



**EXTREMADURA**

**UNIVERSIDAD DE**

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

JORGE BECERRA GARRIDO

21 DE JUNIO DE 2017



D. JUAN ANTONIO NAVARRO GONZÁLEZ, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura.

INFORMA:

Que D. JORGE BECERRA GARRIDO ha realizado bajo su dirección el Trabajo de Fin de Grado. Considera que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, 21 de junio de 2017.

Fdo. Juan Antonio Navarro González





Cielo de Salamanca.

*When I see your heavens, the work of your fingers,  
the moon and stars that you set in place,  
what is man, that you are mindful of him?*

(Psalm 8,4)



# Agradecimientos

Mi gusanillo por la Teoría de la Relatividad comenzó en segundo curso tras una prometida clase sobre el espacio-tiempo de Minkowski en la asignatura *Geometría I* del profesor Juan Sancho. La elegancia y el formalismo matemático de tratar la teoría me dejó perplejo, con ganas de más. Tras preguntarle a la profesora María Ángeles Mulero la posibilidad de cursar en cuarto curso una optativa sobre el tema, que impartían los profesores Juan Sancho y Juan Antonio Navarro en la Licenciatura, me recomendó que si quería profundizar sobre la relatividad una buena idea sería realizar el trabajo de fin de grado sobre la materia en cuestión. Y así fue como contacté con el profesor Juan A. Navarro para que me guiara sobre la belleza de esta teoría de lo relativo, y sobre todo, de lo absoluto.

Si a alguien tengo que dar las gracias en primer lugar es a mi tutor Juan A. Navarro, quien desde el primer momento me mostró su apoyo y confianza. Gracias por tu dedicación absoluta y por transmitirme tu interés y entusiasmo. Gracias por tu disponibilidad y cercanía, y también por tu paciencia. Gracias por tus consejos y por aportarme un pedazo de tu visión de las matemáticas. Nos hemos pasado muchas horas en tu despacho con este trabajo, pero te aseguro que he disfrutado de cada minuto. Has marcado en mí un referente.

Por supuesto, también debo agradecerle a mi familia su amor incondicional todos estos años de carrera. A mis padres, Isabel y Pedro, porque todo lo que soy os lo debo a vosotros, porque me habéis enseñado que en la vida uno tiene que luchar por sus sueños, porque habéis estado apoyándome siempre, porque sois lo más importante de mi vida. Gracias por creer en mí. A mi hermano Pedro, primero por ser responsable de haber elegido esta profesión que tanto ya me ha dado, por tus consejos, por tus conversaciones cuando ambos sabíamos que teníamos que estar estudiando, por tu apoyo. Y también a mis abuelos: a las abuelas, que están, por su cariño infinito; y a los abuelos, ejemplos en la vida, que aunque ya no están siguen estando presentes.

Por último, pero no menos importante, dar las gracias a mis amigos. Por un parte, a los que he hecho en esta etapa universitaria, mis colegas matemáticos Lucía, Guada y Raúl, con quienes tanto he compartido, y estoy seguro que seguiré compartiendo (¡qué une más que los nervios comunes antes de un examen!); y al físico Pablo, con quien tantas conversaciones sobre este texto he tenido. Y por otra parte, a los que han estado desde siempre, en especial a Roberto, con quien tantas historias he compartido, y con el que sé que siempre podré contar.





# Prefacio

El hombre es curioso por naturaleza. Tan pronto como cubrió sus necesidades básicas, comenzó a hacerse preguntas. Ya en la antigua Grecia se plantearon cuál fue el origen del universo o el comienzo de todas las cosas, y lo llamaron *arché* (ἀρχή): TALES DE MILETO (s. VII – VI a.C) sostenía que era el agua, mientras que sus discípulos ANAXIMANDRO y ANAXÍMENES (s. VI a.C) afirmaban que era el *ápeiron* (lo indeterminado o lo que carece de límites) y el aire, respectivamente, etc.

ARISTÓTELES (s. IV a.C.) introdujo lo que hoy llamaríamos el “método científico”. Tal y como afirmaba en su *Física* (Vol. I), *el camino para investigar debe ir de lo que es más inmediatamente cognoscible y claro a nuestros ojos, a lo que es más claro y más íntimamente cognoscible en su propia naturaleza*. Y así es como los empiristas entendieron la ciencia: se observa, se plantean hipótesis, se experimenta, y se construye una teoría que sea consistente con los datos observados. Si el resultado de alguna experiencia es distinta a la que se predice, la teoría debe ser falsa. Pero que resultados se ajusten a la realidad no asegura la veracidad de la teoría, pues no impide que experimentos futuros la contradigan. Nunca podremos afirmar que una teoría es verdadera, tan sólo que no hemos comprobado que no es errónea.

ISAAC NEWTON (1643 – 1727) pensaba que su ley de la Gravitación Universal era la ley fundamental del universo. Y no es para menos, pues gracias a ella, posteriormente, se pudo inferir la existencia de Neptuno por una desviación que presenta la órbita de Urano. Y la mecánica newtoniana permaneció intachable durante mucho tiempo. A partir de las leyes de JOHANNES KEPLER (1571 – 1630) y las de Newton se pensaba que el universo se comportaba de forma predecible, y que los planetas y las estrellas seguían trayectorias lógicas. Así llega el determinismo, con el que el universo se contemplaba como una enorme máquina de relojería.

Pero Urano no era el único planeta que presentaba anomalías en su trayectoria. El astrónomo y matemático francés URBAIN LE VERRIER (1811 – 1877), codescubridor de Neptuno en 1846, también dio cuenta de una pequeña anomalía en el avance del perihelio de la órbita de Mercurio, de 38 segundos de arco por siglo<sup>1</sup>. Rápidamente se propuso como explicación (acorde con la fructífera conjetura con Neptuno) la existencia de un nuevo planeta entre el Sol y Mercurio, llamado “Vulcano”, pero todas las predicciones sobre sus tránsitos fallaron. Vulcano, simplemente, no existía. Tuvieron que pasar unos años para

---

<sup>1</sup>Según sus cálculos. Actualmente se sabe que es algo mayor, de 43 segundos de arco por siglo.

que ALBERT EINSTEIN (1879 – 1955) pudiera explicar tal anomalía en el marco de la Teoría de la Relatividad General.

¿Este es tan sólo un ejemplo de que la física es un camino lleno de cadáveres? Incluso teorías que a día de hoy están más que comprobadas que se ajustan a la realidad (al menos en sus ámbitos), como son la Mecánica Cuántica y la Relatividad General, tienen su tiempo contado, pues ambas juntas son incompatibles. ¿Quiere decir esto que todos los esfuerzos de la física son en vano? En absoluto. La Mecánica Clásica es (como veremos) indispensable para el desarrollo de la Teoría de la Relatividad, así como la geometría euclídea es un requisito indispensable para la geometría Riemanniana<sup>2</sup>. La vieja teoría no es una más entre posibles teorías contradictorias con la nueva, sino un paso previo y necesario para desarrollar la nueva.

La tema central de este trabajo es la Teoría de la Relatividad. Si bien su formulación geométrica dentro de un espacio de dimensión 4 se la debemos al matemático<sup>3</sup> HERMANN MINKOWSKI (1864 – 1909), el artífice de esta teoría es sin lugar a dudas Einstein. Se dice que 1905 es el *annus mirabilis* del físico alemán: publicó cinco artículos donde hablaba de la naturaleza cuántica de la luz, el movimiento browniano, la relatividad especial y la equivalencia entre masa y energía. Lejos de publicarlo en el seno de una importante institución, lo hizo desde una posición absolutamente marginal dentro del sistema académico. En su etapa universitaria en la Politécnica de Zúrich, Einstein no representaba al estudiante modélico, sino que se saltaba algunas clases *para gozar de la libertad de elegir en qué ocupaba mi tiempo hasta unos meses antes del examen*. Por suerte, contaba con su amigo MARCEL GROSSMANN (1878 – 1936) que sí asistía a clases *y tomaba buenos apuntes*. En las aulas su asiento vacío no pasó desapercibido, y tras los exámenes finales se convirtió en el único estudiante que, habiendo aprobado, no recibió una oferta para quedarse en el centro. Tras la falta de referencias, Einstein se encontró con las puertas cerradas en el resto de instituciones académicas. Por mediación de Grossmann, finalmente consiguió un puesto en la Oficina de Patentes de Berna, desde donde publicó sus célebres artículos.

Lejos de provocar un terremoto, los artículos de Einstein recibieron en el momento una fría acogida por parte de la comunidad científica. Por supuesto, la última en reaccionar fue la administración universitaria. En 1907, Einstein solicitó en la universidad de Berna una plaza para el rango académico más bajo del escalafón (ni siquiera tenía sueldo, sino que daría clase a cambio de un estipendio a cuenta de los alumnos), y aun presentando 17 artículos científicos avalando su carrera, no consiguió el puesto, pues al parecer del cuerpo de la universidad, la relatividad había sido rechazada por la mayoría de los físicos contemporáneos. Un año más tarde Einstein volvió *a probar suerte, después de todo*, en la universidad de Berna, y finalmente fue admitido para el puesto, aunque tan sólo 3 personas se animaron a asistir a sus clases martes y sábados a las 7 de la mañana. Cuando la comunidad científica finalmente aceptó la teoría

<sup>2</sup>Qué paradoja: la geometría euclídea clásica pretendía estudiar las relaciones métricas que se daban en la superficie terrestre, como recoge su nombre, *geo-metría*; mientras que la Tierra es una esfera y la suma de los ángulos de un triángulo ni siquiera es 180°.

<sup>3</sup>Tiene su guasa que una teoría geométrica de la Relatividad Especial la realizara un algebrista y no un geómetra.

de la relatividad especial, incluso la universidad de Berlín le acabó ofreciendo un puesto y el ingreso en la Academia Prusiana de Ciencias, en 1914.

Una anécdota sitúa el origen de la Relatividad General en la caída de un pintor desde lo alto de un andamio. Al interesarse Einstein por su estado, el hombre le contó que en un momento de su descenso, durante un brevísimo tiempo, había sentido que flotaba en el aire. Como recordaría años más tarde, *una persona en caída libre no sentiría su propio peso. Esta simple idea me dejó una profunda huella y me impulsó hacia una teoría de la gravitación*. Ésta sería la que posteriormente calificaría como *la idea más feliz de mi vida*. Aquel fue el comienzo de una ardua travesía de casi 8 años hacia la Relatividad General, con la que pretendía amoldar la gravedad en el seno de la relatividad. Sin embargo, para desarrollarla, Einstein se encontró con una auto-limitación: su escasez de conocimientos en matemáticas avanzadas. En 1912, dirigió una petición de auxilio a su viejo amigo Grossmann, convertido en una autoridad en geometría no euclídea: *debes ayudarme o si no me volveré loco*.

Minkowski, que años antes reformuló la relatividad especial, instaló el gusanillo por la relatividad en la universidad de Göttingen. Sin embargo, tardó años en contagiar su interés por la física a su amigo DAVID HILBERT (1862 – 1943). Tras su repentina muerte a causa de una apendicitis, Hilbert tomó el relevo para visualizar la física desde un punto de vista matemático. Según afirmaba, *la física se está volviendo demasiado complicada para dejársela a los físicos*. En junio de 1915, Einstein aceptó una invitación de Hilbert y viajó a Göttingen para impartir un ciclo de conferencias para dar a conocer el estado de sus investigaciones, donde presentó una teoría de la relatividad a medio hacer y formulada en un lenguaje geométrico que no terminaba de entender.

Einstein logró seducir a los matemáticos de Göttingen con su teoría geométrica de la gravitación. Lo que no podía adivinar es que lo habían visto perdido en el punto donde las matemáticas se volvían demasiado complejas para un físico. Hilbert se permitía alguna broma al respecto: *cualquier chico en las calles de Göttingen entiende más geometría tetradimensional que Einstein*. En el mes de noviembre, Einstein se encontraba perdido en su trabajo, y decidió retomar una idea que había abandonado 3 años antes. La noticia de que Hilbert había detectado sus errores y había iniciado su propia investigación sobre la relatividad general supuso el comienzo de una rivalidad que se convirtió para Einstein en un vértigo de ecuaciones, que llenaba de tachones, tanteos y enmiendas hasta agotar las posibilidades. Se sumió en un intenso trabajo con el que no distinguía las horas del día y de la noche, e incluso en ocasiones se le olvidaba comer. El 18 de noviembre de 1915 ese extenuante esfuerzo terminó por dar sus frutos. Su última versión de la teoría predecía la alteración en la órbita de Mercurio, y sus ecuaciones se reducían a las de Newton en campos gravitatorios de baja intensidad. Finalmente, el 25 de noviembre presentó su trabajo ante la Academia de Berlín, y aunque cinco días antes Hilbert publicó sus investigaciones, no incluyó la ecuación central de la relatividad correcta (aunque sí lo hizo en la versión final que publicó en marzo del siguiente año). Por tanto, podemos afirmar que la prioridad corresponde a Einstein.

La primera confirmación experimental de la Relatividad General llegó con el astrónomo británico ARTHUR EDDINGTON (1882 – 1944), director del observatorio de Cambridge, que se sumió en una expedición científica a la isla de

Príncipe, frente a las costas de Guinea, para cubrir un eclipse total de Sol con el cual confirmar o refutar la teoría de Einstein, pues de acuerdo con ésta las estrellas situadas en el cielo cerca del eclipse verían alteradas su posición. Aunque la expedición estuvo a punto de frustrarse por mal tiempo, las nubes se alejaron en el preciso instante del eclipse, por lo que pudo tomar las imágenes pertinentes que confirmaban las predicciones de la teoría. El desarrollo de la relatividad es, por tanto, completamente opuesto a la idea empirista del método científico. Todos los experimentos previos que hizo Einstein fueron mentales, no pisó un laboratorio y mediante el desarrollo matemático de una teoría consiguió el que posiblemente sea el avance científico más importante del siglo pasado. Quizás sea necesario replantearse el modo de hacer ciencia en la actualidad.

Este trabajo pretende mostrar los aspectos más destacados de la Teoría de la Relatividad, y tiene como objetivo entender la ecuación de Einstein en el marco de la Relatividad General, teniendo como base la estructura de la Mecánica Clásica, que estudiaremos en primer lugar. Avisamos al lector que este libro no sigue un desarrollo histórico de la Mecánica, sino que pretende reformular la teoría de la Mecánica Clásica y la teoría la Relatividad en términos geométricos, dotándolas de las estructuras matemáticas donde tiene cabida formularlas.

# Índice general

Agradecimientos	VII
Prefacio	IX
<b>I Mecánica clásica</b>	<b>1</b>
<b>1 El espacio-tiempo de Galileo</b>	<b>3</b>
1.1 Estructura del espacio-tiempo . . . . .	3
1.2 Referencias inerciales . . . . .	10
1.3 Movimientos . . . . .	11
1.4 Materia . . . . .	13
<b>2 Gravitación newtoniana</b>	<b>17</b>
2.1 Distribución continua de materia . . . . .	17
2.2 Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos . . . . .	27
2.3 Ley de la Gravitación Universal . . . . .	30
<b>II Teoría de la relatividad</b>	<b>35</b>
<b>3 El espacio-tiempo de Minkowski</b>	<b>37</b>
3.1 Estructura del espacio-tiempo . . . . .	38
3.2 El cono de luz . . . . .	41
3.3 Referencias inerciales . . . . .	44
3.4 Movimientos . . . . .	46
3.5 Transformaciones de Lorentz y Poincaré . . . . .	53
3.6 Causalidad . . . . .	61
3.7 Materia . . . . .	62
3.8 Efectos relativistas . . . . .	68
<b>4 Gravitación relativista</b>	<b>81</b>
4.1 Conexión de Cartan . . . . .	81
4.2 Edad y destino del Universo. Big Bang . . . . .	88
4.3 Relatividad General . . . . .	93

<b>III</b>	<b>Apéndices</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra Lineal</b>	<b>103</b>
A.1	Espacio Dual . . . . .	103
A.2	Tensores . . . . .	104
A.3	Teoría de Métricas Simétricas . . . . .	107
A.4	Geometría Afín . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Geometría Diferencial</b>	<b>111</b>
B.1	Estructura diferenciable . . . . .	111
B.2	Espacio tangente . . . . .	113
B.3	Campos tensoriales . . . . .	115
B.4	Cálculo diferencial exterior . . . . .	116
B.5	Integración en variedades . . . . .	119
B.6	Tensores valorados en un espacio vectorial . . . . .	121
B.7	Elementos matemáticos en la física . . . . .	122
<b>C</b>	<b>Geometría Riemanniana</b>	<b>125</b>
C.1	Conexiones Lineales . . . . .	125
C.2	Geodésicas . . . . .	128
C.3	Divergencia de un tensor . . . . .	128
C.4	Variedades Riemannianas . . . . .	130
	<b>Bibliografía</b>	<b>134</b>
	<b>Índice de Materias</b>	<b>135</b>

Parte I

Mecánica clásica





# Capítulo 1

## El espacio-tiempo de Galileo

Cuando GALILEO GALILEI (1564 – 1642) e ISAAC NEWTON (1643 – 1727) desarrollaron sus teorías sobre las leyes de la mecánica y la gravitación, apenas disponían de herramientas matemáticas para llevarlas a cabo. Tan sólo hace falta recordar que Newton y GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) fueron quienes desarrollaron (aunque de forma independiente) las bases del cálculo infinitesimal e integral. Ninguna noción tenían entonces de espacio vectorial, espacio afín, variedad diferenciable, tensor, conexión,... , desarrolladas siglos más tarde, y aún así las leyes del movimiento y la gravedad que formularon siguen gobernando nuestra realidad cotidiana.

En este primer capítulo trataremos de poner las bases de la Mecánica Clásica. Describiremos la estructura que subyacía en los trabajos de Galileo y Newton, y que, aunque no era conocida por ellos, utilizaron constantemente. Por ejemplo, en su época aún no se conocía que era un espacio afín ni una conexión lineal, pero cada vez que cambiaban un vector de punto estaban usando, sin saberlo, el traslado paralelo estándar del espacio afín.

### 1.1 Estructura del espacio-tiempo

Comencemos dando la estructura matemática a partir de la cual podremos desarrollar la teoría. Buscamos una definición que recoja los elementos necesarios para llevarla a cabo. Para ello, nos guiaremos por los siguientes hechos, evidentes para nuestra experiencia diaria:

1. (**Variedad**) El *espacio-tiempo* es un espacio afín real (no hay ningún punto señalado, especial, tal y como pasa en los espacios vectoriales). Además, puesto que para determinar un *aquí* y un *ahora* son necesarios 4 números (uno para fijar el momento en el que algo ocurrió y tres para fijar el lugar), parece razonable pensar que es de dimensión 4. Denotaremos al espacio-tiempo como  $(\mathbb{A}_4, E)$ , y llamaremos *sucesos* a sus elementos.

En la física clásica, siempre se acepta que las mediciones tengan cierta imprecisión, por lo que no tiene sentido preguntarse si una cierta fun-

ción es continua o diferenciable. Por tanto, siempre asumiremos que las variedades, funciones, tensores, conexiones, etc son de clase  $C^\infty$ .

2. **(Tiempo)** Una de las hipótesis más importantes de la mecánica clásica es el carácter *absoluto* del tiempo. A la pregunta de si dos sucesos son simultáneos o no, o cuál es el tiempo que ha transcurrido entre dos sucesos, la respuesta es absoluta, no va acompañada de un “respecto de”, “depende de”, etc.

Resulta razonable pensar que, dados dos sucesos  $p, q \in \mathbb{A}_4$ , el tiempo que transcurre entre ellos venga dado por una función lineal (1-forma)

$$\begin{aligned}\omega: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q - p &\longmapsto \omega(q - p) := \text{tiempo transcurrido entre } p \text{ y } q\end{aligned}$$

que se supone no nula. El carácter absoluto del tiempo implica una ley de adición: dados sucesos  $p, q, r$ , el tiempo que transcurre de  $p$  a  $r$  es el mismo que el que transcurre de  $p$  a  $q$  mas el que transcurre de  $q$  a  $r$ , lo que se traduce como

$$\omega(r - p) = \omega(r - q + q - p) = \omega(r - q) + \omega(q - p).$$

Ahora, el hecho de que  $\omega$  sea continua y aditiva garantiza que sea lineal<sup>1</sup>. Llamaremos a tal  $\omega$  *1-forma del tiempo*<sup>2</sup>.

Dicha 1-forma define sobre el espacio-tiempo una orientación temporal: un vector  $e \in E$  se dirá *orientado al futuro* cuando  $\omega(e) > 0$ , y *orientado al pasado* cuando  $\omega(e) < 0$ , de modo que podremos decir que un suceso  $p$  es *anterior* a  $q$  cuando  $q - p$  esté orientado al futuro. Cambiar la orientación del tiempo es cambiar de signo la 1-forma.

De igual manera la 1-forma del tiempo define una métrica sobre  $E$ ,  $g := \omega \otimes \omega$ , llamada *métrica del tiempo*. Pondremos  $e \cdot e' = g(e, e') = \omega(e)\omega(e')$ , y  $|e| = \sqrt{e \cdot e} = |\omega(e)|$ .

3. **(Espacio)** El espacio estará formado por todos los *sucesos simultáneos*. Diremos pues que un vector  $e \in E$  es *espacial* cuando  $\omega(e) = 0$ , y a  $V := \ker \omega$  le llamaremos *espacio de vectores espaciales*. Notar que  $\ker \omega = V = \text{rad } g$ , y que es un subespacio de dimensión 3.
4. **(Orientación espacial y producto escalar)** Otro hecho bien claro para nuestra experiencia diaria es que el espacio en el que vivimos tiene estructura de espacio euclídeo orientado. Esto afirma que sobre  $V$  tenemos un producto escalar<sup>3</sup> (métrica simétrica definida positiva)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , que define longitudes (la longitud de un vector espacial  $v$  es  $\sqrt{\langle v, v \rangle}$ ), y una orientación  $[\Omega_V]$  de  $V$ . En particular, nótese que al ser  $V$  un espacio euclídeo, en

<sup>1</sup> Todo morfismo de grupos  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  continuo es lineal. En efecto,  $f(ne) = nf(e) \forall n \in \mathbb{Z}$  por definición. Ahora  $mf(\frac{n}{m}e) = f(m\frac{n}{m}e) = nf(e)$ , luego  $f(qe) = qf(e) \forall q \in \mathbb{Q}$ . Por tanto  $f(\lambda e) = \lambda f(e) \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , por continuidad.

<sup>2</sup> Bien definida salvo un factor positivo, es decir, un cambio en la unidad de tiempo elegida. Siempre fijaremos una unidad de tiempo para que la 1-forma quede determinada.

<sup>3</sup> Al igual que antes, bien definido salvo una constante positiva, que supondremos fijada, de modo que las unidades de longitud también quedarán fijadas.

lugar de dar la orientación, podemos dar la única 3-forma  $\Omega_V$  que asigna volumen 1 sobre las bases ortonormales positivas.

Con todos estos elementos, ya podemos dar una definición, al menos provisional, de espacio-tiempo galileano:

**Definición (Provisional).** Un **espacio-tiempo de Galileo orientado**  $X$  es un espacio afín real 4-dimensional  $\mathbb{A}_4$  cuyo espacio vectorial asociado  $E$  está dotado de una 1-forma no nula  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada **1-forma del tiempo**; y el subespacio  $V := \ker \omega$  está dotado de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y una orientación  $[\Omega_V]$ .

$$X = (\mathbb{A}_4, E, \omega, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\Omega_V]).$$

Sin embargo, también podemos dar la noción de espacio-tiempo galileano sin orientar.

**Definición.** Un **espacio-tiempo de Galileo (no orientado)**  $X$  es un espacio afín real 4-dimensional  $\mathbb{A}_4$  cuyo espacio vectorial asociado está dotado de una métrica simétrica  $g$  de rango 1, y el subespacio  $V := \text{rad } g$  está dotado de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$X = (\mathbb{A}_4, E, g, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Observar que  $g$  no recoge la orientación temporal, pues  $g = \omega \otimes \omega = (-\omega) \otimes (-\omega)$ . Salvo que se diga lo contrario, siempre consideraremos que nuestro espacio-tiempo de Galileo está orientado.

**1.1.1 (Métrica contravariante del espacio)** La definición provisional de espacio-tiempo de Galileo (orientado) que hemos dado posee dos inconvenientes: se define mediante un producto escalar y una orientación sobre un subespacio  $V$  de  $E$ , y no sobre el espacio total. Vamos a ver que podemos dar una definición equivalente en el que todos los elementos estarán definidos sobre  $E$  de modo que obtendremos una definición estructuralmente más rica. Veamos en primer lugar cómo cambiar el producto escalar sobre  $V$  por otro tensor sobre todo  $E$ .

Puesto que  $V = \ker \omega = \text{rad } g$  es un subespacio de dimensión 3, consideremos la inclusión  $i : V \hookrightarrow E$ , y la aplicación lineal dual  $i^* : E^* \rightarrow V^*$  (restringir). El producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $V$  induce un isomorfismo canónico entre  $V$  y su dual  $V^*$ , la polaridad  $\phi$  de la métrica, de modo que tenemos la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \longleftarrow & V^* & \xleftarrow{i^*} & E^* \end{array}$$

La polaridad permite definir sobre  $V^*$  una métrica a partir de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , la **métrica dual** de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle^* : V^* \times V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle^* := \langle \phi^{-1} \omega_1, \phi^{-1} \omega_2 \rangle \end{aligned}$$

Puesto que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  era definida positiva, es bien claro que  $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$  también lo es, esto es, es un producto escalar sobre  $V^*$ , o dicho de otro modo, es un tensor 2-contravariante simétrico y definido positivo sobre  $V$ . Este tensor además define sobre  $E^*$  una métrica simétrica, que denotaremos  $h^*$  y llamaremos **métrica (contravariante) del espacio**:

$$\begin{aligned} h^*: E^* \times E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto h^*(\omega_1, \omega_2) := \langle \omega_1|_V, \omega_2|_V \rangle^*, \end{aligned}$$

donde obviamente  $\omega_i|_V = i^*\omega_i$ . Esta es, por tanto, una métrica simétrica contravariante sobre  $E$ . Estudiemos algunas propiedades de la métrica del espacio.

**Proposición 1.1.2**  $\boxed{\text{rad } h^* = V^\circ = \langle \omega \rangle}$

*Demostración.* La primera igualdad se sigue de la cadena  $\bar{\omega} \in \text{rad } h^* \iff h^*(\bar{\omega}, E^*) = 0 \iff \langle \bar{\omega}|_V, V^* \rangle^* = 0 \iff \bar{\omega}|_V = 0 \iff \bar{\omega}(V) = 0 \iff \bar{\omega} \in V^\circ$ , y la segunda del hecho de que  $V^\circ$  es un subespacio de dimensión  $4-3=1$ , y por definición  $\omega \in V^\circ$  y es no nula.  $\square$

**Corolario 1.1.3** *Las métricas  $g$  y  $h^*$  tienen radicales mutuamente incidentes.*

*Demostración.*  $(\text{rad } g)^\circ = V^\circ = \text{rad } h^*$ , y  $(\text{rad } h^*)^\circ = V^{\circ\circ} = V = \text{rad } g$ .  $\square$

**Proposición 1.1.4** *La métrica del espacio  $h^*$  es una métrica simétrica contravariante de tipo  $(0, +, +, +)$ .*

*Demostración.* Sea  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  una base ortonormal de  $V^*$  (para  $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ ), y consideremos 1-formas en  $E^*$   $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  tales que  $\omega_i|_V = i^*\omega_i = \xi_i$ . Basta entonces probar que  $\{\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es base de  $E^*$ , pues en tal caso

$$h^*(\omega, \omega) = \langle \omega|_V, \omega|_V \rangle^* = 0, \quad h^*(\omega, \omega_i) = \langle \omega|_V, \xi_i \rangle^* = 0,$$

$$h^*(\omega_i, \omega_j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle^* = \delta_{ij},$$

y la matriz de  $h^*$  en tal base será

$$h^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobemos pues la condición. Basta ver que son linealmente independientes: si  $\lambda\omega + \sum \lambda_i\omega_i = 0$ , restringiendo a  $V$  tendremos que  $\sum \lambda_i\xi_i = 0$ , por lo que  $\lambda_i = 0$  al ser las  $\xi_i$  base de  $V^*$ , luego  $\lambda\omega = 0$ , y  $\lambda = 0$  porque  $\omega \neq 0$ .  $\square$

De todo lo anterior se sigue que, dado un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $V$ , podemos construir una métrica contravariante en  $E$  de rango 3. La pregunta que surge ahora es natural: dada dicha métrica, ¿podemos recuperar el producto escalar sobre  $V$ ? La respuesta la da la teoría de métricas simétricas: dada una métrica en un espacio, podemos considerar la proyección de la métrica en el cociente por el radical, obteniendo una métrica no singular  $\overline{h^*}$ :

$$\begin{aligned} E^* &\xrightarrow{\pi} E^*/\text{rad } h^* \equiv E^*/V^\circ \equiv V^* \\ h^* &\longmapsto \overline{h^*} \end{aligned}$$

con  $\overline{h^*}([\omega], [\omega']) := h^*(\omega, \omega')$ , y no depende de los representantes. Como  $h^*$  era una métrica de tipo  $(0, +, +, +)$ , es evidente que  $\overline{h^*}$  será una métrica de tipo  $(+, +, +)$  en  $V^*$ , es decir, un producto escalar. Si consideramos la polaridad asociada a esta métrica,  $\phi : V^* \xrightarrow{\sim} V^{**} = V$ , recuperaremos través de ella el producto escalar original, porque  $\overline{h^*} = \langle \cdot, \cdot \rangle^*$  y la métrica dual de la dual es la métrica original (pág. 109).

