I: CONJ, COMPL, MATRICES

REL DE EQ.

• **Definición**: Dar una relación $\equiv$ en un conj. X es dar una familia de parejas ordenadas de X, y pondremos $x \equiv y$ cuando se de la pareja (x, y).
Diremos que la relación es de equivalencia si tiene las sig. prop.:

1.- Reflexiva: $x \equiv x \quad , \forall x \in X$

2.- Simétrica: $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x \quad \forall x, y \in X$

3.- Transitiva: $x \equiv y,\ y \equiv z \Rightarrow x \equiv z \quad , \forall x, y, z \in X$

• **Definición**: Dada una rel. de eq. en X, llamaremos clase de equivalencia de un elemento $x \in X$ al subconj. de X formado por todos los elementos relacionados con x, y se denota como

$$\overline{x} = [x] = \{ y \in X : x \equiv y \}$$

El conjunto cociente, $X/\equiv$, es el conj. formado por todas las clases de equivalencia de la relación $\equiv$.

• **Teorema**: $[x] = [y] \iff x \equiv y \quad , \forall x, y \in X$

• **Corolario**: Cada elemento $x \in X$ está en una única clase de eq. de $\equiv$.

• **Definición**: Diremos que dos números $a, b \in \mathbb{Z}$ son congruentes módulo n si

$a \equiv b \pmod{n}$ cuando $b - a = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

* Si a es un cuadrado perfecto $\Rightarrow a \not\equiv 2, a \not\equiv 3 \pmod{4}$

* La rel. de cong. mód n es una rel. de eq. en $\mathbb{Z}$ (Demo).

* $a \equiv a'$, $b \equiv b'$ (mód n) $\Rightarrow a+b \equiv a'+b'$; $ab \equiv a'b'$ (mód n)
(Demo)

* $c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b$ (mód n) $\Rightarrow a+c \equiv b+c$; $ac \equiv bc$ (mód n)

* $[a] = a + n\mathbb{Z} = \{a + kn : k \in \mathbb{Z}\} = \underset{\text{resto}}{[r]}$, t.q. que $a = kn + r$.

* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0} = \bar{n} ; \bar{1}, \bar{2}, \dots [n-1]\}$

COMPLEJOS : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

* Parejas de nº reales $z = \underbrace{x}_{\text{p. real}} + \underbrace{y}_{\text{p. imag.}}i$; $\bar{z} = x - yi$

* El módulo de z es $|z| = \rho = +\sqrt{x^2+y^2} = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\left[\begin{array}{l}\theta = \arccos \frac{x}{\rho} \\ \theta = \operatorname{arcsen} \frac{y}{\rho}\end{array}\right]$

* Propiedades.

* $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$ (Demo) * $\theta \in \mathbb{R}$ llamo argumento.

* $\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$ $\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$ FÓRMULA DE EULER

* $\boxed{z = x + yi = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$

* $z \cdot z^{-1} = 1$; $z \cdot \bar{z} = \rho^2$

* $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$ (Demo)

* Para dividir complejos, ~~mult~~

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{z' \cdot \bar{z}'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{\rho'^2}$$

* $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \longrightarrow \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

* Para $w^n = z$, $\boxed{w = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

APLICACIONES

Definición: Dar una aplicación f de un conjunto X a un conj. Y es asignar a cada elemento de X un único elemento de Y, que denotamos $f(x)$.

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

* Si $A \subseteq X$, $f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\} \subseteq Y$
* Si $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$
* $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in Y : x \in X\}$

* f es inyectiva
  - cuando $x, y \in X$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (el. distintos tienen imágenes distintas)
  - cuando $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ tiene 1 o ningún elemento.
* f es epiyectiva
  - cuando $\forall y \in Y$, $\Rightarrow y = f(x)$ para algún $x \in X$
  - cuando $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ tiene 1 o más eltos
* f es biyectiva
  - cuando es inyectiva y epiyectiva
  - cuando $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ tiene 1 elto

* $$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\equiv \\ x &\longmapsto \pi(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

se llama proyección canónica y siempre es epiyectiva.

