AP: CÓNICAS

a → distanc. al vértice (horizontal)
b → altura, o dist. al pto ...
c → distc al foco

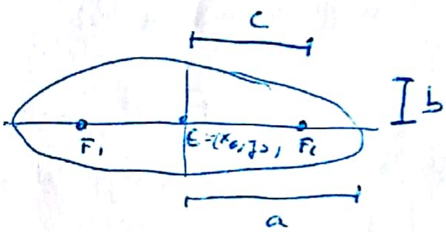
Definición: Una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de ptos (x,y) del plano que están a una distancia fija (radio) de un pto fijo (centro).

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r}$$

Definición: Se denomina elipse al conjunto de ptos de $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos ptos fijos (focos) es cte $= 2a$

$a^2=b^2+c^2$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

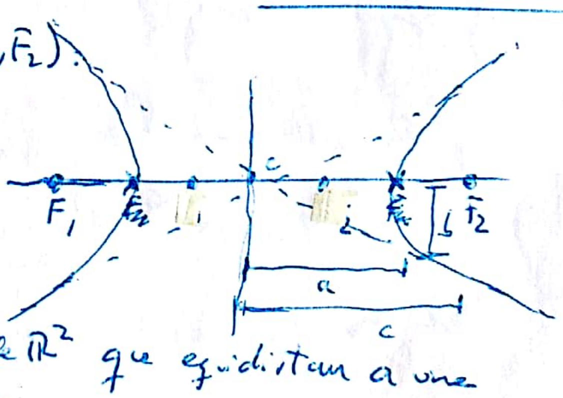


Se denomina excentricidad a $e=\frac{c}{a}$

Definición: Se denomina hipérbola al conjunto de puntos $P\in\mathbb{R}^2 : |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=K$ ($=2a$) donde F_1, F_2 son dos ptos fijos y $K<d(F_1,F_2)$.

$c^2=a^2+b^2$.

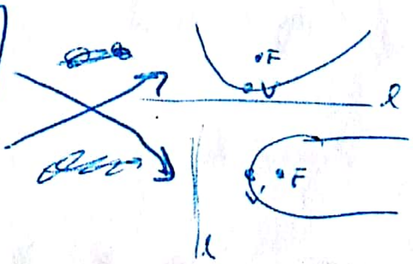
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$



Definición: Una parábola es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan a una recta $l\in\mathbb{R}^2$ y a un punto $F\notin l$. $F\equiv$ foco; $l\equiv$ recta directriz

$$\boxed{\begin{array}{c}(y-y_0)^2=2c(x-x_0)\\ \hline (x-x_0)^2=2c(y-y_0)\end{array}}$$

NO ESTÁ 2



Definición (excentricidad): Elipse, hip. par son conj. ptos: $\underbrace{d(P,F)}_{c} = e \cdot d(P,\ell)$

$$c = e \cdot a$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

- Circunf. : $e = 0$
- Elipse : $0 < e < 1$
- Parábola : $e = 1$
- Hipérbola : $e > 1$

Definición: la ec. general de la cónica es $\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

→ Fig 3, Δ, γ, δ, τ y ¡¡CUADRO!!

TRASLACIONES

Dado $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$T_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto T_v(x,y) = (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$$

∀ para trasladarla habrá que sustituir en la ec. por $(x-a)$ y $(y-b)$.

ROTACIONES

Para girar una cónica centrada en el origen un ángulo θ en sentido contrario al de las agujas del reloj:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto R_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para una figura geométrica con término en Bxy: $\begin{cases} C = A \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ C \neq A \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{B}{A-C} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

I: ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

OBI

Definición: Una operación binaria interna o ley de composición sobre un conjunto A es una aplicación f del cartesiano de A consigo mismo; y $f((a,b)) = a * b$.

* Propiedades: Asociativa, conmutativa; con otra OBI: dist. a izda, dist. a dcha, dist.

Definición: Si en A hay una obi $*$, se dice que $e \in A$ es el neutro si $\begin{cases} e * a = a \\ a * e = a \end{cases}$

- Proposición: Si $\exists$ el. neutro, es de forma única.

Definición: Si en A hay una obi $*$, A tiene el neutro, se dice que $a \in A$ tiene simétrico si $\exists\ a' \in A : \begin{cases} a * a' = e \\ a' * a = e \end{cases}$

- Proposición: $*$ asociativa, $\exists$ el neutro $\Rightarrow$ el simétrico de un el, si $\exists$, es único.

Definición: Una operación binaria externa sobre un conjunto A con dominio de operadores en un conjunto K es una aplicación f del cartesiano de K con A en A.

GRUPOS:

Definición: Un grupo es un conjunto G dotado con una obi $\circ$ tal que:

$$(G, \circ) \text{ grupo} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \circ \text{ interna y asociativa} \\ 2)\ \exists \text{ el. neutro} \\ 3)\ \forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G \end{cases}$$

Definición: $(G, \circ)$ grupo, $S \subset G$ diremos que es subgrupo, y lo denotaremos como $S \leq G$ si el par $(S, \circ|_{S\times S})$ es grupo, i.e.

$$(S, \circ|_{S\times S}) \text{ subgrupo} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall a, b \in S\ \ a \circ b \in S \ (\text{bien def.}) \\ 2)\ S \text{ tiene el neutro} \\ 3)\ \forall a \in S\ \exists a^{-1} \in S \end{cases} \text{(estr. de grupo)}$$

NOTA: Al restringir una operación de G a un subconjunto $S \leq G$, las propiedades que tenga (conmut., distrib...) una obi $*$ en G se siguen cumpliendo en S.

- Proposición: $S \leq G \Rightarrow$ el el. neutro de S es el el. neutro de G.

- Proposición: $S \leq G \Rightarrow$ el inverso en S de un $a \in S$ es el inverso de a en G.

- Proposición: $S \leq G, T \leq G \Rightarrow S \cap T \neq \phi$.

- Proposición: " " $, a \in S \cap T \Rightarrow a^{-1} \in S \cap T$

Definición: Se dice que un grupo $(G, \circ)$ es conmutativo o abeliano si si $\circ$ es conmutativa

* Teorema (Caract. de Subgrupos): $S \leq G \Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in S \quad \forall a, b \in S$

ANILLOS, IDEALES, CUERPOS

Definición: Diremos que un conjunto R dotado de dos ops $+$ y $\circ$ es un anillo si...

$$(R, +, \circ) \text{ anillo } \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & (R, +) \text{ grupo abeliano} \\ 2) & \circ \text{ asociativa} \\ 3) & \circ \text{ dist. resp } + \end{cases}$$

En particular, diremos que R es un anillo conmutativo si además $\circ$ es conmutativa y diremos que es un anillo con unidad si $1 \in R$.

