada punto $x \in X$ existiría un entorno abierto G_x de x tal que $G_x \notin \mathcal{U}$. Ahora, $X = \cup_{x\in X} G_x$, y como X es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, $X = \cup_{i=1}^n G_{x_i}$. Pero como $X \in \mathcal{U}$, por el lema 2.1 algún $G_{x_i} \in \mathcal{U}$, con lo que llegamos a contradicción.

$\Leftarrow$). Probemos el contrarrecíproco: si X no fuera compacto, existiría un recubrimiento $X = \cup_{i\in I} G_i$ del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito. Como $X = \cup_i G_i$, $\varnothing = \cap_i G_i^c$, y ninguna subcolección finita de dichos complementarios puede tener intersección vacía (pues si $\varnothing = \cap_{i=1}^n G_i^c \Longrightarrow X = \cup_{i=1}^n G_i$, lo que no puede ser porque X no es compacto). Por tanto, la colección $\{G_i^c\}$ cumple la PIF, y por el lema 2.2 hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que los contiene. Ahora, para cada $x \in X$, $x \in G_i$ para cierto G_i del recubrimiento, pero como $G_i^c \in \mathcal{U}$, entonces $G_i \notin \mathcal{U}$. Luego ningún x puede ser el límite del filtro $\mathcal{U}$.

(2) $\Rightarrow$). Si X es Hausdorff, dados $x \neq y$, existen unos entornos V y W de x e y respectivamente disjuntos. Luego ningún ultrafiltro (más aún, ningún filtro) puede contener a V y W (¡pues contendría a su intersección $\varnothing$!); luego ningún ultrafiltro puede converger a dos puntos distintos.

$\Leftarrow$). Probemos el contrarreciproco: si X no fuera Hausdorff, existirían dos puntos distintos $x \neq y$ tal que, para todo entorno V de x y todo entorno W de y, se cumpliría que $V \cap W \neq \varnothing$. Así que el conjunto $\Gamma = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$ tiene la PIF, y por el lema 2.2 hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que lo contiene, con lo que tendríamos que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{V}(y) \subset \mathcal{U}$, luego el filtro convergería a x e y. $\square$

Corolario 2.4 *Un espacio topológico X es compacto y Hausdorff si y sólo si todo ultrafiltro posee un único límite.*

Corolario 2.5 *Todo elemento de l_∞ tiene un único límite según un ultrafiltro.*

Teorema 2.6 (Tychonoff) *El producto directo arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto.*

Demostración. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una colección arbitraria de espacios topológicos compactos, y escribamos $X := \prod_{i\in I} X_i$. Se trata de ver que X es compacto, o de acuerdo con el teorema 2.3.(1), que todo ultrafiltro converge al menos a un punto.

Sea $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ la proyección i-ésima y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. De acuerdo con el lema 1.4 la imagen directa $(\pi_i)_*\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X_i (faltaría el carácter maximal: si $B \subset X_i$, entonces como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro bien $\pi_i^{-1}(B)$ bien $\pi_i^{-1}(B^c) = (\pi_i^{-1}(B))^c$ está en $\mathcal{U}$, con lo que bien B bien B^c está en $(\pi_i)_*\mathcal{U}$). Como X_i es compacto, tal filtro converge a un punto x_i.

Vamos a probar que $x := (x_i)_{i\in I} \in X$ es un punto límite de $\mathcal{U}$. Se trata por tanto de ver que todo entorno de x en X está en $\mathcal{U}$. Pero ahora, los abiertos de X son intersecciones finitas de antiimágenes de abiertos de los X_i, y uniones de estas. Pero como los filtros son cerrados respecto a las intersecciones finitas y superconjuntos, bastará ver que los entornos abiertos de x del tipo $\pi_i^{-1}(G_i)$, con G_i abierto de X_i, están en $\mathcal{U}$.

Si $x \in \pi_i^{-1}(G_i)$, entonces $\pi_i(x) = x_i \in G_i$. Como x_i es un punto límite de $(\pi_i)_*\mathcal{U}$, entonces $G_i \in (\pi_i)_*\mathcal{U}$, y por tanto $\pi_i^{-1}(G_i) \in \mathcal{U}$, y hemos terminado. $\square$

3 Límites según filtros en $\mathbb{N}$

En lo que resta de documento nos centraremos en estudiar los filtros en $\mathbb{N}$ y los límites de sucesiones en $\mathbb{R}$ según estos filtros. Hasta ahora, parece que la noción de límite según un filtro no guarda relación alguna con la que todos tenemos en la cabeza de los epsilones. Sin embargo, más adelante veremos que una cierta clase de filtros sí se comporta como el límite usual, y más aún, lo extiende.