PERMUTACIONES

Definición: Las permutaciones de n el. son apl. biyectivas

$$\sigma : \{1, .., n\} \longrightarrow \{1, .., n\} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

* S_n = conj de todas las permut. de n el.
* $\text{card}(S_n) = n!$
* El producto de permutaciones es la composición.
* $(\sigma \tau)^{-1} = \tau^{-1} \sigma^{-1}$ (Dem) → sólo hay que ver que $(\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = Id$
* $\sigma = (a_1, .., a_d)$ es un ciclo de longitud d
* $\sigma = (a_1, a_2)$ es una transposición, un ciclo de long. 2.
* Todo ciclo de long. d es producto de $(d-1)$ transposiciones.
* Si $\sigma = (a_1, .., a_d) \Rightarrow \sigma^{-1} = (a_d, .., a_1)$

Definición: Sea un pol. con coef. $\in \mathbb{Z}$ $\Delta(x_1, .. x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Si aplicamos $\sigma \in S_n$, $\Delta(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)}) = \prod_{i<j} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}) = (\text{sgn}\, \sigma) \Delta(x_1, .., x_n)$

donde $(\text{sgn}\, \sigma) = +1$ (par) ó -1 (impar).

* **Teorema**:
  * $(\text{sgn}\, \tau\sigma) = (\text{sgn}\, \tau) \cdot (\text{sgn}\, \sigma)$
  * El sgn de toda transposición es (-1)
  * El sgn de todo ciclo de long d es $(-1)^{d-1}$

* $(\text{sgn}\, \sigma^{-1}) = (\text{sgn}\, \sigma)^{-1}$

MATRICES

* Sea $M_{m\times n}(k)$ el cnj. de matrices de "m" filas y "n" columnas con coef. $\in k$

* $A = (a_{ij})$; $A^t = (a_{ji})$

* $(AB)^t = B^t A^t$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DETERMINANTES

$$\boxed{|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sng} \sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}}$$ FÓRMULA DE LEIBNIZ

* Propiedades.

Definición: Dada una matriz cuadrada de orden n, se llama menor complementario del el. a_{ij} al det de orden $n-1$ que queda al eliminar la fila i y la columna j, y lo denotaremos como α_{ij} ; y llamaremos adjunto del el. a_{ij}, a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

* $|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$

* Si $|A| \neq 0$, $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t}$$

Definición: El rango de una matriz (no necesariamente cuadrada) es el máx nº de columnas L.I. Los menores de orden K son los det formados por los coef. de K filas y K columnas.

• **Teorema (del Rango)**: El rg de una matriz es el orden del mayor menor no nulo
(Sin demo)

• **Teorema (de Rouché - Frobenius)**:

Un sist. de ec. lin. $AX = B$ es compatible $\Longleftrightarrow$ $rg\, A = rg\, (A|B)$
(Demo Pasteros)

• **Corolario**: Si $AX_0 = B$, todas las sol. se obtienen sumando a X_0 las sol Y_0 de $AY = 0$

• **Regla de Cramer**: Si A es una matriz cuadrada invertible, el sistema $AX = B$ tiene una única solución, que es $x_i = \frac{|A_1, \dots, B, \dots, A_n|}{|A|}$, donde B está en el lugar de la columna A_i.

$\hookrightarrow |A| = |A_1, \dots, A_i, \dots A_n|$

II: ESPACIOS VECTORIALES

EV Y SEV

• Definición: Dar una estructura de K-espacio vectorial en un conjunto E (sus elementos se llamarán vectores) es asignar a cada par de vectores $e_1, e_2 \in E$ otro vector $e_1 + e_2 \in E$, y a cada escalar $\lambda \in K$ y a cada vector $e \in E$ otro vector $\lambda e \in E$,

* Axiomas: 1) Asociativa; 2) Conmutativa; 3) El. neutro de la suma 4) El. opuesto de la suma 5) Distributiva de vectores; 6) Distr. de escalares 7) Prod. por varios escalares 8) El neutro del producto

* Consecuencias. (Demo).