En particular, acabamos de probar el siguiente

**Teorema 1.1.5** *Existe una correspondencia biunívoca*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{productos escalares} \\ \text{sobre } V \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{métricas simétricas} \\ \text{contravariantes sobre } E \\ \text{de radical } V^\circ \text{ y tipo} \\ (0, +, +, +) \end{array} \right\}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \longleftrightarrow h^*$$

**1.1.6 (Orientación del espacio-tiempo)** Nuestro objetivo será ahora eliminar de la definición de espacio-tiempo la orientación sobre el subespacio  $V$  y poder dar una orientación sobre el espacio total. Para ello notar que la orientación temporal  $\omega$  y la espacial  $[\Omega_V]$  permiten definir una orientación sobre  $E$ : dada una 3-forma  $\widetilde{\Omega}_V$  sobre  $E$  que coincida con  $\Omega_V$  sobre  $V$ , se define la *forma de hipervolumen* como la 4-forma en  $E$

$$\Omega_X := \omega \wedge \widetilde{\Omega}_V. \quad (1.1)$$

**Lema 1.1.7** *La forma de hipervolumen  $\Omega_X$  no depende de la extensión de  $\Omega_V$  elegida.*

*Demostración.* Sea  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base ortonormal positiva de  $V$  y ampliémosla a una base  $\{e, v_1, v_2, v_3\}$  de  $E$ , con  $\omega(e) = 1$  (tal vector  $e$  existe pues  $\omega(V) = 0$ ). Consideremos la respectiva base dual  $\{\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  (nótese que la primera 1-forma de la base debe ser  $\omega$  pues  $\omega(e) = 1$  y  $\omega(v_i) = 0$ ). Así, cualquier 3-forma en  $E$  se escribirá como

$$\Omega = \lambda \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega \wedge \left( \sum_{i < j} \lambda_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \right)$$

y claramente cumple que  $\Omega|_V = \lambda \omega_1|_V \wedge \omega_2|_V \wedge \omega_3|_V$ , pues  $\omega|_V = 0$ . Como  $\Omega_V(v_1, v_2, v_3) = 1$ , para que una 3-forma  $\Omega$  en  $E$  coincida con  $\Omega_V$  sobre  $V$ , necesariamente deberá ser  $\lambda = 1$ , de modo que obtenemos muchas posibles extensiones  $\Omega$  de  $\Omega_V$  en  $E$  (tantas como 2-formas en  $\omega_i \wedge \omega_j$  podamos poner dentro del paréntesis). Pero para cualquiera de estas extensiones se cumple que

$$\Omega_X = \omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega \wedge \omega \wedge \left( \sum_{i < j} \lambda_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \right)$$

$$= \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

con lo que se obtiene la tesis.  $\square$

Por tanto, en el espacio-tiempo disponemos de una orientación temporal, dada por  $\omega$ ; una orientación espacial, dada por  $\Omega_V$ ; y una orientación espacio-temporal, dada por  $\Omega_X$ .

**Teorema 1.1.8** *Fijada la 1-forma del tiempo  $\omega$ , se tiene el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_3(V) & \xlongequal{\quad} & \Lambda_4(E) \\ \Omega_V & \longleftrightarrow & \Omega_X \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $e \in E$  un vector tal que  $\omega(e) = 1$ . Definamos las siguientes asignaciones:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_3(V) & \xlongequal{\quad} & \Lambda_4(E) \\ \Omega_V & \longmapsto & \omega \wedge \widetilde{\Omega}_V \\ (i_e \Omega_X)|_V & \longleftrightarrow & \Omega_X \end{array}$$

donde como ya se ha denotado  $\widetilde{\Omega}_V$  es una 3-forma sobre  $E$  que coincide con  $\Omega_V$  sobre  $V$ . Que las asignaciones sean lineales es evidente. Comprobemos que son inversas la una de la otra: dada  $\Omega_V \in \Lambda_3(V)$ , por una asignación tenemos  $\omega \wedge \widetilde{\Omega}_V$  y por la otra

$$\left( i_e(\omega \wedge \widetilde{\Omega}_V) \right)|_V = (1 \cdot \widetilde{\Omega}_V - \omega \wedge i_e \Omega_V)|_V = \widetilde{\Omega}_V|_V = \Omega_V,$$

lo que afirma que la primera asignación es inyectiva, y como los espacios son de dimensión 1, es isomorfismo.  $\square$

El teorema dice que, fijada la 1-forma del tiempo  $\omega$ , dar una forma de volumen en  $V$  equivale a dar una forma de hipervolumen en  $E$ ; y que dar una orientación en  $V$  equivale a dar una orientación en  $E$ . Pero además dar una orientación en  $V$  equivale a dar una forma de volumen en  $V$  (la única que asigna volumen 1 sobre las bases ortonormales positivas). Es decir, fijada  $\omega$  los siguientes 4 conceptos se determinan mutuamente:

- . Orientación de  $V$ .
- . Orientación de  $E$ .
- . Forma de volumen de  $V$ .
- . Forma de hipervolumen de  $E$ .

Con todo esto, estamos ya en disposición de dar una mejor definición de espacio-tiempo galileano, expresada en términos de tensores sobre  $E$  y no sobre subespacios suyos.

**Definición.** Un **espacio-tiempo de Galileo orientado**  $X$  es un espacio afín real 4-dimensional  $\mathbb{A}_4$  cuyo espacio vectorial asociado  $E$  está dotado de una forma lineal no nula  $\omega$ , llamada **1-forma del tiempo**<sup>4</sup>; una métrica simétrica  $g = \omega \otimes \omega$  de tipo  $(+, 0, 0, 0)$ , llamada **métrica del tiempo**; una métrica simétrica contravariante  $h^*$  de tipo  $(0, +, +, +)$ , llamada **métrica del espacio**<sup>5</sup>, cuyos radicales son mutuamente incidentes; y una orientación  $[\Omega_X]$  de  $E$ , llamada **orientación del espacio-tiempo**.

$$X = (\mathbb{A}_4, E, \omega, g, h^*, [\Omega_X]).$$

Además, siempre consideraremos sobre  $X$  la conexión estándar del espacio afín, que denotaremos  $\nabla_0$ .

**1.1.9 (Tiempo como proyección)** Vamos a acabar esta sección precisando cuál es la noción de tiempo en la mecánica clásica. Al ser un concepto absoluto, la forma natural de definirlo sería como una “aplicación” que asigna a cada suceso del espacio-tiempo el momento en el que se produjo. Concretamos esta idea.

Sea  $(\mathbb{A}_4, E)$  un espacio-tiempo de Galileo y  $V = \ker \omega$  el subespacio de vectores espaciales. Entonces podemos definir la siguiente relación de equivalencia en  $\mathbb{A}_4$ :

$$p \equiv q \iff q - p \in V.$$

El conjunto cociente obtenido, que denotaremos como  $\mathbb{A}_4/V$ , resulta ser un espacio afín de dirección  $E/V$ , llamado **espacio afín cociente**, con la operación (que no depende de los representantes elegidos)

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_4/V) \times (E/V) &\xrightarrow{+} \mathbb{A}_4/V \\ (\bar{p}, \bar{e}) &\longmapsto \bar{p} + \bar{e} := [p + e]. \end{aligned}$$

En particular,  $\mathbb{A}_4/V$  es un espacio afín de dimensión  $4 - 3 = 1$ . Pero más aún, la 1-forma del tiempo  $\omega$  dota a dicho espacio de estructura de recta afín orientada, pues ya que  $V = \ker \omega$ , la propiedad universal del espacio cociente garantiza la existencia de una 1-forma  $\bar{\omega} : E/V \rightarrow \mathbb{R}$  (es decir, una forma de volumen en  $E/V$ )

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\omega} & \\ E/V & & \end{array} \quad \begin{aligned} \omega &= \bar{\omega} \circ \pi \\ \bar{\omega}(\bar{e}) &:= \omega(e) \end{aligned}$$

y por tanto una orientación  $[\bar{\omega}]$  en  $E/V$ . Así,

**Definición.** El **tiempo** es una proyección afín a una recta afín orientada,

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_4, E) &\xrightarrow{\pi} (\mathbb{A}_4/V, E/V) = \mathbb{A}_1 \\ p &\longmapsto \bar{p} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Bien definida salvo un factor positivo. Elegir una proporcional equivale a cambiar la unidad de tiempo. Por simplicidad fijaremos la 1-forma del tiempo, esto es, fijaremos la unidad de tiempo.

<sup>5</sup>Igualmente bien definida salvo un factor positivo.

En particular, dicha aplicación de paso al cociente  $\pi$  es un morfismo afín, de aplicación lineal asociada  $\vec{\pi} : E \longrightarrow E/V$ , ya que

$$\pi(p + e) = [p + e] = \bar{p} + \bar{e} = \pi(p) + \vec{\pi}(e).$$

A los puntos de dicha recta  $\mathbb{A}_1$  se le llamarán **instantes** de tiempo, y los vectores espaciales son claramente los que tienen proyección nula por la aplicación lineal asociada,  $V = \ker \vec{\pi}$ . La fibra  $\mathcal{E}_t := \pi^{-1}(t)$  de un instante  $t \in \mathbb{A}_1$  por la proyección es el espacio que vemos en el instante  $t$ , es decir, es el Universo en el instante  $t$ . Cada una de estas fibras son los **hiperplanos de simultaneidad**, y tienen una estructura afín:

**Proposición 1.1.10** *Cada hiperplano de simultaneidad  $\mathcal{E}_t$  es un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3, de dirección  $V$ .*

*Demostración.* La operación es la evidente: para cada  $p \in \mathcal{E}_t$  y cada  $v \in V$ , la suma es  $p + v$  entendida en  $\mathbb{A}_4$ . Que la operación sea asociativa y que  $p + v = v \iff v = 0$  es cierto porque se da en  $\mathbb{A}_4$ . Ahora, dados  $p, q \in \mathcal{E}_t \subset \mathbb{A}_4$ , sabemos que existe un único  $e \in E$  tal que  $q = p + e$ . Se trata de ver que  $e \in V$ . Pero eso es fácil puesto que al aplicar  $\pi$  a la anterior igualdad obtendremos  $t = t + \bar{e}$ , luego  $\bar{e} = 0$  y  $e \in V$ .

El producto escalar y la orientación las heredan de modo natural de  $V$ .  $\square$

## 1.2 Referencias inerciales

**Definición.** Una **referencia inercial** o **Galileana** en un espacio-tiempo de Galileo  $X$  es una referencia afín  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{A}_4$ , donde  $p_0$  es un suceso llamado **origen** de la referencia,  $e_0$  es la **velocidad** del observador y verifica  $\omega(e_0) = 1$ , y  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es una base ortonormal positiva de  $V$  (para  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $[\Omega_V]$ , respectivamente).

Dado cualquier suceso  $p \in \mathbb{A}_4$ , existen unos únicos números reales  $t, x, y, z$ , llamados **coordenadas** de  $p$ , tal que

$$p = p_0 + te_0 + xv_1 + yv_2 + zv_3.$$

Esto además dice que cada referencia afín define un sistema de coordenadas globales sobre  $X$ , que denotaremos  $(t, x, y, z), (t, x_1, x_2, x_3)$  ó  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Notar que, fijado un origen del tiempo  $p_0$  y una medida de tiempo  $\omega$  (es decir, una unidad de tiempo),  $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{R}$  y la proyección afín  $\pi : \mathbb{A}_4 \longrightarrow \mathbb{A}_1$  puede entenderse como la función primera coordenada  $t : \mathbb{A}_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Que nuestra variedad  $X$  esté cubierta por una única carta afirma que el conjunto de campos tangentes  $\mathcal{D}(X)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo libre de rango 4, y puesto que en un espacio afín para cada punto  $p$  se cumple<sup>6</sup> que  $E = T_p X$ , se tiene que  $(\partial_0)_p = e_0$ ,  $(\partial_i)_p = v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , lo que nos dará libertad para denotar la base de campos tangentes de diferentes formas, según mejor nos convenga en cada momento:

$$e_0 = \partial_0 = \partial_t \quad , \quad v_1 = \partial_1 = \partial_x \quad , \quad v_2 = \partial_2 = \partial_y \quad , \quad v_3 = \partial_3 = \partial_z.$$

<sup>6</sup>Si  $(\mathbb{A}, E)$  es un espacio afín, para cada  $p \in \mathbb{A}$ , tenemos un isomorfismo canónico  $E = T_p \mathbb{A}$ , que asigna a cada  $e \in E$  la derivación  $D_p^e f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+te) - f(p)}{t}$ .



Con todo esto, en este sistema de coordenadas anterior tenemos:

$$\omega = dt$$

$$g = dt \otimes dt \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_V = dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$\Omega_X = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$h^* = \partial_x \otimes \partial_x + \partial_y \otimes \partial_y + \partial_z \otimes \partial_z \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_0 : D^{\nabla_0} \left( \sum f_i \partial_i \right) = \sum (Df_i) \partial_i$$

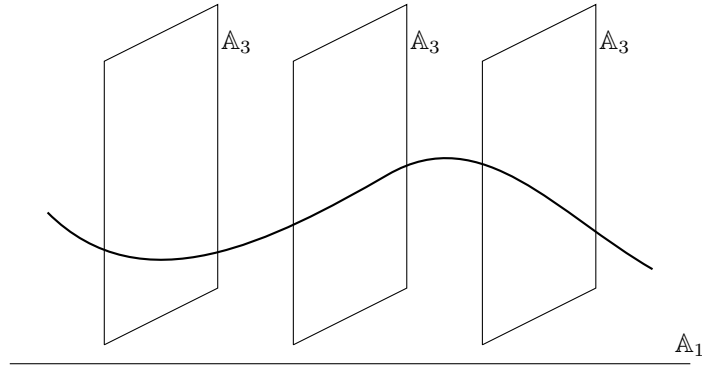
### 1.3 Movimientos

Consideremos un cuerpo puntual. En cada instante de tiempo  $t \in \mathbb{A}_1$  ocupará una posición  $p_t \in \mathbb{A}_4$ , de modo que sus sucesivas posiciones definen una aplicación  $\sigma : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_4$ ,  $\sigma(t) = p_t$ . Esto motiva la siguiente

**Definición.** Llamaremos **trayectoria** a toda curva<sup>7</sup> en  $\mathbb{A}_4$  que defina una sección diferenciable del tiempo  $\pi : \mathbb{A}_4 \longrightarrow \mathbb{A}_1$ , esto es, que venga dada por una aplicación de clase  $\mathcal{C}^\infty$

$$\sigma : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_4$$

tal que  $\pi \circ \sigma = \text{Id}$ .



Observar que también se pueden considerar curvas cuyas parametrizaciones estén definidas solamente en un abierto conexo de  $\mathbb{A}_1$  (esto es, un abierto homeomorfo a un intervalo de  $\mathbb{R}$ ), pero por simplicidad consideraremos siempre curvas definidas en toda la recta afín.

<sup>7</sup>Subvariedad diferenciable de dimensión 1 conexa.

Nótese que de la definición se sigue que el tiempo es coordenada global sobre toda trayectoria. En efecto, si  $C = \text{Im } \sigma \subset \mathbb{A}_4$  es una trayectoria, e  $i : C \hookrightarrow \mathbb{A}_4$  es la inclusión natural, entonces

$$\pi \circ i = \pi|_C : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_1$$

es un difeomorfismo global, de inversa  $\sigma : \mathbb{A}_1 \rightarrow C$ , porque ambas aplicaciones son diferenciables, la condición  $\pi \circ \sigma = \text{Id}$  obviamente significa  $\pi|_C \circ \sigma = \text{Id}$ ; y además  $\sigma \circ \pi|_C = \text{Id}$ , porque dado un punto de  $C$ , será  $\sigma(t)$  para cierto  $t \in \mathbb{A}_1$ , y por tanto  $(\sigma \circ \pi|_C)(\sigma(t)) = \sigma(t)$ .

*Las trayectorias del movimiento son las curvas diferenciables en el espacio-tiempo parametrizadas por el tiempo.*

En una referencia inercial, ya dijimos que el tiempo puede verse como una función diferenciable  $t : \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{R} \simeq \mathbb{A}_1$ , y por tanto el difeomorfismo anterior se traduce en que la función  $t$  es coordenada de la trayectoria,  $t : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ . Por tanto, en una referencia inercial toda trayectoria se parametriza como

$$\sigma(t) = (t, x(t), y(t), z(t))$$

para ciertas funciones  $x, y, z \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Definición.** Sea  $C$  una trayectoria. Se llama **velocidad** de  $C$  al único campo tangente  $T \in \mathcal{D}(C)$  unitario y orientado al futuro, es decir, que cumpla  $\omega(T) = 1$ . Diremos además que la **aceleración** de  $C$  es  $A := T^{\nabla_0} T$ .

Nótese que la velocidad de una trayectoria es su campo de vectores tangente

$$T = \sigma_*(\partial_t) = \partial_t + x'(t)\partial_x + y'(t)\partial_y + z'(t)\partial_z,$$

pues cumple claramente que sobre él la 1-forma del tiempo vale 1. La parte espacial

$$\vec{v} := x'(t)\partial_x + y'(t)\partial_y + z'(t)\partial_z$$

es la **velocidad aparente** para el observador. El módulo de tal velocidad será

$$v := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

**Nota 1.3.1** En presencia de la conexión estándar del espacio afín, para un campo tangente con soporte en la trayectoria se cumple que

$$T^{\nabla_0} \left( \sum f_i(t) \partial_i \right) = \sum f'_i(t) \partial_i,$$

lo que invita a la notación  $\frac{d}{dt} \stackrel{\text{not}}{=} T^{\nabla_0}$ , y escribiremos

$$\frac{df}{dt} \stackrel{\text{not}}{=} Tf \quad , \quad \frac{dD}{dt} \stackrel{\text{not}}{=} T^{\nabla_0} D.$$

Por tanto, la aceleración  $A$  verificará que

$$A = T^{\nabla_0} T = \frac{dT}{dt} = x''(t)\partial_x + y''(t)\partial_y + z''(t)\partial_z,$$

viéndose así que es un campo espacial y que coincide con la **aceleración aparente**  $\vec{a}$ .

Con todo, resulta claro que la integral de  $\omega$  sobre cualquier trayectoria  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{A}_4$  es el tiempo que transcurre entre los sucesos  $p = \sigma(a)$  y  $q = \sigma(b)$ ,

$$t(q) - t(p) = \omega(q - p) = \int_C \omega = \int_a^b \sqrt{g(T, T)},$$

$C = \text{Im } \sigma$ , puesto que  $\omega|_C$  es la forma de volumen de la variedad riemanniana  $(C, g|_C)$ .

**Definición.** Una **transformación de Galileo** es una auto-afinidad  $\varphi : \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  del espacio-tiempo de Galileo que conserva la estructura, es decir, tal que  $\varphi^* \omega = \omega$  y  $\varphi|_V : V \rightarrow V$  es una isometría de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que conserva la orientación. El conjunto de todas estas transformaciones forman un grupo respecto la composición de aplicaciones, llamado **grupo de Galileo**.

Por definición, las transformaciones de Galileo llevan sistemas de referencia inerciales en sistemas de referencia inerciales. Además, dadas dos referencias inerciales

$$(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3) \quad , \quad (p'_0; e'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$$

la única auto-afinidad que transforma una en la otra es una transformación de Galileo, de modo que *todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes*. En particular, esto dice que las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias son las ecuaciones de las transformaciones de Galileo en los sistemas de referencia inerciales:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

siendo  $A = (a_{ij})$  una matriz ortogonal,  $A^t A = 1$  y  $\det(A) = 1$ .

## 1.4 Materia

La última parte de este capítulo consistirá en introducir partículas masivas en la teoría, aspecto sobre el cual discutiremos más profundamente en el siguiente capítulo. Trataremos de definir el concepto de partícula (puntual) con masa en el espacio-tiempo de Galileo.

Sea  $C$  una trayectoria, y consideremos un campo tangente a la curva  $I \in \mathcal{D}(C)$  no nulo en cada punto y orientado al futuro, y sea  $m := \omega(I) > 0$ . De aquí se sigue que  $I = mT$ , pues al ser  $I$  y  $T$  dos campos tangentes sobre  $C$ , existirá una función  $f$  tal que  $I = fT$ , luego  $m = \omega(I) = \omega(fT) = f\omega(T) = f$ .

El siguiente teorema, aun expresado en términos todavía no definidos, debe entenderse con las notaciones anteriores. El vocabulario empleado cobrará sentido cuando tras él demos la definición de “materia”.

**Teorema 1.4.1** *Fijemos una trayectoria y sea  $\vec{F}$  un campo de vectores espaciales con soporte en la curva dada. La ley*

$$\frac{dI}{dt} = \vec{F}$$

*equivale a las dos siguientes:*

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{Ley de conservación de la masa})$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{Ley newtoniana del movimiento})$$

*En tal caso, para cada observador, la variación de energía cinética por unidad de tiempo es el trabajo realizado por la partícula (o sobre ella) por unidad de tiempo:*

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle} \quad (1.2)$$

*Demostración.* Para cada observador,  $T = \partial_t + \vec{v}$ , luego  $I = m\partial_t + m\vec{v}$ . Entonces tenemos la fórmula

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dm}{dt}\partial_t + \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

$\implies$ ). Si  $\frac{dI}{dt} = \vec{F}$ , como  $\vec{F}$  es un vector espacial, necesariamente  $\frac{dm}{dt} = 0$ , luego  $m$  es constante y  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$ .

$\impliedby$ ). Si  $\frac{dm}{dt} = 0$  y  $\vec{F} = m\vec{a}$ ,  $m$  es constante, luego  $\frac{dI}{dt} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ .  
Para la última igualdad, basta notar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) &= \frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = m \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \vec{v} \right\rangle = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

□

Este teorema nos acaba de guiar para definir qué debe ser una partícula con masa:

**Definición.** Llamaremos **partícula** (puntual) a una trayectoria junto con un campo tangente a ella  $I$  no nulo en cada punto y orientado al futuro, que llamaremos **impulso** de la partícula, que verifique que  $m := \omega(I) > 0$  sea una constante positiva, llamada **masa** de la partícula.

Diremos que una partícula está sometida a un **campo de fuerzas espaciales**  $\vec{F}$  si cumple que  $\frac{dI}{dt} = \vec{F}$ , afirmando que la partícula se mueve con las leyes clásicas del movimiento.

Observar además que, en el caso en el que no haya fuerzas actuando sobre la partícula,  $\vec{F} = 0$ , tendremos que  $\frac{dI}{dt} = 0$  (**ley de conservación del impulso**), lo que recoge la ley de conservación de la masa y la **ley del movimiento inercial**  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ . En definitiva, tanto si hay fuerzas externas actuando sobre la partícula como si no, el impulso  $I$  recoge toda la información sobre la partícula.

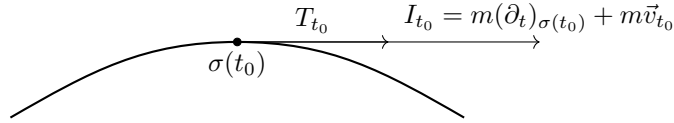
**1.4.2 (Expresiones en coordenadas)** Terminemos dando las ecuaciones explícitas en una cierta referencia inercial  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$  de los campos de vectores que hemos usado en esta sección.

Dada una partícula  $C = \text{Im } \sigma$ ,  $\sigma(t) = (t, x(t), y(t), z(t))$  con impulso  $I$ , ya vimos al comenzar que

$$I = mT \quad (1.3)$$

lo que en coordenadas se traduce en

$$I = m\partial_t + m\vec{v}. \quad (1.4)$$



El segundo sumando  $m\vec{v}$  es el **momento lineal** o cantidad de movimiento  $\vec{p} = p_1\partial_1 + p_2\partial_2 + p_3\partial_3 := m\vec{v}$ , luego

$$I = m\partial_t + p_1\partial_1 + p_2\partial_2 + p_3\partial_3.$$

De las igualdades anteriores se obtiene que para cualquier referencia inercial

$$m = g(\partial_t, I) \quad (1.5)$$

y

$$p_i = \langle \partial_i, I \rangle \quad (1.6)$$



## Capítulo 2

# Gravitación newtoniana

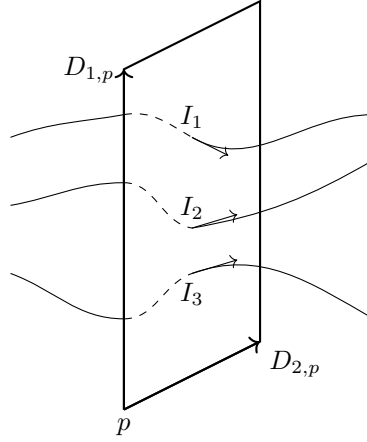
A lo largo de 1.4 hemos desarrollado los elementos básicos de una partícula con masa puntual que se mueve en un espacio-tiempo de Galileo  $X$ . El siguiente paso será el de generalizar esta noción para poder describir objetos con masa más allá de una partícula puntual: planetas, galaxias, etc. Si bien es cierto que un objeto no puntual puede verse como una colección (incommensurablemente grande) de partículas, no tiene sentido manejar una infinidad de curvas y masas puntuales para describir un cuerpo. Debemos pues desarrollar una teoría que nos permita hacer una descripción continua de la materia.

Avisamos al lector que puede no sentirse cómodo con las deducciones que realizaremos en este capítulo. En matemáticas, estamos acostumbrados a que *se define, se enuncia, y se demuestra*. Sin embargo, cuando los conceptos involucrados ya tienen un significado previo, las definiciones no son del todo libres. Debemos pues reflexionar sobre su significado previamente antes de dar una definición. Las deducciones sobre los conceptos tan sólo deben tomarse como una motivación para la definición, de modo que sea consistente con su significado previo.

### 2.1 Distribución continua de materia

En primer lugar, vamos a tratar de buscar la que debería ser, de acuerdo con el concepto de partícula del capítulo anterior, una distribución continua de materia.

Supongamos en primer lugar que en un espacio-tiempo de Galileo tenemos una gran cantidad de partículas moviéndose. En cada paralelogramo infinitesimalmente pequeño de dimensión 3 chocarán algunas de estas partículas. Observaremos cuántas partículas chocan con ese paralelepípedo y sumemos sus impulsos (afectados de un cierto signo). La suma tiene sentido porque, aunque los sumandos sean vectores en sucesos distintos, suponemos que la región es tan pequeña que se confunde con el espacio tangente en el punto, donde sí hay una noción clara de paralelismo de vectores.



**Nota 2.1.1** En lo que sigue haremos un abuso de notación: puesto que todo lo que digamos sobre un campo  $D \in \mathcal{D}(X)$  lo diremos en cada punto, es decir, nos referiremos constantemente a  $D_p \in T_p X$  para todo  $p \in X$ , denotaremos igualmente como  $D$  a dicho vector en cada punto. Tal abuso en parte también está justificado por el párrafo anterior.

En total, obtenemos una aplicación

$$\Pi_3 : \mathcal{D}(X)^3 \longrightarrow \mathcal{D}(X)$$

$$(D_1, D_2, D_3) \longmapsto \Pi_3(D_1, D_2, D_3) := \left( \begin{array}{l} \text{En cada punto, suma con} \\ \text{signo de los impulsos de las} \\ \text{partículas "contenidas" en el} \\ \text{paralelogramo } \{D_1, D_2, D_3\} \end{array} \right)$$

donde el signo de cada sumando es el signo de la orientación de  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$ , es decir:

- “+” cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  sea una base positiva.
- “−” cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  sea una base negativa.
- “0” (ie, no suma) cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  sean linealmente dependientes.

Detallemos más la cuestión del signo. Tomemos un “hiperparalelepípedo” que tenga como una de sus “hipercaras” al paralelepípedo  $\{D_1, D_2, D_3\}$ . Dicho hiperparalelepípedo es una variedad con borde y su borde (que es una variedad diferenciable de dimensión 3) hereda una orientación de modo natural (pág. 119). Supongamos que  $\{D_1, D_2, D_3\}$  está orientada positivamente respecto a dicha orientación (si no basta permutar dos de posición). Entonces:

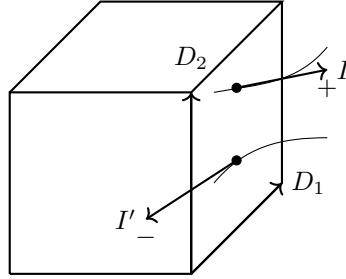
- Si el impulso  $I$  sale del hiperparalelepípedo por esa cara, el signo es “+”.
- Si el impulso  $I$  entra en el hiperparalelepípedo por esa cara, el signo es “−”.