Definición: Dado un anillo con unidad R, se define como característica de R, $ch(R)$ o $char(R)$ al menor $c \in \mathbb{Z}^+$: $c \cdot 1 = \overbrace{1 + \ldots + 1}^{c \text{ veces}} = 0$

- Proposición: La ch de un anillo con unidad finito (i.e, $card(R) < +\infty$) es siempre $\neq 0$.

Definición: Sea $\phi \neq S \subseteq R$, $(R, +, \circ)$ anillo. Diremos que S es un subanillo de R si $(S, +|_{S \times S}, \circ|_{S \times S})$ es anillo.

En particular, diremos que S es subanillo con unidad si $1 \in S$ (es necesario que R sea un anillo con unidad, obviamente)

*Teorema (Caract. de subanillo). $(R,+,\cdot)$ anillo y $\emptyset \neq S \subseteq R$.

$$S \text{ subanillo} \iff \begin{cases} 1)\ a-b \in S & \forall a,b \in S \\ 2)\ a\cdot b \in S & \forall a,b \in S \end{cases}$$

(1) $(S,+)$ subgrupo); (2) $\cdot$ bien def.

Definición: $\emptyset \neq I \subseteq R$, R anillo es un ideal $\iff \begin{cases} 1)\ I \text{ subanillo de } R \\ 2)\ r\cdot a, a\cdot r \in I \ \forall r \in R \ \forall a \in I \end{cases}$

*Teorema (Caract. de Ideal): $(R,+,\cdot)$ anillo, $\emptyset \neq I \subseteq R$.

$$I \text{ ideal de } R \iff \begin{cases} 1)\ a-b \in S & \forall a,b \in I \\ 2)\ a\cdot r \in I & \forall r \in R, \forall a \in I \\ \quad r\cdot a \in I \end{cases}$$

• Si I, ideal, $1_R \in I \Rightarrow I = R$

*Teorema (Ppdads de ideals):

1) I_l ideal $\forall l \in L$ (L fin ó inf) $\Rightarrow \bigcap_l I_l$ ideal.

2) $\{I_l : l \in L\}$ cadena de ideales (ie, I_j, I_k ideals, $I_j \subseteq I_k$ ($\subseteq \supseteq$); $j,k \in L$) $\Rightarrow \bigcup_l I_l$ ideal

3) I_1, I_2 ideals $\Rightarrow I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ es un ideal.
En particular es el menor que los contiene.

Definición: $(R,+,\cdot)$ anillo con unidad. Decimos que un el. $a \in R$ es invertible si tiene inverso para el producto, ie, si $\exists a^{-1} \in R : a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$

-Proposición: I ideal de un anillo R con unidad, I contiene un el. invertible $a \in I \Rightarrow I = R$.

Definición: $(R,+,\cdot)$ anillo, $r,s \in R$. Decimos que r divide a s ó s es divisible por r; y lo denotaremos como $r \mid s$, si $\exists\ x \in R$, $x \neq 0$:
$s = x\cdot r = r\cdot x$ (ie, s múltiplo de r).

* A $(S_n, \circ)$ se le denota como grupo simétrico de orden n (S_n = b puntos de n el

Definición: Si en un anillo $(F,+,\cdot)$ conmutativo y con unidad todo $a \in F$ es invertible, es cuerpo.

$$(F,+,\cdot) \text{ cuerpo } \iff \begin{cases} 1) & (F,+) \text{ Grupo Abeliano} \\ 2) & (F^*,\cdot) \text{ Grupo Abeliano} \\ 3) & \cdot \text{ distributiva resp. } + \end{cases}$$

Definición: $\emptyset \neq S \subseteq F$ es subcuerpo si $(S, +|_{S\times S}, \cdot|_{S\times S})$ es cuerpo.

* **Teorema** (Caracterización de Subcuerpo): $(F,+,\cdot)$ cuerpo y $\emptyset \neq S \subseteq F$.

$$S \text{ subcuerpo} \iff \begin{cases} 1) & a-b \in S \quad \forall a,b \in S \quad (\text{i.e. } S, +|_{S\times S} \text{ subgrupo}) \\ 2) & a\cdot b^{-1} \in S \quad \forall a,b \in S \quad (\quad 〃 \quad) \end{cases}$$

Definición:

homomorfismo $\equiv$ lineal

monomorfismo $\equiv$ 〃 + inyectiva

epimorfismo $\equiv$ 〃 + epiyectiva

isomorfismo $\equiv$ 〃 + biyectiva (inyectiva + epiyectiva)

endomorfismo $\equiv$ apl. lin $f: E \to E$

automorfismo $\equiv$ endomorfismo biyectivo.

$$\text{Th:} \begin{cases} \mathrm{Hom}_K(\overset{\dim n}{E},\overset{\dim m}{F}) \simeq M_{m\times n}(K) \\ \mathrm{End}_K E \simeq M_n(K) \end{cases}$$

* **Teorema** (Propiedad Universal de los Espacios Vectoriales Cociente)

Sea $f: V \to W$ una apl. lin entre EV, y sea $S \subseteq V$ un sev.

$\exists!$ apl. lin $\varphi: V/S \to W : \varphi \circ \pi = f \iff S \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/S \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\, f / S$ y $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\, f$

* **Corolario** (Primer Teorema de Isomorfía ó Teorema de Factorización Canónica)

Sea $f: V \to W$ una apl. lin entre EV. Entonces $\exists!$ isomorfismo

$\varphi: V/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f : f = i \circ \varphi \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f'"] & W \\ V/\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

II: ESP. VECT. DUAL

Definición: Dado un EV E, se denomina espacio vectorial dual y se denota como E^* a $Hom_K(E,K)$. Sus elementos se llaman formas lineales o covectores.
Se denomina bidual al dual de E^*; i.e, a $(E^*)^* = E^{**} = Hom(E^*, K)$.

- **Proposición**: Si $\dim E < +\infty$, $\Rightarrow \dim E = \dim E^*$. Además, se deduce que $= \dim E^{**}$.
  ($\simeq M_{1\times n}$)

BASE DE E^*: Como E EV siendo su base $\{e_1, \dots, e_n\}$, vamos a definir $n = \dim E = \dim E^*$ covectores (apl. lin) $\omega^i: E \to K$ $i = 1, \dots, n$ así: $\omega^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \neq \end{cases}$. Para ver que son base (son n) basta ver que son L.I. (Demo). Esta base $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ obtenida así se denomina base dual de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Además, las coordenadas de un vector $\omega \in E^*$ en esta base son $(\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$. (Demo).

* **Lema**: Sea E un EV. Dado $0 \neq e \in E$, $\exists\, \omega \in E^*: \omega(e) \neq 0$.