De momento vamos a ver que los límites según filtros en $\mathbb{N}$ cumplen dos propiedades que los límites usuales cumplen: son lineales y multiplicativos:

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, y sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones acotadas tal que $x = \operatorname{lím}_{\mathcal{F}} x_n$ e $y = \operatorname{lím}_{\mathcal{F}} y_n$.*

(1) $\lambda x = \operatorname{lím}_{\mathcal{F}} \lambda x_n \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

(2) $x + y = \operatorname{lím}_{\mathcal{F}}(x_n + y_n)$,

(3) $xy = \operatorname{lím}_{\mathcal{F}} x_n y_n$.

Demostración. (1) Si $\lambda = 0$ no hay mucho que decir: para cada $\varepsilon > 0$ $\{n : 0 = |0 - 0| < \varepsilon\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ para cualquier filtro $\mathcal{F}$. Si $\lambda \neq 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ $\{n : |x_n - x| < \varepsilon/|\lambda|\} \in \mathcal{F}$, y además

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/|\lambda|\} \subseteq \{n : |\lambda x_n - \lambda x| < \varepsilon\},$$

porque $|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\ |x_n - x| < |\lambda|\varepsilon/|\lambda| = \varepsilon$. Por tanto

$$\{n : |\lambda x_n - \lambda x| < \varepsilon\} \in \mathcal{F},$$

que era lo que se quería.

(2) Fijado $\varepsilon > 0$,

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2\} \in \mathcal{F} \quad , \quad \{n : |y_n - y| < \varepsilon/2\} \in \mathcal{F},$$

y por tanto también su intersección,

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2 \ \text{ y } \ |y_n - y| < \varepsilon/2\} \in \mathcal{F}.$$

Pero además se verifica la inclusión

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2 \ \text{ y } \ |y_n - x| < \varepsilon/2\} \subseteq \{n : |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon\},$$

porque $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, y por tanto

$$\{n : |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

(3) Como ambas sucesiones están acotadas, existe $M > 0$ tal que $|x_n|, |y_n|, |x|, |y| < M$. Fijado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2M\} \in \mathcal{F} \quad , \quad \{n : |y_n - y| < \varepsilon/2M\} \in \mathcal{F},$$

y por tanto también su intersección,

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2M \ \text{ y } \ |y_n - y| < \varepsilon/2M\} \in \mathcal{F}.$$

Pero además tenemos la inclusión

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon/2M \ \text{ y } \ |y_n - y| < \varepsilon/2M\} \subseteq \{n : |x_n y_n - xy| < \varepsilon\},$$

puesto que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \\ &\leq |y_n| \ |x_n - x| + |x| \ |y_n - y| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que concluye que

$$\{n : |x_n y_n - xy| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

□

Tras este teorema, parece que los $\mathcal{F}$-límites sí cumplen ciertas propiedades idénticas a lo límites tradicionales. Entonces, dada una cierta sucesión (x_n) que sea convergente en el sentido habitual a $x \in \mathbb{R}$, ¿será también $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n$ para cualquier filtro? En general la respuesta es <u>no</u>: la sucesión $(1/n)$ converge a 0 en el sentido usual, y en cambio, si consideramos el filtro principal centrado en 12, $\mathcal{U}_{12} = \{A \subseteq \mathbb{N} : 12 \in A\}$, ya se vio en 1.5 que será $1/12 = \lim_{\mathcal{U}_{12}}(1/n)$.

En cambio, en 1.5 también se vio que dada una sucesión (x_n) convergente en el sentido usual a un punto x, su límite según el filtro de Fréchet también será x. Pero entonces la pregunta es: ¿hay más filtros que cumplan esto?

Teorema 3.2 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Son equivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$ contiene al filtro de Fréchet.

(2) Para toda sucesión (x_n) convergente en el sentido usual, $\lim_{\mathcal{F}} x_n = \lim x_n$.