• Definición: Diremos que un subconjunto $V \subseteq E$ es un subespacio vectorial de E si:

1.- $e_1, e_2 \in V \Rightarrow e_1 + e_2 \in V$

2.- $\lambda \in K,\ e \in V \Rightarrow \lambda e \in V$

3.- $0 \in V$

* $K^n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$ es un K-espacio vectorial

$A \in M_{m \times n}(K)$, $V = \{X \in K^n : AX = 0\}$ es un subEV de K^n. (Demo)

→ Las sol. de un sist. de ec. homog. forman un SEV

* Dados $e_1, \ldots, e_n \in E$,

$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = Ke_1 + \ldots + Ke_n = \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$ es un subEV de E. (Demo)

Si $e_1, \ldots, e_n \in V \subseteq E \Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \subseteq V$ (Demo)

* Si V, W son subEV de E,

$V \cap W$ y $V + W = \{v + w : v \in V, w \in W\}$ son subEV (Demo)

* Si E, F son EV, $E \times F = \{(e,f) : e \in E, f \in F\}$ es un EV con las operacs suma y prod. por escalares. $\begin{cases} (e,f)+(e',f') = (e+e', f+f') \\ \lambda(e,f) = (\lambda e, \lambda f) \end{cases}$

* Un subconjunto $X \subseteq E$ es una subvariedad lineal de E si existe $p \in E$ y un subEV $V \subseteq E$: $X = p + V = \{p+v : v \in V\}$, y dices que X es la subv. lin. que pasa por p con dirección V.

Si $q \in X$, $p+V = q+V$

* Dado $V \subseteq E$, define una relación de eq. en E llamada congruencia mód. V

$$e \equiv e' \ (\text{mód } V) \quad \text{cuando} \quad e'-e \in V$$

es reflexiva, simétrica, transitiva (Dem)

- $e \in E$, $\bar{e} = [e] = e + V$ es la sub. lin. que pasa por e con dir. V.
- Por tanto, las clases de eq. son las sub. lin. de E con dir. V.
- El conjunto cociente o espacio vectorial cociente ~~tiene~~ tiene como elementos las subv. lin $\bar{e} = e+V$. (las clases de eq)
- Suma: $[e]+[e'] = [e+e']$; Prod. por sc. : $\lambda[e] = [\lambda e]$.
  Estas operacs están bien definidas. (Dem)
- $\boxed{\bar{e} = 0 \iff e \in V}$ (Dem)

- Si $e \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \implies \bar{e} \in \langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n \rangle$ (Dem)

TEORÍA DE LA DIMENSIÓN

Definición: $e_1, \dots, e_n \in E$ generan E o forman un sistema de generadores de E si $E = Ke_1 + \dots + Ke_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

* $e_1, \dots, e_n$ son L.D. si $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ (no todos nulos) : $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$
* $e_1, \dots, e_n$ son L.I. si $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
* $e_1, \dots, e_n$ es una base de E si son L.I. y generan E, y cada $e \in E$ se escribe de forma única como C.L. de $e_1, \dots, e_n$: ⟶ (Demo) Igualdad de C.L con distintos coef., y ver q $x_i = y_i$

$e = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, y decimos que $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de e en la base dada.

* $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n (0, \dots, 1)$ forman una base en K^n llamada base usual.
* $A_1, \dots, A_{mn} \in M_{m\times n}(K)$ forman una base de $M_{m\times n}(K)$ si tienen todos sus coef. nulos excepto uno, que es la unidad.

• **Lema fundamental**: Sean $e_1, \dots, e_n \in E$. Si $v_1, \dots, v_r \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y $r > n \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ son L.D.

• **Teorema**: Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo nº de vectores.

• **Definición**: Llamamos dimensión de un EV E al nº de vectores de cualquier base, y lo denotamos como $\dim_K E$ ó $\dim E$.