Esto se debe a lo siguiente: la orientación del borde de una variedad con borde se obtiene contrayendo un representante de la orientación ambiente con un campo que apunte hacia afuera en los puntos del borde. Ahora, si el impulso  $I$  de una partícula sale del hiperparalelepípedo, apuntará hacia afuera, luego

$$\Omega_X(I, D_1, D_2, D_3) = i_I \Omega_X(D_1, D_2, D_3) > 0$$

(si  $I'$  apunta hacia dentro se razona con  $-I'$ , y si es tangente a la hipercara, claramente es 0). El siguiente dibujo del hiperparalelepípedo representa la situación. Sólo se han dibujado dos de los vectores que forman la hipercara:



Por tanto,

$$\Pi_3(D_1, D_2, D_3) = \left( \begin{array}{c} \text{Suma (sin signo) de los} \\ \text{impulsos de las} \\ \text{partículas que salen del} \\ \text{hiperparalelepípedo por} \\ \text{la hipercara} \\ \{D_1, D_2, D_3\} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Suma (sin signo) de los} \\ \text{impulsos de las} \\ \text{partículas que entran en} \\ \text{el hiperparalelepípedo} \\ \text{por la hipercara} \\ \{D_1, D_2, D_3\} \end{array} \right)$$

Una hipótesis fundamental que vamos a imponer es que  $\Pi_3$  sea multilineal, es decir, un verdadero tensor. Esta cuestión del signo lo justifica parcialmente puesto que, si cambiamos de signo uno de los campos, el valor de  $\Pi_3$  cambia de signo, pues todas las sumas irán con el signo contrario. Además, el haber definido el signo con la orientación dice además que ese tensor debe ser alternado, pues al permutar dos campos cambiará el signo de la orientación y de nuevo todas las sumas irán con signos opuestos.

Por tanto, el anterior tensor es una 3-forma valorada en los campos tangentes, es decir, es un tensor  $(3, 1)$  que es alternado en los índices covariantes. Es por tanto claro que como tensor ordinario será

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X)^3 \times \Omega(X) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X) \\ (D_1, D_2, D_3, \omega_1) &\longmapsto \omega_1(\Pi_3(D_1, D_2, D_3)) \end{aligned}$$

Lo anteriormente dicho sobre  $\Pi_3$  no es una verdadera “definición”, sino que debe verse como una interpretación que nos va a guiar a la definición de distribución de materia. Por lo pronto, pongamos

**Definición (Provisional).** Llamaremos **3-forma de impulso** a cualquier 3-forma valorada en los campos tangentes, y la denotaremos como  $\Pi_3$ . Además, diremos de la 3-forma (ordinaria)

$$\omega_M := i_\omega \Pi_3, \quad (2.1)$$

donde  $\omega$  es la 1-forma del tiempo, es su **3-forma de masa**.

Dada una 3-forma de impulso y su 3-forma de masa  $\omega_M$ , si la restringimos a cualquier hiperplano de simultaneidad  $\mathcal{E}_t$ , tendremos que  $\omega_M|_{\mathcal{E}_t}$  es una 3-forma en un espacio de dimensión 3, luego deberá ser proporcional a la forma de volumen  $\Omega_V$ , ie,

$$\omega_M|_{\mathcal{E}_t} = \rho \Omega_V \quad (2.2)$$

para cierta función  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$ . Nótese que, para cada observador,

$$\omega_M(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \rho \Omega_V(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \rho, \quad (2.3)$$

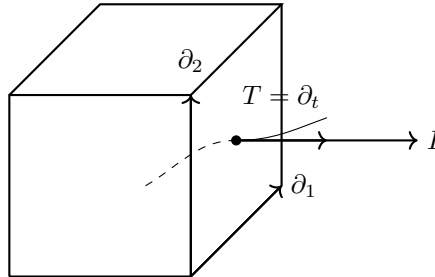
lo que motiva la siguiente

**Definición (Provisional).** Llamaremos **densidad de masa** a la anterior función  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$ .

**2.1.2 (Nubes de polvo ó dusts)** La distribución de materia (no puntual) más sencilla que podemos presentar son las llamadas nubes de polvo ó dusts. Éstas se refieren a distribuciones en las que en cada momento y lugar está totalmente determinada la densidad y la velocidad (4-dimensional) de la materia, es decir, en una región pequeña las partículas siguen aproximadamente la misma trayectoria (luego no hay presiones). Ejemplos de dusts son las galaxias<sup>1</sup>, polvo esparcido, un río<sup>2</sup>, etc. Lo que no es un dust es el aire que hay en una habitación, por ejemplo, pues aunque parece estar en reposo, las partículas de aire se mueven en todas las direcciones, pues hay presión (atmosférica).

Calculemos cuál es la 3-forma de impulso para un dust de materia de densidad  $\rho$  y velocidad  $T$ , haciendo de nuevo una estimación infinitesimal: en cada punto, elijamos un observador con velocidad  $T$ , de modo que para dicho observador la materia esté en reposo. Veamos cuáles deben ser los coeficientes de  $\Pi_3$ .

En primer lugar, calculemos  $\Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . El siguiente dibujo representa un hiperparalelepípedo en el que la hipercara de la derecha es la determinada por  $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ .



<sup>1</sup>Despreciando un elemento que ejerce presión sobre las galaxias, la luz.

<sup>2</sup>Supuesto que el cauce es homogéneo y no hay presiones.

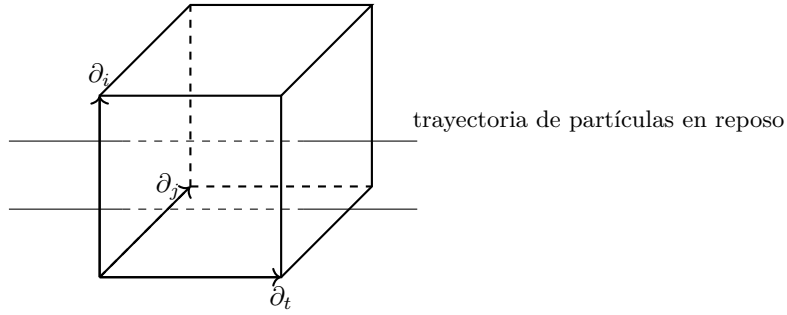
Puesto que para nuestro observador las partículas que chocan en esa cara están en reposo, será  $I = m\partial_t = mT$ , y la suma irá con signo “+” pues

$$\Omega_X(I, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \Omega_X(m\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = m > 0.$$

Así que al sumar todas tendremos

$$(\text{masa del cubo unidad}) \cdot \partial_t = \rho\partial_t = \rho T.$$

Por otra parte, veamos cuáles deben ser los coeficientes correspondientes a  $\Pi_3(\partial_t, \partial_i, \partial_j)$  ( $i < j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ).



Puesto que el observador ve las partículas en reposo, ninguna que no esté dentro de la cara  $\{\partial_i, \partial_j\}$  entrará o saldrá, y por tanto solo aportan a la suma las que están dentro de la cara; cuyos impulsos son proporcionales a  $\partial_t$ , luego no sumamos nada:  $\Pi_3(\partial_t, \partial_i, \partial_j) = 0$ .

Con todo, el observador afirmará que la 3-forma de impulso es, en su sistema de coordenadas

$$\Pi_3 = \rho(dx \wedge dy \wedge dz) \otimes \partial_t, \quad (2.4)$$

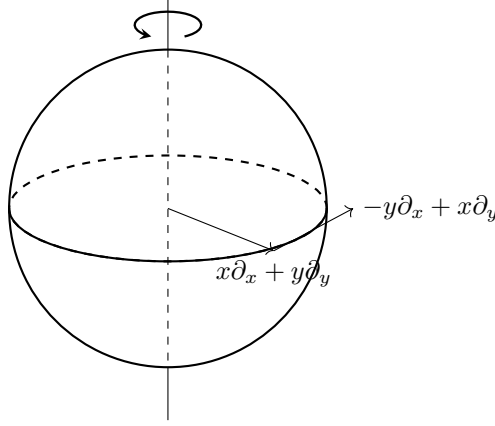
y al ser  $dx \wedge dy \wedge dz = i_{\partial_t}\Omega_X$ , y  $\partial_t = T$ , concluimos que la 3-forma de impulso de un dust de materia es

$$\boxed{\Pi_3 = \rho(i_T\Omega_X) \otimes T}, \quad (2.5)$$

expresión la cual está expresada en términos absolutos, es decir, no depende del observador. Por tanto,

**Definición (Provisional).** Llamaremos **nube de polvo** ó **dust** de densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$  y velocidad  $T \in \mathcal{D}(X)$ , donde  $\omega(T) = 1$ , a la distribución dada por la 3-forma de impulso anterior.

**Ejemplo 2.1.3** Calculemos cuál es la 3-forma de impulso de una planeta, es decir, de una esfera maciza de radio  $R$  cuya densidad de masa varía en función del radio y gira alrededor de su eje.



Supongamos que la esfera está centrada en el origen de coordenadas y gira con una velocidad angular  $\theta$ . Puesto que la velocidad aparente para un observador es la misma en una sección cilíndrica, en cada punto  $(x, y, z)$  de la esfera será

$$\vec{v} = \theta(-y\partial_x + x\partial_y)$$

y  $T = \partial_t + \vec{v}$ . De (2.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \rho \, i_{(\partial_t + \vec{v})}(dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz) \otimes (\partial_t + \vec{v}) \\ &= \rho(dx \wedge dy \wedge dz + y\theta dt \wedge dy \wedge dz + x\theta dx \wedge dz) \otimes (\partial_t - y\theta\partial_x + x\theta\partial_y) \end{aligned}$$

**Definición.** Fijado un observador, se llama **densidad de impulso** de una distribución de materia al impulso contenido en el cubo unidad,

$$I := \Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \rho\partial_t + w_1\partial_1 + w_2\partial_2 + w_3\partial_3,$$

donde  $w_i := dx_i(\Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3))$  es la **densidad de cantidad de movimiento** a lo largo del eje  $i$ .

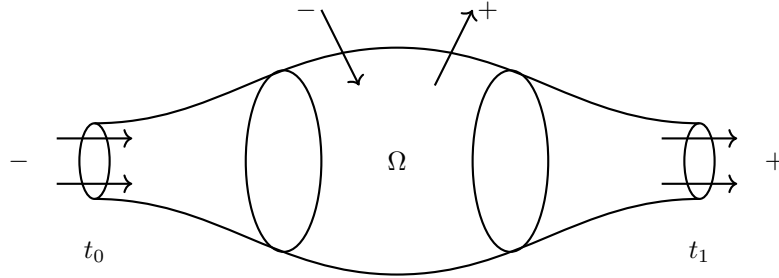
**2.1.4 (Ley de Conservación del Impulso)** Cuando tan sólo disponíamos de una partícula puntual, ya vimos en 1.4 que la Ley de Conservación de la Masa y la Ley del Movimiento Inercial se resumían en la Ley de Conservación del Impulso

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

En el caso de una distribución continua de materia, la Ley de Conservación del Impulso se enuncia como

$$\boxed{d\Pi_3 = 0} \tag{2.6}$$

Justifiquemos el por qué de esto. Sea  $\Omega$  una región cualquiera del espacio-tiempo, delimitada entre dos instantes  $t_0$  y  $t_1$  (se puede pensar como una cierta región espacial que va variando de tamaño con el tiempo).



La condición  $d\Pi_3 = 0$  equivale, por el teorema de Stokes (pág. 120), a que

$$0 = \int_{\Omega} d\Pi_3 = \int_{\partial\Omega} \Pi_3 = -(\text{Impulso en } t_0) + (\text{Impulso en } t_1) \\ + (\text{Impulso que sale entre } t_0 \text{ y } t_1) - (\text{Impulso que entra entre } t_0 \text{ y } t_1),$$

es decir, que la variación del impulso desde  $t_0$  a  $t_1$  en la región  $\Omega$  es la diferencia de los impulsos de las partículas que entran y las partículas que salen. En otras palabras: que el impulso de las partículas que han permanecido en el interior de la región se ha conservado, puesto que lo anterior dice que si hay algún cambio en el impulso total, es porque alguna partícula bien ha entrado bien ha salido, no porque las de dentro hayan variado de impulso.

Notar que  $d\Pi_3 = 0$  es una condición fortísima: afirma que el impulso se conserva en cualquier región, es decir, ninguna partícula varía de impulso.

**2.1.5 (Cálculo de  $d\Pi_3$ )** Calculemos cuánto vale la diferencial de la 3-forma de impulso. Puesto que  $\Pi_3$  es una 3-forma valorada en los campos tangentes,  $d\Pi_3$  será una 4-forma valorada en los campos tangentes (pág. 121), así que deberá ser

$$d\Pi_3 = \Omega_X \otimes D$$

para cierto  $D \in \mathcal{D}(X)$ . En efecto, si  $\Pi_3 = \sum_{i=0}^3 \omega_i \otimes \partial_i$  para ciertas 3-formas ordinarias  $\omega_i \in \Omega^3(X)$ , entonces

$$d\Pi_3 = \sum_{i=0}^3 d\omega_i \otimes \partial_i = \sum_{i=0}^3 f_i \Omega_X \otimes \partial_i = \Omega_X \otimes \left( \sum_{i=0}^3 f_i \partial_i \right),$$

puesto que cada  $d\omega_i$  es una 4-forma en  $X$  y debe ser proporcional a la forma de hipervolumen, y por tanto basta elegir  $D := \sum_{i=0}^3 f_i \partial_i$ . Nótese que en particular  $D = d\Pi_3(\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Veamos que significado tiene dicho campo  $D$ .

Sea  $Q$  un “hipercubo” de lados infinitesimales  $dt, dx, dy, dz$ , de modo que podamos considerar los campos tangentes dentro de  $Q$  como constantes. De esta forma tiene sentido la integración de la 3-forma valorada en los campos tangentes  $d\Pi_3$ . Por una parte,

$$\int_Q d\Pi_3 = \left( \int_Q \Omega_X \right) D = (dt \, dx \, dy \, dz) D,$$

y por otra, aplicando el teorema de Stokes, al igual que antes,

$$\begin{aligned}
\int_Q d\Pi_3 &= \int_{\partial Q} \Pi_3 = -(\text{Impulso al principio}) + (\text{Impulso al final}) \\
&+ (\text{Impulso que sale}) - (\text{Impulso que entra}) \\
&= (\text{Variación de impulso dentro de } Q)
\end{aligned}$$

Juntando todo, obtenemos que  $D$  representa la variación infinitesimal de impulso por unidad de tiempo y volumen, esto es, la fuerza que está actuando por unidad de volumen (pues la fuerza es la variación infinitesimal de impulso por unidad de tiempo). Este razonamiento motiva la siguiente

**Definición (Provisional).** Llamaremos **densidad de fuerza** a tal campo  $D$ , y lo denotaremos como  $\vec{\mathbb{F}}$ , de modo que

$$\boxed{d\Pi_3 = \Omega_X \otimes \vec{\mathbb{F}}.} \quad (2.7)$$

Siempre impondremos que tal campo  $\vec{\mathbb{F}}$  sea un campo espacial, pues lo pensaremos como que está dado.

**Teorema 2.1.6** *Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ , donde se ha fijado una forma de hipervolumen  $\Omega_X$ . Existe un isomorfismo canónico entre los tensores contravariantes de orden 2 y las  $n$ -formas valoradas en  $E$ :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^2(E) &= \Pi_n(E) \\
T^2 &\longmapsto C_1^1(\Omega_X \otimes T^2)
\end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $\{e_0, \dots, e_n\}$  una base de  $E$  y  $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$  su base dual. Podemos suponer que  $\Omega_X = \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n$  (si no será  $\Omega_X = \lambda \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n$  y basta cambiar  $e_0$  por  $\lambda^{-1}e_0$ , por ejemplo). Es claro que para tener el isomorfismo basta ver que la aplicación (que es lineal) manda bases a bases. Recuérdese que una base de  $\mathcal{T}^2(E)$  la forman

$$\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=0,\dots,n}$$

y de  $\Pi_n(E)$

$$\{\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n \otimes e_j\}_{j=0,\dots,n}.$$

Basta pues notar que por la asignación cada elemento  $e_i \otimes e_j$  va a

$$\begin{aligned}
C_1^1(\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n \otimes e_i \otimes e_j) &= i_{e_i}(\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n) \otimes e_j \\
&= \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \omega_k(e_i) \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n \right) \otimes e_j \\
&= (-1)^i (\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_n) \otimes e_j,
\end{aligned}$$

lo que dice que en efecto bases van a bases (porque aunque los elementos de una base estén afectados de un signo siguen siendo base).  $\square$

**Definición (Provisional).** Dada una distribución de materia, llamaremos **tensor contravariante de materia** (ó tensor energía-impulso) al tensor  $T^2 \in \mathcal{T}^2(X)$  que se corresponde con la 3-forma de impulso  $\Pi_3$  de la distribución por el isomorfismo anterior, fijada la forma de hipervolumen  $\Omega_X$  de la orientación del espacio-tiempo.

En general, al hablar de una distribución continua de materia nos referiremos a su tensor de materia en lugar de a la 3-forma de impulso, aunque tal tensor no tenga ningún significado intuitivo. Pero el  $T^2$  es más canónico, más intrínseco, que la 3-forma de impulso, pues no depende de la orientación del espacio (a diferencia de la  $\Pi_3$ ). En efecto, si cambiamos la orientación del espacio  $[\Omega_X]$  por  $[-\Omega_X]$ , la  $\Pi_3$  cambiará de signo, pues todas las sumas llevarán signo opuesto; y deberemos cambiar la forma de hipervolumen por  $-\Omega_X$ . Es obvio entonces por el isomorfismo que el tensor  $T^2$  correspondiente en ambos casos es el mismo.

Hay otra propiedad que se extrae del  $T^2$ : dado un dust de materia, su tensor de materia es

$$T^2 = \rho T \otimes T. \quad (2.8)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} C_1^1(\Omega_X \otimes T^2) &= C_1^1(\Omega_X \otimes \rho T \otimes T) = \rho C_1^1(\Omega_X \otimes T \otimes T) \\ &= \rho(i_T \Omega_X \otimes T) = \Pi_3, \end{aligned}$$

lo que afirma que el tensor de materia de un dust es un tensor *simétrico*. Este es un hecho que vamos a imponer que cumpla cualquier distribución de materia, es decir, siempre supondremos que el tensor de materia de una distribución es simétrico. De esta manera, dicho tensor se expresará en coordenadas como

$$T^2 = \rho \partial_t \otimes \partial_t + \sum_{i=1}^3 w_i (\partial_t \otimes \partial_i + \partial_i \otimes \partial_t) + \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} \partial_i \otimes \partial_j, \quad (2.9)$$

con  $h_{ij} = h_{ji}$ . Veamos que interpretación tienen dichos coeficientes:

–. El coeficiente  $\rho$  es en efecto la densidad de masa de la distribución de materia, pues el elemento básico  $\partial_t \otimes \partial_t$  de  $T^2$  se corresponde por el isomorfismo de 2.1.6 con (véase la demostración)  $dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_t$  de  $\Pi_3$ , y sólo resta notar que el coeficiente en  $dx \wedge dy \wedge dz$  de  $i_{dt} \Pi_3 = \omega_M$  es justamente  $\rho$ .

–. Los coeficientes  $w_i$  son en efecto las densidades de cantidad de movimiento por el eje  $i$ , pues cada  $\partial_t \otimes \partial_i$  se corresponde por el isomorfismo con  $dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_i$ , y basta entonces recordar que la densidad de impulso es  $I = \Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \rho \partial_t + w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2 + w_3 \partial_3$ .

Ahora bien: al suponer que  $T^2$  sea simétrico, estamos suponiendo que el término en  $\partial_t \otimes \partial_i$  (que acabamos de ver que son las densidades de cantidad de movimiento) es el mismo que el término en  $\partial_i \otimes \partial_t$ . Veamos, en términos físicos, cuál es la suposición que estamos realizando: por el isomorfismo, cada  $\partial_i \otimes \partial_t$  se corresponderá con  $(-1)^i dt \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \otimes \partial_t$  (con  $j_1 < j_2$  y  $j_1, j_2 \neq i$ ). Aplicando  $\omega = dt$ , se sigue que estos coeficientes  $w_i$  se corresponden, salvo un signo para  $i = 1, 3$ , con los coeficientes de  $\omega_M$ :

$$\omega_M = \rho dx \wedge dy \wedge dz - w_1 dt \wedge dx \wedge dy + w_2 dt \wedge dx \wedge dz - w_3 dt \wedge dy \wedge dz.$$

Pero lo que estamos afirmando entonces es que

$$\pm w_i = \omega(\Pi_3(\partial_t, \partial_{j_1}, \partial_{j_2})),$$

y puesto que  $\Pi_3(\partial_t, \partial_{j_1}, \partial_{j_2})$  es el impulso que atraviesa la cara  $j_1, j_2$  por unidad de tiempo, estamos diciendo que  $\pm w_i$  representa la masa que atraviesa la cara  $j_1, j_2$  por unidad de tiempo, esto es, son los **flujos de masa** por la cara  $j_1, j_2$ .

*La hipótesis de que  $T^2$  sea simétrico afirma que las densidades de cantidad de movimiento son, salvo signo, los flujos de masa por las caras del cubo unidad.*

En otras palabras: los coeficientes de la densidad de impulso  $I$  son, salvo signo, los coeficientes de la forma de masa  $\omega_M$  de la distribución.

–. Veamos por último los  $h_{ij}$ : cada elemento básico  $\partial_i \otimes \partial_j$  se corresponde vía el isomorfismo 2.1.6 con  $(-1)^i dt \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \otimes \partial_j$ ,  $j_1 < j_2$ ,  $j_1, j_2 \neq i$ . Es decir,  $h_{ij}$  es, salvo signo, la componente  $j$ -ésima de  $\Pi_3(\partial_t, \partial_{j_1}, \partial_{j_2})$ : es el **flujo de impulso por la cara  $j_1, j_2$  (ortogonal a  $\partial_i$ ) en la dirección  $\partial_j$** .

**2.1.7 (Tensor de tensiones y fluidos perfectos)** Consideremos una distribución de materia y notemos lo siguiente: si hacemos la contracción interior del tensor de materia por la 1-forma del tiempo, obtenemos un campo (tensor 1-contravariante) que en particular es  $i_{dt}T^2 = \rho\partial_t + \sum w_i\partial_i = I$ , la densidad de impulso. Una hipótesis bastante razonable para imponerle a la materia es que la densidad de impulso sea divisible por la densidad de masa, y en particular que sea  $I = \rho T$ , con lo que podremos escribir

$$T^2 = I \otimes T + \mathcal{T}^2 = \rho T \otimes T + \mathcal{T}^2, \quad (2.10)$$

donde  $\mathcal{T}^2$  es un tensor  $(0, 2)$  simétrico, llamado **tensor de tensiones**<sup>3</sup>, tensor de esfuerzos, ó tensor de estrés. Cuando  $\mathcal{T}^2 = 0$ , la materia es una nube de polvo, por lo que dicho tensor recoge las presiones que se están ejerciendo en el fluido, es decir, recoge todos los movimientos que no son el movimiento medio, el cual viene dado por  $T$ .

Cuando  $\mathcal{T}^2 = ph^*$ , se dice que la distribución de materia dada es un **fluido perfecto** de densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$  y presión  $p \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , porque recoge que las presiones que se ejercen son iguales en todas las direcciones (por ejemplo, los gases son en general fluidos perfectos).

Todo lo que hasta ahora hemos contado en este capítulo únicamente tenía el objetivo de motivar una definición formal de “materia”. La mayoría de definiciones que hemos dado las hemos tomado provisionales, puesto que simplemente nos han dado una interpretación de lo que deberían ser dichos conceptos. Los argumentos usados hasta ahora no han sido totalmente rigurosos, pero por el hecho de que no son deductivos sino que buscaban justificar, de manera más o menos sugerente, la noción de materia. Entonces:

**Definición.** Llamaremos **distribución de materia** (o **forma de impulso** de una distribución de materia) a toda 3-forma valorada en los campos tangentes cuyo tensor 2-contravariante correspondiente por 2.1.6 sea simétrico, al cual llamaremos **tensor contravariante de materia** y denotaremos por  $T^2$ .

Diremos que la materia es un **fluido perfecto** de densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , presión  $p \in \mathcal{C}^\infty(X)$  y velocidad  $T \in \mathcal{D}(X)$  ( $\omega(T) = 1$ ) cuando

$$T^2 = \rho T \otimes T + ph^*. \quad (2.11)$$

<sup>3</sup>La palabra *tensor* proviene precisamente de este, pues fue el primero que se descubrió.



Diremos que la materia es una **nube de polvo** ó **dust** de densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$  y velocidad  $T \in \mathcal{D}(X)$  ( $\omega(T) = 1$ ) cuando

$$\boxed{T^2 = \rho T \otimes T.} \quad (2.12)$$

Además, diremos que la materia se mueve bajo la acción de una **densidad de fuerza**  $\vec{\mathbb{F}} \in \mathcal{D}(X)$  (campo de vectores espaciales) cuando

$$\boxed{d\Pi_3 = \Omega_X \otimes \vec{\mathbb{F}}.} \quad (2.13)$$

**Teorema 2.1.8** *Sea  $(\mathbb{A}_{n+1}, \nabla_0)$  un espacio afín  $(n+1)$ -dimensional dotado de su conexión estándar, y supongamos fijada una forma de volumen  $\Omega_X$ . Si  $\Pi_n$  es una  $n$ -forma valorada en los campos tangentes de modo que  $\Pi_n = C_1^1(\Omega_X \otimes T^2)$  para cierto  $T^2 \in \mathcal{T}^2(\mathbb{A}_{n+1})$ , entonces se cumple que*

$$d\Pi_n = \Omega_X \otimes (\text{div}_{\nabla_0} T^2). \quad (2.14)$$

*Demostración.* Fijemos coordenadas afines en las que  $\Omega_X = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$  (análogo a 2.1.6). Puesto que todas las operaciones involucradas son lineales para la suma, basta comprobar la igualdad para un tensor de la forma  $T^2 = f \partial_i \otimes \partial_j$ . En tal caso la  $n$ -forma valorada en los campos tangentes correspondiente será

$$\Pi_n = C_1^1(f dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n \otimes \partial_i \otimes \partial_j) = (-1)^i f dx_0 \wedge \overset{\downarrow i}{\cdots} \wedge dx_n \otimes \partial_j,$$

por lo que su diferencial exterior será

$$\begin{aligned} d\Pi_n &= (-1)^i df \wedge dx_0 \wedge \overset{\downarrow i}{\cdots} \wedge dx_n \otimes \partial_j = (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_0 \wedge \overset{\downarrow i}{\cdots} \wedge dx_n \\ &= (dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n) \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j \right) = \Omega_X \otimes (\text{div}_{\nabla_0} T^2) \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.1.9** *En un espacio-tiempo de Galileo, la densidad de fuerza  $\vec{\mathbb{F}}$  de una distribución continua de materia es precisamente la divergencia del tensor contravariante de materia,*

$$\vec{\mathbb{F}} = \text{div}_{\nabla_0} T^2,$$

y por tanto la ecuación (2.13) se reescribe como

$$\boxed{d\Pi_3 = \Omega_X \otimes (\text{div}_{\nabla_0} T^2).} \quad (2.15)$$

## 2.2 Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos

En esta sección expondremos cómo la ecuación (2.13) recoge las leyes del movimiento más importantes de la Mecánica de Fluidos. Para quien se haya sentido incómodo con las deducciones de la anterior sección que motivaron la definición de distribución de materia, esto debería servir como comprobación de que aquellas suposiciones eran correctas.

### Caso General

Supongamos que tenemos una distribución continua de materia en su forma más general, es decir, en la que su tensor contravariante de materia viene dado por (2.9). Recordemos que, vía el isomorfismo 2.1.6, los elementos de la base de  $\mathcal{T}^2(X)$  se corresponden con los de  $\Pi_3(X)$  de la siguiente forma:

- $\partial_t \otimes \partial_t$  se identifica con  $dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_t$ .
- $\partial_t \otimes \partial_i$  se identifica con  $dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_i$ .
- $\partial_i \otimes \partial_t$  se identifica con  $(-1)^i dt \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \otimes \partial_t$  ( $j_1 < j_2$ ,  $j_1, j_2 \neq i$ ).
- $\partial_i \otimes \partial_j$  se identifica con  $(-1)^i dt \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \otimes \partial_j$  ( $j_1 < j_2$ ,  $j_1, j_2 \neq i$ ).