* **Teorema** (de Reflexividad). Sea E un EV (de dim cualquiera). Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: E &\to E^{**} \\ e &\mapsto \phi(e): E^* \to K \\ &\qquad \omega \mapsto \phi(e)(\omega) := \omega(e) \end{aligned}$$

es un monomorfismo (i.e, inyectiva).

* **Corolario**: Si E es un EV de dim $< +\infty$, $\Rightarrow \phi$ es un isomorfismo; y $E \simeq E^{**}$.

BASE DE E^{**}: De igual forma que antes, dada $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E, $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ base de E^*; podemos considerar una base dual de E^{**} $\{f_1, \dots, f_n\}$ que sea la base dual de la de E^*; definiendo cada f_i como $f_i(\omega^j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \neq \end{cases}$. Pero como $E \simeq E^{**}$; si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E, entonces $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ es base de E^{**}, y $\phi(e_i)(\omega^j) = \omega^j(e_i) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \neq \end{cases}$. Así, cada e_i se identifica con f_i por ϕ. Así lo más importante es que $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ son bases duales la una de la otra.

Definición: Sean E, F EV y sea $f: E \to F$ una apl. lin. Llamamos aplicación lineal dual de f, homomorfismo traspuesto o aplicación lineal traspuesta a

$$f^*: F^* \to E^*$$
$$\omega \mapsto f^*(\omega) := \omega \circ f$$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\omega} K, \qquad \omega \circ f$$

que es lineal (dem).

*Lema: Si $f: E \to F$ es una apl. lin con matriz de la aplicación A en ciertas bases de E y F, $\Rightarrow$ A^t es la matriz de la apl. de $f^*: F^* \to E^*$ en ciertas bases de F^* y E^* que son las duales de las de E y F.

+Teorema: Sean E, F, G EV:

1) $\varphi: Hom(E,F) \to Hom(F^*, E^*)$, $f \mapsto \varphi(f) = f^*$ es lineal. (más adelante se verá que es isomorfismo).

2) $Id_E: E \to E \Rightarrow (Id_E)^* = Id_{E^*}$

3) $f \in Hom(E,F)$, $g \in Hom(F,G) \Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G, \qquad g \circ f$$
$$G^* \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{f^*} E^*, \qquad g^* \circ f^* \overset{?}{=} (g \circ f)^*?$$

4) $f \in Hom(E,F)$ isomorfismo $\Rightarrow f^*$ isomorfismo y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

-Proposición: $f: E \to F$ apl. lin, E, F EV, dim $< +\infty$ $\underline{f = f^{**}}$ (salvo isomorfismos).

*Corolario (de 1)): E, F EV dim $< +\infty$. Entonces la aplicación

$$\varphi: Hom(E,F) \to Hom(F^*, E^*)$$
$$f \mapsto \varphi(f) = f^*$$

es un isomorfismo.

*Corolario:

1) $\forall A \in M_{m \times n}(K)$, $\forall B \in M_{n \times p}(K)$, se tiene que $(AB)^t = B^t A^t$

2) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de un EV E, dim $< +\infty$; $\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*$ bases duales. Si A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$; A^t es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2^*$ a $\mathcal{B}_1^*$

3) $\forall A \in M_n(K)$ invertible $\Rightarrow A^t$ invertible, y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4) $\forall A \in M_{m \times n}(K)$, $(A^t)^t = A$

Definición: Sea $\phi = S \subseteq E$, E EV, S no nec. SEV, sólo subconjunto. Llamaremos el **anulador** o **incidente** de S a

$$S^{\circ} = \{\omega \in E^* : \omega(S) = \{0_K\}\} = \{\omega \in E^* : \omega(s) = 0 \ \forall s \in S\} = \{\omega \in E^* : S \subseteq \operatorname{Ker} \omega\}$$

* En particular, S° siempre es SEV, aunque S no lo sea (Demo).
* $E^{\circ} = \{0_{E^*}\}$; y $\{0_E\}^{\circ} = E^*$
* Por otra parte, podemos definir el $(S^{\circ})^{\circ} = S^{\circ\circ} = \{f \in E^{**} : f(\omega) = 0_K \ \forall \omega \in S^{\circ}\}$.

* **Lema:** $S \subseteq S^{\circ\circ}$
* **Lema:** Si $\dim E < +\infty$, $\phi \neq W \subseteq E^* \Rightarrow W^{\circ} \subseteq E$
* **Teorema:** Sea E EV, $S \subseteq E$ SEV. $\underline{\dim S^{\circ} = \dim E - \dim S}$
* **Corolario:** E EV, $\dim < +\infty$, $\phi \neq S \subseteq E$ SEV. $\underline{S^{\circ\circ} \cong S}$

Teorema: $f: E \to F$ apl. lin con E, F EV.

1) $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^{\circ}$
2) $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^{\circ}$

Hay que ver que $\omega = f^*(\omega')$ para algún $\omega' \in F^*$. 1) Definimos $\omega_2 : \operatorname{Im} f \to K$, $\omega_2(v = f(e)) = \omega(e)$. Ver que no depende (ver que es apl.), ver que es lineal.
2) Consideramos $F = H \oplus \operatorname{Im} f$ y $\omega_1 \in H^*$ arbitraria. Definimos $\omega' : F = H \oplus \operatorname{Im} f \to K$, $v = v_1 + v_2 \mapsto \omega_1(v) + \omega_2(v_2)$. Ver que es lin.
3) Ver que para $e \in E$, $f^*(\omega')(e) = \omega(e)$

* **Corolario:** $f: E \to F$ lineal e inyectiva (resp. epiyectiva) $\Rightarrow f^* : F^* \to E^*$ lineal y epiyectiva (resp. inyectiva).

* **Corolario:** Si $\dim^{E,F} < +\infty$, en el Corolario anterior la otra implicación también se cumple, i.e.,

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow f^* \text{ epiyectiva}$$
$$f \text{ epiyectiva} \Leftrightarrow f^* \text{ inyectiva}$$
$$f \text{ biyectiva} \Leftrightarrow f^* \text{ biyectiva}$$

* **Corolario:** $f: E \to F$ lin; E, F EV de $\dim < +\infty \Rightarrow \underline{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^*}$, donde $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Im} f)$, siendo A matriz de f en ciertas bases.