* Si $E = 0$, $\dim E = 0$; y si $\nexists$ finitos vect. que formen base, $\dim E = \infty$.
* $\dim (X = p + V) = \dim V$

* $\dim K^n = n$; $\dim M_{m\times n}(k) = mn$; $\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \quad [\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i] \end{cases}$

* Dados dos puntos $p, q \in E$, hay una recta (única) que pasa por ambos, que es $p + \langle e \rangle = q + \langle e \rangle$, donde $e = q - p \neq 0$. El punto medio de p y q es $\frac{p+q}{2}$.

* Un vector está en la recta si los coef. de la CL suman 1; es decir, $tq + (1-t)p$.

* Dado un triángulo abc, las rectas que van desde un vértice hasta el pto medio del lado opuesto se llaman **medianas**. Las tres medianas se cortan en el baricentro (g).

* Cuadriláteros y **bimedianas** ; paralelogramo.

Proposición: Toda familia de generadores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E \neq 0$ contiene una base de E, y por tanto $n \geq \dim E$, y si se da la igualdad, $e_1, \dots, e_n$ ya son base.

INDUC. : $n=1$; $n>1 \nearrow$ L.I. $\searrow$ L.D.

Lema: Si $e_1, \dots, e_n$ son L.I. y no se pueden ampliar con un $v \in E$ de modo que sigan siendo L.I. $\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ es base de E.

Proposición: Toda familia $e_1, \dots, e_r$ L.I. puede ampliarse hasta obtener una base de E, y por tanto $r \leq \dim E$, y si es $=$, ya son base.

Teorema: $\underline{\dim V \leq \dim E}$; $\underline{\dim E/V = \dim E - \dim V}$

$r < r+s$; V es $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s$ L.I. y gen E/V

Corolario: Si $v_1, \dots, v_m \in E$, $\underline{\dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \operatorname{rg} A}$ (A tiene por columnas las coord. de $v_1, \dots, v_r$)

* $v_1, \dots, v_n$ son L.I. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = n$ (Sin dem)

* $v_1, \dots, v_n$ generan E $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \dim E$ (Sin dem)

Teorema (de Rouché - Frobenius)

Un sist. de ec. lin. $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$

Definición: Dados $V_1, \dots, V_r$; decimos que la suma $V_1 + \dots + V_r = \{v_1 + \dots + v_r : v_1 \in V_1, \dots, v_r \in V_r\}$ es **directa** si cada $e \in V_1 + \dots + V$ se descompone de modo único como $e = v_1 + \dots + v_r$, $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

Teorema: $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = 0$ $\Rightarrow)$ $e \in V_1 \cap V_2$; $0 = 0 + 0$ $\Leftarrow)$ $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$

Definición: $V, W \subseteq E$ son suplementarios cuando $E = V \oplus W$, i.e. $e = v + w$ de forma única.

III: APLICACIONES LINEALES

Definición: Sea E, E' dos EV. Una aplicación $f: E \to E'$ es K-lineal si:

1) $f(e+e') = f(e) + f(e')$, $\forall e, e' \in E$
2) $f(\lambda e) = \lambda f(e)$, $\forall e \in E$; $\forall \lambda \in K$.

* $f(0) = 0$ (Dem) * $f(-e) = -f(e)$ (Dem) * $f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ (Dem)
* $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{h} E''$ lineales $\Rightarrow E \xrightarrow{h \circ f} E''$ es lineal (Dem)

Proposición: Si $f: E \to E'$ es lineal

$\mathrm{Ker}\, f = \{ e \in E : f(e) = 0 \}$ es un SEV de E

Si $f(e) = f(u)$, $e - f(u) \in \mathrm{Ker}\, f$

$\mathrm{Im}\, f = \{ f(e) : e \in E \}$ es un SEV de E

* Cada $A \in M_{m \times n}(K)$ define una aplicación $f: K^n \to K^m$, $f(X) = AX$. f es lineal (Dem)
* Si $V \subseteq E$, $\pi: E \to E/V$, $\pi(e) = \bar{e}$ es lineal. (Dem)
* Si $e_1, \dots, e_n \in E$ define una apl. lin. $f: K^n \to E$, $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Es lineal (Dem)

Proposición: f es inyectiva $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = 0$

Definición: Matriz de una aplicación lineal: Coges los vect. de la base de salida, los pasas por la aplicación y lo escribes en la base de llegada. Los coef. de la CL serán las columnas de A, la matriz de la apl. en las bases dadas. Las coordenadas de $f(e)$ son $X' = AX$

Proposición: $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rg}\, A$ $f: E \to E'$

Definición: Una aplic. K-lineal es un isomorfismo si f es biyectiva.