(3) $\mathcal{F}$ es libre.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $x = \lim x_n$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para cualquier $n > \nu$. Luego entonces $\{n : |x_n - x| < \varepsilon\}^c \subseteq \{1, \ldots, \nu\}$, esto, es finito; y por tanto $\{n : |x_n - x| < \varepsilon\}$ está en el filtro de Fréchet. Como éste está contenido en $\mathcal{F}$, se concluye que $\{n : |x_n - x| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Por reducción al absurdo: si $\mathcal{F}$ no fuese libre, existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Como por hipótesis para toda sucesión convergente el límite y $\mathcal{F}$-límite coinciden, $0 = \lim_{\mathcal{F}}(1, \overset{N)}{\ldots}, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. Pero entonces para $\varepsilon = 1/2$, se tendría que $\{N+1, N+2, \ldots\} = \{n : |x_n| < 1/2\} \in \mathcal{F}$, y llegamos a contradicción.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $\mathcal{F}$ es libre, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \in \mathcal{F}$ tal que $n \notin F_n$ (si no fuera así existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ no sería libre!). Ahora, para todo conjunto finito $M = \{n_1, \ldots, n_r\}$ el conjunto $F = \cap_{i=1}^r F_{n_i}$ es un elemento del filtro por ser intersección finita de elementos del filtro, y $n_i \notin F$ para ningún $i = 1, \ldots, r$; esto es, $M \subseteq F^c$, o lo que es lo mismo, $F \subseteq M^c$, y por tanto $M^c \in \mathcal{F}$. □

Estos dos teoremas anteriores aseguran que el término "*límite* según un filtro" está bien elegido: son lineales y multiplicativos; y además los límites según filtros libres coinciden con el límite usual. Y todavía más: si tomamos ultrafiltros libres, además tenemos que el límite de una sucesión acotada siempre existe y es único!

Con todo esto, ahora resulta natural hacerse la siguiente pregunta: si tomamos una sucesión que no sea convergente en el sentido usual, pero sí lo sea según un cierto filtro, ¿qué valores pueden ser tal límite?

Definición. Sea (x_n) una sucesión en un espacio topológico (X, τ). Se dice que $x \in X$ es **valor de adherencia** de la sucesión si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geq k\ :\ x_n \in V,$$

es decir, si sea como sea $V \in \mathcal{V}(x)$, en V hay infinitos términos de la sucesión.

Teorema 3.3 *Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $x \in \mathbb{R}$ es un valor de adherencia de (x_n) si y sólo si x es el límite de (x_n) según un filtro libre. En otras palabras:*

$$\{\text{valores de adherencia de } (x_n)\} = \{\text{límites de } (x_n) \text{ según filtros libres}\}$$

Demostración. $\Rightarrow$). Si $x \in \mathbb{R}$ es un valor de adherencia de la sucesión, entonces para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ y para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\{n \geq k : x_n \in V\} \neq \varnothing.$$

Por lo tanto vamos a definir la siguiente familia de conjuntos:

$$\Gamma := \left\{ \{n \geq k : x_n \in V\} \right\}_{k \in \mathbb{N},\ V \in \mathcal{V}(x)}$$

Se cumple que Γ es no vacío y el vacío no es uno de sus elementos, por definición; y además cumple la propiedad de la intersección finita, pues dados $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}(x)$, y $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{n \geq k_i : x_n \in V_i\} = \{n \geq \max_i \{k_i\} : x_n \in \cap_i V_i\} \in \mathcal{F},$$

porque $\max\{k_i\} \in \mathbb{N}$ y $\cap_i V_i$ también es entorno de x.

Por tanto, por 2.2 hay un filtro $\mathcal{F}$ que los contiene. Pero tal filtro debe ser libre, pues sólo para los conjuntos de Γ ya se tiene que la intersección debe ser vacía, pues k va recorriendo $\mathbb{N}$. Que $x = \lim_{\mathcal{F}}$ es trivial: tan sólo hay que elegir $k = 1$ en la familia de conjuntos Γ, que pertenece al filtro.

$\Leftarrow$). Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre, y pongamos $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n$. Entonces para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ $\{n : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$. Se trata de probar que x es un valor de adherencia de (x_n).