III: TENSORES EN UN EV

APL MULTILIN. TENSORES

<u>Definición</u>: Dados $E_1, \dots, E_n, F$ EV, diremos que la aplicación $T: E_1 \times \dots \times E_n \to F$ es <u>multilineal</u> si lo es en cada uno de sus argumentos, ie, $T(\dots, \lambda e_i + \mu e_i', \dots) = \lambda T(\dots, e_i, \dots) + \mu T(\dots, e_i', \dots)$

El conjunto de todas las apl. multilin de $E_1 \times \dots \times E_n$ a F se denotan con $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$

* Sobre $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ se pueden definir dos operaciones $+$ (suma) y $\cdot$ (prod. por escalares). Ambas operaciones están bien def. Así, $(\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F), +)$ es grupo abeliano; y el producto por escalares $\cdot$ dota a este par de estructura de <u>EV</u>. (Dem)

***** <u>Definición</u>: Sean $p, q \in \mathbb{N}$ no simult. nulos. Llamaremos <u>tensor p veces covariante y q veces contravariante</u> (ó tensor tipo (p,q)) sobre E a los elementos del EV $\mathcal{M}(E, \overset{p}{\dots}, E, E^*, \overset{q}{\dots}, E^*; K)$, que denotaremos con <u>$T^{(p,q)}(E)$</u>.

* Denotamos con <u>tensores puramente covariantes</u> a los del tipo $(p,0)$; y <u>tensores puramente contravariantes</u> a los del tipo $(0,q)$.
* $T^{(0,q)}(E) = \mathcal{M}(E^* \times \dots \times E^*; K) = T^{(q,0)}(E^*)$
* $T^{(1,1)}(E) \simeq End_K(E) \simeq \mathcal{M}_n(K)$ $\quad \varphi(T)(e, \omega) := \omega(T(e))$

***** <u>Definición</u>: Sean $T^{pq} \in T^{(p,q)}(E)$ y $T^{p'q'} \in T^{(p',q')}(E)$. Se llama <u>producto tensorial de T^{pq} por $T^{p'q'}$</u> al tensor <u>$T^{pq} \otimes T^{p'q'}$</u> de tipo $(p+p', q+q')$ <u>definido</u> del sig. modo:

$$T^{pq} \otimes T^{p'q'}: E \times \overset{p+p'}{\dots} \times E \times E^* \times \overset{q+q'}{\dots} \times E^* \longrightarrow K$$

$$(e_1, \dots, e_{p+p'}, \omega^1, \dots, \omega^{q+q'}) \longmapsto T^{pq} \otimes T^{p'q'}(e_1, \dots, e_{p+p'}, \omega^1, \dots, \omega^{q+q'}) :=$$

$$:= T^{pq}(e_1, \dots, e_p, \omega^1, \dots, \omega^q) \cdot_K T^{p'q'}(e_{p+1}, \dots, e_{p+p'}, \omega^{q+1}, \dots, \omega^{q+q'})$$

que es multilineal y así $T^{pq} \otimes T^{p'q'} \in T^{(p+p', q+q')}(E)$.

*** Teorema** (Propiedades de $\otimes$)

1) El producto tensorial $\otimes$ es bilineal; i.e., la aplicación

$$\otimes : T^{(p,q)}(E) \times T^{(p',q')}(E) \longrightarrow T^{(p+p',q+q')}(E)$$
$$(T^{pq}, T^{p'q'}) \longmapsto T^{pq} \otimes T^{p'q'}$$

es lineal en ambos argumentos, i.e., por la izda y por la dcha. i.e., en T^{pq} y en $T^{p'q'}$

2) El producto tensorial $\otimes$ es asociativo; i.e. $T^{pq} \otimes (T^{p'q'} \otimes T^{p''q''}) = (T^{pq} \otimes T^{p'q'}) \otimes T^{p''q''}$

* ¡Ojo! El producto tensorial $\otimes$ NO es conmutativo; i.e., $T^{pq} \otimes T^{p'q'} \neq T^{p'q'} \otimes T^{pq}$

* Como $T^{(0,0)}(E) = K$, $T^{00} \otimes T^{pq} = \lambda \otimes T^{pq}$ se debe entender como λT^{pq}, tensor de tipo (p,q). En este caso, con T^{00}, $\otimes$ es el producto por escalares que dota a $T^{(p,q)}(E)$ de str. de EV.

— T.T.I —

Definición: Sea $e \in E$, $T^{pq} \in T^{(p,q)}(E)$, $p \geq 1$. Se llama producto interior o contracción interior de e y T^{pq} al tensor $i_e T^{pq}$ de tipo $(p-1,q)$ definido

$$i_e T^{pq} : E^{p-1} \times E^{q} \longrightarrow K$$
$$(e_1, .., e_{p-1}, \omega^1, .., \omega^q) \longmapsto i_e T^{pq}(e_1, .., e_{p-1}, .., \omega^1, .., \omega^q) := T^{pq}(\underset{\text{fijo}}{e}, e_1, .., e_{p-1}, \omega^1, .., \omega^q)$$

* **Proposición**: La aplicación $i_e^{pq} : E \times T^{(p,q)} \longrightarrow T^{(p-1,q)}$ es bilineal, y
$$(e, T^{pq}) \longmapsto i_e T^{pq}$$

por tanto la apl. operación producto interior $i_e : T^{(p,q)} \longrightarrow T^{(p-1,q)}$, $T^{pq} \longmapsto i_e T^{pq}$ es lineal.

* Convenio de Sumación de Einstein: Si en un lado de la igualdad aparece un índice una vez como superíndice y otra como subíndice, se entiende que está sumado en todos sus posibles valores.

$$\lambda^{i_\ell} e_{i_\ell} = \sum_{i_\ell=1}^{n} \lambda^{i_\ell} e_{i_\ell} = \sum_{i_\ell=1}^{n} \lambda^{i_\ell}_{\ell} e_{i_\ell} = \lambda^1_\ell e_1 + \dots + \lambda^n_\ell e_n = v_\ell$$

$$\mu_{j_h} \omega^{j_h} = \sum_{j_h=1}^{n} \mu_{j_h} \omega^{j_h} = \sum_{j_h=1}^{n} \mu^h_{j_h} \omega^{j_h} = \mu^h_1 \omega^1 + \dots + \mu^h_n \omega^n = \xi^h$$

Lema I: Dados $T^{pq}, \overline{T}^{pq} \in T^{(p,q)}(E)$, si coinciden sobre cualquier familia de vectores y covectores básicos $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega^{j_1}, \dots, \omega^{j_q}) \Rightarrow T^{pq} = \overline{T}^{p'q'}$.