* Si f es isomorfismo, f^{-1} es lineal y también isomorfismo (Dem)
* E y E' son isomorfos, $E \simeq E'$, si existe algún isomorfismo $f: E \to E'$.

* $A \in M_{n\times n}(K)$, invertible, define una apl. lin. $f: K^n \to K^n$, $f(X) = AX$, es isomorfismo, y $f^{-1}: K^n \to K^n$, $f^{-1}(X) = A^{-1}X$.

* $V_1, \dots, V_n \subseteq E$. $s: V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 + \dots + V_n$, $s(v_1, \dots, v_n) = v_1 + \dots + v_n$ es lineal y epiyectiva (Dem). Si la suma es directa, es biyectiva, y así isomorfismo

* Si $e_1, \dots, e_n \in E$ y $f: E \to E'$ es isomorfismo:

• $e_1, \dots, e_n$ LI $\iff$ $f(e_1), \dots, f(e_n)$ LI. • $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = E \iff \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle = E'$

• $e_1, \dots, e_n$ base de $E \iff f(e_1), \dots, f(e_n)$ base de E' , $\dim E = \dim E'$

* Si $e_1, \dots, e_n$ son base de E, $f: K^n \to E$, $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ es un isomorfismo. Además, todo EV de dim n es isomorfo a K^n.

Teorema de Isomorfía: Sea $f: E \to E'$ una aplicación lineal.

La aplicación $\phi: E/\mathrm{Ker} \to \mathrm{Im}\, f$, $\bar{e} \mapsto \phi(e) = f(e)$ es un isomorfismo.

Corolario: $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$

Corolario: Si A es la matriz de la apl., $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = $ nº columnas $- \mathrm{rg}\, A$

Corolario: $V = \{X \in K^n : AX = 0\}$ es un SEV (ya demostrado) de $\dim V = n - \mathrm{rg}\, A$, es decir, V formado por las soluciones de $AX=0$; y las sol. de $AX = B$ forman una subv. lin. de dir. $V = \mathrm{Ker}\, f$

Definición:

- Dar ec. paramétricas de un SEV V es dar un sistema de generadores (mejor base) de V.
- Dar ec. implícitas " " " " es dar un sistema de ec. homogéneas $AX=0$ tal que sus soluciones sean las coordenadas de los vectores de V.
- Dar ec. paramétricas de una SVL X es dar las coord. de un pto y un sist. de gen. de su dirección
- Dar ec. implícitas " " " " es dar un sist. de ec. $AX = B$ tal que las sol. sean las coordenadas de los puntos de X.

- Para dar ec. paramétricas de la suma $V_1 + V_2$, hay que ~~añadir~~ sumar a cada x_i de uno los otros parámetros del otro (con distintas letras)

- Para dar ec. implícitas de la intersección $V_1 \cap V_2$ simplemente hay que unir ambas ec. implícitas.

- Las ec. paramétricas del espacio E son ~~cada~~ iguales a cada parámetro por ~~son~~ vector de la base.
  Las ec. implícitas del espacio E siempre son $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$ (es la única)

- Las ec. implícitas del Ker f se hallan igualando cada coordenada de $f(x, \dots, z)$ a 0.

- Las ec. paramétricas de Im f es lo que genera $f(e_i)$, siendo e_i un vector de la base del esp. de salida.

- Lineal
- Ker f = $V \cap W$
- Im f = $V+W/W$

Teorema: $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

Corolario: $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$

Corolario: $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

CAMBIO DE BASE

Matriz de cambio de base: Coges los vectores que quieres que sean tu nueva base en la base vieja. Las coordenadas son las columnas de B.