Sea $V \in \mathcal{V}(x)$ y $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{F}$ es libre, por el teorema 3.2 $\mathcal{F}$ contiene al filtro de Fréchet, así que $\{k, k+1, k+2, \ldots\} \in \mathcal{F}$. Por tanto

$$\{k, k+1, k+2, \ldots\} \bigcap \{n : x_n \in V\} = \{n \geq k : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$$

y hemos terminado. $\square$

Corolario 3.4 *Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $x \in \mathbb{R}$ es un valor de adherencia de (x_n) si y sólo si x es el límite de (x_n) según un ultrafiltro libre. En otras palabras:*

$$\{\text{valores de adherencia de } (x_n)\} = \{\text{límites de } (x_n) \text{ según ultrafiltros libres}\}$$

Demostración. $\Leftarrow$). Puesto que un ultrafiltro es un filtro, ésto lo dice el teorema anterior.

$\Rightarrow$). Si x es un valor de adherencia de (x_n), por el teorema anterior existe un filtro libre $\mathcal{F}$ tal que $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n$. Por el teorema de Tarski, ese filtro $\mathcal{F}$ estará contenido en un filtro maximal (es decir, un ultrafiltro) $\mathcal{U}$, que también es libre, y entonces se tiene que para cada $V \in \mathcal{V}(x)$

$$\{n : x_n \in V\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U},$$

por lo que también $x = \lim_{\mathcal{U}} x_n$. $\square$

4 Ultrafiltros en el Análisis Funcional

En esta última sección introduciremos el Análisis Funcional en toda la teoría de ultrafiltros que hemos desarrollado hasta ahora, que tenía únicamente un carácter topológico.

En el lenguaje del Análisis Funcional, el límite usual lím es un funcional lineal y continuo definido sobre el conjunto de sucesiones convergentes $(c, ||\cdot||_\infty)$, es decir, un elemento del dual, $\text{lím} \in (c, ||\cdot||_\infty)^*$. Más aún, es un funcional de norma 1. Pero lím no está definido sobre todo l_∞, pues no toda sucesión acotada es convergente. Sin embargo, puesto que $(c, ||\cdot||_\infty)$ puede verse como un subespacio de $(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$, el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de funcionales lineales y continuos sobre l_∞ que extienden a lím sobre c, y que además tienen la misma norma (esto es, norma 1).

Pero, de acuerdo con lo que hemos probado en 2.5, toda sucesión acotada (esto es, todo elemento de l_∞) tiene límite según un ultrafiltro. Si $\text{Uft}(\mathbb{N})$ denota el conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, lo anterior dice que la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Uft}(\mathbb{N}) &\longrightarrow l_\infty^* \\ \mathcal{U} &\longmapsto \text{lím}_\mathcal{U} \end{aligned}$$

está bien definida (es más, en general abusaremos de notación y diremos que "$f \in l_\infty^*$ es un ultrafiltro" cuando $f = \text{lím}_\mathcal{U}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{U}$). Ahora, no cualquier límite según un ultrafiltro extiende a limite usual: en 1.5 ya se vio que eso no pasaba si usábamos ultrafiltros principales. En cambio, el teorema 3.2 nos asegura que los límites según ultrafiltros libres sí extienden al límite usual, y además son los únicos. En otros términos: si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre, entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} |_c = \lim .$$

Notar además que $\text{lím}_\mathcal{U}$ es un funcional de norma 1 (tanto éste como el límite clásico alcanzan el supremo en la $||\cdot||_\infty$-bola unidad, en la sucesión $(1, 1, 1, \ldots)$, por ejemplo).

Toda la discusión anterior nos lleva a afirmar que sobre l_∞, los límites según ultrafiltros libres son algunos de los funcionales que obtenemos al extender el funcional lím de c a l_∞ vía Hahn-Banach.

En lo que resta nos vamos a dedicar a dar varias caracterizaciones de los ultrafiltros, desde la visión del Análisis Funcional. Antes de ello aún necesitamos un último concepto de la topología:

Definición. Sea X un espacio topológico. Se dice que un espacio topológico compacto y Hausdorff βX es la **compactificación Stone-Čech** de X si existe una aplicación continua $\beta : X \longrightarrow \beta X$ tal que para cualquier aplicación continua $f : X \longrightarrow K$ a un espacio compacto Hausdorff K existe una única aplicación continua $f^\beta : \beta X \longrightarrow K$ que satisface $f^\beta \circ \beta = f$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dashed, "f^\beta"] \\
K &
\end{tikzcd}
$$

Se puede probar que la compactificación Stone-Čech de cualquier espacio topológico existe siempre y es única (salvo homeomorfismo).