IMPORTANTE: Dados $v_1, \dots, v_q \in E$, $\xi^1, \dots, \xi^p \in E^*$, podemos obtener un tensor (p,q) utilizando $\otimes$:

$$\xi^1 \otimes \dots \otimes \xi^p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q : E^p \times E^{*q} \to k$$

$$(u_1, \dots, u_p, \phi^1, \dots, \phi^q) \longrightarrow \xi^1 \otimes \dots \otimes \xi^p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q (u_1, \dots, u_p, \phi^1, \dots, \phi^q)$$

$$= \xi^1(u_1) \cdots \xi^p(u_p) \cdot v_1(\phi^1) \cdots v_q(\phi^q) = \xi^1(u_1) \cdots \xi^p(u_p) \cdot \phi^1(v_1) \cdots \phi^q(v_q)$$

Lema II: Para vectores y covectores de las bases de E y E^*, se tiene

$$(\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{l_1}, \dots, e_{l_p}, \omega^{h_1}, \dots, \omega^{h_q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) = (l_1, \dots, l_p, h_1, \dots, h_q) \\ 0 & \text{si } \neq \end{cases}$$

* $VR(n,p)$ = conjunto de las variaciones con rep. de n el. tom. de p en p.
  $\# VR(n,p) = n^p$.

Teorema: Los tensores de la forma $\underline{\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}}$ donde $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) \in VR(n, p+q)$ constituyen una base del EV $T^{(p,q)}(E)$, y por tanto se sigue que $\dim T^{(p,q)}(E) = n^{p+q}$.

* Este Th dice que los coord. de un tensor T^{pq} son $\{\lambda^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} = T^{pq}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega^{j_1}, \dots, \omega^{j_q})\}$.

* En $T^{(2,0)}(E)$ = Métricas, $\langle u, v \rangle = T^{20}(u,v) = \underbrace{(\alpha^1 \dots \alpha^n)}_{\text{Coord. de } u} \underbrace{A}_{\text{Mat. de la métrica}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{\text{Coord. de } v}$

* En $T^{(1,1)}(E) = End_k(E)$, $\underbrace{(\lambda^j_i)}_{\text{Coord. } T^{11}} = (a_{ji}) \to$ Mat. endomorfismo

* CAMBIO DE BASE:

En E: $\left[\bar{e}_{il} = c_{il}^{hl} \, e_{hl}\right]$ $\quad C \equiv$ Mat. cambio de base de $\{e_k\}$ a $\{\bar{e}_i\}$

En E^*: $\left[\bar{\omega}^{jh} = b_{lh}^{jh} \, e^{lh}\right]$ $\quad B^t \equiv$ Mat ... ... $\{\omega^l\}$ a $\{\bar{\omega}^l\}$.

$$Y \text{ así}, \quad \overline{\lambda}_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = c_{i_1}^{h_1} \cdots c_{i_p}^{h_p} \, b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_q}^{j_q} \cdot \lambda_{h_1,\dots,h_p}^{l_1,\dots,l_q}$$

Definición: Sean $i, j \in \{1,\dots,n\}$ un par de índices fijos pero arbitrarios. La contracción de índice covariante i con el índice contravariante j de un tensor $T^{pq} \in T^{(p,q)}(E)$, $p,q \geq 1$, es un tensor $C^{ij}T^{pq} \in T^{(p-1,q-1)}(E)$ definido así: dados $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ base de E y E^*, y dados $v_1,\dots,v_p \in E$ y $\xi^1,\dots,\xi^q \in E^*$

$$C^{ij}T^{pq} : E^{p-1} \times E^{*\,q-1} \longrightarrow K$$

$$(v_1,\dots,v_{p-1},\xi^1,\dots,\xi^{q-1}) \longmapsto C^{ij}_{T^{pq}}(v_1,\dots,v_{p-1},\xi^1,\dots,\xi^{q-1}) := \sum_{k=1}^{n} T^{pq}(v_1,\dots,\underbrace{e_k}_{\text{lugar } i\text{-ésimo}},\dots,v_{p-1},\xi^1,\dots,\underbrace{\omega^k}_{\text{lugar } j\text{-ésimo}},\dots,\xi^{q-1})$$

Proposición:
1) $C^{ij}T^{pq}$ no depende de la base de E elegida
2) La apl. $C^{ij}: T^{(p,q)}(E) \longrightarrow T^{(p-1,q-1)}(E)$ es lineal.
$\qquad\qquad T^{pq} \longmapsto C^{ij}T^{pq}$

* OPERACIONES EN COORDENADAS

$$\alpha T^{pq} \equiv \alpha \lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = \lambda^{\cdot}{}_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$$

$$\iota_e T^{pq} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \lambda_{k,i_1,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_q} \quad \left(\begin{array}{c}\alpha^k \equiv \text{coordenadas} \\ \text{de } e \text{ en la base} \\ \text{de } E\end{array}\right)$$

$\lambda^{\iota}{}_{i_1,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_q}$

$$T^{pq} + \overline{T^{pq}} \equiv \lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} + \overline{\lambda}_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = \overset{+}{\lambda}{}_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$$

$$C^{ij}T^{pq} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_1,\dots,\underset{i}{k},\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,\overset{j}{k},\dots,j_{q-1}} = \lambda^{c^{ij}}{}_{i_1,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_q}$$

$$T^{pq} \otimes T^{p'q'} \equiv \lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} \cdot \mu_{i_{p+1},\dots,i_{p+p'}}^{j_{q+1},\dots,j_{q+q'}} = \lambda^{\otimes}{}_{i_1,\dots,i_{p+p'}}^{j_1,\dots,j_{q+q'}}$$

Definición: Se denomina operación del grupo simétrico sobre los tensores p-veces covariantes a la apl.

$$\begin{array}{l} \quad\ \ 1^{er} arg.\ \ 2^{do} arg. \\ S_p \times T^{(p,0)}(E) \longrightarrow T^{(p,0)}(E) \\ (\sigma, \ T^p) \longmapsto {}^{\sigma}T^p : E^p \to K \\ \qquad\qquad (e_1,..,e_p) \mapsto {}^{\sigma}T^p(e_1,..,e_p) := T^p(e_{\sigma(1)},..,e_{\sigma(p)}) \end{array}$$

* **Teorema** (Ppdades. de la op. de S_p sobre $T^{(p,0)}(E)$): La apl. antes def:

1) Es lineal en su 2º argumento, i.e.: ${}^{\sigma}(\lambda T^p + \mu \bar{T}^p) = \lambda\, {}^{\sigma}T^p + \mu\, {}^{\sigma}\bar{T}^p$

2) Es una operación a izda, i.e., ${}^{\rho\sigma}T^p = {}^{\rho}({}^{\sigma}T^p)$ (ρ: 1º, σ: 2º)

3) $\boxed{\omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(p)} = {}^{\sigma^{-1}}(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p)}$

* **Definición**: Dado $T^p \in T^{(p,0)}(E)$, $p \geq 1$, se dice que T^p es simétrico si $\forall \sigma \in S_p$ se tiene que ${}^{\sigma}T^p = T^p$, i.e., $\forall e_1,..,e_p \in E$, $\forall \sigma \in S_p$, $T^p(e_1,..,e_p) = {}^{\sigma}T^p(e_1,..,e_p) = T^p(e_{\sigma(1)},..,e_{\sigma(p)})$

Denotaremos con $S^p(E) = \{ T^p \in T^{(p,0)}(E) \text{ simétricos} \}$. (Es un SEV)

Definición: Se dice que un tensor $T^p \in T^{(p,0)}(E)$ es simétrico en las coordenadas (i,j), $i,j \in \{1,..,n\}$ si $\forall v_1,..,v_p \in E$ se cumple que $T^p(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_p) = T^p(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_p)$.