Si $\overline{X}$ son las coord. en la base nueva, y X en la vieja

$$\boxed{X = B\overline{X}} \qquad \boxed{\overline{X} = B^{-1}X}$$

Cambio de base en una aplicación lineal: $\boxed{\overline{A} = C^{-1}AB}$

IV : GEOMETRÍA EUCLÍDEA

Definición: Dar un producto escalar en un EV E es asignar a cada par de vectores $e, v \in E$ un número real que denotaremos como $e \cdot v$ ó $\langle e | v \rangle$:

1) **Bilineal**: $(e+e') \cdot v = e \cdot v + e' \cdot v$; $(\lambda e) \cdot v = \lambda (e \cdot v)$

   $v \cdot (e+e') = v \cdot e + v \cdot e'$; $v (\lambda e) = \lambda (v \cdot e)$

2) **Simétrico**: $v \cdot e = e \cdot v$

3) **Definido positivo**: $e \cdot e \geq 0$, y sólo $=$ si $e = 0$

* En $\mathbb{R}^n$, el producto escalar usual es $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
* En $\mathbb{C}$, un producto escalar es $\langle z_1 | z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$
* En $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + \dots + a_{nn}$

$$\langle A | B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B) \quad ; \quad \langle A | A \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

* En el EV de las funciones cont. en $[a,b]$, un prod. esc. es:

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

* $\|e\| = +\sqrt{e \cdot e}$ es el **módulo** o **norma** de e.
* $\|\lambda e\| = |\lambda| \cdot \|e\|$ (Dem)
* $d(p,q) = \|q - p\|$.

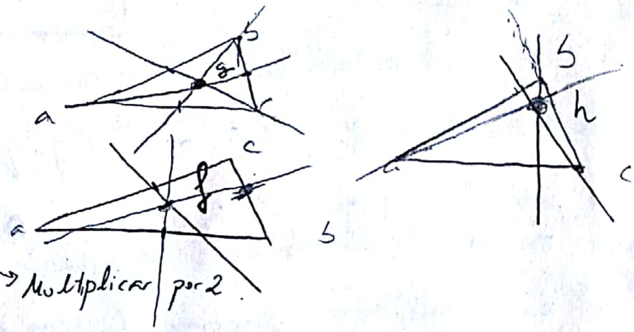
Teorema: 1) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $|e \cdot v| \leq \|e\| \cdot \|v\|$ $\quad p(t) = (te+v)^2$, $\Delta \leq 0$

2) **Desigualdad triangular**: $\|e+v\| \leq \|e\| + \|v\|$

Definición: $e, v \neq 0$, por lo anterior, $\frac{e \cdot v}{\|e\|\|v\|} \in [-1,1]$. Llamaremos medida en radianes del ángulo formado por e y v al número real $\alpha \in [0,\pi]$: $\cos\alpha = \frac{e\cdot v}{\|e\| \cdot \|v\|}$ y diremos que e y v son ortogonales cuando $e \cdot v = 0$ (y $\cos\alpha = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

* Th Pitágoras: $e \cdot v = 0 \iff \|v - e\|^2 = \|v\|^2 + \|e\|^2$ (Dem)

* Medianas → Baricentro (g) (Dem)
  Alturas → Ortocentro (h) (Dem)
  Mediatrices → Circuncentro (f) (Dem)
  Bisectrices → Incentro



* g, h, f están alineados en la Recta de Euler

* Th. Tales

Definición: Un espacio vectorial euclídeo es un EV, $K = \mathbb{R}$, de dim finita dotado con un producto escalar; y dimos que para un SEV $V \subseteq E$, su ortogonal es

$$V^\perp = \{ e \in E : e \cdot v = 0 \ , \forall v \in V \}$$

Teorema: $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$, y $V^\perp$ es un SEV