En el lenguaje de las categorías, si **Top** es la categoría de los espacios topológicos, cuyos morfismos son las aplicaciones continuas; y **Haus**.**Comp**. la categoría de espacios topológicos Hausdorff y compactos, con las aplicaciones continuas como morfismos, entonces la compactificación Stone-Čech induce el funtor

$$
\begin{aligned}
\beta : \mathbf{Top} &\rightsquigarrow \mathbf{Haus}.\mathbf{Comp}. \\
X &\longmapsto \beta X
\end{aligned}
$$

Un caso especialmente importante ocurre cuando el espacio topológico X es un **espacio de Tychonoff**, esto es, un espacio Hausdorff y con la propiedad extra siguiente: dado un punto $x \in X$ y un cerrado $A \subset X$ tal que $x \notin A$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = \{1\}$. En tal caso, se prueba que β es una inmersión de X en βX, y se puede considerar a X como subespacio denso de βX. Éste es el caso de $\mathbb{N}$ con la topología discreta (basta pensar en que las funciones indicadoras cumplen esa propiedad, y son continuas porque hemos dotado a $\mathbb{N}$ de la topología discreta). Por tanto,

Teorema 4.1 (Compactificación Stone-Čech de $\mathbb{N}$) *Existe un espacio topológico Hausdorff y compacto $\beta\mathbb{N}$ y una inyección continua $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \beta\mathbb{N}$ con imagen densa tal que toda función (continua y) acotada sobre $\mathbb{N}$ puede extenderse a través de i a una función continua sobre $\beta\mathbb{N}$.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[dl, dashed, "f^\beta"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}
\qquad f^\beta \circ i = f, \qquad \text{o bien,} \qquad f^\beta_{|\mathbb{N}} = f
$$

Un dato curioso: uno podría plantearse cuantos elementos tiene "lo que se le añade" a $\mathbb{N}$ para compactificarlo (esto es, $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$), recordando que $\mathbb{N}$ es un subespacio denso. Sorprendentemente, se puede demostrar que el cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es $\#\beta\mathbb{N} = \aleph_2 = 2^{\aleph_1} = 2^{2^{\aleph_0}}$, donde $\aleph_1$ es el cardinal de $\mathbb{R}$ y $\aleph_0$ el de $\mathbb{N}$.

Con todo lo comentado enunciamos ya un importante teorema. Antes, un breve apunte: una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ puede considerarse como elemento de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ (vía la función indicadora de la familia: $1_{\mathcal{F}}(A) = 1 \iff A \in \mathcal{F}$). Esto afirma que podemos considerar $\mathrm{Uft}(\mathbb{N}) \subseteq \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, y dotar a $\mathrm{Uft}(\mathbb{N})$ de la topología de subespacio inducida por la producto de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

Teorema 4.2 $\mathrm{Uft}(\mathbb{N})$*, dotado de la topología producto inducida, es la compactificación Stone-Čech de* $\mathbb{N}$*.*

Demostración. Puede consultarse en los apuntes de la asignatura, [2]. □

Merece la pena resaltar un aspecto de la demostración, y es el cómo se identifica $\mathbb{N}$ con los ultrafiltros: la copia de $\mathbb{N}$ que contiene $\mathrm{Uft}(\mathbb{N})$ está formada justamente por los ultrafiltros principales. Esto es, cada $m \in \mathbb{N}$ se identifica con el ultrafiltro principal

$$\mathcal{U}_m = \{A \subseteq \mathbb{N} : m \in A\}.$$

★★★**Teorema 4.3** *Sea $0 \neq f \in l_\infty^*$. Entonces f es un ultrafiltro si y sólo si f es multiplicativo, es decir,*

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

donde el producto se entiende coordenada a coordenada.

Demostración. $\Rightarrow$). Si $f = \lim_{\mathcal{U}}$, ya hemos probado en 3.1 que es multiplicativo.