* **Definición**: Dado $T^p \in T^{(p,0)}(E)$, $p \geq 1$, se dice que T^p es hemisimétrico (o alternado) si para cualquier familia de p vectores $e_1,..,e_p$ que haya dos iguales se tiene que $T^p(e_1,..,e_i,..,e_i,..,e_p) = 0$ (iguales)

Denotaremos por $\Lambda^p = \{ T^p \in T^{(p,0)}(E) \text{ hemisimétricos} \}$ (Es un SEV)

Definición: Se dice que un tensor $T^p \in T^{(p,0)}(E)$, $p \geq 2$, es hemisimétrico en las coordenadas (i,j) $i,j \in \{1,..,n\}$ si $\forall v, v_1,..,v_{p-2}$ se cumple que $T^p(v_1,..,\overset{i}{v},..,\overset{j}{v},..,v_{p-2}) = 0$

$T^p \in S^p(E)$

$\Updownarrow$ Def

$T^p = {}^{\sigma}T^p \quad \forall \sigma \in S_p$

$\Updownarrow$ Proposición

$T^p = {}^{\tau}T^p \quad \underline{\forall \tau \text{ trasposición}} \in S_p$

$\Updownarrow$ Corolario I

$T^p(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_p) = T^p(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_p)$

$\dim_K E < +\infty \Updownarrow$ Corolario II

$\lambda_{e_1,..,e_i,..,e_j,..,e_p} = \lambda_{e_1,..,e_j,..,e_i,..,e_p}$

$T^p \in \Lambda^p(E)$

$\Updownarrow$ Def

$T^p(e_1,..,e_i,..,e_i,..,e_p) = 0$

$\mathrm{ch}(K) \neq 2 \Updownarrow$ Prop $\quad (..., e_i + e_j, ...)$

${}^{\sigma}T^p = \mathrm{sgn}(\sigma)\, T^p$

$\Updownarrow$ Lema

${}^{\tau}T^p = -T^p$

$\Updownarrow$ Corolario I

$T^p(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_p) = -T^p(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_p)$

$\dim E < \infty \Updownarrow$ Corolario II

$\lambda_{e_1,..,e_i,..,e_j,..,e_p} = -\lambda_{e_1,..,e_j,..,e_i,..,e_p}$

Definición: Sea $\phi \in Hom(E,F)$. Se define el morfismo inducido en el espacio de los tensores puramente covariantes $(p,0)$ a la aplicación

$$\phi_p^*: T^{(p,0)}(F) \longrightarrow T^{(p,0)}(E)$$
$$T^p \longmapsto \phi_p^*(T^p): E^p \to K$$
$$(e_1,..,e_p) \mapsto \phi_p^*(T^p)(e_1,..,e_p) := T^p(\phi(e_1),..,\phi(e_p))$$

A esta aplicación ϕ_p^* se le llama pull-back o aplicación traspuesta generalizada, ya que para $p=1$ $\phi_1^* = \phi^*$.

Teorema (Propiedades de ϕ_p^*)

1) $\phi_{p+p'}^*(T^p \otimes_F T^{p'}) = \phi_p^*(T^p) \otimes_E \phi_{p'}^*(T^{p'})$ (Es compatible con $\otimes$)

2) $\psi \in Hom(G,E)$, $(\phi \circ \psi)_p^* = \psi_p^* \circ \phi_p^*$

3) ϕ_p^* mantiene tensores hemisimétricos en hemisimétricos; y simétricos en simétricos

IV : TENSORES HEMISIMÉTRICOS

Definición: Sea $p \geq 1$, se define el operador de hemisimetrización sobre el esp. $T^{(p,0)}(E)$ como la apl.

$$h_p : T^{(p,0)}(E) \longrightarrow T^{(p,0)}(E)$$
$$T^p \longmapsto h_p(T^p) := \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma)\, {}^{\sigma}T^p$$

Tomaremos $h_0 = h_1 = Id$.

Teorema (Propiedades):

1) h_p es lineal y valora sobre $\Lambda^p(E)$

2) Si $\Omega^p \in \Lambda^p(E) \Rightarrow h_p(\Omega^p) = p!\,\Omega^p$

3) $h_{p+q}(T^p \otimes T^q) = (-1)^{pq} h_{p+q}(T^q \otimes T^p)$ $\quad T^p, T^q$ cov.

4) $T^p \in \text{Ker}\, h_p \Rightarrow T^p \otimes T^q \in \text{Ker}\, h_{p+q}$ $\quad \forall T^q \in T^{(q,0)}(E)$

5) $h_p(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma)\, \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(p)}$

Teorema (Ppdes caso finito):

1) Sea $1 \leq p \leq n$, $\{h_p(\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_p}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ es una base del EV $\Lambda^p(E)$, y así $\dim \Lambda^p(E) = \binom{n}{p}$

2) $n < p \Rightarrow \Lambda^p(E) = 0$

3) $h_p : T^{(p,0)}(E) \longrightarrow \Lambda^p(E)$ es epiyectiva $\forall p$

Definición: Dado $\Omega^p \in \Lambda^p(E)$, $\Omega^q \in \Lambda^q(E)$, se define el producto exterior de Ω^p por Ω^q como

$$\Omega^p \wedge \Omega^q := h_{p+q}(T^p \otimes T^q)$$

donde $h_p(T^p) = \Omega^p$, y $-^q-$; i.e, T^p y T^q son representantes de Ω^p y Ω^q.

$\rightarrow$ no dpde de los repr. elegidos!!

Proposición:

1) El producto exterior es bilineal, i.e, la aplicación

$$\begin{aligned} \wedge: \Lambda^p(E) \times \Lambda^q(E) &\longrightarrow \Lambda^{p+q}(E) \\ (\Omega^p, \Omega^q) &\longmapsto \Omega^p \wedge \Omega^q \end{aligned}$$

es bilineal.