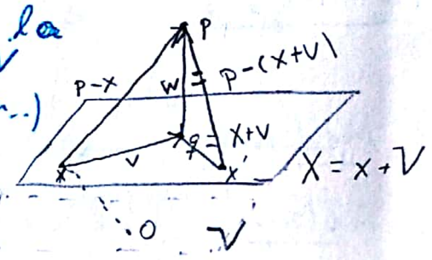
Corolario: $(V^\perp)^\perp = V$ ($\supseteq$ obvio, $\subseteq$ dim); $E = V \oplus V^\perp$ ($V \cap V^\perp = 0 \to$ suma d. y dim)

Corolario:
1) $V \subseteq W \iff W^\perp \subseteq V^\perp$
2) $V = W \iff V^\perp = W^\perp$
3) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$
4) $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$

Definición: Si X es una subv. lin, y $p \in E$, : $d(p,X) = \inf_{x \in X} d(p,x)$

Proposición: Dado X, $p \in E$, $\exists!\, q \in X$: $q-p$ sea $\perp$ a la dirección de X; y $d(p,X) = d(p,q)$. q se llama pie de la perpendicular trazada a X desde p

Desarrollamos, inf por th Pitágoras



* $d(p,X)$ y pie... : Se halla $p-x = v+w$ (como c.l. de los vectores de V, con λ y μ...) despejamos w y lo ponemos en un sist. de ec. multiplicado por los vect. de la base de V e igualado a 0 (ya que son $\perp$).
Sacamos los parámetros y así ~~d(q~~, $\|w\| = d(p,q)$. También sacamos $q = x+v$ (el pie...)
A veces puede resultar más cómodo despejar v y hallar λ igual desde ahí.

* Dado V en paramétricas, sacamos las implícitas de $V^\perp$ poniendo como coef. las coordenadas de los vectores que generan V. Dadas implícitas de V las paramétricas viceversa (en $AX=0$)

Definición: Dado $E = V \oplus V^\perp$. $\forall e \in E$, $e = v+w$ para algún $v \in V$, $w \in V^\perp$

1) $S_V : E \to E$

$e = v+w \mapsto S_V(e) = v-w$, es la simétrica respecto de V

2) $p_V : E \to V$

$e = v+w \mapsto p_V(e) = v$, es la proyección ortogonal sobre V

Definición: Diremos que una base $e_1, \dots, e_n$ de un EV euclídeo E es ortonormal

cuando $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, y así $ev = (x_1e_1 + \dots + x_ne_n)\cdot(y_1e_1 + \dots + y_ne_n) =$
$= x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ [pq $e_i \cdot e_i = 1$]

Teorema: Todo EV euclídeo admite bases ortonormales

* Para problemas **NO** utilizar puntos, sino vectores. $a \xrightarrow{e} b$ $\cancel{b-a} \to e$ (para manejar)

Scanned by CamScanner

V: ENDOMORFISMOS

* Dado un polinomio $P(x)$, decimos que $\alpha \in K$ es raíz del polinomio si $P(\alpha)=0$.

* Regla de Ruffini: Si α es raíz de $P(x) \Rightarrow P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$

Definición: Llamaremos multiplicidad de una raíz $\alpha \in K$ de un $P(x)$ con coef. en K al mayor número natural m tal que $(x-\alpha)^m$ divide al pol. $P(x)$, es decir, $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$, y $Q(x)$ no admite a α como raíz. Si $P(x)$ tiene más de una raíz, $P(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{m_r} \cdot Q(x)$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las raíces en K de $P(x)$ y $m_1, \ldots, m_r$ sus respectivas multiplicidades, y $Q(x)$ carece de raíces en K. Además, diremos que $P(x)$ tiene todas sus raíces en K cuando el número de raíces contadas con su multiplicidad sea el grado de $P(x)$, en cuyo caso $Q(x)$ es cte.

Teorema (de d'Alembert) (Sin Dem): Todo pol no cte con coef en $\mathbb{C}$ tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$, es decir, el nº de raíces en $\mathbb{C}$ contadas con su multipl. siempre es el grado del $P(x)$.