Por tanto, en la base

$$\{dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \otimes \partial_j\}_{j_1 < j_2 < j_3}$$

la 3-forma de impulso  $\Pi_3$  se escribirá como

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= dx \wedge dy \wedge dz \otimes \left( \rho \partial_0 + \sum_{i=1}^3 w_i \partial_i \right) \\ &+ dt \wedge dy \wedge dz \otimes \left( -w_1 \partial_0 - \sum_{j=1}^3 h_{1j} \partial_j \right) \\ &+ dt \wedge dx \wedge dz \otimes \left( w_2 \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{2j} \partial_j \right) \\ &+ dt \wedge dx \wedge dy \otimes \left( -w_3 \partial_0 - \sum_{j=1}^3 h_{3j} \partial_j \right) \\ &= dx \wedge dy \wedge dz \otimes \left( \rho \partial_0 + \sum_{i=1}^3 w_i \partial_i \right) \\ &+ dt \wedge dz \wedge dy \otimes \left( w_1 \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{1j} \partial_j \right) \\ &+ dt \wedge dx \wedge dz \otimes \left( w_2 \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{2j} \partial_j \right) \\ &+ dt \wedge dy \wedge dx \otimes \left( w_3 \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{3j} \partial_j \right). \end{aligned}$$

Ahora, si hacemos la diferencial exterior a dicha 3-forma valorada en los campos tangentes, obtendremos

$$\begin{aligned}
d\Pi_3 &= \rho_t dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_0 + \sum_{i=1}^3 w_{i,t} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \otimes \partial_i \\
&+ w_{1,1} dx \wedge dt \wedge dz \wedge dy \otimes \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{1j,1} dx \wedge dt \wedge dz \wedge dy \otimes \partial_j \\
&+ w_{2,2} dy \wedge dt \wedge dx \wedge dz \otimes \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{2j,2} dy \wedge dt \wedge dx \wedge dz \otimes \partial_j \\
&+ w_{3,3} dz \wedge dt \wedge dy \wedge dx \otimes \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{3j,3} dz \wedge dt \wedge dy \wedge dx \otimes \partial_j \\
&= \Omega_X \otimes \left( \rho \partial_0 + \sum_{i=1}^3 w_{i,t} \partial_i + w_{1,1} \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{1j,1} \partial_j \right. \\
&\quad \left. + w_{2,2} \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{2j,2} \partial_j + w_{3,3} \partial_0 + \sum_{j=1}^3 h_{3j,3} \partial_j \right) \\
&= \Omega_X \otimes \left( \left( \rho + \sum_{j=1}^3 w_{j,j} \right) \partial_t + \sum_{i=1}^3 \left( w_{i,t} + \sum_{j=1}^3 h_{ji,j} \right) \partial_i \right),
\end{aligned}$$

así que el segundo término del producto tensorial debe ser la densidad de fuerza  $\vec{\mathbb{F}} = \mathbb{F}_1 \partial_1 + \mathbb{F}_2 \partial_2 + \mathbb{F}_3 \partial_3$ , con lo que resulta

$$\begin{cases} 0 = \rho_t + \sum_{j=1}^3 w_{j,j} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \mathbb{F}_i = w_{i,t} + \sum_{j=1}^3 h_{ij,j}, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.17)$$

lo que se puede escribir de forma más compacta como

$$\boxed{\begin{cases} 0 = \rho_t + \operatorname{div} \vec{w} \\ \mathbb{F}_i = w_{i,t} + \operatorname{div} \vec{h}_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}} \quad \begin{array}{l} \text{(Ecuación de Continuidad)} \\ \text{(Ecuaciones de Euler)} \end{array}$$

donde  $\vec{w} := \sum_{i=1}^3 w_i \partial_i$  y  $\vec{h}_i := \sum_{j=1}^3 h_{ij} \partial_j$ . La primera de las ecuaciones expresa la conservación de la masa, mientras que las otras 3 son el enunciado para distribuciones continuas de materia de la Ley Newtoniana del Movimiento.

### Caso Fluidos Perfectos

Supongamos ahora que nuestra distribución de materia es un fluido perfecto de densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , presión  $p \in \mathcal{C}^\infty(X)$  y velocidad  $T \in \mathcal{D}(X)$ ; de modo que su tensor de materia vendrá dado por

$$T^2 = \rho T \otimes T + p h^*.$$

Para un observador inercial, la velocidad y la métrica contravariante del espacio vendrán dadas por  $T = \partial_t + \sum_i v_i \partial_i$ , donde  $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \partial_i$  es la **velocidad media aparente** del fluido para el observador; y  $h^* = \sum_{i=1}^3 \partial_i \otimes \partial_i$ . Por tanto,

$$T^2 = \rho \left( \partial_t \otimes \partial_t + \sum_{i=1}^3 v_i (\partial_t \otimes \partial_i + \partial_i \otimes \partial_t) + \sum_{i,j=1}^3 v_i v_j \partial_i \otimes \partial_j \right) + p \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i \otimes \partial_i \right)$$

Comparando dichos términos con los generales de (2.9), obtenemos:

- $\partial_t \otimes \partial_t$ :  $\rho = \rho$  (no dice nada).
- $\partial_t \otimes \partial_i$ :  $w_i = \rho v_i$ .
- $\partial_i \otimes \partial_j$ :
  - $h_{ij} = \rho v_i v_j$ , si  $i \neq j$ .
  - $h_{ij} = \rho v_i^2 + p$ , si  $i = j$ .

Por tanto, en el caso de fluidos perfectos la Ecuación de Continuidad y las Ecuaciones de Euler se reescriben como

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \rho_t + \sum_{i=1}^3 (\rho v_i)_i \\ \mathbb{F}_i = (\rho v_i)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_i v_j)_j + p_i \end{array} \right. \quad (\text{Ecuaciones de Navier-Stokes})$$

## 2.3 Ley de la Gravitación Universal

Vamos a estudiar el ejemplo fundamental de distribución de materia y fuerza de la mecánica clásica: la Ley de la Gravitación Universal de Newton. Ésta afirma que cualesquiera dos masas puntuales se atraen mutuamente con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Pero, por otra parte, junto a la ley  $\vec{F} = m\vec{a}$  (recuérdese 1.4.1) afirma que la aceleración que experimenta un cuerpo por la acción gravitatoria de otro no depende de su propia masa. Así, mas que una “fuerza gravitatoria”, lo que en realidad hay es una aceleración gravitatoria producido por un cuerpo puntual. Por tanto, esto dice que tenemos una unidad de masa canónica: aquella que a la unidad de distancia produce una aceleración de una unidad. En tales unidades es claro que la constante de gravitación será 1.

**Ejemplo 2.3.1** Calculemos en nuestras unidades cotidianas esta unidad de masa intrínseca. Si tomamos como unidad de longitud el metro, y de tiempo el segundo, esa cantidad de masa  $M$  será, por la ley  $a = GM/r^2$ ,

$$1m/s^2 = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{(m/s^2) \cdot m^2}{kg} \frac{M}{1m^2} \implies M = \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} kg = 1.5 \cdot 10^{10} kg.$$

En estas condiciones, es claro que la unidad de masa dependiendo de la de longitud y tiempo es  $m^3/s^2$ , es decir,  $1m^3/s^2 = 1.5 \cdot 10^{10} kg$ . En tales unidades, es sencillo saber la masa de la Tierra, cálculo que incluso podrían haber hecho en la antigüedad si hubieran conocido la ley de la gravitación, pues el valor de la aceleración de la Tierra ( $g = 9.8m/s^2$ ) a nivel de la superficie se puede calcular tirando una piedra o con un péndulo; y ya en la Antigua Grecia conocían cuál era el radio de la Tierra<sup>4</sup>:

$$\frac{M}{(6.371.000m)^2} = 9.8m/s^2 \implies M = 3.98 \cdot 10^{14} m^3/s^2$$

Lo que no resulta tan claro es saber el equivalente en kilogramos, pues hace falta conocer el valor de  $G$ . El primero que la determinó fue H. CAVENDISH (1731 – 1810) con el famoso experimento de la balanza de torsión.

De acuerdo con la ley de Newton, una masa puntual  $M$  (localizada en el origen de una referencia inercial  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$ ) produce en cada punto  $\vec{x} \in \mathcal{E}_t$  una fuerza gravitatoria por unidad de masa

$$\vec{F} = -\frac{M}{r^2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r} \partial_i \right) = \text{grad} \frac{M}{r} = \text{grad} u \quad (2.18)$$

para su función **potencial**  $u(\vec{x}) := \frac{M}{r}$  y la función  $r = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , y fuera del origen se cumple que

$$\text{div} \vec{F} = \text{div} \text{grad} u = \Delta u = M \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0.$$

*Fuera de la masa el potencial Newtoniano es una función armónica.*

En general, para una distribución de  $n$  masas  $m_i$  situadas en puntos  $p_i \in \mathcal{E}_t$ , se tiene que

$$\vec{F}_{\vec{x}} = \sum m_i \frac{p_i - \vec{x}}{r_i^3}, \quad u(\vec{x}) = \sum \frac{m_i}{r_i},$$

donde  $r_i = |p_i - \vec{x}|$ ; y además se cumple que  $\Delta u = 0$  en  $\mathcal{E}_t - \{p_1, \dots, p_n\}$  y

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow p_i} u(\vec{x}) = \infty, \quad \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} u(\vec{x}) = 0.$$

Este caso de un número finito de masas motiva la siguiente definición para el caso de una distribución continua de materia dada por una densidad  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$  (que como sería lógico pedirle tomaremos no negativa y que en cada hiperplano de simultaneidad sea de soporte compacto):

**Definición.** Dada una distribución de materia en un espacio-tiempo de Galileo de densidad de masa  $\rho(t, \vec{x})$ , llamaremos **potencial gravitatorio** a

$$u(t, \vec{x}) = \int_{\mathcal{E}_t} \frac{\rho(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}, \quad (2.19)$$

<sup>4</sup>ERATÓSTENES (s. III a.C.) ya calculó el radio de la Tierra a partir de los diferentes tamaños de las sombras en las ciudades de Alejandría y Siena (Asuán), con una precisión de unos pocos kilómetros.

y diremos que la **intensidad de fuerza gravitatoria** es el campo  $\vec{F} := F_1\partial_1 + F_2\partial_2 + F_3\partial_3$  definido por

$$F_i(t, \vec{x}) := \int_{\mathcal{E}_t} \rho(t, \vec{y}) \frac{y_i - x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d\vec{y} \quad (2.20)$$

En cada punto,  $\vec{F}$  representa la fuerza que se ejerce en el punto por unidad de masa. Además, notar que *las masas del pasado y del futuro no afectan*.

¿Qué relación tienen el potencial y la intensidad de fuerza gravitatoria? El siguiente teorema de Análisis nos garantiza que podemos derivar bajo el signo integral las componentes  $F_i$ :

**Teorema 2.3.2** *Si  $\rho$  es integrable y acotada en los compactos en cada hiperplano espacial, la función potencial*

$$u(\vec{x}) = \int_{\mathcal{E}_t} \frac{\rho(t, \vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

*es de clase  $\mathcal{C}^1$  y sus derivadas entran en la integral de modo que*

$$\vec{F} = \text{grad } u. \quad (2.21)$$

*Demostración.* Puede consultarse en [6, pág. 835].  $\square$

Puesto que nosotros siempre suponemos que la densidad de masa es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y de soporte compacto en cada hiperplano, se aplica. Por el mismo motivo, se cumple también el siguiente resultado, de gran importancia:

**Teorema 2.3.3** *Si  $\rho$  es, en cada hiperplano espacial, integrable, acotada en los compactos y en un abierto es de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces en tal abierto su potencial  $u$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  y en él se cumple*

$$\boxed{\Delta u = -4\pi\rho} \quad (\text{Ecuación de Poisson})$$

*Demostración.* Puede consultarse en [6, pág. 836].  $\square$

Uniendo los dos resultados, tenemos que la intensidad de fuerza gravitatoria cumple

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho} \quad (\text{Ecuación de Gauss})$$

Además se tiene otra propiedad, análoga a las vistas en el caso puntual:

**Teorema 2.3.4** *Si  $\rho$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y de soporte compacto en cada hiperplano espacial, entonces tanto su potencial  $u$  como la intensidad de fuerza gravitatoria  $\vec{F}$  en cada instante se anulan en el infinito.*

*Demostración.* Véase [6, pág. 839].  $\square$

Con todo esto, estamos diciendo que el campo  $\vec{F} = \text{grad } u$  de una densidad de masa  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$  de soporte compacto en cada hiperplano espacial cumple:

1.  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , es decir, es un campo conservativo:

En efecto, si  $S$  es la métrica euclídea en un hiperplano espacial, entonces que  $\vec{F} = \text{grad } u$  significa que  $i_{\vec{F}}S = du$ , y por tanto

$$i_{\text{rot } \vec{F}}\Omega_V = d(i_{\vec{F}}S) = d^2u = 0.$$

(nótese que la diferencial se entiende en los hiperplanos espaciales).

2.  $\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho$ , la Ecuación de Gauss.
3.  $\vec{F}$  en cada instante se anula en el infinito.

En concreto, se cumple que es el único que satisface estas propiedades:

**Teorema 2.3.5** *Dada una densidad  $\rho$ , la intensidad de fuerza gravitatoria  $\vec{F}$  es el único campo espacial  $D$  que cumple:*

1.  $\text{rot } D = 0$ .
2.  $\text{div } D = -4\pi\rho$ .
3.  $D$  se anula en el infinito.

*Demostración.* Sea  $D$  un campo espacial satisfaciendo las propiedades. Así, por 1. tenemos que la 1-forma  $i_DS$  es cerrada, porque  $0 = i_{\text{rot } D}\Omega_V = d(i_DS)$ , luego por el Lema de Poincaré es exacta,  $i_DS = dv$ , y por tanto  $D = \text{grad } v$ . Por 2.  $\Delta v = \text{div } D = -4\pi\rho$ , y derivando y considerando el potencial  $u$  de  $\vec{F}$ ,  $\Delta v_{x_i} = -4\pi\rho_{x_i} = \Delta u_{x_i}$ , así que la función  $v_{x_i} - u_{x_i}$  es armónica y se anula en el infinito (porque  $x_{x_i}, v_{x_i}$  son las componentes de  $\vec{F}$  y  $D$ , respectivamente, y éstos se anulan en el infinito), y por tanto son iguales y  $\vec{F} = D$ .  $\square$

En otros términos, este teorema afirma que equivale decir que una fuerza atraiga las masas por el inverso del cuadrado de la distancia y proporcional a las masas, que decir que cumple las tres propiedades anteriores.

Estamos ya en disposición de dar la definición de qué sería dar una teoría de la gravedad en la mecánica clásica:

**Definición.** Una **gravitación newtoniana** es un espacio-tiempo de Galileo  $X$  (no necesariamente orientado) junto a un tensor contravariante de orden 2 simétrico  $T^2 \in \mathcal{T}^2(X)$  llamado **tensor de materia** y un campo de vectores espaciales  $\vec{F} \in \mathcal{D}(X)$  llamado **intensidad de fuerza gravitatoria** tales que si  $\rho := C_{12}^{12}(g \otimes T^2)$  entonces

- i)  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .
- ii)  $\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho$ .
- iii)  $\text{div}_{\nabla_0} T^2 = \rho\vec{F}$ .

$$X = (\mathbb{A}_4, E, g, h^*, T^2, \vec{F})$$

La última condición recoge que  $\vec{\mathbb{F}} = \rho \vec{F}$ , pues  $\vec{\mathbb{F}}$  es la fuerza por unidad de volumen, luego  $\frac{1}{\rho} \vec{\mathbb{F}}$  es la fuerza por unidad de masa, es decir, la intensidad de fuerza gravitatoria.

En general, es razonable pedir que  $\rho$  sea no negativa y de soporte compacto en cada hiperplano de simultaneidad, que  $T^2$  sea divisible por  $\rho$ , y que en cada instante  $\vec{F}$  tienda a cero en el infinito.



**Parte II**

**Teoría de la relatividad**



## Capítulo 3

# El espacio-tiempo de Minkowski

Con la unificación del electromagnetismo a finales del s. XIX y la constatación de la naturaleza ondulatoria de la luz, se postuló el *éter* como su medio de propagación (la visión mecanicista de la época exigía que toda onda necesitara un medio de transmisión), el cual debería extenderse todo el universo. Dicho medio sería en particular un sistema de referencia absoluto, respecto al cual la velocidad de la luz sería de  $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s, y en el que se cumplirían las leyes de la mecánica newtoniana.

Sin embargo, los experimentos de MICHELSON y MORLEY en 1881 y 1887 mostraron que la velocidad de la luz era constante, independientemente de la velocidad del observador respecto del éter, incumpléndose así la ley de adición de velocidades galileana. Este hecho fue principalmente el que llevó al físico ALBERT EINSTEIN (1879 – 1955) a rechazar la hipótesis del éter y plantear una reforma radical de las teorías tradicionales.

Su publicación en 1905 de *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento* [5] marca un punto de inflexión para la ciencia. En ella, Einstein establece los primeros pasos de la **Teoría de la Relatividad Especial**, basada en dos principios:

1. No existen observadores privilegiados: todas las leyes de la física se cumplen por igual en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. La velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales.

En 1907, el matemático lituano HERMANN MINKOWSKI (1864 – 1909), antiguo profesor de Einstein en la Politécnica de Zúrich, formalizó las ideas propuestas por el físico alemán dos años antes dando un modelo matemático de la Relatividad Especial. Según sus propias palabras, *parece que la teoría electromagnética de la luz está dando lugar a una completa transformación de nuestras representaciones del espacio y el tiempo, que debería suscitar un interés extraordinario entre los matemáticos. El matemático se halla en una situación privilegiada para asumir los nuevos puntos de vista, ya que le suponen una mera aclimatación a esquemas conceptuales ya familiares. El físico, por el contrario,*

*se ve obligado a redescubrir estos conceptos y abrirse camino a través de un bosque primigenio de oscuridades.*

### 3.1 Estructura del espacio-tiempo

Es un hecho experimental bien establecido que las trayectorias de los rayos de luz en el vacío tienen velocidad finita y no dependen del estado del movimiento de la fuente, sólo del momento y lugar en el que la luz se emitió, de modo que las velocidades de los posibles rayos de luz emitidos en algún suceso  $p \in X$  del espacio-tiempo forman un cono en el espacio tangente  $T_p X$ , llamado **cono de luz**. Además, en nuestro sistema de coordenadas la velocidad de la luz en el vacío  $c$  es igual en todas las direcciones, de modo que el cono de luz está definido por la forma cuadrática

$$dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = 0,$$

y en presencia de la 1-forma del tiempo  $dt$ , la forma cuadrática  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  también es absoluta. En la mecánica clásica, la finitud y la isotropía de la velocidad de la luz, y la independencia del estado de movimiento de la fuente, implican el carácter absoluto del reposo.

Ahora, el término  $c^{-2} \approx 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^2$  es muy pequeño en nuestras unidades cotidianas, de forma que los conos de luz  $dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = 0$  prácticamente coinciden con los hiperplanos espaciales  $dt^2 = 0$  que definen la métrica del tiempo  $g = dt \otimes dt$  en la mecánica clásica. Si rechazamos la posibilidad de que el reposo tenga significado físico independiente del observador, estamos obligados a admitir que las medidas de tiempo no vienen dadas por una métrica de rango 1, como hasta ahora hemos supuesto; sino por una métrica no singular de tipo  $(+, -, -, -)$ .

Aunque este cambio no modifique ninguna predicción numérica de nuestra experiencia diaria, pues la cantidad  $10^{-19}$  está por debajo de la precisión de nuestros relojes, representa una diferencia conceptual y estructural gigantesca, pues supone sustituir una métrica de rango 1 por una no singular, manteniendo la hipótesis de que las propiedades inerciales vienen dadas por una estructura afín sobre el espacio-tiempo.

La teoría de la relatividad especial es el análogo relativista de la Mecánica Clásica expuesta en el capítulo 1, pero sustituyendo la métrica del tiempo por una del tipo  $(+, -, -, -)$ .

**Definición.** Un **espacio-tiempo de Minkowski**  $X$  es un espacio afín real  $\mathbb{A}_4$  de dimensión 4 cuyo espacio vectorial asociado  $E$  está dotado de una **métrica de Lorentz**: una métrica simétrica  $g$  de signatura  $(+, -, -, -)$ , que llamaremos **métrica del tiempo**<sup>1</sup>.

Diremos que un espacio-tiempo de Minkowski está **orientado** si sobre  $E$  hemos fijado una orientación  $[dX]$ , que llamaremos **orientación del espacio-tiempo**; y una **orientación del tiempo**: una de las dos componentes conexas

<sup>1</sup>Bien definida salvo un factor positivo. Elegir una proporcional equivale a cambiar la unidad de tiempo. Por simplicidad fijaremos la métrica del tiempo, esto es, fijaremos la unidad de tiempo.

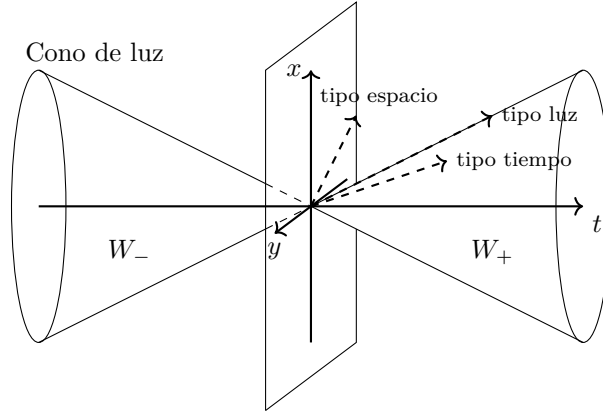
de  $W = \{e \in E : g(e, e) > 0\}$ , que llamaremos **futuro** y denotaremos  $W_+$ . La otra componente de  $W$  se llamará **pasado** y se denotará como  $W_-$ , de forma que  $W = W_+ \amalg W_-$ .

$$X = (\mathbb{A}_4, E, g, [dX], W_+)$$

**Definición.** Un vector no nulo  $e \in E$  se dice de **tipo luz** si  $g(e, e) = 0$ , de **tipo tiempo** si  $g(e, e) > 0$ , y de **tipo espacio** si  $g(e, e) < 0$ .

Por definición, los vectores de tipo tiempo orientados al futuro son los de  $W_+$ , y los vectores de tipo tiempo orientados al pasado los de  $W_-$ . Para los vectores de tipo luz también es posible dar una noción de orientación temporal. Para ello basta notar que el cono de luz es justamente  $\partial W$ .

**Definición.** Diremos que un vector  $e \in E$  de tipo luz está orientado al **futuro** si  $e \in \partial W_+$ , y diremos que está orientado al **pasado** si  $e \in \partial W_-$ .



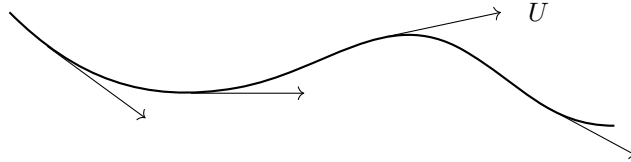
Más tarde caracterizaremos las orientaciones temporales de los vectores de tipo tiempo y luz. Notar, sin embargo, que no tiene sentido decir si un vector de tipo espacio está orientado temporalmente.

En adelante, por simplicidad, pondremos  $e \cdot e' := g(e, e')$ .

**Definición.** Una **trayectoria** u observador es una curva<sup>2</sup> de tipo tiempo, es decir, una curva en la que la restricción de  $g$  sea definida positiva.

**Definición.** Llamaremos **velocidad** (también 4-velocidad o cuatriveelocidad) de una trayectoria al único<sup>3</sup> campo tangente a la curva unitario y orientado al futuro, que denotaremos como  $U$ .

Llamaremos **aceleración** (también 4-aceleración o cuadriaceleración) de una trayectoria al campo tangente a  $X$  con soporte en la trayectoria  $A := U^{\nabla_0} U$ .



<sup>2</sup>Subvariedad diferenciable conexa de dimensión 1.

<sup>3</sup>La unicidad se sigue de que el espacio tangente a una curva en cualquier punto tiene dimensión 1.

**Lema 3.1.1** *Los campos  $U$  y  $A$  son ortogonales.*

*Demostración.*  $0 = U(1) = U(U \cdot U) = 2(U^{\nabla_0} U) \cdot U = 2 A \cdot U$   $\square$

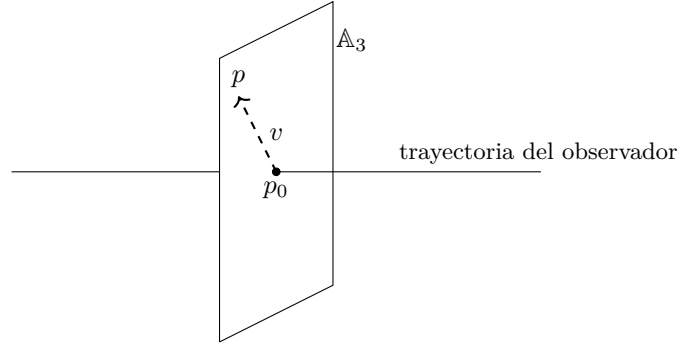
**Definición.** Un observador se dice **inercial** si su trayectoria es una recta de  $\mathbb{A}_4$ , es decir, si su trayectoria tiene velocidad constante.

**Definición.** Un **rayo de luz** en el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  es una recta cuya dirección  $\langle e \rangle$  es isótropa,  $e \cdot e = 0$ .

**3.1.2 (Espacio y tiempo para un observador)** Fijemos un observador inercial con velocidad  $e \in E$ . Puesto que la métrica es no singular, el observador escinde el espacio como  $E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^\perp$ , de modo que descompone el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  como producto directo de su trayectoria por

$$V := \langle e \rangle^\perp = \{v \in E : e \cdot v = 0\}.$$

Diremos que los **vectores espaciales** son los elementos de  $V$ . Además, lo anterior se traduce en que dar un suceso del espacio-tiempo  $p \in \mathbb{A}_4$  es dar un punto de la trayectoria del observador  $p_0$  y un vector espacial  $v \in V$ .



Así pues, dos sucesos  $p_1$  y  $p_2$  serán **simultáneos** para el observador cuando  $p_2 - p_1 \in V$ . Pero dicho espacio  $V$  depende del observador, por definición, lo que da uno de los principios básicos de la relatividad: *la simultaneidad depende del observador*. En otras palabras: el concepto de *ahora* es relativo.

**Proposición 3.1.3** *Para cada observador inercial, el conjunto de vectores espaciales  $V$  es un subespacio de  $E$  de tipo espacio, es decir, en el que  $g|_V$  es definida negativa.*

*Demostración.* Si  $e \in E$  es la velocidad del observador, puesto que es de tipo tiempo,  $\langle e \rangle$  no es isótropo, luego la métrica escinde el espacio en

$$E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^\perp = \langle e \rangle \perp V.$$

Puesto que  $g$  en  $\langle e \rangle$  es definida positiva, y la métrica es de signature  $(+, -, -, -)$ , necesariamente en  $V$  debe ser definida negativa.  $\square$

**Proposición 3.1.4** *Sea  $e \in E$  la velocidad de un observador inercial, y  $V$  sus vectores espaciales. Entonces  $[dV] := [(i_e dX)|_V]$  es una orientación sobre  $V$ , heredada de modo natural de la de  $E$ .*

*Demostración.* Sea  $dX$  un representante de la orientación del espacio-tiempo, que es una 4-forma, luego  $i_e dX$  es una 3-forma, y la restricción a  $V$  es no es nula, pues si  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es base de  $V$ ,  $(i_e dX)(v_1, v_2, v_3) = dX(e, v_1, v_2, v_3) \neq 0$ , al ser  $\{e, v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $E$ .  $\square$

Las proposiciones anteriores dicen que  $(V, -g|_V, [dV])$  es un espacio vectorial euclídeo orientado, por lo que los hiperplanos de simultaneidad  $(\mathbb{A}_3, V, -g|_V, [dV])$  heredan una estructura natural de espacios euclídeos orientados de dimensión 3. *La métrica del tiempo define el espacio.* Cada uno es, como cabía esperar, el espacio que en cada instante ve el observador: *estos hiperplanos son el espacio cotidiano.*

Ahora bien, al fijar la unidad de medida del tiempo, que determina la métrica  $g$ , tal y como lo hemos escrito en el párrafo anterior ya hemos elegido una unidad de medida de longitud: la que define  $-g$  (lo que dice que en Relatividad las unidades de tiempo y longitud no son independientes). Sin embargo, es común elegir otra unidad de longitud diferente a la dada por  $-g$ , tomando una métrica proporcional a ésta.

**Definición.** Llamaremos **métrica del espacio** a  $h := -c^2 g$ , donde  $c > 0$  es cierta constante fijada.

Por tanto, en la Teoría de la Relatividad tenemos de modo bien claro dos métricas covariantes sobre  $E$ : la del tiempo  $g$  y la del espacio  $h$ , que se determinan mutuamente (a diferencia de lo que ocurría en la Mecánica Clásica, véase pág. 9): dada una se obtiene la otra multiplicando por un cierto factor de proporcionalidad. En particular, en unidades naturales (con  $c = 1$ ) una es la opuesta de la otra. Nótese además que  $h|_V$  es una métrica euclídea: dicha métrica *define la geometría sobre  $V$ .*

En adelante pondremos  $\langle e, v \rangle := h(e, v) = -c^2(e \cdot v)$ .

La descomposición del espacio-tiempo para un observador con velocidad  $e \in E$  explicada antes también define intervalos de tiempo: el observador mide el tiempo con la función lineal  $\omega := i_e g$ . Así, el tiempo que transcurre para el observador entre dos sucesos  $p_1, p_2 \in \mathbb{A}_4$  es  $t := e \cdot (p_2 - p_1)$ .