2) El producto exterior es asociativo:

$$\Omega^p \wedge (\Omega^{p'} \wedge \Omega^{p''}) = (\Omega^p \wedge \Omega^{p'}) \wedge \Omega^{p''}$$

3) El producto exterior es anti-conmutativo:

$$\Omega^p \wedge \Omega^q = (-1)^{pq} \Omega^q \wedge \Omega^p$$

Corolario: La familia de tensores linealmente... $\{\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ es base de $\Lambda^p(E)$.

Proposición: Sean $\omega^1, \dots, \omega^p \in E^*$, y $\sigma \in S_p$, se tiene

$$\omega^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma(p)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p$$

Nota: $\omega^i \wedge \omega^i = 0$.

Proposición:

1) $\{v_1, \dots, v_p\}$ l.i. $\Leftrightarrow \exists\, \Omega^p \in \Lambda^p(E) : \Omega^p(v_1, \dots, v_p) \neq 0$

2) $\{\omega^1, \dots, \omega^p\}$ l.i $\Leftrightarrow \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \neq 0$

Lema: $(\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^p)(e_1,\dots,e_p) = (e_1\wedge\dots\wedge e_p)(\omega^1,\dots,\omega^p)$

Teorema: La contracción interior por un vector es por el producto exterior una antiderivación:

$$i_e(\Omega^p\wedge\Omega^q) = i_e(\Omega^p)\wedge\Omega^q + (-1)^p\,\Omega^p\wedge i_e(\Omega^q)$$

(SIN DEMO.)

Corolario: $\forall e,\ \forall \omega^1,\dots,\omega^p\in E^*$

$$i(\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^p) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\,\omega^i(e)\ \omega^1\wedge\dots\wedge\underbrace{\hat{\omega}^i}_{\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}}\wedge\dots\wedge\omega^p$$

Definición: Dada una apl. $\phi: E\to F$ se define el morfismo inducido sobre el espacio de los tensores hemisimétricos como

$$\begin{aligned}\phi_p^\wedge : \Lambda^p(F) &\longrightarrow \Lambda^p(E)\\ \Omega^p &\longmapsto \phi_p^\wedge(\Omega^p) := \phi_p^*(\Omega^p)\end{aligned}$$

En particular, notar que $\phi_p^\wedge = \phi_p^*|_{\Lambda^p(E)}$

Proposición: $\varphi: G\to E$ otra apl. lin.:

$$(\phi\circ\varphi)_p^\wedge = \varphi_p^\wedge\circ\phi_p^\wedge$$

Lema: ϕ_p^* conmuta con h_p, ie,

$$h_p(\phi_p^*(T^p)) = \phi_p^*(h_p(T^p))$$

$$\begin{tikzcd} T^{(p,0)}(F) \arrow[r] \arrow[d, "h_p"'] & T^{(p,0)}(E) \arrow[d, "h_p"] \\ \Lambda^p(F) \arrow[r] & \Lambda^p(E) \end{tikzcd}$$

Teorema: $\phi_p^\wedge$ es compatible con $\wedge$:

$$\phi_{p+q}^\wedge(\Omega^p\wedge\Omega^q) = \phi_p^\wedge(\Omega^p)\wedge\phi_q^\wedge(\Omega^q)$$

V : DETERMINANTES

1.- DET DE UN ENDO.

* $\dim \Lambda^n(E) = 1 = \binom{n}{n}$, $n = \dim E$. Así, los únicos endomorfismos de $\Lambda^n(E)$ son las homotecias $= f(x) = \lambda x$. $\lambda \equiv$ razón de la homotecia.

Definición: Dado $T : E \to E$, llamaremos determinante del endomorfismo T a la razón de la homotecia determinada por $T^\wedge_n : \Lambda^n(E) \to \Lambda^n(E)$, $T^\wedge_n(\Omega^n) = (\det T)\cdot \Omega^n$.

* Teorema (Ppdds Básicas) :

1) $\det(T \circ \bar{T}) = (\det T)(\det \bar{T})$ [El det es multiplicativo]

2) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ bases de E y E^*,

$$\boxed{\det T = (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n)(Te_1, \dots, Te_n)}$$

* Teorema (Ppdds) :

1) T automorfismo $\Leftrightarrow \det T \neq 0$. Así, $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$

2) Si T^* es la aplicación traspuesta (endomorfismo), entonces $\det T = \det T^*$

3) Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de T en cierta base,

$$\boxed{\det T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = |A|}$$

* Lema : Dados $v_1, \dots, v_n \in E$, $\xi^1, \dots, \xi^n \in E^*$,

$$\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n (v_1, \dots, v_n) = |(\xi^i(v_j))|$$

Corolario: Dados $A, B \in M_n(k)$

1) $|A| = |A^t|$
2) El determinante de una matriz es lineal en cada columna
3) $|AB| = |A||B|$
4) Si $A = |A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n|$; $B = |A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n| \Rightarrow |B| = -|A|$
5) A invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$; Además, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

2.- MENORES. TM RANGO

Definición: Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(k)$. Llamaremos matriz extraída de A a toda matriz extraída al suprimir algunas filas y columnas. Denotaremos por $A^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_p}$ a la matriz extraída formada por las filas $i_1, \dots, i_p$ y columnas $j_1, \dots, j_p$. Llamaremos menor de orden p al determinante de cada una de las matrices extraídas.

Lema: $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ bases, y sea $v_1, \dots, v_p \in E$. Si A es la matriz de coordenadas de dichos vectores en la base de E, entonces

$$\left|A^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_p}\right| = (\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p})(v_{j_1}, \dots, v_{j_p})$$

Proposición: Dado $1 \le \substack{j_1 \\ i_1} < \dots < \substack{j_p \\ i_p} \le n$,

$$\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\} \text{ L.I } \Leftrightarrow \exists\, i_1, \dots, i_p : \left|A^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_p}\right| \neq 0$$

Corolario (Th del Rango): El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

Definición: Llamamos adjunto del el. a_{ij} a $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|A^{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n}_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n}\right|}$

Proposición (desarrollo del determinante por columnas y filas):

COLUMNAS: $|A| = a_{1h}A_{1h} + \dots + a_{nh}A_{nh}$

FILAS: $|A| = a_{h1}A_{h1} + \dots + a_{hn}A_{hn}$

Definición: Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamaremos matriz adjunta de A a la matriz $A^* = (A_{ij})^t = (A_{ji})$ [cada $a^*_{ij} = A_{ji} \equiv$ adjunto del el. a_{ij} en A] (traspuesta del)

Proposición: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se tiene que $AA^* = A^*A = |A| I_n$.

Corolario: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible ($|A| \neq 0$), se cumple que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

3.- ORIENTACIÓN. FORMAS DE VOLUMEN

Definición: Llamaremos forma de volumen sobre E a todo vector no nulo $\in \Lambda^n(E)$.