$\Leftarrow$). Si f es multiplicativo, entonces para la sucesión $1 = (1, 1, 1, \ldots)$ se tiene

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2,$$

con lo que $f(1)(1 - f(1)) = 0$ y solo hay dos alternativas: bien $f(1) = 1$ bien $f(1) = 0$; pero esta última no puede ser, puesto que entonces para cada $x \in l_\infty$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$$

y f sería nula. Así que $f(1) = 1$.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y tomemos su función indicadora $1_A \in l_\infty^*$. Entonces de nuevo tenemos

$$f(1_A) = f(1_A \cdot 1_A) = f(1_A) \cdot f(1_A) = f(1_A)^2,$$

y al igual que antes tenemos dos posibilidades: $f(1_A) = 1$ ó $f(1_A) = 0$. Definamos por tanto la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} := \{A \subseteq \mathbb{N} : f(1_A) = 1\}.$$

Vamos a probar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro:

1. $\varnothing \notin \mathcal{U}$ porque $f(1_\varnothing) = f(0) = 0$, pues f es lineal. Además, $\mathcal{U} \neq \varnothing$ porque $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. En efecto, $f(1_\mathbb{N}) = f(1) = 1$.

2. Si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces puesto que $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$, se cumple

$$f(1_{A \cap B}) = f(1_A) \cdot f(1_B) = 1 \cdot 1 = 1,$$

y $A \cap B \in \mathcal{U}$.

3. Si $A \in \mathcal{U}$, y $A \subseteq B$, puesto que $1_A = 1_A \cdot 1_B$, tenemos que

$$1 = f(1_A) = f(1_A \cdot 1_B) = f(1_A) \cdot f(1_B) = 1 \cdot f(1_B) = f(1_B)$$

y $B \in \mathcal{U}$.

4. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, es claro que tenemos $1_A + 1_{A^c} = 1$, luego $f(1_A) + f(1_{A^c}) = 1$, es decir, bien $f(1_A) = 1$ y $f(1_{A^c}) = 0$ o viceversa. Por tanto,
$$A \in \mathcal{U} \iff A^c \notin \mathcal{U}$$

Estas cuatro afirmaciones dicen que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Lo que se trata de probar ahora es que $f = \lim_{\mathcal{U}}$, y así f será un ultrafiltro: sea $x \in l_\infty$ y escribamos $L = \lim_{\mathcal{U}} x$. Veamos que $f(x) = L$.

Como $L = \lim_{\mathcal{U}} x$, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que
$$A := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$
Sea $y := x \cdot 1_A$. Como f es multiplicativa, $f(y) = f(x)f(1_A) = f(x)$, porque $A \in \mathcal{U}$. Además, de la definición de A se sigue que
$$||y - L1_A||_\infty = ||x1_A - L1_A||_\infty = ||((x_n - L)1_A)_n||_\infty < \varepsilon,$$
y por tanto
$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |f(x) - f(L1_A)| = |f(y) - f(L1_A)| = |f(y - L1_A)| \\ &\leq ||f||\ ||y - L1_A|| < ||f||\varepsilon, \end{aligned}$$
y como ε es arbitrario, se tiene lo que queríamos: $f(x) = L = \lim_{\mathcal{U}} x$. □

Teorema 4.4 *Sea $0 \neq f \in l_\infty^*$. Son equivalentes:*

(1) f es un ultrafiltro.

(2) $f \in \overline{\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\omega^*}$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base usual de $l_1 \subset l_1^{**} = l_\infty^*$ y ω^* es la topología débil- en l_∞^*.*

(3) f asigna 0 ó 1 a las funciones indicadoras de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Demostración. (1) ⇒ (2). Sea $f = \lim_{\mathcal{U}}$ para cierto ultrafiltro $\mathcal{U}$, y tomemos un entorno débil-* de él: dados $x_1, \ldots, x_n \in l_\infty$ y $\varepsilon > 0$,
$$V_{x_1,\ldots,x_n;\varepsilon}(\lim_{\mathcal{U}}) = \{x^* \in l_\infty^* : |(x^* - \lim_{\mathcal{U}})(x_i)| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$
Para cada $k = 1, \ldots, n$, sea $c_k = \lim_{\mathcal{U}} x_k$ y
$$A_k := \{n : |x_{k_n} - c_k| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$
Por tanto $A := \cap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{U}$, y en particular $A \neq \varnothing$. Pero por definición
$$\left(V_{x_1,\ldots,x_n;\varepsilon}(\lim_{\mathcal{U}})\right) \bigcap \{e_n\} = \{e_n : n \in A\} \neq \varnothing,$$
y concluimos que $f = \lim_{\mathcal{U}} \in \overline{\{e_n\}}^{\omega^*}$.