## 3.2 El cono de luz

En esta sección daremos varios resultados relacionados con el cono de luz. En particular caracterizaremos la orientación temporal de los vectores de tipo tiempo y luz.

**Proposición 3.2.1** Sean  $0 \neq e, e' \in E$  vectores de tipo luz. Se cumple que  $e, e'$  son ortogonales si y sólo si son proporcionales.

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ). Si son proporcionales, entonces  $e' = \lambda e$ , luego  $e \cdot e' = \lambda(e \cdot e) = 0$ .

$\Rightarrow$ ). Si  $e, e' \in E$  son ortogonales y de tipo luz, entonces  $\langle e \rangle + \langle e' \rangle$  es un subespacio vectorial de tipo luz: dados  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  se tiene

$$(\lambda e + \mu e') \cdot (\lambda e + \mu e') = \lambda^2(e \cdot e) + 2\lambda\mu(e \cdot e') + \mu^2(e' \cdot e') = 0$$

Sin embargo  $\langle e \rangle + \langle e' \rangle$  debe ser un subespacio de dimensión 1, pues lo anterior afirma que es un subespacio vectorial isótropo, y al ser  $g$  una métrica de Lorentz, el espacio  $(E, g)$  es de rango 4 e índice 1, siendo el índice de un espacio justamente la dimensión común de los subespacios isótropos maximales. Por tanto,  $e$  y  $e'$  son linealmente dependientes, luego proporcionales.  $\square$

**Proposición 3.2.2** *Sea  $e \in E$  un vector de tipo tiempo y  $v \in E$  de tipo tiempo o de tipo luz. Entonces  $e \cdot v \neq 0$ , es decir, bien  $e \cdot v > 0$  bien  $e \cdot v < 0$ .*

*Demostración.* Procedamos por reducción al absurdo: si  $e \cdot v = 0$ , entonces  $v \in \langle e \rangle^\perp$ , donde  $e$  es de tipo tiempo. La proposición 3.1.3 dice que  $g|_{\langle v \rangle^\perp}$  es definida negativa, luego  $v \cdot v < 0$ , en contradicción con que  $v \in E$  sea de tipo tiempo o de tipo luz.  $\square$

**Corolario 3.2.3** *Si un vector no nulo es ortogonal a un vector de tipo tiempo, debe ser de tipo espacio.*

**3.2.4 (Caracterización de la orientación temporal)** Sea  $X$  un espacio-tiempo de Minkowski orientado, es decir, supongamos fijada una de las dos componentes conexas de  $W = \{e \in E : e \cdot e > 0\}$ . En lo que sigue vamos a caracterizar la orientación temporal de los vectores de tipo tiempo.

Sobre el conjunto de vectores de tipo tiempo  $W$  vamos a considerar la siguiente relación: dados  $e, v \in W$ ,

$$e \equiv v : \Longleftrightarrow e \cdot v > 0$$

Comprobemos que dicha relación es de equivalencia:

1. *Reflexiva:*  $e \cdot e > 0$  porque  $e$  es de tipo tiempo.
2. *Simétrica:*  $e \equiv v \Leftrightarrow e \cdot v > 0 \Leftrightarrow v \cdot e > 0 \Leftrightarrow v \equiv e$ .
3. *Transitiva:* Si  $e \equiv v$  y  $v \equiv w$ , entonces  $e \cdot v > 0$ ,  $v \cdot w > 0$ . Veamos que  $e \equiv w$ , es decir,  $e \cdot w > 0$ .

Observemos en primer lugar que  $e - \lambda w$ , con  $\lambda := \frac{e \cdot v}{v \cdot w} > 0$ , es ortogonal a  $v$ . En efecto,

$$(e - \lambda w) \cdot v = e \cdot v - \frac{e \cdot v}{v \cdot w} v \cdot w = 0$$

Ahora 3.2.3 afirma que  $e - \lambda w$  es de tipo espacio, luego  $0 > (e - \lambda w) \cdot (e - \lambda w) = e \cdot e + \lambda^2 w \cdot w - 2\lambda e \cdot w$ , es decir,

$$e \cdot w > \frac{1}{2\lambda}(e \cdot e + \lambda^2 w \cdot w) > 0$$

Obsérvese que el cociente por dicha relación  $W/\equiv$  posee exactamente dos clases de equivalencia. En efecto, dados  $e, v \in W$ , si  $e \not\equiv v$ , por 3.2.2 se tiene que  $e \cdot v < 0$ , luego  $(-e) \cdot v > 0$ , es decir,  $(-e) \equiv v$ . En particular, dichas clases de equivalencia son  $[e] := W_1$  y  $[-e] := W_2$ . Por tanto tenemos que  $W = W_1 \amalg W_2$ .

Pero ahora bien, cada una de las dos clases de equivalencia es un convexo, pues dados  $e, v$  de la misma clase,

$$e \cdot (\lambda e + (1 - \lambda)v) = \lambda e \cdot e + (1 - \lambda)e \cdot v > 0,$$



con  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Al ser convexos, son conexos. Como cada clase es claramente abierta (pues es donde una función continua es positiva),  $W_1$  y  $W_2$  son las dos componentes conexas de  $W = W_+ \amalg W_-$ . Por tanto, toda la discusión anterior se resume en el siguiente

**Teorema 3.2.5** *Dos vectores de tipo tiempo  $e, v \in E$  están en la misma orientación temporal si y sólo si  $e \cdot v > 0$ .*

A continuación vamos a ver que dicho teorema se puede extender a los vectores de tipo luz, los cuales también poseen una orientación temporal.

**Teorema 3.2.6** *Sea  $e \in E$  un vector de tipo luz, y  $v \in E$  de tipo tiempo. Entonces  $e, v$  tienen la misma orientación si y sólo si  $e \cdot v > 0$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ). Supongamos que  $e, v$  están orientados al futuro (el otro caso es idéntico). La función  $\cdot v : E \rightarrow \mathbb{R}, w \mapsto w \cdot v$  es continua y por 3.2.2 no se anula en  $\overline{W_+} = W_+ \amalg (\partial W_+ - 0)$ . Como en  $W_+$  es positiva, por continuidad debe ser también positiva sobre  $\partial W_+ - 0$ , luego  $e \cdot v > 0$ .

$\Leftarrow$ ). Por el contrarrecíproco: si  $e, v$  no están en la misma orientación,  $-e, v$  lo están, y por la implicación anterior  $(-e) \cdot v > 0$ , esto es,  $e \cdot v < 0$ .  $\square$

**Teorema 3.2.7** *Dos vectores de tipo luz  $e, e' \in E$  no proporcionales están en la misma orientación temporal si y sólo si  $e \cdot e' > 0$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ). Elijamos un vector de tipo tiempo  $v \in E$  de la misma orientación temporal que  $e$  y  $e'$ . Entonces existe  $\lambda > 0$  tal que  $v \cdot (e - \lambda e') = 0$  (basta elegir  $\lambda := \frac{v \cdot e}{v \cdot e'} > 0$ . Nótese que  $v \cdot e$  y  $v \cdot e'$  son ambos positivos, por el teorema anterior). Al ser  $v$  de tipo tiempo, el corolario 3.2.3 asegura que  $e - \lambda e'$  es de tipo espacio (es no nulo pues  $e, e'$  no son proporcionales), es decir,  $0 > (e - \lambda e') \cdot (e - \lambda e') = -2\lambda e \cdot e'$ , luego  $e \cdot e' > 0$ .

$\Leftarrow$ ). Por el contrarrecíproco: si  $e, e'$  estuvieran en orientaciones contrarias, entonces  $e, -e'$  tendrían la misma orientación, luego por lo anterior  $e \cdot (-e') > 0$ , es decir,  $e \cdot e' < 0$ .  $\square$

Acabaremos la sección dando la versión lorentziana de dos desigualdades clásicas de la geometría euclídea: la de Cauchy-Schwarz y la triangular, que en este caso se invierten respecto a la forma tradicional.

**Teorema 3.2.8 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz Invertida)** *Sean  $e, v \in E$  vectores de tipo tiempo. Entonces se cumple*

$$|e \cdot v| \geq |e||v|,$$

*y la igualdad se da si y sólo si  $e, v$  son proporcionales.*

*Demostración.* Como  $e$  es de tipo tiempo, el subespacio  $\langle e \rangle$  no es isótropo, luego  $E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^\perp$ . Así que  $v$  se escribirá como  $v = \lambda e + w$ , para cierto  $w \in \langle e \rangle^\perp$ , por lo que  $v \cdot v = \lambda^2 e \cdot e + 2\lambda e \cdot w + w \cdot w = \lambda^2 e \cdot e + w \cdot w$ , por lo que

$$(e \cdot v)^2 = [e \cdot (\lambda e + w)]^2 = [\lambda e \cdot e + e \cdot w]^2 = \lambda^2 (e \cdot e)^2 = (e \cdot e) [\lambda^2 (e \cdot e)]$$

$$= \underbrace{(e \cdot e)}_{>0} \underbrace{(v \cdot v)}_{>0} - \underbrace{(w \cdot w)}_{\leq 0} \geq (e \cdot e)(v \cdot v) = |e|^2 |v|^2$$

(nótese que  $w \cdot w < 0$  por 3.1.3). La igualdad se da cuando  $w \cdot w = 0$ , esto es,  $w = 0$ , luego  $v = \lambda e$ .  $\square$

**Teorema 3.2.9 (Desigualdad Triangular Invertida)** *Sean  $e, v \in E$  vectores de tipo tiempo con la misma orientación temporal. Entonces se cumple*

$$|e + v| \geq |e| + |v|,$$

y la igualdad se da si y sólo si  $e, v$  son proporcionales.

*Demostración.* Como  $e, v$  pertenecen a la misma componente conexa del cono de luz, se ha probado antes que  $e + v$  es de tipo tiempo y pertenece a la misma componente conexa que  $e$  y  $v$ . Además el teorema 3.2.5 nos dice que  $e \cdot v > 0$ . Con todo esto concluimos que

$$\begin{aligned} |e + v|^2 &= (e + v) \cdot (e + v) = e \cdot e + v \cdot v + 2e \cdot v \stackrel{3.2.8}{\geq} |e|^2 + |v|^2 + 2|e||v| \\ &= (|e| + |v|)^2, \end{aligned}$$

y la igualdad se da cuando  $e \cdot v = |e||v| = |e||v|$ , que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz es cuando  $e, v$  son proporcionales.  $\square$

### 3.3 Referencias inerciales

**Definición.** Una **referencia inercial** en un espacio-tiempo de Minkowski  $X$  es un observador inercial, cuya velocidad se denotará  $e_0$ , un suceso  $p_0$  de su trayectoria, llamado **origen del tiempo**, y una base ortonormal  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de  $V := \langle e_0 \rangle^\perp$  (respecto  $h|_V$ ) orientada positivamente, que llamaremos **ejes de la referencia**.

En otras palabras, una referencia inercial es una referencia afín  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$  tal que  $\{e_0, v_1, v_2, v_3\}$  es una base de  $E$  orientada positivamente, el vector  $e_0$  está orientado al futuro y la matriz de  $g$  en dicha base es

$$g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

(La equivalencia entre ambas definiciones se sigue de que  $dV(v_1, v_2, v_3) = dX(e_0, v_1, v_2, v_3)$ , de que  $e_0 \cdot e_0 = 1$  porque la velocidad de una trayectoria tiene módulo 1, y de que al ser  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ortonormal para  $h|_V$ ,  $1 = \langle v_i, v_i \rangle = -c^2(v_i \cdot v_i)$ , luego  $v_i \cdot v_i = -c^{-2}$ ).

La única 4-forma  $dX$  que asigna volumen 1 sobre las referencias inerciales es la **forma de hipervolumen** de  $X$ . Sin embargo, obsérvese que la forma de hipervolumen no es la **forma de volumen**  $\omega_X$  de la variedad Lorentziana  $(X, g)$ , pues la base  $\{e_0, v_1, v_2, v_3\}$  no es ortonormal para  $g$ . Sin embargo, basta

observar que  $\{e_0, cv_1, cv_2, cv_3\}$  sí es ortonormal para  $g$  (pues  $cv_i \cdot cv_i = -1$ ) para comprobar que

$$dX(e_0, cv_1, cv_2, cv_3) = c^3 dX(e_0, v_1, v_2, v_3) = c^3$$

lo que concluye que la forma de volumen de  $X$  es  $\omega_X = \frac{1}{c^3} dX$ .

**3.3.1 (Coordenadas para un observador inercial)** Fijemos una referencia inercial  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$ . Dado cualquier suceso  $p \in \mathbb{A}_4$ , existen unos únicos números reales  $t, x, y, z$ , llamados **coordenadas** de  $p$ , tal que

$$p = p_0 + te_0 + xv_1 + yv_2 + zv_3.$$

Esto además dice que cada referencia afín define un sistema de coordenadas globales sobre  $X$ , que denotaremos  $(t, x, y, z), (t, x_1, x_2, x_3)$  ó  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Nótese que, en estas coordenadas, si  $e = (t, x, y, z)$ , entonces  $e_0 \cdot (p - p_0) = e_0 \cdot e = t$ , lo que dice que el tiempo que pasa para el observador entre el origen del tiempo  $p_0$  y el suceso  $p$  es justamente la primera coordenada de  $p$ .

Que nuestra variedad  $X$  esté cubierta por una única carta afirma que el conjunto de campos tangentes  $\mathcal{D}(X)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo libre de rango 4, y puesto que en un espacio afín para cada punto  $p$  se cumple que  $E = T_p X$ , se tiene que  $(\partial_0)_p = e_0$ ,  $(\partial_i)_p = v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , lo que nos dará libertad para denotar la base de campos tangentes de diferentes formas, según mejor nos convenga en cada momento:

$$e_0 = \partial_0 = \partial_t, \quad v_1 = \partial_1 = \partial_x, \quad v_2 = \partial_2 = \partial_y, \quad v_3 = \partial_3 = \partial_z.$$

Con todo esto, en este sistema de coordenadas anterior tenemos:

$$g = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix},$$

$$W_+ = \{\lambda \partial_0 + \mu_1 \partial_1 + \mu_2 \partial_2 + \mu_3 \partial_3 \in W : \lambda > 0\},$$

$$dX = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$\omega_X = \frac{1}{c^3} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$h = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_0 : \quad D^{\nabla_0} \left( \sum f_i \partial_i \right) = \sum (Df_i) \partial_i$$

Ahora se ve claramente, por ejemplo, que  $h|_V$  es una métrica euclídea, con lo que los hiperplanos de simultaneidad son espacios euclídeos, tal y como los

percibimos en la realidad. Nótese que en dichos hiperplanos  $(x, y, z)$  son las coordenadas cartesianas, por lo que las distancias, ángulos, ... determinados por sucesos simultáneos para el observador se expresan en estas coordenadas con las fórmulas euclídeas usuales.

**3.3.2 (Relación entre la mecánica clásica y la relatividad)** A la vista de lo presentado hasta ahora sobre la teoría de la relatividad, podemos intuir cuál es la relación entre la mecánica clásica y la relatividad. En esta última, la métrica del tiempo  $g$  determina 4 métricas: la propia  $g$ ,  $h := -cg^2$ , su métrica dual  $g^*$  y la métrica dual de  $h$ ,  $h^*$ , todo esto por ser  $g$  no singular. En una referencia inercial tendremos:

$$\begin{aligned} g &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1/c^2 \end{array} \right) & g^* &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -c^2 \end{array} \right) \\ h &= \left( \begin{array}{c|c} -c^2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) & h^* &= \left( \begin{array}{c|c} -1/c^2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Observar que, si hacemos tender  $c$  a infinito, la métrica del tiempo tiene límite, y es justamente la métrica del tiempo en la mecánica clásica; y la métrica  $h^*$  también tiene límite, y es justamente la métrica contravariante del espacio de la mecánica clásica. Sin embargo, ni la métrica  $g^*$  ni  $h$  tienen límite al hacer  $c \rightarrow \infty$ , y precisamente ninguna de esas dos métricas tiene análoga en la mecánica clásica: no hay ni métrica del tiempo contravariante ni métrica del espacio covariante.

*La mecánica clásica es el límite de la relatividad cuando  $c \rightarrow \infty$ .*

## 3.4 Movimientos

En la mecánica clásica, que un observador inercial pueda parametrizar toda trayectoria era evidente por el concepto de trayectoria que ahí se tenía, pues el tiempo era un concepto absoluto. En la relatividad, puesto que el tiempo depende de cada observador, tendremos que dar un rodeo para probar que todo observador puede parametrizar las trayectorias respecto de su coordenada temporal.

**Teorema 3.4.1** *Sea  $(p_0; e_0, v_1, v_2, v_3)$  una referencia inercial en un espacio-tiempo  $X$ . Toda trayectoria se puede parametrizar de la forma*

$$\sigma(t) = (t, x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

*para cierto intervalo abierto  $I \subseteq \mathbb{R}$  y ciertas funciones diferenciables  $x, y, z \in C^\infty(I)$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  una trayectoria y consideremos la inclusión  $i: C \rightarrow X$ . Se trata de probar que la función “primera coordenada”  $t: X \rightarrow \mathbb{R}$  define un difeomorfismo de  $C$  con un cierto intervalo abierto  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Empezaremos probando que  $\bar{t} := i^*t: C \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo local en todo punto de la curva. Dado un punto  $p \in C$ , bastará ver que  $d_p \bar{t} \neq 0$ . La condición de que  $g|_C = i^*g$  sea definida positiva dice que todo vector tangente a la curva es de tipo tiempo. Por tanto, el corolario 3.2.3 afirma que ningún vector tangente a  $C$  puede ser ortogonal a  $e_0$ . Si  $0 \neq D_p \in T_p C$ , entonces

$$0 \neq (i_* D_p) \cdot e_0 = (i_* D_p)t = D_p(i^*t) = D_p \bar{t},$$

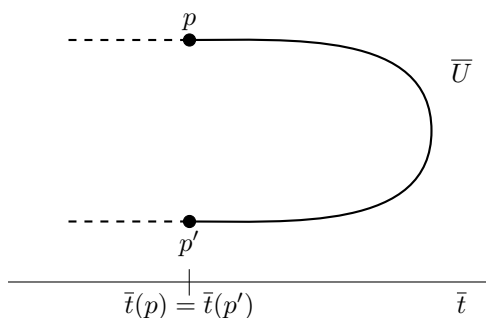
donde  $i_*: T_p C \rightarrow T_p X$ . Notar que la primera igualdad se debe a que  $(i_* D_p) \cdot e_0$  es, por la expresión de  $g$ , la primera coordenada de  $i_* D_p$  en la base  $\{(\partial_t)_p, (\partial_x)_p, (\partial_y)_p, (\partial_z)_p\}$ . Pero entonces  $d_p \bar{t} \neq 0$  pues si  $0 \neq D_p \in T_p C$ ,

$$d_p \bar{t}(D_p) = D_p \bar{t} \neq 0,$$

luego  $\bar{t}$  es coordenada local sobre todo punto de  $C$ .

Ahora, como  $\bar{t}: C \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, y  $C$  es un conexo,  $\bar{t}(C)$  es un conexo de  $\mathbb{R}$ , esto es, un cierto intervalo  $I$ , que será abierto pues todo difeomorfismo local es una aplicación abierta. Así, consideremos la aplicación epiyectiva  $\bar{t}: C \rightarrow I$ . Para demostrar que  $\bar{t}$  induce un difeomorfismo con  $I$  bastará ver que es inyectiva, pues toda aplicación biyectiva y que sea difeomorfismo local en todo punto es un difeomorfismo global.

Supongamos que  $\bar{t}: C \rightarrow \mathbb{R}$  no es inyectiva. Entonces existirían dos puntos  $p, p' \in C$  tal que  $\bar{t}(p) = \bar{t}(p')$ . Puesto que toda variedad topológica de dimensión 1 es homeomorfa bien a la recta bien a la circunferencia, se tiene que en  $C - \{p, p'\}$  hay una componente conexa  $U$  tal que  $p, p' \in \bar{U}$  (en particular,  $\{p, p'\} = \partial U$ ), y en concreto  $\bar{U}$  es un compacto (pues lo es en cualquiera de estas dos opciones). Esto dice que  $\bar{t}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un máximo y un mínimo. Como  $\bar{t}(p) = \bar{t}(p')$ , bien el máximo bien el mínimo debe estar en  $U$ , lo cual es absurdo, pues contradice que  $\bar{t}$  sea difeomorfismo local en todo punto ( $\bar{t}$  no podría ser inyectiva en un entorno de tal punto).



□

Obsérvese una consecuencia que se extrae de aquí: el hecho de que toda trayectoria sea difeomorfa a un intervalo mediante la coordenada  $t$  imposibilita que un observador pueda viajar al pasado. Nótese también que ahora  $t$  será tanto la primera coordenada sobre  $X$  como el parámetro de la curva (y por tanto la coordenada de  $I$ ).

**Definición.** Diremos que el **tiempo propio** que transcurre entre dos sucesos  $p, q \in C$  de una trayectoria es la longitud (respecto  $g$ ) de la curva entre ambos sucesos, y se denotará como  $\tau$ , de modo que

$$\tau = \int_p^q \omega_C, \quad (3.1)$$

donde  $\omega_C$  es la forma de volumen de la variedad riemanniana  $C$  (pues la imagen inversa de  $g$  por la inclusión al espacio-tiempo es definida positiva).

Observar que claramente el tiempo propio depende de la trayectoria, no sólo de los sucesos considerados; y que no depende de la referencia en la que observemos la trayectoria: es un concepto absoluto. *El tiempo propio es el tiempo que pasa entre  $p$  y  $q$  para un observador que recorre la trayectoria.*

**3.4.2 (Vector tangente y velocidad aparente)** Hagamos unos cálculos análogos a los realizados en 1.3 en la Mecánica Clásica. Dada una trayectoria parametrizada por el tiempo para el observador, tenemos el campo tangente a la curva

$$T = \sigma_*(\partial_t) = \partial_t + x'(t)\partial_x + y'(t)\partial_y + z'(t)\partial_z.$$

Puesto que el coeficiente de la parte temporal es 1, la parte espacial representa la **velocidad aparente** para el observador,

$$\vec{v} := x'(t)\partial_x + y'(t)\partial_y + z'(t)\partial_z,$$

de modo que  $T = \partial_t + \vec{v}$ . El módulo de tal velocidad (medido con la métrica del espacio  $h$ ) es

$$v := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Ahora, como sobre la curva la métrica es definida positiva,  $T$  es un campo de vectores de tipo tiempo, es decir,  $T \cdot T > 0$ . Pero en las coordenadas anteriores tenemos

$$\begin{aligned} T \cdot T &= (1, x'(t), y'(t), z'(t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \\ &= 1 - \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \end{aligned}$$

lo que concluye que

$$v < c, \quad (3.2)$$

es decir, la velocidad aparente de un móvil para cualquier observador está estrictamente acotada por la velocidad de la luz  $c$ . *No se puede viajar a mayor o igual velocidad que la de la luz.*

**3.4.3 (Cálculo de la velocidad)** Vamos a calcular en coordenadas inerciales la velocidad  $U$  de una trayectoria  $\sigma(t) = (t, x(t), y(t), z(t))$ .

$T = \partial_t + \vec{v}$  es un campo tangente a la curva y orientado hacia el futuro<sup>4</sup>, por lo que lo único que le falta para ser la velocidad  $U$  es ser unitario, puesto que  $T \cdot T \neq 1$  excepto cuando  $\vec{v} = 0$ . Para conseguir esto basta dividir  $T$  por su módulo  $|T| = \sqrt{T \cdot T}$ :

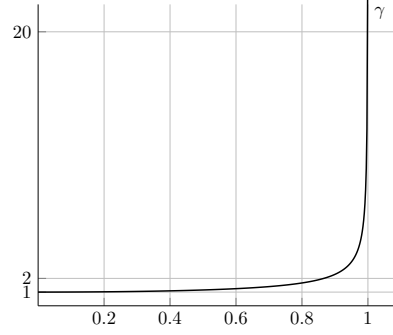
$$U = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(\partial_t + \vec{v})$$

Al factor que multiplica se le suele denotar  $\gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , por lo que resulta

$$U = \gamma T = \gamma(\partial_t + \vec{v}) = (\gamma, \gamma x'(t), \gamma y'(t), \gamma z'(t)) \quad (3.3)$$

Este término  $\gamma \geq 1$ , llamado **factor de Lorentz**, aumenta muy lentamente para velocidades bajas, sólo creciendo significativamente para valores de  $v$  cercanos a  $c$ . En particular, cuando  $v \rightarrow c$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ .

$v$	$\gamma$
$0.1c$	1.005
$0.2c$	1.021
$0.5c$	1.155
$0.8c$	1.667
$0.9c$	2.294
$0.99c$	7.089
$0.999c$	22.366
$0.9999c$	70.712



**3.4.4 (Cálculo de la aceleración)** Aprovechando los cálculos anteriores vamos a dar la expresión en coordenadas inerciales de la aceleración  $A = U^{\nabla_0}U$ . Por una parte,

$$A = U^{\nabla_0}U = \gamma T^{\nabla_0}U = \gamma \frac{dU}{dt},$$

y por 3.4.3

$$A = \gamma \frac{dU}{dt} = \gamma(\gamma', (\gamma x')', (\gamma y')', (\gamma z')') \quad (3.4)$$

**3.4.5 (Cálculo del tiempo propio)** Vamos a dar la fórmula (3.1) en coordenadas inerciales. Se trata de calcular cuál es la forma de volumen  $\omega_C$  de la variedad riemanniana  $(C, g|_C)$ .

Puesto que  $t$  es coordenada sobre  $C$ , la forma de volumen de  $C$  será  $\omega_C = f dt$  para cierta función  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$  positiva. Como  $\omega_C$  debe valer 1 sobre las bases ortonormales positivas, entonces

$$1 = \omega_C(U) = \omega_C\left(\frac{T}{\sqrt{T \cdot T}}\right) = \frac{1}{\sqrt{T \cdot T}}\omega_C(T) = \frac{1}{\sqrt{T \cdot T}}f dt(T) = \frac{f}{\sqrt{T \cdot T}},$$

luego  $f = \sqrt{T \cdot T}$ . Por tanto, la forma de volumen de  $C$  es

$$\omega_C = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

<sup>4</sup>Esto se debe a que se ha elegido como parámetro de la curva la primera coordenada  $t$  del espacio-tiempo, y la curva se recorre en sentido de crecimiento de  $t$ . En efecto, basta observar que  $T \cdot \partial_t = 1 > 0$  y aplicar el Teorema 3.2.5.

Así, dados dos sucesos de la trayectoria  $p, q \in C \subseteq X$ , en la coordenada  $t$  de  $C$  serán  $t = a$  y  $t = b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), por lo que

$$\tau = \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_a^b \sqrt{T \cdot T} dt = \int_a^b \frac{1}{\gamma} dt \quad (3.5)$$

Puesto que  $1/\gamma \leq 1$ , se sigue que el tiempo propio es siempre menor o igual que el tiempo  $b-a$  transcurrido para el observador, y la igualdad se da si y sólo si  $v = 0$  (es decir, el móvil está en reposo para el observador). *Viajar rejuvenece... y hace perder tiempo.*

En el caso en el que el móvil se mueva con velocidad constante, se obtiene una de las fórmulas más famosas de toda la Teoría de la Relatividad:

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta \tau} \quad (\text{Fórmula de dilatación del tiempo})$$

donde  $\Delta t$  es el tiempo que ha pasado para el observador y  $\Delta \tau$  el que ha transcurrido para el móvil.

**Ejemplo 3.4.6** Los piones son partículas subatómicas que se desintegran esporádicamente y poseen un periodo de semidesintegración<sup>5</sup> de  $1.8 \cdot 10^{-8} \text{s} = 5.4$  metros-luz. Un haz de piones se acelera a una velocidad de  $v = 0.99c = 0.99$  metros/metro-luz. Según la física clásica, uno esperaría que la cantidad de partículas del haz se redujera a la mitad después de que hayan recorrido  $0.99 \cdot 5.4 = 5.3$  metros (distancia de acuerdo con el observador). Sin embargo, experimentalmente se observa que el haz recorre 38 metros antes de que la cantidad de partículas sea la mitad de la original. Este curioso efecto lo explica la dilatación del tiempo, pues cuando han transcurrido los primeros 5.4 metros-luz según el observador, para las partículas ha transcurrido menos tiempo. En particular, según la fórmula anterior se obtiene el resultado experimental:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} \Delta \tau = 7.09 \cdot 5.4 = 38 \text{ metros}$$

**3.4.7 (Tiempo propio como parámetro)** Vamos a comprobar que el tiempo propio de una trayectoria puede interpretarse como un parámetro para la misma. El utilizar  $t$  como parámetro de una trayectoria es una elección natural para el observador, pero también es razonable parametrizarla con el tiempo que transcurre para un viajero que recorra la trayectoria.