Definición: Dada $\Omega^n \in \Lambda^n(E)$ (una forma de volumen), y $e_1,..,e_n \in E$; llamaremos volumen con signo del paralelepípedo determinado por $\{e_1,..,e_n\}$ a $\Omega^n(e_1,..,e_n)$; y llamamos volumen del paralelepípedo determinado por $\{e_1,..,e_n\}$ a $|\Omega^n(e_1,..,e_n)|$.

Obs: El paral. det por $\{v_1,..,v_n\}$ tiene vol $\neq 0 \iff \{v_1,..,v_n\}$ l.i.

Teorema: Sean $B = \{e_1,..,e_n\}$ base de E y $\{\omega^1,..,\omega^n\}$ su dual.

1) La única forma de vol. para la cual el paral. det. por B tiene volumen con signo 1 es $\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n$.

2) Dados $v_1,..,v_n \in E$, y $A = (a_{ij}) \equiv$ matriz de coord. de $\{v_1,..,v_n\}$ en la base B, entonces

$$v_1 \wedge ... \wedge v_n = |A| e_1 \wedge ... e_n$$

$[\lambda = |A| = (v_1 \wedge ... \wedge v_n)(\omega^1,..,\omega^n)]$

3) La única forma de volumen $\omega^1 \wedge ... \omega^n$ de 1) da volumen con signo $|A|$ al parale. determinado por $\{v_1,..,v_n\}$; i.e, $\boxed{(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n)(v_1,..,v_n) = |A|}$

Teorema: Sea $T \in End_K(E)$. $|\det(T)|$ es el valor por el que quedan multiplicados los volúmenes de los paralelepípedos de E al tomar imagen por T; i.e, dados $v_1, .., v_n \in E$,

$$|\Omega^n(T(v_1), .., T(v_n))| = |\det(T)| \, |\Omega^n(v_1, .., v_n)|$$

L.D : $T(v_1) .., T(v_n)$ no base, nada que der

L.I : Tomar $\{v_1, .., v_n\}, \{\xi^1, .., \xi^n\}$ base $\neq$ v_i; 2^a def. de det T.

* Denotaremos como $\mathcal{F} = \Lambda^n(E) \setminus \{0\}$, donde definimos la sig. relación de eq:

dados $\Omega^n, \overline{\Omega^n} \in \Lambda^n(E)$, diremos que $\Omega^n \sim \overline{\Omega^n} \iff \exists \lambda > 0 : \Omega^n = \lambda \overline{\Omega^n}$.

Así, $\mathcal{F}/\sim$ sólo tiene dos clases posibles; ya que $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$. Además, dada $\Omega^n \in \mathcal{F}$ Ω^n representa a una de las clases y $-\Omega^n$ a la otra. Llamaremos <u>orientaciones</u> a cada una de las dos clases de $\mathcal{F}/\sim$.

Definición: Llamaremos <u>espacio vectorial orientado</u> al par (E, Ω^n); donde E es un $\mathbb{R}$-EV y Ω^n será representante de la orientación positiva (por convenio).

Además, diremos que una base $\{e_1, .., e_n\} \in E$ es <u>directa</u> si $\Omega^n(e_1, .., e_n) > 0$; y si < 0 diremos que es <u>inversa</u>.

Proposición: Sea (E, Ω^n) esp. vect. orientado. Dada $\{e_1, .., e_n\}$ base de E <u>directa</u> y $\{v_1, .., v_n\}$ otra base de E; $A \equiv$ mat. de coord. de $\{v_1, .., v_n\}$.

1) $\{e_{\sigma(1)}, .., e_{\sigma(n)}\}$ base directa $\iff$ sgn $\sigma = 1$

2) $\{v_1, .., v_n\}$ directa $\iff |A| > 0$. $[\Omega^n(v_1, .., v_n) = |A| \, \Omega^n(e_1, .., e_n)]$

Proposición: Dado (E, Ω^n) EVO y $T \in End_K(E)$. Si $\det T > 0$ entonces T conserva la orientación (manda b. directas a b. directas). Si $\det < 0$, viceversa.

(usar Th 1ª de esta pag).

4.- ESP. EUCLÍDEO ORIENTADO ($\equiv \mathbb{R}$-EV, $\dim < +\infty$), dotado de $g \in T^{(2,0)}(E)$

Proposición: Sea E EVE y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ ortonormales. Si A es la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B, entonces $A^t A = I_n$ y $|A| = \pm 1$.

Proposición: En todo EVE E hay dos únicas formas de volumen que toman valor ± 1 sobre las bases ortonormales: $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ y $-\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$. ($\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de E y $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ su dual).

Definición: Un espacio euclídeo orientado es un par (E, Ω^n) donde E es un esp. euclídeo de dim n y Ω^n es una de las dos formas de volumen que toma valor ± 1 sobre las bases ortonormales.

Definición: Sea (E, Ω^n) un EEO. Dado $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$, llamaremos volumen del paralelepípedo determinado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$ al volumen que Ω^n da a dicha familia, es decir, $|\Omega^n(v_1, \ldots, v_n)|$.

5.- PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Sea (E, Ω^3) un EEO de dim=3. Dados $u, v \in E$, definimos el producto vectorial de u por v como el vector unívocamente determinado por

$$\Omega^3(u, v, e) = g(u \times v, e) \overset{\text{not}}{=} (u \times v) \cdot e \qquad \forall e \in E$$

Proposición:

1) $\times$ es bilineal; i.e., $\times : E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto u \times v$ es bilineal

2) $u \times v = -(v \times u)$

3) $u \times v \neq 0 \iff u, v$ L.I.

4) $\{u, v\}$ libre $\Rightarrow$ $u \times v$ es el único vector ortogonal al plano $\langle u, v \rangle$ cuyo módulo es el área que en dicho plano determinan u y v, y tal que $\{u, v, u \times v\}$ es una base directa.

<u>Proposición</u>: (E, Ω^3), $u, v \in E$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal.

$$u \times v = \underset{\pm 1}{\underbrace{\Omega^3(e_1, e_2, e_3)}} \left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u^1 & u^3 \\ v^1 & v^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix} e_3 \right) = \pm \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Proposición</u> (Identidad de Lagrange):

$$(\bar{u} \times v)(\bar{u} \times \bar{v}) = \begin{vmatrix} u \cdot \bar{u} & v \cdot \bar{u} \\ u \cdot \bar{v} & v \cdot \bar{v} \end{vmatrix}$$

Consecuencia: $|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$; y $\underline{\underline{|u \times v| = |u| |v| \operatorname{sen}(\widehat{u,v})}}$