(2) ⇒ (3). Por el contrarrecíproco: sea $f \in l_\infty^*$, con $f(1_A) \notin \{0, 1\}$ para cierto $A \subseteq \mathbb{N}$. Sólo hay que darse cuenta que para $\varepsilon \leq \min\{|f(1_A)|, |1 - f(1_A)|\}$ el entorno débil-* de f
$$V_{1_A;\varepsilon}(f) = \{x^* \in l_\infty^* : |(x^* - f)(1_A)| < \varepsilon\}$$

no contiene a ningún e_n, por lo que $f \notin \overline{\{e_n\}}^{\omega^*}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $0 \neq f \in l_\infty^*$ tal que $f(1_A) = 0$ ó 1 para las funciones indicadoras. Se trata de probar que $f = \lim_{\mathcal{U}}$ para cierto ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Antes de nada, notar que si $x \geq 0$ (se entiende coordenada a coordenada, o mejor aún, como función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$), entonces uno de los resultados básicos de la Teoría de la Medida afirma la existencia de una sucesión (s_n) de funciones simples que convergen uniformemente a x, donde cada término es

$$s_n = \sum_{\text{finita}} \lambda_i 1_{A_i},$$

con $\lambda_i \geq 0$ y los A_i disjuntos dos a dos. Como $f(s_n) = \sum \lambda_i f(1_{A_i}) \geq 0$ para todo n, y f es continua, se sigue que $f(x) \geq 0$. En particular, si $x \leq y$, se tendrá $f(x) \leq f(y)$. A esta propiedad de la f la llamaremos *monotonía*.

Por otra parte, puesto que f es no nula, existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f(1_A) = 1$ (de no ser así f sería nula porque de lo anterior se sigue que las funciones simples son un subconjunto denso de l_∞), y por la monotonía $f(1_{\mathbb{N}}) = 1$, pues $1_A \leq 1_{\mathbb{N}}$. Definamos ahora la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} := \{A \subseteq \mathbb{N} : f(1_A) = 1\}$$

y probemos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro:

1. $\mathcal{U} \neq \varnothing$ porque $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, y $\varnothing \notin \mathcal{U}$ porque $1_\varnothing = 0$ y f es lineal.
2. Si $A, B \in \mathcal{U}$, puesto que

$$A = (A \cap B) \coprod (A - B)$$
$$B = (A \cap B) \coprod (B - A)$$

se sigue que

$$\left.\begin{array}{l} 1 = f(1_A) = f(1_{A\cap B}) + f(1_{A-B}) \\ 1 = f(1_B) = f(1_{A\cap B}) + f(1_{B-A}), \end{array}\right\}$$

y de aquí que $f(1_{A\cap B}) = 1$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{U}$.

3. Si $A \subseteq B$, con $A \in \mathcal{U}$, entonces $1_A \leq 1_B$, y por la monotonía $f(1_B) = 1$.
4. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$1 = f(1_{\mathbb{N}}) = f(1_A) + f(1_{A^c})$$

y una de las dos debe ser 1 y la otra 0, esto es,

$$A \in \mathcal{U} \iff A^c \notin \mathcal{U}$$

De lo anterior se sigue que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Para probar que f en efecto es un ultrafiltro comprobemos que $f = \lim_{\mathcal{U}}$. Puesto que las funciones simples forman un subconjunto denso de l_∞, bastará ver que la igualdad es cierta en tal conjunto.

Es suficiente comprobar que $\lim_{\mathcal{U}} 1_A = f(1_A)$ para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, pues en ese caso, si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i}$, obtendríamos

$$f(x) = \sum \lambda_i f(1_{A_i}) = \sum \lambda_i \lim_{\mathcal{U}} 1_{A_i} = \lim_{\mathcal{U}} x.$$

Sea $\varepsilon > 0$, y consideremos el conjunto $\{n : |(1_A)_n - f(1_A)| < \varepsilon\}$. Nótese que la cantidad $|(1_A)_n - f(1_A)|$ es 1 ó 0. Si $\varepsilon \geq 1$ no hay nada que decir: tal conjunto es $\mathbb{N}$, que está en el ultrafiltro. Si $\varepsilon < 1$, entonces

$$\{n : |(1_A)_n - f(1_A)| < \varepsilon\} = \{n : f(1_A) = (1_A)_n\}.$$

Ahora bien:

- Si $A \in \mathcal{U}$, $f(1_A) = 1$ y entonces $\{n : (1_A)_n = 1\} = A \in \mathcal{U}$.
- Si $A \notin \mathcal{U}$, $f(1_A) = 0$ y entonces $\{n : (1_A)_n = 0\} = A^c \in \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