Fijada una referencia inercial, consideremos una trayectoria  $C$  y su parametrización usual  $\sigma: t \in I \longrightarrow (t, x(t), y(t), z(t)) \in X$ . Fijado un punto  $p_0 \in C$ , el tiempo propio define la función

$$\begin{aligned} \tau: C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \tau(q) := \int_{p_0}^q \omega_C, \end{aligned} \quad (3.6)$$

<sup>5</sup>Tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una cierta cantidad de partículas. Recordar que la desintegración de partículas es un proceso aleatorio, y se estudia probabilísticamente. No confundir el periodo de semidesintegración con la vida media, siendo este último el tiempo promedio que tarda una partícula en desintegrarse.



que no depende de coordenadas. Por el teorema fundamental del cálculo<sup>6</sup>,  $d\tau = \omega_C = dt/\gamma$ , y como  $1/\gamma > 0$ ,  $\tau$  es difeomorfismo local en todo punto. Pero además es estrictamente creciente, luego es un difeomorfismo  $\tau : C \xrightarrow{\sim} \bar{I}$  con un cierto intervalo  $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ . La inversa de ésta será una parametrización

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} : \bar{I} &\xrightarrow{\sim} C \subset X \\ \tau &\longmapsto \bar{\sigma}(\tau) = (g_0(\tau), g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)),\end{aligned}$$

donde  $g_i = \bar{\sigma}^* x_i$ . Esta parametrización de  $C$  es *absoluta*, en el sentido de que el parámetro  $\tau$  es absoluto, depende únicamente de la trayectoria (y del punto  $p_0$  elegido).

Con esta parametrización, veamos cuál es la expresión de  $U$  y  $A$  en coordenadas. Si escribimos

$$\bar{T} := \sigma_*(\partial_\tau) = g'_0(\tau)\partial_t + g'_1(\tau)\partial_x + g'_2(\tau)\partial_y + g'_3(\tau)\partial_z,$$

entonces tendremos que  $1 = d\tau(\bar{T}) = \omega_C(\bar{T})$ , y por tanto  $\bar{T} = U$ .

En resumen: lo probado en este punto junto a lo dicho en 3.4.4 dicen que, fijada una referencia inercial, si parametrizamos una trayectoria respecto su tiempo propio,  $\bar{\sigma}(\tau) = (g_0(\tau), g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau))$  (en las coordenadas  $(t, x, y, z)$  de la referencia), entonces la velocidad y aceleración de la trayectoria serán

$$\boxed{\begin{cases} U = (g'_0(\tau), g'_1(\tau), g'_2(\tau), g'_3(\tau)) \\ A = (g''_0(\tau), g''_1(\tau), g''_2(\tau), g''_3(\tau)) \end{cases}} \quad (3.7)$$

en la base  $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ .

La mayoría de libros de física, que no manejan las herramientas de la Geometría Diferencial, definen la velocidad y la aceleración de un móvil con estas fórmulas, pues al ser el tiempo propio un concepto absoluto, intrínseco de la trayectoria, tales definiciones no dependen del observador elegido.

**Ejemplo 3.4.8** Para finalizar la sección vamos a exponer un ejemplo para aclarar todos los cálculos anteriores. Para simplificar fijemos unas unidades para las cuales  $c = 1$ , es decir, en las que un rayo de luz recorra una unidad de longitud en una unidad de tiempo. Si tomamos el año como unidad de tiempo, la unidad de longitud será el año-luz.

Supongamos que una nave interestelar se mueve a lo largo del eje  $x$  de un observador en la Tierra, la cual tiene unos propulsores que le permiten acelerar durante el viaje. Desde nuestro planeta se observa que el viaje dura 6 años, siendo su trayectoria descrita por

$$\sigma(t) = \left(t, \frac{1}{15}t^2, 0, 0\right), \quad 0 \leq t \leq 6.$$

<sup>6</sup>En geometría diferencial, dicho teorema se reformula como sigue: *en una variedad diferenciable de dimensión 1, si  $\omega$  es una 1-forma y  $F$  es la función “integrar  $\omega$ ”,  $F(p) = \int_{p_0}^p \omega$ , entonces  $dF = \omega$ . En efecto, si  $t$  es coordenada, entonces  $\omega = f dt$  para cierta función  $f$ , y  $F(t) = \int_{t_0}^t f dt$ . Por el teorema fundamental del cálculo,  $F' = f$ , y entonces  $dF = F' dt = f dt = \omega$ .*

El campo de vectores tangentes es

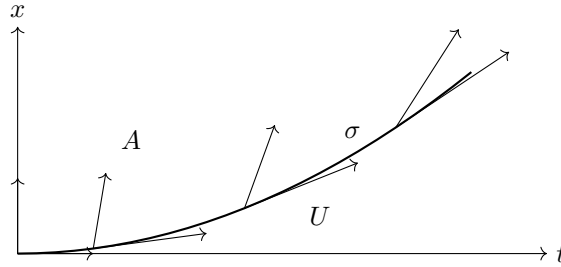
$$T = \left(1, \frac{2}{15}t, 0, 0\right) = \partial_t + \frac{2}{15}t\partial_x,$$

donde  $\vec{v} = \frac{2}{15}t\partial_x$ , y por tanto  $v = \frac{2}{15}t$  (observar que es una función creciente cuyo valor máximo se alcanza por tanto en  $t = 6$ , y vale  $v = 12/15 = 0.8 < 1$ ). Para obtener la velocidad de la nave basta multiplicar  $T$  por el factor  $\gamma = (1 - \frac{4}{225}t^2)^{-1/2}$ ,

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2}}, \frac{2t}{15\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2}}, 0, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2}}\partial_t + \frac{2t}{15\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2}}\partial_x$$

Para dar la aceleración se debe tener en cuenta que  $\gamma' = \frac{\frac{4}{225}t}{\sqrt{(1 - \frac{4}{225}t^2)^3}}$ , y resulta

$$A = \left(\frac{\frac{4}{225}t}{(1 - \frac{4}{225}t^2)^2}, \frac{\frac{2}{15}}{(1 - \frac{4}{225}t^2)^2}, 0, 0\right) = \frac{\frac{4}{225}t}{(1 - \frac{4}{225}t^2)^2}\partial_t + \frac{\frac{2}{15}}{(1 - \frac{4}{225}t^2)^2}\partial_x$$



Por último calculemos el tiempo que pasa para los tripulantes de la nave: una primitiva de  $1/\gamma$  es

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\gamma} dt &= \int \sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2} dt \stackrel{t = \frac{15}{2} \sin u}{=} \frac{15}{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du \\ &= \frac{15}{2} \int \cos^2 u du = \frac{15}{4}(u + \sin u \cos u) = \frac{15}{4} \left(u + \sin u \sqrt{1 - \cos^2 u}\right) \\ &= \frac{15}{4} \arcsen \frac{2}{15}t + \frac{1}{2}t\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^6 \frac{1}{\gamma} dt = \left[ \frac{15}{4} \arcsen \frac{2}{15}t + \frac{1}{2}t\sqrt{1 - \frac{4}{225}t^2} \right]_0^6 \\ &= \frac{9}{5} + \frac{15}{4} \arcsen \frac{4}{5} \approx 5.28 \text{ años.} \end{aligned}$$

### 3.5 Transformaciones de Lorentz y Poincaré

En las dos secciones anteriores hemos fijado un observador inercial y hemos visto cómo ve el espacio-tiempo ese observador. Sin embargo, podríamos haber elegido otro observador inercial, por lo que resulta importante estudiar las aplicaciones  $\mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  que llevan un observador a otro, y que nos permitirán además conocer cómo varían las coordenadas entre ambos.

Formalmente, lo anterior se traduce en que queremos estudiar las auto-afinidades  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  que llevan una referencia inercial  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  a otra  $(p'_0; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$ , es decir, tal que

$$\varphi(p_0) = p'_0, \quad \vec{\varphi}(e_0) = e'_0, \quad \vec{\varphi}(e_1) = e'_1, \quad \vec{\varphi}(e_2) = e'_2, \quad \vec{\varphi}(e_3) = e'_3, \quad (3.8)$$

donde  $\vec{\varphi}: E \rightarrow E$  es la aplicación lineal asociada a la auto-afinidad  $\varphi$ . Esta condición implica que tales aplicaciones deben conservar la métrica: en efecto, si  $v = \sum_i \lambda_i e_i$ ,  $w = \sum_i \mu_i e_i$ , entonces

$$\vec{\varphi}(v) \cdot \vec{\varphi}(w) = \left( \sum_{i=0}^3 \lambda_i e'_i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^3 \mu_i e'_i \right) = \lambda_0 \mu_0 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mu_i = v \cdot w.$$

Por tanto, lo anterior dice que  $\vec{\varphi}$  es una isometría, luego  $\varphi$  debe ser un movimiento en  $\mathbb{A}_4$ . Sin embargo, el verdadero interés de una auto-afinidad reside en su aplicación lineal asociada (lo único que no comprende ésta es la imagen del origen del tiempo), por lo que en adelante vamos a estudiar las isometrías del espacio vectorial asociado  $E$ .

Otro argumento por el que queremos estudiar estas isometrías es que una de las hipótesis fundamentales de la Teoría de la Relatividad es que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, es decir, el cono de luz es absoluto. Esto dice que las aplicaciones lineales asociadas a las auto-afinidades que queremos estudiar deben conservar la forma cuadrática asociada a  $g$ , o lo que es lo mismo, deben conservar la métrica.

**Definición.** El conjunto de automorfismos lineales de un espacio vectorial que conservan una métrica simétrica no singular de signatura  $(p, q)$ , con la composición de aplicaciones, forman un grupo llamado **grupo ortogonal generalizado** y se denota como  $O(p, q)$ , donde  $p + q$  es la dimensión del espacio.

Fijada la base de  $E$  de una referencia inercial, y una isometría  $\vec{\varphi}$ , denotaremos por  $\Lambda$  a la matriz de  $\vec{\varphi}$  en dicha base. Si  $X, Y$  son las coordenadas de dos vectores de  $E$  en tal base, y  $G = \text{diag}(1, -1/c^2, -1/c^2, -1/c^2)$  la matriz de  $g$ , matricialmente la condición de isometría se traduce en  $(\Lambda X)^t G (\Lambda Y) = X^t G Y$ , es decir,  $X^t \Lambda^t G \Lambda Y = X^t G Y$ , con lo que podemos decir que

$$O(1, 3) = \{\text{isometrías } \vec{\varphi}: E \rightarrow E\} = \{\Lambda \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) : \Lambda^t G \Lambda = G\}$$

En particular, al ser toda isometría un isomorfismo, existen las inversas de tales matrices  $\Lambda$ . La condición de antes significa que  $\Lambda^t G = G \Lambda^{-1}$ , luego

$$\Lambda^{-1} = G^{-1} \Lambda^t G \quad (3.9)$$

Además, tomando determinantes en tal condición se tiene que  $(\det \Lambda)^2 = 1$ , es decir,  $\det \Lambda = 1$  ó  $\det \Lambda = -1$ .

**Definición.** Llamaremos a las primeras isometrías **propias** y a las segundas **impropias**.

Obviamente, estamos interesados en las isometrías propias, pues al ser  $\det \Lambda > 0$  mandará bases positivas a bases positivas, como deben ser las de una referencia inercial. En otras palabras, las isometrías propias son las que conservan la orientación espacio-temporal de  $E$ , es decir,  $[\vec{\varphi}^* dX] = [dX]$ .

**Definición.** El conjunto de isometrías propias de  $E$  forman un subgrupo de  $O(1, 3)$ , llamado **grupo especial ortogonal generalizado**, y lo denotaremos como  $SO(1, 3)$ .

$$\begin{aligned} SO(1, 3) &= \{\text{isometrías propias } \vec{\varphi}: E \longrightarrow E\} \\ &= \{\Lambda \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) : \Lambda^t G \Lambda = G, \det \Lambda = 1\} \end{aligned}$$

Nótese la sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow SO(1, 3) \hookrightarrow O(1, 3) \xrightarrow{\det} \{1, -1\} \longrightarrow 0.$$

Las isometrías de  $E$  también tienen una importante propiedad: dado un vector  $e \in E$ , se sigue que  $\vec{\varphi}(e) \cdot \vec{\varphi}(e) = e \cdot e$ , lo que dice que si  $e$  es de tipo tiempo, luz o espacio; entonces  $\vec{\varphi}(e)$  es de tipo tiempo, luz o espacio, respectivamente. En particular, dotando a  $E$  de su topología natural, se tiene que al ser  $\vec{\varphi}$  lineal es continua, por lo que cada una de las dos componentes conexas de  $W = W_+ \amalg W_-$  debe transformarse bien en ella misma o bien en la contraria (y debe ser el mismo caso para ambas, por ser  $\vec{\varphi}$  biyectiva). Así que podemos de nuevo dividir las isometrías en dos tipos:

**Definición.** Diremos que una isometría  $\vec{\varphi}: E \longrightarrow E$  es **ortocrona** si conserva la orientación del tiempo:  $\vec{\varphi}(W_+) = W_+$  (y por tanto  $\vec{\varphi}(W_-) = W_-$ ). Por el contrario, diremos que es **no ortocrona** si la invierte:  $\vec{\varphi}(W_+) = W_-$  (y por tanto  $\vec{\varphi}(W_-) = W_+$ ).

Puesto que en las referencias inerciales, el primer vector de la base de  $E$  está orientado al futuro, estamos interesados en las transformaciones que conservan la orientación del tiempo. Se suele indicar con un “+” o un “-” para restringir un cierto grupo a las ortocronas o no ortocronas, respectivamente. Matricialmente, puesto que la primera columna de  $\Lambda$  contiene las coordenadas de  $\vec{\varphi}(e_0)$  en la base dada, la condición de ser ortocrono dice que  $\vec{\varphi}(e_0) \cdot e_0 > 0$  (recordar el teorema 3.2.5), luego  $\Lambda_{00} > 0$  (para las no ortocronas se sigue análogamente que  $\Lambda_{00} < 0$ ).

Por tanto, las isometrías que estudiaremos serán las propias y ortocronas, las cuales forman el grupo de transformaciones más importantes de la Relatividad:

**Definición.** El conjunto de las isometrías propias y ortocronas del espacio vectorial asociado a un espacio-tiempo con la composición de aplicaciones forman un grupo, que llamaremos **grupo de Lorentz** y denotaremos como  $\mathcal{L} := SO^+(1, 3)$ . Los elementos de este grupo se llaman **transformaciones de Lorentz**.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{\text{isometrías propias y ortocronas } \vec{\varphi}: E \longrightarrow E\} \\ &= \{\Lambda \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) : \Lambda^t G \Lambda = G, \det \Lambda = 1, \Lambda_{00} > 0\} \end{aligned}$$

Nótese la cadena de inclusiones

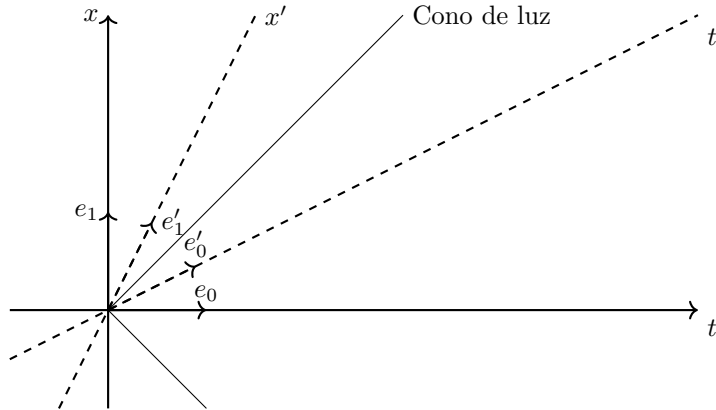
$$\mathcal{L} = SO^+(1, 3) \subset SO(1, 3) \subset O(1, 3) \subset GL(E)$$

donde  $GL(E) = \{\text{automorfismos lineales de } E\}$  es el llamado **grupo lineal**.

**3.5.1 (Matriz de una transformación de Lorentz)** Vamos a deducir cuál es la matriz de las transformaciones de Lorentz más sencillas: los *boosts*.

**Definición.** Un **boost** es una transformación de Lorentz que deja fijo un plano espacial, esto es, un subespacio de dimensión 2 de  $E$  donde  $g$  es definida negativa.

Supongamos, para obtener la transformación más sencilla posible, que el plano que deja invariante un cierto boost es el que determinan los ejes  $y$  y  $z$ . Tal transformación corresponde físicamente a la situación de un móvil que se mueve respecto al observador con velocidad constante  $v$  a lo largo del eje  $x$  de la referencia. Así es claro que  $e_2 = e'_2$  y  $e_3 = e'_3$ . En el siguiente esquema, llamado **diagrama espacio-tiempo** o **diagrama de Minkowski** (sólo aparecen las dos dimensiones involucradas) se ha plasmado la situación a representar. Para el dibujo se ha tomado  $c = 1$ .



Nótese que al ser aquí la métrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

el eje espacial  $x'$ , que es ortogonal al eje  $t'$ , se consigue haciendo la “simetría” (en el dibujo) respecto la recta  $t = x$ .

Puesto que para el observador el móvil se mueve a lo largo del eje  $x$  con velocidad  $v$ , su velocidad de acuerdo con 3.4.3 será

$$\vec{\varphi}(e_0) = e'_0 = \gamma(e_0 + ve_1) = \gamma e_0 + \gamma v e_1.$$

El vector  $e'_1$  debe ser ortogonal a  $e'_0$ , es decir, si  $e'_1 = \lambda e_0 + \mu e_1$ , entonces

$$\lambda\gamma - \mu\frac{\gamma v}{c^2} = 0 \implies \lambda = \frac{v}{c^2}\mu$$

Además debe cumplirse que  $e'_1 \cdot e'_1 = -c^{-2}$ . Para conseguir eso basta tomar  $\mu = \gamma$ , y por tanto  $\lambda = \frac{\gamma v}{c^2}$ . En efecto,

$$e'_1 \cdot e'_1 = \frac{\gamma^2 v^2}{c^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \left( \frac{v^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \frac{-(c^2 - v^2)}{c^4} = -\frac{1}{c^2}$$

Por tanto la matriz de la isometría  $\vec{\varphi}$  es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

y la condición (3.9) dice que la matriz de la aplicación inversa es

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

El parecido entre las dos matrices anteriores  $\Lambda$  y  $\Lambda^{-1}$  es evidente, pues sólo varían en un par de signos, donde aparecen la velocidad  $v$ . En la mayoría de los libros es frecuente permitir  $-c < v < c$  y unificar las dos matrices en una sola. Puesto que las isometrías correspondientes son inversa la una de la otra, físicamente permitir  $v < 0$  corresponde al *boost* en el sentido opuesto. Puesto que se cumple  $-1 < \frac{v}{c} < 1$ , teniendo cuenta el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \text{tgh}: \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} (-1, 1) \\ \theta &\longmapsto \text{tgh } \theta = \frac{v}{c}, \end{aligned}$$

podemos expresar el par de matrices anteriores como

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \frac{1}{c} \sinh \theta & 0 & 0 \\ c \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ . Lo anterior dice que cualquier *boost* en el espacio-tiempo a lo largo del eje  $x$  es simplemente una rotación hiperbólica en el plano  $tx$ .

**Definición.** A esta matriz  $\Lambda(\theta)$  se le llama **forma hiperbólica** de la transformación  $\Lambda$ .

La pregunta ahora es natural: ¿cuál es el significado de tal valor  $\theta$ ? Para responderla vamos a restringirnos al plano  $tx$ , donde la métrica es

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}.$$

En este plano, donde las coordenadas son  $(t, x)$ , el conjunto de todas las velocidades posibles (vectores unitarios dirigidos al futuro) viene dado por una de las

ramas de la hipérbola  $t^2 - \frac{1}{c^2}x^2 = 1$ , en particular la que se encuentra en  $W_+$ . Se cumple que la curva

$$\sigma(\alpha) = (\cosh \alpha, c \sinh \alpha) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

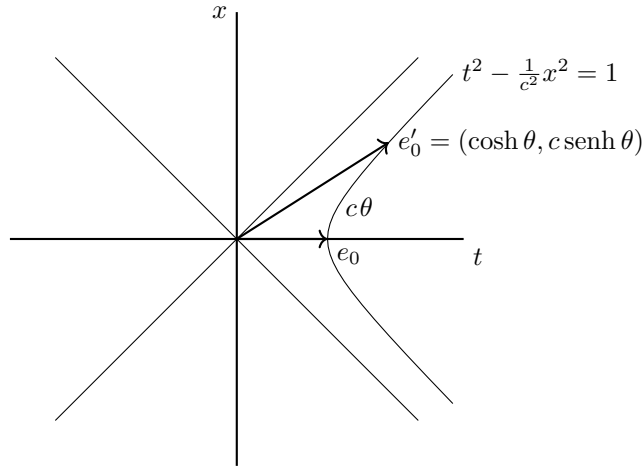
parametriza dicha rama de la hipérbola, pues

$$\cosh^2 \alpha - \frac{1}{c^2} c^2 \sinh^2 \alpha = 1,$$

Además se sigue que el vector tangente a dicha curva tiene módulo (respecto la métrica del espacio  $h = -c^2 g$ ) constante  $c$ , ya que al ser  $T = (\sinh \alpha) \partial_t + (c \cosh \alpha) \partial_x$ , se tiene que

$$\sqrt{\langle T, T \rangle} = \sqrt{-c^2 \sinh^2 \alpha + c^2 \cosh^2 \alpha} = c.$$

Esto dice que la longitud del arco de hipérbola entre los puntos  $(1, 0) = (\cosh 0, c \sinh 0)$  y  $\sigma(\alpha)$  es  $c\alpha$ . Por tanto, el  $\theta$  de la forma hiperbólica de un *boost* hace referencia a que  $c\theta$  es la longitud del arco de hipérbola entre  $e_0$  y su imagen  $e'_0$ . En otras palabras: el valor de  $c\theta$  es justamente el “ángulo hiperbólico” que forma la velocidad del móvil con el eje temporal del observador.



**Definición.** Fijado un observador, una **rotación euclídea** del espacio  $V$  del observador es una aplicación lineal  $R: E \rightarrow E$  que deja fija la velocidad del observador y que  $R|_V$  es una rotación euclídea sobre  $V$ .

Nótese que las rotaciones euclídeas sobre  $E$  son justamente las transformaciones de Lorentz que dejan fija la velocidad del observador.

La importancia de los *boosts* en las transformaciones de Lorentz queda de manifiesto con el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.2** *Fijado un observador, toda transformación de Lorentz  $\varphi \in \mathcal{L}$  factoriza como composición de una rotación euclídea  $R$  del espacio  $V$  del observador y un boost  $L$ ,  $\varphi = L \circ R$ .*

*Demostración.* Sea  $e_0$  la velocidad del observador y  $e'_0 = \vec{\varphi}(e_0)$ . Si  $e'_0 = e_0$  no hay nada que decir. En otro caso, consideremos un boost tal que  $L(e_0) = e'_0$ . Siendo así, el plano  $P \subseteq V$  ortogonal a  $e_0$  y  $e'_0$  debe quedar fijo por  $L$ , pues si  $v \in P$ ,  $0 = e_0 \cdot v = L(e_0) \cdot L(v) = e'_0 \cdot v$ . Entonces  $L^{-1} \circ \vec{\varphi}$  es una transformación de Lorentz (es composición de dos) y deja fija la velocidad del observador,  $(L^{-1} \circ \vec{\varphi})(e_0) = e_0$ , luego es una rotación euclídea para dicho observador. Si  $R = L^{-1} \circ \vec{\varphi}$ , entonces  $\vec{\varphi} = L \circ R$ , como se quería.  $\square$

Una vez ya que hemos descrito cómo son las isometrías, veamos cómo son las auto-afinidades  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  cuya aplicación lineal asociada es una isometría.

Los movimientos en los que estamos interesados son los que transforman una referencia inercial en otra, los cuales forman un grupo que generaliza al espacio afín el de Lorentz:

**Definición.** El conjunto de todas las auto-afinidades  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  de aplicación lineal asociada  $\vec{\varphi}: E \rightarrow E$  una transformación de Lorentz, es decir, que conserva la orientación del espacio-tiempo,  $[\vec{\varphi}^* dX] = [dX]$ ; y conserva la orientación del tiempo,  $\vec{\varphi}(W_+) = W_+$ , forman un grupo respecto a la composición de aplicaciones, llamado **grupo de Poincaré**.

Es claro que dadas dos referencias inerciales  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  y  $(p'_0; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$ , existe una única transformación de Poincaré que satisface (3.8).

**3.5.3 (Matriz de una transformación de Poincaré)** Vamos a dar la matriz de un elemento  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  del grupo de Poincaré en la referencia dada. Puesto que se trata de un morfismo afín, basta conocer la matriz de la aplicación lineal asociada  $\vec{\varphi}$ , que denotaremos por  $\Lambda$ , y la imagen del origen de la referencia  $\varphi(p_0) = p'_0$ , cuyas coordenadas denotaremos por  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ . Con estas notaciones, la matriz de  $\varphi$  es

$$\varphi \equiv \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & \Lambda \end{array} \right), \quad (3.13)$$

donde  $a, 0$  y  $\Lambda$  son matrices  $4 \times 1$ ,  $1 \times 4$  y  $4 \times 4$ , respectivamente.

Para conocer la matriz de  $\varphi^{-1}$  basta conocer  $\Lambda^{-1}$  (matriz de  $\vec{\varphi}^{-1}$ ) y las coordenadas de  $\vec{\varphi}^{-1}(p_0)$ . Si éstas las denotamos por  $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ , para conocerlas basta tener en cuenta que  $\varphi(\varphi^{-1}(p_0)) = p_0$ , y entonces

$$\left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & \Lambda \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ b \end{array} \right)$$

dice que  $0 = a + \Lambda b$ , es decir,  $-a = \Lambda b$ , luego  $b = -\Lambda^{-1}a$ . Por tanto la matriz de  $\varphi^{-1}$  es

$$\varphi^{-1} \equiv \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -\Lambda^{-1}a & \Lambda^{-1} \end{array} \right). \quad (3.14)$$

Además, estas matrices proporcionan el cambio de coordenadas de una referencia a otra: sabemos que la matriz de una transformación de Poincaré  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$ , que verifica (3.8), considerando la referencia  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  en ambos lados, es la misma que la matriz de la identidad  $\text{Id}: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$ , considerando la referencia  $(p'_0; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$  en el espacio de salida y  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  en



el de llegada. Pero en particular tal matriz es la matriz de cambio de referencia de la  $(p'_0, \{e'_i\})$  a la  $(p_0, \{e_i\})$ . Análogamente, la matriz de  $\varphi^{-1}$  es la matriz de cambio de referencia de  $(p_0, \{e_i\})$  a  $(p'_0, \{e'_i\})$ .

**3.5.4 (Cambio de coordenadas)** Para el caso en el que la aplicación lineal asociada es un *boost* en el eje  $x$ , vamos a ver cuál es el cambio de coordenadas que nos va a permitir expresar las coordenadas de un cierto suceso en la referencia  $(p'_0, \{e'_i\})$ , según lo que acabamos de decir. De acuerdo con (3.11) y (3.14), el cambio de coordenadas de  $(p_0, \{e_i\})$  a  $(p'_0, \{e'_i\})$  es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma a_0 + \frac{\gamma v}{c^2} a_1 & \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma v a_0 - \gamma a_1 & -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde  $(t, x, y, z)$  son las coordenadas de un cierto suceso en la referencia  $(p_0, \{e_i\})$ ,  $(t', x', y', z')$  son las coordenadas de ese suceso en la referencia  $(p'_0, \{e'_i\})$ , y  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  son las coordenadas de  $\varphi(p_0) = p'_0$  en la referencia  $(p_0, \{e_i\})$ .

Para el caso particular en el que  $p_0 = p'_0$  (y así  $a_i = 0$ ), se tiene el cambio clásico

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.16)$$

**Ejemplo 3.5.5** Consideremos una referencia inercial  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  en la Tierra y supongamos que un cohete es lanzado con velocidad constante  $v = 0.5c$  a lo largo del eje  $x$  del observador (tenemos un *boost* en el eje  $x$ ) en el suceso  $p_0$ . Pongamos  $(p_0; e'_0, e'_1, e_2, e_3)$  la referencia inercial del cohete (con mismo origen del tiempo y mismos ejes  $y$  y  $z$ ).

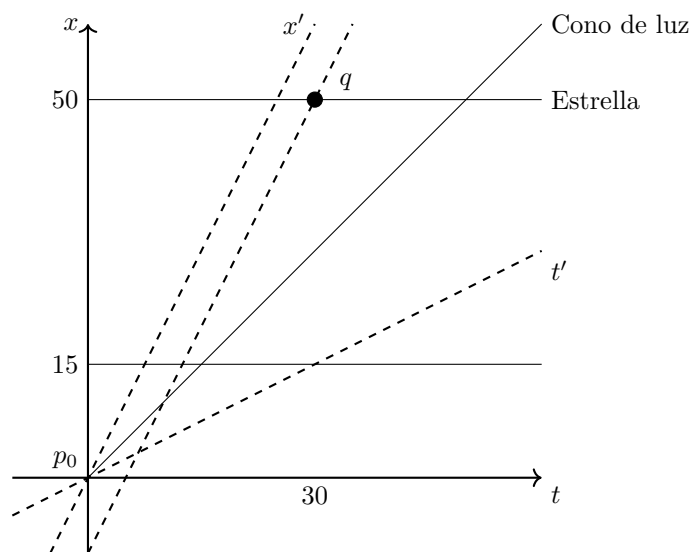
Tras 30 años terrestres de que el cohete despegase una estrella situada a 50 años-luz de nuestro planeta en la dirección del eje  $x$  estalla produciendo una supernova<sup>7</sup>. Las coordenadas de tal suceso  $q$  (tomando unidades año y año-luz) en la referencia terrestre serán

$$(t = 30, x = 50, y = 0, z = 0).$$

Veamos cuáles son las coordenadas en la referencia del cohete. Según el cambio (3.16), y teniendo en cuenta que  $\gamma = 1.155$ , se tiene

$$(t' = 5.8, x' = 40.4, y' = 0, z' = 0).$$

<sup>7</sup>Nos referimos a que tras 30 años del despegue se produce la supernova, no que desde la Tierra se observa la supernova, pues la velocidad de la luz es finita. En particular, en la Tierra se podrá ver tal fenómeno astronómico después de 50 años de que estallase. Es la misma razón que por la que cada vez que observamos al Sol lo vemos como era hace 8 minutos y 19 segundos.