Definición: Los endomorfismos de un K-esp. vect. E son las aplicaciones K-lineales $T: E \to E$. Si T, S son dos endom., su producto ST es la composición $S \circ T$, y todas es endom.

Definición: Dado un endomorfismo T de un EV E de dim finita, diremos que un escalar $\alpha \in K$ es un valor propio o autovalor de T si existe $e \in E$, $e \neq 0$, tal que $T(e) = \alpha e$, en cuyo caso diremos que e es un vector propio o autovector de valor propio α, y dicimos

$$V_\alpha = \{ e \in E : T(e) = \alpha e \} = \mathrm{Ker}\,(\alpha \mathrm{Id} - T)$$

, que es un SEV.

Definición: Si $e_1, \dots, e_n$ es base de E, $T: E \to E$ tiene una matriz de la aplicación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$T(e_1)$ $T(e_2)$ $T(e_n)$

. Se llama polinomio característico de T al polinomio.

$$c_T(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{21} & x-a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & & & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

; que no depende de la base elegida (Dem)

Teorema: Los valores propios de T son las raíces en K de $c_T(x)$.

Corolario: El nº de v.p. de T siempre es $\leq gr(c_T(x)) = \dim E$.

Definición: Un endomorfismo $T: E \to E$ de un EV E de dim finita es diagonalizable si existe alguna base $e_1, \dots, e_n$ de E formada por vectores propios, lo que significa que la matriz de T en esa base es diagonal.

$$\bar{A} = D = B^{-1}AB \quad ; \quad A = BDB^{-1} \quad ; \quad A^n = BD^nB^{-1}$$

*Diagonalizar un endom.: Sacar raíces de $c_T(x)$; (se estudia en el cuerpo alg. que se quiera); se sacan las ec. paramétricas de $V_\alpha = Ker(\alpha I - T)$, y de ahí vectores propios de v.p. α. Se ve que $\dim E = rg(\ ;\ ;)$, y se pone en una matriz $\bar{A} = D$.

*Ec. diferenciales: Se pone el sistema en la forma $X' = AX$, nos sacamos un endomorfismo auxiliar que tenga como matriz A; lo diagonalizamos y ponemos como la ED $\bar{X}' = D\bar{X}$, lo resolvemos en "esta base", y por medio de $X = B\bar{X}$ se obtienen las sol. de la ED "original".

*Sucesión de Fibonacci: Nos sacamos la suc. auxiliar $y_n = x_{n+1}$, y ponemos $X_{n+1} = AX_n$, entonces $X_n = A^n X_0$, donde $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nos sacamos un endomorfismo que tenga como matriz A y lo diagonalizamos.

Así, $X_n = BA^nB^{-1}$; y $x_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$

Teorema: Sea $T: E \to E$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ son valores propios distintos de T, entonces la suma de los sev $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_m}$ siempre es directa, y por tanto $\dim(V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_m}) = \dim V_{\alpha_1} + \dots + \dim V_{\alpha_m}$

Lema: Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ son todos los v.p. de T,

$$T \text{ diagonalizable} \iff V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_r} = E$$

Corolario (UTILÍSIMO): Sea $n = \dim E$

Si T tiene n valores propios distintos en K $\Rightarrow$ T es diagonalizable.

Criterio de Diagonalización

$$T \text{ es diagonalizable} \iff \begin{cases} * \ c_T(x) \text{ tiene todas sus raíces en } K \\ * \text{ la multiplicidad } m_i \text{ de cada raíz } \alpha_i \in K \text{ es} \\ \quad m_i = \dim V_{\alpha_i} = \dim(\operatorname{Ker}(\alpha_i I - T)) = n - rg(\alpha_i I - A) \end{cases}$$

$*$
- Si $c_T(x)$ tiene n raíces simples en K $\to$ T diag. (Por el Corol. ut.)
- Si $c_T(x)$ tiene alguna raíz que $\notin K$ $\to$ T no diag.
- Si para alguna raíz $m_i \neq \dim V_{\alpha_i}$ $\to$ T no diag.