Esto termina la prueba. □

Para terminar sólo nos queda unificar todo lo aprendido sobre los ultrafiltros. Antes de ello necesitamos darnos cuenta de un par de detalles: el primero es el siguiente

Lema 4.5 *Todo ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ bien es libre bien es principal.*

Demostración. Si un ultrafiltro $\mathcal{U}$ no es libre, entonces $\cap\mathcal{U} \neq \varnothing$, pero tal intersección sólo puede estar formada por un elemento $m \in \mathbb{N}$ (pues si hubiera dos m_1, m_2 bastaría considerar el conjunto $\{m_1\}$ para negar la maximalidad de $\mathcal{U}$). Pero si $m \in A$ para todo $A \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_m$; y como $\mathcal{U}$ es maximal $\mathcal{U} = \mathcal{U}_m$, es decir, es principal (centrado en $m \in \mathbb{N}$). □

El segundo detalle es el siguiente: en 3.4 se vio que los valores de adherencia de una sucesión eran los posibles límites según ultrafiltros libres. Pero por otra parte, dada una sucesión (x_n), cualquier elemento de la sucesión es el límite según un ultrafiltro principal (el m-ésimo se obtendrá vía $\mathcal{U}_m$). Puesto que $\overline{\{x_n\}} = \{x_n\} \cup \text{v.adh.}\{x_n\}$, se concluye que todo elemento de la clausura de $\{x_n\}$ es el límite según un ultrafiltro.

Finalizamos estas notas sobre ultrafiltros englobando todo lo desarrollado hasta ahora en el siguiente

Teorema 4.6 (Caracterización de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$) *Sea $0 \neq f \in l_\infty^*$. Son equivalentes:*

(1) f es un ultrafiltro.

(2) f es un elemento de la compactificación Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

(3) f es multiplicativo

(4) f asigna a cada sucesión un valor de la clausura de ella.

(5) $f \in \overline{\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\omega^*}$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base usual de $l_1 \subset l_1^{**} = l_\infty^*$ y ω^* es la topología débil-$*$ en l_∞^*.

(6) f asigna 0 ó 1 a las funciones indicadoras de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

En otras palabras: (véase la página siguiente)

$$\beta\mathbb{N} = \mathrm{Uft}(\mathbb{N}) = \left\{\begin{array}{c}\text{funcionales}\\ \text{multiplicativos}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{funcionales :}\\ f(x) \in \overline{\{x_n\}}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{funcionales :}\\ f(1_A) = 1 \text{ ó } 0\end{array}\right\} = \overline{\{e_n\}_n}^{\omega^*}$$

$$\mathcal{U} \longrightarrow \text{lím}_{\mathcal{U}}$$

$$\{A : f(1_A) = 1\} \longleftarrow f$$

$$\beta\mathbb{N} - \mathbb{N} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{ultrafiltros}\\ \text{libres}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{funcionales:}\\ f_{|c} = \text{lím}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{funcionales :}\\ f(x) \text{ es v. adh.}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{funcionales:}\\ f_{|c} = \text{lím}\end{array} \longleftrightarrow \overline{\{e_n\}_n}^{\omega^*} - \{e_n\}_n$$

$$\mathbb{N} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{ultrafiltros}\\ \text{principales}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{proyección de}\\ \text{coordenada}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{funcionales :}\\ f(x) \in \{x_n\}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{proyección de}\\ \text{coordenada}\end{array} \longleftrightarrow \{e_n\}_n$$

Referencias

[1] Bourbaki, N. *Elements of mathematics.* Springer, 1998.

[2] Castillo, J. *Apuntes de Análisis Funcional.*

[3] Castillo, J. *Límites en Espacios de Banach.*

[4] Hardy, J. P. L., Morris, S. A., and Thompson, H. B. Applications of the Stone-Cech Compactification to Free Topological Groups. *Proceedings of the American Mathematical Society 55*, 1 (feb 1976), 160.

[5] Jerison, M. The set of all generalized limits of bounded sequences. *Canadian Journal of Mathematics 9*, 0 (jan 1957), 79–89.

[6] Kruckman, A. *Notes on Ultrafilters.*

[7] MacIver, D. *Filters in Analysis and Topology.*

[8] Moorhouse, G. The Stone-Cech Compactification. *uwyo.edu.*