Para el viajero, en el instante inicial (el suceso  $p_0$ ), la estrella se encuentra a 43.3 años luz, se va acercando hacia él con velocidad  $0.5c$  y cuando han transcurrido 5.8 años desde el comienzo de su viaje, la estrella, que se encuentra a 40.4 años luz, estalla.

Del ejemplo se observa también que la simultaneidad depende del observador: mientras que en la Tierra pasan 30 años hasta que se produce la supernova, el viajero sólo han tenido que esperar 5.8 años. Además, también se tiene la siguiente “paradoja” (que a vista del dibujo no lo es): cuando estalla la supernova, para el viajero la estrella se encuentra a 40.4 años luz, pero sin embargo desde la Tierra afirmarían que se encuentra a  $50 - 0.5 \cdot 30 = 35$  años luz, pues no están teniendo en cuenta ni que la simultaneidad es relativa ni la contracción de la longitud (véase con más detalle en 3.8.3).

**Ejemplo 3.5.6** Consideremos  $c = 1$  por simplicidad. Fijado cierto observador inercial, para probar que la transformación

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

es de Lorentz, ya hemos visto a lo largo de la sección que la condición necesaria y suficiente es que se cumpla  $\Lambda^t G \Lambda = G$ ,  $\det \Lambda = 1$  y  $\Lambda_{00} > 0$ , donde  $G$  es la matriz de la métrica del tiempo en la base dada, es decir,  $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . La tercera condición es inmediata, y unos cálculos permiten comprobar que las dos restantes también se verifican.

**Ejemplo 3.5.7** Un observador inercial sitúa su origen del tiempo en Badajoz, en un cierto instante. Tras un segundo, una niña salta en la ciudad, y 0.005 s después para el observador, otro niño salta en Bruselas, a 2000 km. de Badajoz. Se trata de probar que existe un observador inercial con mismo origen del tiempo

para el cual ambos niños saltan a la vez, y calcular su velocidad respecto al primer observador.

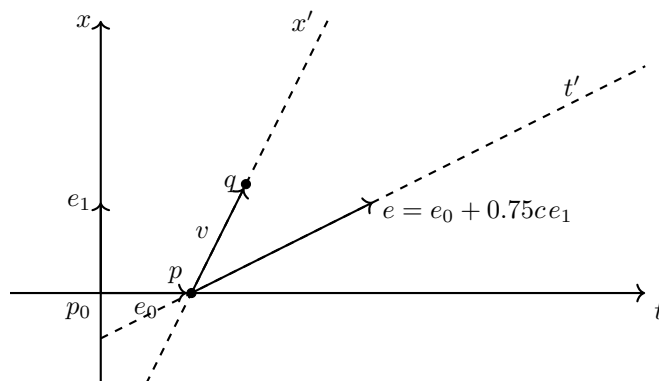
Por simplicidad reduzcamos el problema a una dimensión espacial, de modo que lo plantearemos en el plano  $tx$ . Si  $(p_0; e_0, e_1)$  es la referencia inercial considerada, es claro que la niña salta en el suceso  $p = (1, 0)$  y el niño en  $q = (1.005, 2 \cdot 10^6)$  (usaremos unidades metro - segundo, de modo que  $c = 3 \cdot 10^8$ ). Para que un observador vea tales sucesos simultáneos, el vector que los une  $v = q - p = (0.005, 2 \cdot 10^6)$  debe de ser de tipo espacio, pues así habrá un observador que vea tal vector como espacial. En efecto,

$$v \cdot v = 0.005^2 - \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} (2 \cdot 10^6)^2 = -1.9 \cdot 10^{-5} < 0.$$

¿Cuál es ese observador? Claramente aquel cuya velocidad sea ortogonal a  $v$ , pues para todo observador inercial el tiempo y el espacio son ortogonales. En este plano, un vector ortogonal es  $(2 \cdot 10^6, 4.5 \cdot 10^{14})$ . En efecto,

$$(0.005, 2 \cdot 10^6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^6 \\ 4.5 \cdot 10^{14} \end{pmatrix} = 0.$$

Dividiendo dicho vector por la primera componente para obtener uno proporcional en el que ésta sea 1, se obtiene el vector de tipo tiempo  $e = (1, 2.25 \cdot 10^8)$ . De aquí se sigue que la velocidad a la que debemos viajar respecto al primer observador para que los dos saltos sean simultáneos es  $2.25 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0.75c$ .



Nótese que en lugar de este razonamiento geométrico se podrían haber utilizado directamente las transformaciones (3.16).

### 3.6 Causalidad

Centraremos esta sección en un importante resultado publicado por CHRISTOPHER ZEEMAN (1925 – 2016) en 1964, el cual no probaremos. Para ello vamos a definir en  $\mathbb{A}_4$  dos relaciones:

**Definición.** Sean  $p, q \in \mathbb{A}_4$ . Diremos que  $p < q$  cuando  $q - p$  sea de tipo tiempo y esté orientado al futuro; y escribiremos  $p \leq q$  si  $q - p$  es de tipo luz y está orientado al futuro.

Ambas  $<$  y  $\leq$  reciben el nombre de **relaciones de causalidad**, porque establecen una conexión causal entre ambos sucesos, es decir, la posibilidad de que un cierto fenómeno ocurrido en  $p$  afecte a  $q$ , bien por algún fenómeno material si  $p < q$ , bien por algún efecto electromagnético, si  $p \leq q$ .

Es fácil comprobar que la relación  $<$  es una relación de orden parcial y estricto sobre  $\mathbb{A}_4$ . En efecto, la asimetría es clara, pues si  $p < q$ , entonces  $q - p$  está dirigido al futuro, luego  $p - q$  está dirigido al pasado, luego  $q \not< p$ . En cuanto a la propiedad transitiva, dados  $p, q, r \in \mathbb{A}_4$  con  $p < q$ ,  $q < r$ , tenemos que  $q - p$  y  $r - q$  son de tipo tiempo y están orientados al futuro, luego  $r - p = (r - q) + (q - p)$  también es de tipo tiempo y está orientado al futuro, luego  $p < r$  (recordar el punto 3.2.4). Sin embargo, la relación  $\leq$  no es de orden, pues no es transitiva.

**Definición.** Sea  $f: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  una biyección. Diremos que  $f$  es un **automorfismo causal** si  $f$  y  $f^{-1}$  conservan el orden parcial  $<$ , es decir, si

$$p < q \iff f(p) < f(q) \quad , \quad p, q \in \mathbb{A}_4.$$

El conjunto de todos los automorfismos causales de  $\mathbb{A}_4$  forman un grupo, que llamaremos **grupo de causalidad**.

El siguiente lema asegura que obtenemos las mismas aplicaciones si consideramos la relación  $\leq$ :

**Lema 3.6.1** *Sea  $f: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  una biyección. Entonces  $f, f^{-1}$  preservan el orden parcial  $<$  si y sólo si  $f, f^{-1}$  preserva la relación  $\leq$ .*

*Demostración.* Puede encontrarse en [26]. □

Enunciemos ya el Teorema al que nos hemos referido. Para ello recordemos que una *translación* por un vector  $v \in E$  sobre el espacio-tiempo es una aplicación  $\tau_v: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$ ,  $\tau_v(p) = p + v$ ; que una *dilatación* de razón  $\lambda \in \mathbb{R}$  es una autoafinidad cuya aplicación lineal asociada es  $\tilde{\sigma} = \lambda \text{Id}$ , es decir,  $\sigma(p + e) = \sigma(p) + \lambda e$ ; y un *movimiento ortocrono* es un elemento de  $O^+(1, 3)$ , o lo que es lo mismo, un movimiento  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  que conserva la orientación del tiempo.

**Teorema 3.6.2 (Zeeman, 1964)** *Todo automorfismo causal  $f: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  es composición de translaciones, dilataciones y movimientos ortocronos.*

*Demostración.* La prueba puede consultarse en [26]. □

### 3.7 Materia

La evidencia experimental muestra que las leyes de la Mecánica Clásica no son correctas si las aplicamos a protones viajando a velocidades cercanas a la de la luz. Debemos por tanto estudiar las consecuencias que la Teoría de la Relatividad tiene en los cuerpos con masa.

**Definición.** Llamaremos **partícula** (puntual) a una trayectoria o rayo de luz junto con un campo tangente a ella  $I$  no nulo en todo punto, de módulo constante y orientado al futuro, que llamaremos **impulso** de la partícula.

Diremos que una partícula es un **fotón** cuando sea un rayo de luz, es decir, cuando  $I \cdot I = 0$ . En el caso en el que sea una trayectoria, se define la **masa intrínseca** o masa en reposo como la constante

$$m := |I| = \sqrt{I \cdot I} > 0.$$

Dada una partícula de masa  $m$ , su impulso  $I$  debe ser proporcional a la velocidad  $U$ , luego será  $I = fU$ , con  $f > 0$ . Tomando módulos se tiene que  $m = |I| = f$ , lo que concluye que

$$I = mU \quad (3.17)$$

En una referencia inercial, un argumento idéntico al anterior nos dice que para cierta función positiva  $m_{\text{ap}}$

$$I = m_{\text{ap}}T = m_{\text{ap}}(\partial_t + \vec{v}) = m_{\text{ap}}\partial_t + m_{\text{ap}}\vec{v}$$

**Definición.** Se llama **masa aparente** de la partícula a  $m_{\text{ap}}$ . Nótese que este factor depende del observador, pues  $T$  depende; y del punto de la trayectoria, pues  $|T|$  no es constante.

Por otra parte, el segundo sumando es la **cantidad de movimiento** clásica o momento lineal  $\vec{p} = p_1\partial_x + p_2\partial_y + p_3\partial_z := m_{\text{ap}}\vec{v}$ , por lo que

$$I = m_{\text{ap}}\partial_t + p_1\partial_x + p_2\partial_y + p_3\partial_z.$$

De las igualdades anteriores se obtiene que para la referencia inercial considerada la masa aparente es

$$m_{\text{ap}} = \partial_t \cdot I, \quad (3.18)$$

y las componentes del momento lineal son

$$p_i = \langle \partial_i, I \rangle = -c^2(\partial_i \cdot I) \quad (3.19)$$

(recordar las componentes de la métrica del tiempo y el espacio en una referencia inercial).

Además, comparando la igualdad  $I = m_{\text{ap}}T$  con la expresión  $I = mU = m\gamma T$  se sigue inmediatamente que

$$m_{\text{ap}} = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.20)$$

lo que asegura que la masa aparente está acotada inferiormente por la masa intrínseca. *Viajar engorda.* La igualdad se da si y sólo si  $v = 0$ , es decir, la partícula se encuentra en reposo para el observador, con lo que el término “masa en reposo” ahora cobra significado. Obsérvese, por ejemplo, que tiene sentido no hablar de la masa en reposo de los fotones, pues sea cual sea el observador, éstos nunca están en reposo: siempre viajan con velocidad constante  $c$ . Para los fotones, en cambio, hablaremos de su energía:

**Definición.** Se llama **energía** de un fotón para un observador inercial de velocidad  $\partial_t$  a

$$\varepsilon := -\langle \partial_t, I \rangle = c^2(\partial_t \cdot I),$$

y obviamente depende del observador considerado.

**3.7.1 (Conservación del impulso)** Vamos a ver que las leyes más importantes de la física newtoniana se pueden expresar en relatividad en términos del impulso. Primero necesitamos el siguiente

**Lema 3.7.2** Sea  $I$  un campo tangente sobre una trayectoria, y escribamos  $m := \sqrt{I \cdot I}$ . Entonces se cumple que  $U^{\nabla_0} I = 0$  si y sólo si  $Um = 0$  y  $U^{\nabla_0} U = 0$ .

*Demostración.* Como  $I$  es un campo tangente será  $I = \lambda U$ , y tomando módulos se tiene  $I = mU$ . Entonces tenemos

$$U^{\nabla_0} I = U^{\nabla_0} (mU) = (Um)U + m(U^{\nabla_0} U).$$

$\Rightarrow$ ). Si  $U^{\nabla_0} I = 0$ , multiplicando por la derecha por  $U$  en la anterior expresión tenemos que  $Um = 0$ , porque  $(U^{\nabla_0} U) \cdot U = 0$  (ver 3.1.1).

$\Leftarrow$ ). Es evidente.  $\square$

Ahora podemos aplicar tal lema a nuestras definiciones de impulso, masa intrínseca, . . . Sin embargo, notar que el lema es más general, pues  $m = \sqrt{I \cdot I}$  es una función, mientras la masa intrínseca es una constante. Es decir, la condición  $U^{\nabla_0} I = 0$  recoge que la masa intrínseca es constante aunque no la hubiéramos definido como constante. Hecha tal aclaración, tenemos el siguiente

**Teorema 3.7.3** Dada una partícula, la ley

$$U^{\nabla_0} I = 0 \quad (\text{Ley de conservación del impulso})$$

equivale a las dos siguientes:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{Ley de conservación de la masa})$$

$$U^{\nabla_0} U = 0 \quad (\text{Ley del movimiento inercial})$$

Análogamente, las leyes clásicas de conservación de la masa (aparente) y de la cantidad de movimiento en choques también se enuncian en términos del impulso, afirmando que al colisionar ciertas partículas de impulsos  $I_j$  produciendo otras partículas de impulsos  $I'_k$  se cumple

$$\sum_j I_j = \sum_k I'_k, \quad (3.21)$$

pues para cada observador inercial tal igualdad significa en la primera componente que

$$\sum_j m_{\text{ap},j} = \sum_k m'_{\text{ap},k},$$

pues  $m_{\text{ap},j} = \partial_t \cdot I_j$  y  $m'_{\text{ap},k} = \partial_t \cdot I'_k$ ; y las restantes tres componentes dicen que

$$\sum_j \vec{p}_j = \sum_k \vec{p}'_k.$$

Sin embargo, nótese que tal ley de conservación no dice que la masa intrínseca se conserve, puesto que puede ser que  $\sum_j \sqrt{I_j \cdot I_j} \neq \sum_k \sqrt{I'_k \cdot I'_k}$ .

**3.7.4 (Equivalencia de masa y energía)** Sin lugar a dudas la fórmula por excelencia que se le atribuye a A. Einstein es “ $E = mc^2$ ”, la que probablemente sea la ecuación más famosa de la física. Vamos a escribir correctamente tal expresión y explicar su significado exacto.

Fijado un observador inercial, puesto que  $m^2 = I \cdot I$  es una constante, tenemos que  $\frac{d}{dt}(I \cdot I) = 0$ , y aplicando la regla de derivación se obtiene

$$0 = I \cdot \frac{d}{dt}I = (m_{\text{ap}}\partial_t + m_{\text{ap}}\vec{v}) \cdot \left(\frac{d}{dt}m_{\text{ap}}\partial_t + \frac{d}{dt}\vec{p}\right).$$

Operando y teniendo en cuenta que la parte espacial es ortogonal a la temporal,

$$m_{\text{ap}}\frac{d}{dt}m_{\text{ap}} = c^{-2}m_{\text{ap}}\langle\vec{v}, \frac{d}{dt}\vec{p}\rangle,$$

con lo que obtenemos (compárese con (1.2))

$$\boxed{\frac{d}{dt}m_{\text{ap}}c^2 = \langle\vec{v}, \frac{d}{dt}\vec{p}\rangle} \quad \text{(Equivalencia masa-energía)}$$

En el segundo término, nótese que  $\frac{d}{dt}\vec{p}$  es la fuerza que actúa, y  $\vec{v}$  es la velocidad, es decir, el desplazamiento por unidad de tiempo. Puesto que el trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, el término  $\langle\vec{v}, \frac{d}{dt}\vec{p}\rangle$  es el trabajo<sup>8</sup> por unidad de tiempo. Por tanto, la fórmula dice que las variaciones de masa aparente por unidad de tiempo, salvo un factor  $c^2$ , coinciden con el trabajo<sup>8</sup> por unidad de tiempo, o lo que es lo mismo, con las variaciones de energía por unidad de tiempo. *Energía y masa son la misma entidad, salvo un factor  $c^2$ .*

Más aún, desarrollando en serie de potencias en torno a cero<sup>9</sup> la fórmula (3.20), se obtiene

$$m_{\text{ap}} = \gamma m = m + \frac{mv^2}{2c^2} + \frac{3mv^4}{8c^4} + \frac{5mv^6}{16c^6} + \dots,$$

de modo que

$$m_{\text{ap}}c^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \frac{5mv^6}{16c^4} + \dots. \quad (3.22)$$

La equivalencia masa-energía, junto a esta expresión, motiva la siguiente

**Definición.** Llamaremos **energía aparente** de una partícula a  $E_{\text{ap}} := m_{\text{ap}}c^2$ , y diremos que su **energía en reposo** es  $E_0 := mc^2$ . Al término  $K := \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$  se le conoce como la **energía cinética** (relativista) de la partícula.

$$E_{\text{ap}} = \gamma E_0 = E_0 + K$$

Es claro que tanto la energía aparente como la cinética dependen del observador.

Vamos a justificar la terminología usada en esta definición: la de la energía aparente viene motivada por la equivalencia de masa y energía. Por otra parte, el hecho de llamar energía *en reposo* a  $mc^2$  se justifica debido a que, según (3.22),

<sup>8</sup> Que realiza la partícula o que se realiza sobre ella

<sup>9</sup>  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$

ésta sería la energía aparente que mediría un observador en el que la partícula se encuentra en reposo, y en particular cualquier otro observador mediría más energía, es decir, un observador que ve la partícula en reposo es el que la ve con menor energía.

Adviértase además que, cuando  $v \ll c$ , los términos siguientes al segundo sumando de (3.22) se hacen despreciables, con lo que obtenemos que a velocidades bajas el término  $K$  es aproximadamente  $\frac{1}{2}mv^2$ , que es la energía cinética clásica. De ahí el nombre de  $K$ .

Una consecuencia inmediata de la expresión  $E_{\text{ap}} = \gamma E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$  es que muestra que ninguna partícula con masa podría acelerarse hasta la velocidad de la luz, pues se necesitaría una cantidad infinita de energía.

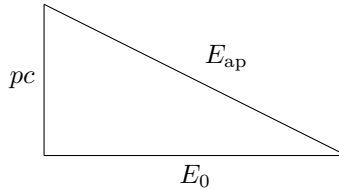
Esta equivalencia entre masa y energía nos permite hablar indistintamente de ambas. En física nuclear es usual expresar la masa de las partículas en unidades de energía, comúnmente en megaelectronvoltios<sup>10</sup> (en general el término  $c^2$  no se opera y la masa se expresa en términos de  $\text{MeV}/c^2$ , para hacer énfasis en eso; aunque si no hay confusión se denotará simplemente como  $\text{MeV}$ . En otras palabras, se toma  $c = 1$ ). Esta terminología es útil puesto que si una partícula, de masa una cierta cantidad de megaelectronvoltios se desintegra, la energía que desprende es exactamente la misma cantidad de megaelectronvoltios.

Partícula	Masa en reposo (MeV)
Electrón ( $e$ )	0.511
Muón ( $\mu^-$ )	105.7
PiÓN ( $\pi^0/\pi^+, \pi^-$ )	135.0 / 139.6
Protón ( $^1\text{H}$ )	938.272
Neutrón ( $n$ )	939.565

Otro aspecto a tener en cuenta es que en física el momento lineal de una partícula o su energía se suelen manejar más que su velocidad. Al ser  $I = m_{\text{ap}}\partial_t + \vec{p}$ , se cumple que  $c^4 m^2 = c^4 I \cdot I = c^4 m_{\text{ap}}^2 - p^2 c^2$ , con lo que se obtiene una conocida expresión que relaciona la energía aparente, la energía en reposo y el momento lineal:

$$\boxed{E_{\text{ap}}^2 = E_0^2 + (pc)^2} \quad (3.23)$$

Tal fórmula suele ser recordada por su analogía con el teorema de Pitágoras como un triángulo rectángulo de hipotenusa  $E_{\text{ap}}$  y catetos  $E_0$  y  $pc$ .



<sup>10</sup>1 eV = 1.602 · 10<sup>-19</sup> J, y 1 MeV = 10<sup>6</sup> eV.



Cuando la energía aparente de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo (porque se mueve a altas velocidades para el observador), el término  $E_0^2$  puede ser despreciado con lo que se obtiene la útil aproximación

$$E_{\text{ap}} \approx pc \quad , \quad E_{\text{ap}} \gg E_0 \quad (3.24)$$

**Ejemplo 3.7.5** Un electrón se mueve respecto a cierto observador inercial a una velocidad de  $v = 0.8c$ . Puesto que la masa en reposo del electrón es de  $E_0 = 0.511$  MeV, y para tal velocidad  $\gamma = 5/3$ , se tiene que

$$E_{\text{ap}} = \gamma E_0 = 0.852 \text{ MeV}.$$

Su energía cinética a tal velocidad es de

$$K = E_{\text{ap}} - E_0 = 0.341 \text{ MeV}.$$

Notar que ésta difiere de la que sería su energía cinética clásica  $\frac{1}{2}mv^2 = 0.1635$  MeV, pues  $\gamma \neq 1$ . El módulo (respecto la métrica del espacio) de la cantidad de movimiento es

$$p = m_{\text{ap}}v = \gamma mv = 0.682 \text{ MeV}/c.$$

**Ejemplo 3.7.6** Consideremos dos partículas puntuales de masas en reposo  $m_1 = 2$  MeV y  $m_2 = 4$  MeV. Para cierto observador, la primera partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  con una energía cinética de  $K_1 = 3$  MeV, mientras que la segunda partícula permanece en reposo. Ambas partículas colisionan formando una única nueva partícula (cuyas magnitudes denotaremos con “ ’ ”). Vamos a describir el sistema y calcularemos el futuro de la partícula resultante.

La energía aparente de la primera partícula será  $E_{\text{ap},1} = E_{0,1} + K_1 = 5$  MeV; mientras que la de la segunda será  $E_{\text{ap},2} = 4$  MeV, pues está en reposo. En términos de masa tenemos que  $m_{\text{ap},1} = 5$  MeV y  $m_{\text{ap},2} = 4$  MeV. Para calcular la cantidad de movimiento de la primera partícula a partir de su energía cinética se usa la fórmula (3.23):  $p_1 = c^{-1} \sqrt{E_{\text{ap},1}^2 - E_{0,1}^2} = 4.58$  MeV/ $c$ . Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} I_1 &= 5\partial_t + 4.58\partial_x \\ I_2 &= 4\partial_t \end{aligned}$$

La ley de conservación  $I_1 + I_2 = I'$ , tal como fue explicado antes, significa que la masa aparente y la cantidad de movimiento se conservan,

$$m_{\text{ap},1} + m_{\text{ap},2} = m'_{\text{ap}} \quad , \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}' ,$$

lo que dice que  $m'_{\text{ap}} = 9$  MeV y  $\vec{p}' = 4.58 \partial_x$ , es decir,

$$I' = 9\partial_t + 4.58 \partial_x.$$

La velocidad respecto al observador de la partícula resultante será  $v' = p'/m'_{\text{ap}} = 0.509c$ , y por tanto para dicha partícula el factor de Lorentz es  $\gamma' = 1.16$ , con lo que la masa en reposo de la nueva partícula es  $m' = m'_{\text{ap}}/\gamma' = 7.75$  MeV.

Observar que tal y como hemos dicho antes la masa en reposo no se conserva,

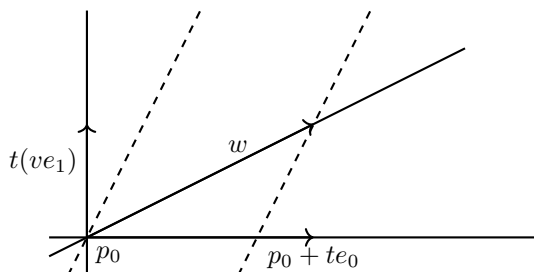
$$6 \text{ MeV} = m_1 + m_2 \neq m' = 7.75 \text{ MeV}.$$

### 3.8 Efectos relativistas

Vamos a poner de manifiesto algunas sorprendentes consecuencias que tiene la teoría de la relatividad especial, así como algunos fenómenos físicos que es capaz de explicar. Puesto que los observadores inerciales siguen trayectorias rectilíneas, supondremos en todos los ejemplos que los “viajeros” se mueven a lo largo del eje  $x$ , de modo que reduciremos la cuestión a dos dimensiones (la temporal y una espacial). Asimismo, supondremos fijada una referencia inercial  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ .

#### 3.8.1 (Dilatación del tiempo)

Calculemos el tiempo que transcurre para un móvil que se mueve inercialmente en la dirección positiva del eje  $x$ . Desde la referencia se observa que viaja un tiempo  $t$  a una velocidad  $ve_1$ , de modo que su trayectoria viene representada por el vector  $w = te_0 + tve_1$ .



Puesto que el tiempo propio (el tiempo que mide el viajero) es la longitud de su trayectoria, debe ser

$$\tau = |w| = \sqrt{w \cdot w} = \sqrt{t^2 - \frac{(tv)^2}{c^2}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

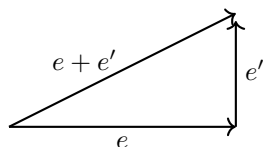
con lo que se obtiene la conocida expresión

$$\boxed{\tau = \frac{t}{\gamma}}$$

(Fórmula de dilatación del tiempo)

Nótese que tal fórmula es la misma que la obtenida en la pág. 50. Aunque su nombre clásico es *fórmula de dilatación*, sería más correcto hablar de *fórmula de contracción*, pues afirma que el tiempo medido por el viajero es menor, pues  $\tau < t$  cuando  $v > 0$  (es decir,  $\gamma > 1$ ).

Una forma geométrica de ver este efecto es mediante el teorema de Pitágoras. Para esta métrica, salvo constantes ( $c = 1$ ), diría que



$$(e + e')(e + e') = e \cdot e + e' \cdot e'$$

$$|e + e'|^2 = |e|^2 - \langle e', e' \rangle$$

si  $e$  y  $e'$  son dos vectores ortogonales, de modo que  $|e + e'| < |e|$ . Aplicando esto

a  $e = te_0$  y  $e' = t(ve_1)$  se tiene que el tiempo para el viajero debe ser menor que para el observador (y difieren en  $\langle tve_1, tve_1 \rangle$ ).

En el dibujo se observa también que la simultaneidad es relativa. Supongamos que a una distancia  $tv$  del observador (la Tierra) se encuentra un planeta, de modo que el viajero lo alcanza en un tiempo  $t$ . Las líneas rayadas indican cuál es el espacio para el viajero, por lo que cuando éste alcanza el planeta, simultáneamente con él en la Tierra aún estarían esperando a que la nave llegara.

### 3.8.2 (Paradoja de los gemelos)

La paradoja de los gemelos es probablemente una de las cuestiones más conocidas de la teoría de la relatividad. Fue propuesta originalmente por el mismo A. Einstein y posteriormente utilizada por los detractores de la relatividad para negarle credibilidad.

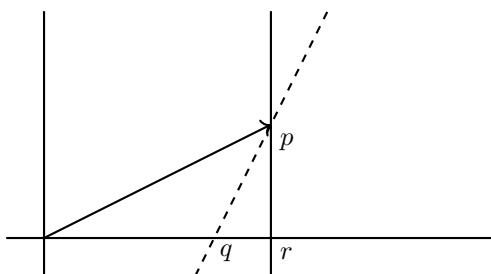
Supongamos que Rómulo y Remo son dos hermanos gemelos de 20 años de edad. Rómulo es elegido para viajar al planeta Gliese 581g, a 19.8 años luz de la Tierra, en una nave espacial que se mueve a una velocidad constante de  $0.99c$ , para comprobar si hay vida extraterrestre, e inmediatamente volver a la Tierra. Mientras tanto, su hermano Remo aguardará su llegada en nuestro planeta.

Remo espera a su hermano durante 40 años, que es el tiempo que tardará Rómulo en recorrer los 39.6 años luz de ida y vuelta. Como conoce la teoría de la relatividad, calcula que para Rómulo sólo transcurrirán 4 años, pues  $\gamma = 10$ . Por tanto, en el reencuentro, Rómulo tan sólo tendrá 24 años mientras que Remo será un anciano de 60 años. *Rómulo es más joven que Remo.*

Por otra parte Rómulo, que también ha estudiado relatividad, sabe que no hay observadores privilegiados y el problema igualmente puede plantearse desde el punto de vista del viajero. Para él, es la Tierra quien se mueve a  $0.99c$ , por lo que si en la nave han transcurrido 4 años, en la Tierra debido a la dilatación del tiempo habrán transcurrido 0.4 años. Por tanto, al reencontrarse con su hermano, Rómulo tendrá 24 años mientras Remo aún no ha cumplido los 21. *Remo es más joven que Rómulo.*

Ambos argumentos son contradictorios, pero ¿quién tiene razón?

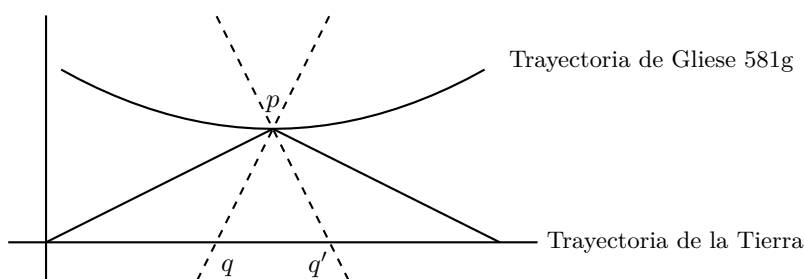
En realidad, la paradoja surge en el momento en el que Rómulo olvida que la simultaneidad depende del observador. Fijémonos por ahora tan sólo en el viaje de ida, es decir, antes de que Rómulo de la vuelta. El siguiente dibujo recoge la situación:



Remo, desde la Tierra, ha medido la distancia de la Tierra al exoplaneta, y sabe el tiempo y el momento (para él) en el que su hermano llegará al planeta.

Eso no es discutible. Los sucesos  $p$  y  $r$  de llegada al planeta para Rómulo y Remo respectivamente deben ser simultáneos para Remo. Por tanto, el cálculo de la dilatación del tiempo que hace Remo sobre el tiempo que tardará su hermano es correcto. Sin embargo, cuando Rómulo aplica la dilatación del tiempo para saber el tiempo que transcurrirá en la Tierra, implícitamente está asumiendo que los sucesos de llegada al planeta de la nave y en la Tierra son simultáneos para él, lo cual no es cierto. Los sucesos  $p$  y  $r$  no son simultáneos para Rómulo. El suceso  $q$  de la trayectoria de la Tierra es simultáneo para Rómulo con su llegada al planeta, pero no es el suceso  $r$  de llegada de la nave para Remo. Cuando en la Tierra ocurre  $q$ , para Remo la nave aún no ha llegado a su destino. El mismo error comete Rómulo en el viaje de vuelta.

Pero además de eso, hay una razón aún mayor por la que el cálculo de Rómulo es incorrecto. Dibujemos ahora ya sí el viaje completo:



Tras llegar al planeta a velocidad  $0.99c$  en el suceso  $p$ , para poder iniciar su viaje de vuelta, Rómulo necesariamente tiene que frenar y volver a acelerar la nave. Es decir, Rómulo pasa a ser un observador no inercial y las ecuaciones de la relatividad especial no son aplicables a él. Más aún, analizando con un poco de detalle los momentos próximos a  $p$  vemos que lo que ocurre es sorprendente:

- Un instante antes de llegar al planeta en  $p$  y dar la vuelta, los relojes de la nave marcan 2 años de viaje. Simultáneamente (para Rómulo) con la inminente llegada a la Tierra (es decir, un instante antes de  $q$ ), para Remo tan sólo han pasado 0.2 años. Para Rómulo, los relojes de la Tierra parecen ir más despacio.
- Un instante después de abandonar el planeta en  $p$  tras acelerar, para Rómulo apenas han pasado unos segundos<sup>11</sup>. Sin embargo, simultáneamente con él observa que su hermano ha envejecido en un abrir y cerrar de ojos ¡36.4 años! Ese es el tiempo que en la trayectoria de la Tierra separa  $q$  y  $q'$ .

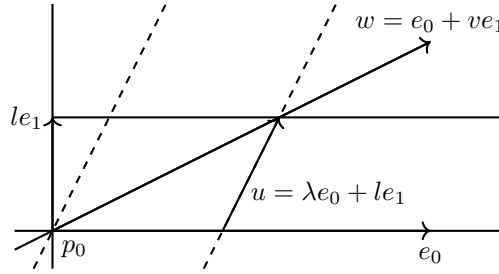
Es decir, mientras Rómulo frena y acelera, desde la Tierra observan que los relojes de la nave avanzan muy, muy despacio. O lo que es equivalente: en los pocos segundos que dura la maniobra a bordo de la nave, observan que los relojes de la Tierra avanzan muy, muy rápido. Este fenómeno tiene que ver con la teoría de la Relatividad General del capítulo 4.

<sup>11</sup>Estamos suponiendo que la frenada y la posterior aceleración ocurren simultáneamente, lo que no es del todo realista, pero lo suponemos así para simplificar el problema.

### 3.8.3 (Contracción de la longitud)

Consideremos una barra de longitud  $l$  en reposo en una referencia inercial, con un extremo en el punto  $p_0$  y otro en  $p_0 + le_1$ . Vamos a ver cual sería su longitud para un viajero que se mueva con velocidad  $ve_1$ , es decir, en la dirección de la barra.

La trayectoria del viajero vendrá determinada, como en el caso anterior, por el vector  $w = e_0 + ve_1$ , mientras que para él la barra vendrá determinada por un vector  $u = \lambda e_0 + le_1$  en el espacio del viajero, para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$  a determinar. El módulo (respecto  $h$ ) de  $u$  es justamente la longitud de la barra para el viajero.



El hecho de que el espacio y el tiempo sean ortogonales para el observador implica que

$$0 = w \cdot u = \lambda - vl/c^2 \implies \lambda = vl/c^2$$

de modo que  $u = l \left( \frac{v}{c^2} e_0 + e_1 \right)$ , y concluimos que la longitud  $l'$  de la barra para el viajero es

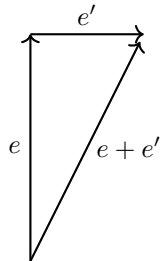
$$l' = \sqrt{\langle u, u \rangle} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

y obtenemos

$$\boxed{l' = \frac{l}{\gamma}}$$

(Fórmula de contracción de la longitud)

Por tanto, un viajero observará una menor longitud de la barra (en particular, él verá como la barra achatada viene hacia él), y en general, de las distancias. De nuevo podemos apreciar este efecto geoméricamente vía el teorema de Pitágoras (ahora su versión para la métrica del espacio). Para esta métrica, salvo constantes ( $c = 1$ ), diría que



$$\langle e + e', e + e' \rangle = \langle e, e \rangle - e' \cdot e'$$

si  $e$  y  $e'$  son ortogonales, de modo que  $\langle e + e', e + e' \rangle < \langle e, e \rangle$ . A modo de ejemplo: en abril de 2016 se presentó el proyecto *Breakthrough Starshot*,

respaldado por STEPHEN HAWKINGS (1942), cuyo objetivo es mandar pequeños chips como naves espaciales al sistema solar Alfa Centauri. En lugar de usar el clásico combustible fósil, con el que se tardaría unos 30 000 años en llegar, se pretende impulsar estas micronaves con un gigantesco láser que movería unas velas solares instaladas en las naves, con las que se pretende alcanzar una velocidad de  $0.2c$ . Si suponemos que las naves viajan a tal velocidad durante todo el trayecto, para los terrícolas recorrerían los 4.4 años luz que nos separan en 22 años. Sin embargo, si las naves contaran con reloj y un sistema que midiese distancias, determinarían que han recorrido una distancia de 1 billón de kilómetros menos (0.1 años luz) en un tiempo 6 meses menor.

### 3.8.4 (Paradoja del garaje)

Cuando se mueve un objeto no puntual, su trayectoria no vendrá dada por una curva (como con las partículas puntuales), sino por un subconjunto  $F \subset \mathbb{A}_4$ , y para un observador inercial la posición del cuerpo en un instante  $t$  de la trayectoria del observador vendrá dada por  $\mathcal{E}_t \cap F$ , donde  $\mathcal{E}_t$  denota el hiperplano de simultaneidad en el instante  $t$ . Por lo tanto, la forma que tenga un objeto dependerá de la velocidad del observador. Este punto es clave para entender la *paradoja del garaje*.

Supongamos que disponemos de un coche de longitud  $l_C$  muy rápido, capaz de alcanzar velocidades cercanas a la luz, y un garaje de longitud  $l_G$  con una puerta delantera y trasera que se abren y cierran al mismo tiempo, pero con el problema que el garaje es ligeramente más pequeño que el coche, por lo que no cabe en el garaje. Sin embargo, puesto que sabemos relatividad, le pedimos a un amigo que conduzca velozmente hacia el garaje mientras que nosotros observamos desde la calle. Debido a la contracción de la longitud, veremos el coche achatado, de forma que sí cabrá en el garaje y podremos cerrar las puertas por un instante.

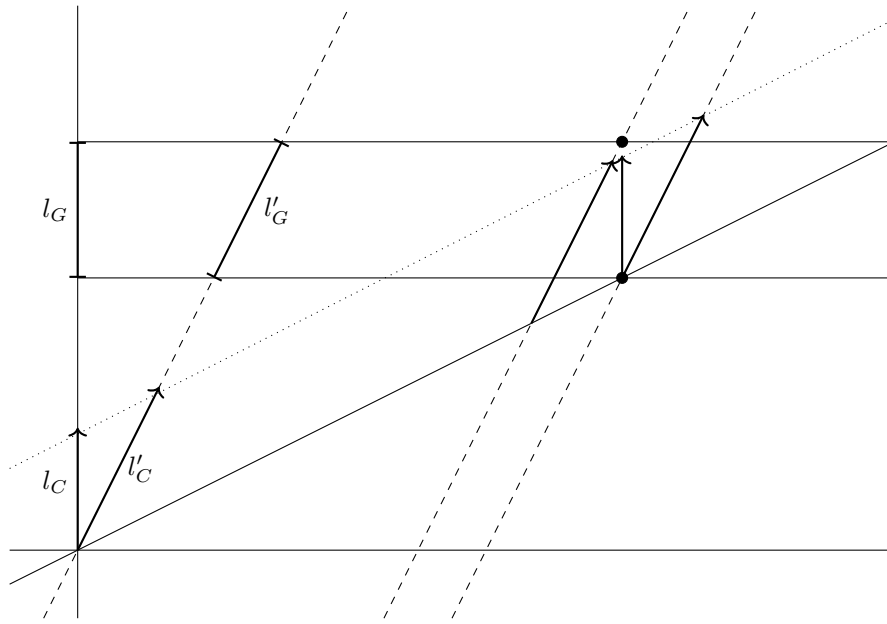
Pero nuestro amigo, que también sabe relatividad, se niega en rotundo, pues para él es el garaje quien se contrae, y por tanto aún menos cabrá ahora el coche, con lo que al cerrarse las dos puertas él no sairá bien parado.

¿Quién tiene razón?

La paradoja surge en el momento que nuestro amigo olvida que la simultaneidad depende del observador: que para nosotros las dos puertas se cierran al mismo tiempo no significa que para él también sea así, y esa es justamente la clave de la paradoja.

El dibujo es suficiente para explicar la situación. En cuanto vemos al coche achatado entrar por el garaje, activamos el interruptor de las puertas y éstas se cierran y abren en el mismo instante (para nosotros). El par de puntos muestran los sucesos en los que las puertas se activan (simultáneamente para nosotros, pero no para nuestro amigo).

Sin embargo, nuestro amigo observa algo diferente (los hiperplanos de simultaneidad para él se han representado con una línea a rayas). Aún cuando la parte trasera del coche sigue fuera del garaje y la delantera no ha alcanzado la puerta de salida, ésta se activa (se cierra y abre); y justo cuando la parte trasera ha atravesado la puerta de entrada, ésta se cierra y se abre.



Por tanto, nuestro amigo tenía razón al afirmar que el coche no cabrá en el garaje: él nunca lo verá dentro debido a la contracción de la longitud; pero se equivocó con su predicción al olvidarse de la relatividad de la simultaneidad.

### 3.8.5 (Adición de velocidades)

En la mecánica clásica, si un coche viaja a velocidad  $v$  y su conductor lanza una piedra a velocidad  $v'$ , un observador que vea esto desde fuera verá la piedra con velocidad  $v + v'$ . Sin embargo, esta ley no puede ser cierta en la relatividad pues todo cuerpo debe moverse a velocidad menor que  $c$  en cualquier referencia inercial. Analicemos las consecuencias que la teoría de la relatividad tiene en la adición de velocidades.

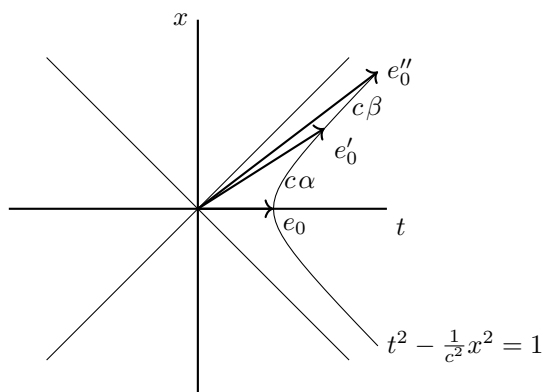
Fijemos una referencia inercial  $(p_0; e_0, e_1)$ . Para que un vector  $e = te_0 + xe_1$  sea una velocidad (es decir, sea orientado al futuro y unitario), debe ser  $t > 0$  y  $t^2 - \frac{1}{c^2}x^2 = 1$ . Es decir, el conjunto de velocidades forman la rama del semiespacio  $t > 0$  de la hipérbola  $t^2 - \frac{1}{c^2}x^2 = 1$ . Tal hipérbola puede ser parametrizada mediante funciones hiperbólicas,

$$\sigma(\alpha) = (\cosh \alpha, c \sinh \alpha),$$

de modo que las coordenadas de cualquier velocidad  $e$  son  $t = \cosh \alpha$ ,  $x = c \sinh \alpha$ . En particular, ya se vio en la pág. 57 que  $c\alpha$  es la longitud (respecto  $h$ ) del arco que une  $e_0$  con  $e$ . Por tanto, la velocidad aparente de  $e = (\cosh \alpha)e_0 + c(\sinh \alpha)e_1$  es

$$v = c \tanh \alpha.$$

Consideremos tres observadores inerciales con velocidades  $e_0, e'_0, e''_0$  y sea  $v_{i/j}$  la velocidad aparente del observador  $i$ -ésimo respecto al observador  $j$ -ésimo.



Si  $v_{1/2} = c \operatorname{tgh} \alpha$  y  $v_{2/3} = c \operatorname{tgh} \beta$  (recordar que  $\operatorname{tgh}$  induce un difeomorfismo con  $(-1, 1)$ , pág. 56), entonces  $\alpha$  es la longitud del arco que une  $e_0$  con  $e'_0$ ; y  $\beta$  es la longitud del arco que une  $e'_0$  con  $e''_0$ , con lo que la velocidad con la que el tercer observador ve al primero viene dada por la fórmula de la suma de las tangentes hiperbólicas:

$$v_{3/1} = c \operatorname{tgh}(\alpha + \beta) = c \frac{\operatorname{tgh} \alpha + \operatorname{tgh} \beta}{1 + (\operatorname{tgh} \alpha)(\operatorname{tgh} \beta)}$$

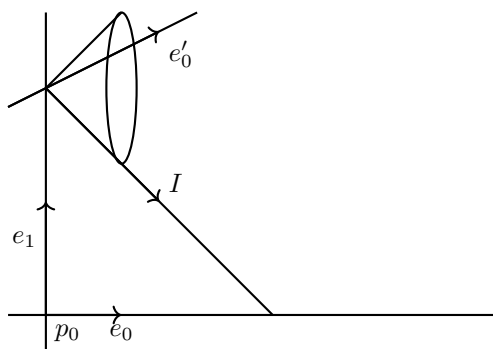
y por tanto

$$v_{3/1} = \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2}v_{2/1}}{c^2}} \quad (\text{Fórmula de adición de velocidades})$$

### 3.8.6 (Corrimiento al rojo y al azul)

La relatividad especial también es capaz de explicar dos conocidos fenómenos astronómicos. Cuando una estrella se aleja o se acerca, se observa que su espectro se desplaza hacia el rojo o hacia el azul, respectivamente. Esto es conocido como corrimiento al rojo (*redshift*) y corrimiento al azul (*blueshift*). Expliquemos por qué ocurre.

Supongamos en primer lugar que una estrella se aleja de nosotros a velocidad aparente  $ve_1$ . Si desde nuestro sistema de referencia medimos una energía  $\varepsilon$  de los fotones que nos llegan, veamos cuál es el impulso de los fotones.





Puesto que  $I$  es isótropo, deberá ser proporcional a  $e_0 - ce_1$ , es decir,  $I = \lambda(e_0 - ce_1)$ . Puesto que la energía observada es  $\varepsilon$ , entonces

$$\varepsilon = c^2(e_0 \cdot I) = c^2[e_0 \cdot (\lambda e_0 - \lambda v e_1)] = \lambda c^2$$

luego  $\lambda = \varepsilon/c^2$  y debe ser  $I = c^{-2}\varepsilon(e_0 - ce_1)$ .

Por otra parte, puesto que la estrella se aleja de nosotros a velocidad  $v$ , su velocidad será  $e'_0 = \gamma(e_0 + v e_1)$  por 3.4.3. Así, la energía  $\varepsilon'$  de los fotones medida por un observador inercial situado en la estrella será

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= c^2(e'_0 \cdot I) = c^2[(\gamma e_0 + \gamma v e_1) \cdot (c^{-2}\varepsilon e_0 - \varepsilon c^{-1}e_1)] = \gamma\varepsilon + \gamma\varepsilon v/c \\ &= \varepsilon\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \varepsilon \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \varepsilon \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} \end{aligned}$$

y entonces

$$\boxed{\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}} \quad \textbf{(Corrimiento al rojo)}$$

La energía de los fotones recibidos es menor que con la que se emiten,  $\varepsilon < \varepsilon'$ , cuando la fuente se aleja, y por tanto las rayas del espectro de la estrella se desplazan hacia zonas de menos energía, esto es, hacia el rojo.

Si la estrella se acerca en vez de alejarse, su velocidad será ahora  $-ve_1$ , y un razonamiento idéntico concluye que la energía con la que la estrella emite fotones es

$$\boxed{\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}} \quad \textbf{(Corrimiento al azul)}$$

La energía de los fotones recibidos es mayor que con la que se emiten,  $\varepsilon > \varepsilon'$ , cuando la fuente se acerca, y por tanto las rayas del espectro de la estrella se desplazan hacia zonas de mayor energía, esto es, hacia el azul.

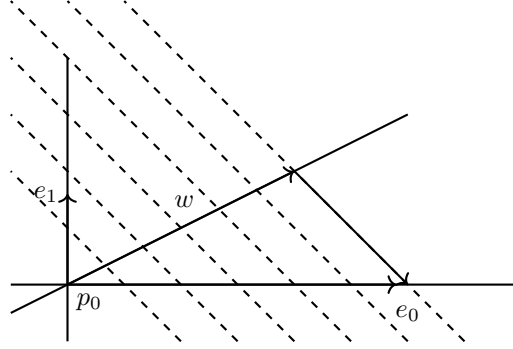
Este fenómeno del corrimiento al rojo fue el que llevó a EDWIN HUBBLE (1889 – 1953) en 1929, tras muchas observaciones, a afirmar que el universo se expande. Hubble observó que, salvo un grupo cercano, todas las galaxias presentaban un corrimiento al rojo, y cuanto más lejanas se encontraban, mayor era el corrimiento. Esto solo tenía sentido si el universo, incluyendo el espacio intergaláctico, se estaba expandiendo.

Otra razonable cuestión también es contestada con este fenómeno: ¿cómo se vería el espacio en una nave espacial que viajara a una velocidad muy próxima a la luz? Para una velocidad de  $0.9999995c$  (respecto la Tierra) la respuesta es curiosa: el corrimiento al azul en este caso haría que la luz de las estrellas desapareciera del espectro visible (se percibiría dentro del rango de rayos X), pero sin embargo la radiación del CMB<sup>12</sup> se haría visible. Esto sumado a la aberración de la luz (ver 3.8.8) concluyen que lo que se vería sería un disco de luz en la dirección de movimiento, más intenso en el centro. Los cálculos pueden verse en [1].

<sup>12</sup>Fondo Cósmico de Microondas

### 3.8.7 (Efecto Doppler)

Supongamos que recibimos de un observador inercial señales luminosas con cierta frecuencia, digamos por ejemplo que recibimos  $\nu$  fotones por unidad de tiempo. Puesto que se moverá con cierta velocidad relativa constante, y la velocidad de la luz también es constante, es claro que enviará las señales también de forma periódica, digamos  $\nu'$  por segundo.



Supongamos en primer lugar que el viajero se aleja de nosotros con velocidad aparente  $ve_1$ . Consideremos el intervalo de la trayectoria del viajero, determinado por el vector  $w$ , en el que éste emite las  $\nu$  señales que a nosotros nos llegan por segundo. Tal vector  $w$  deberá ser

$$w = e_0 - \lambda(e_0 - ce_1) = (1 - \lambda)e_0 + \lambda ce_1,$$

y además proporcional a  $e_0 + ve_1$ , de modo que tiene que ser  $v = \lambda c/(1 - \lambda)$ . Despejando, se obtiene  $\lambda = v/(v + c)$ , y por tanto sustituyendo arriba

$$w = \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}e_0 + \frac{v}{1 + \frac{v}{c}}e_1.$$

Por tanto, el viajero emite los  $\nu$  fotones que nosotros recibimos en un tiempo (propio) de

$$|w| = \left( \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{v}{1 + \frac{v}{c}} \right)^2 = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}},$$

por lo que en cada segundo emitirá  $\nu/|w|$  fotones, esto es,

$$\boxed{\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}} \quad (\text{Efecto Doppler - fuente alejándose})$$

con lo que se concluye que la frecuencia recibida es menor que la emitida,  $\nu < \nu'$ , cuando la fuente se aleja. Si en vez de alejarse, el viajero se acerca con velocidad aparente  $-ve_1$ , un razonamiento idéntico al anterior diría que

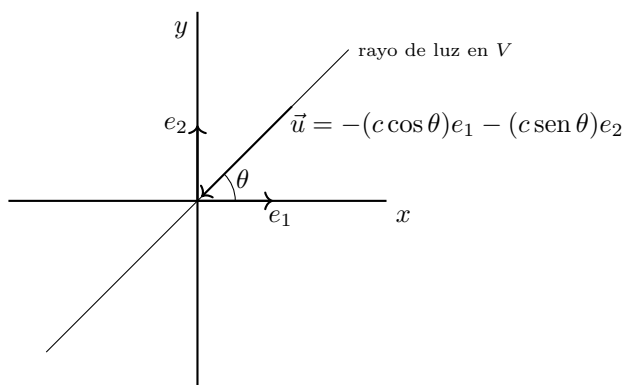
$$\boxed{\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}} \quad (\text{Efecto Doppler - fuente acercándose})$$

y se extrae que la frecuencia recibida es mayor que la emitida,  $\nu > \nu'$ , cuando la fuente se acerca.

Adviértase el parecido de estas fórmulas con las que 3.8.6 da para la energía de los fotones, el factor es exactamente el mismo. En realidad, tal relación no es casual, y la explicación es mecánica cuántica: ésta entiende los fotones como ondas a las que asocia cierta función periódica, y afirma que la energía de los fotones y la frecuencia de dicha función son proporcionales. De ahí que también sea usual hablar sobre los fenómenos de corrimiento al rojo y al azul como el **efecto Doppler relativista**.

### 3.8.8 (Aberración de la luz)

Consideremos para este ejemplo un espacio-tiempo tridimensional, donde el espacio tiene dimensión dos. Fijemos un observador inercial con velocidad  $e_0$ , junto con sus ejes espaciales  $x$  e  $y$ . Si un rayo de luz alcanza al observador, entonces podríamos considerar el camino en  $V = \langle e_0 \rangle^\perp$  que se observa que recorre el rayo, esto es, la proyección del rayo de luz sobre  $V$ , que es una recta. Denotemos por  $\theta$  al ángulo (respecto  $h$ , pues en  $V$  es una métrica euclídea) que forma dicha recta con  $e_1$ , y por  $\vec{u}$  a la velocidad aparente del rayo de luz.



Si  $\theta \neq 0$ ,  $c \cos \theta < c$  y  $c \sin \theta < c$ ; y es claro que el observador puede interpretar cada componente de  $\vec{u}$  en el eje  $x$  e  $y$  como las velocidades aparentes de ciertos observadores que se mueven hacia él, en el eje  $x$  ó  $y$  respectivamente.

Supongamos entonces que otro observador (supongamos para simplificar que es un viajero en una nave espacial) se mueve en el eje  $x$  de nuestro observador con una velocidad aparente  $v$ , es decir,  $\vec{v} := v e_1$ . Nos preguntamos entonces: ¿qué ángulo verá el viajero que el rayo de luz forma con su eje espacial  $x'$  en el cual se está desplazando?

En primer lugar calculemos la velocidad aparente de la primera componente del rayo de luz, denotémosla por  $\vec{u}_x = -(c \cos \theta) e_1$ , para el viajero. Como tanto la primera componente del rayo de luz como el viajero se desplazan por el eje  $x$  del observador, podemos utilizar la fórmula de adición de velocidades relativista vista en 3.8.5: de acuerdo con la notación de entonces, los tres observadores son: el primero, nuestro observador; el segundo, el viajero; y el tercero, la primera componente del rayo de luz. Entonces tenemos

$$v_{3/1} = \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2} v_{2/1}}{c^2}} \iff v_{3/2} = \frac{v_{3/1} - v_{2/1}}{1 - \frac{v_{3/1} v_{2/1}}{c^2}}$$

y por tanto

$$u'_x = \frac{-(c \cos \theta + v)}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}},$$

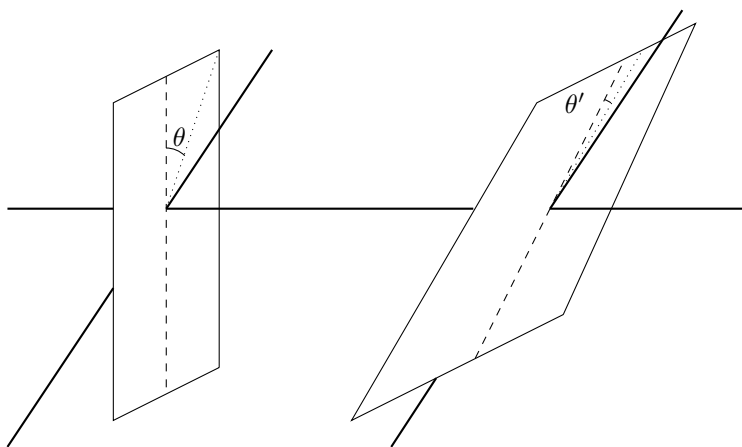
donde el signo menos en el módulo de una velocidad aparente debe interpretarse como que el móvil se acerca al observador, esto es,

$$\vec{u}_x' = -\frac{c \cos \theta + v}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}} e_1'.$$

Pero ahora, análogamente a antes, esta velocidad aparente en el eje  $x'$  del viajero se corresponde con la primera componente de la velocidad aparente del rayo de luz en el plano espacial del viajero, con lo que si  $\theta'$  es el ángulo que forma la recta proyección del rayo al espacio del viajero con el vector  $e_1'$ , entonces debe ser  $\cos \theta' = -u'_x/c$ , es decir,

$$\boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}} \quad (\text{Fórmula de aberración de la luz})$$

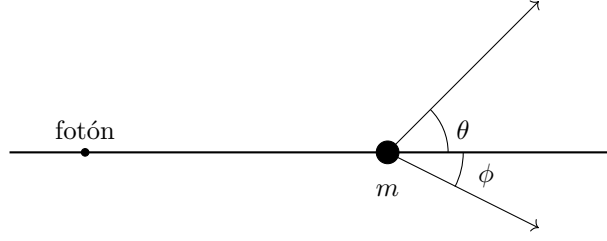
Nótese que cuando  $v \rightarrow c$ ,  $\cos \theta' \rightarrow 1$  y  $\theta' \rightarrow 0$ : si viajáramos en una nave espacial a velocidades cercanas a la luz, y mirásemos el viaje en la dirección del movimiento, seríamos capaces de ver luz de estrellas situadas detrás de la nave, con lo que el campo de visión habría aumentado considerablemente.



### 3.8.9 (Efecto Compton)

Supongamos como en el ejemplo anterior un espacio-tiempo de dimensión 3, y fijemos un observador inercial. Vamos a estudiar cómo la energía de un fotón varía al chocar con una partícula con masa.

Supongamos que un fotón de energía  $\varepsilon$  que se desplaza por el eje  $x$  del observador colisiona con una partícula en reposo con masa intrínseca  $m$ . El choque produce que el fotón se desvíe y prosiga su trayectoria en el semiplano superior formando un ángulo  $\theta$  (respecto  $h$ ) con el eje  $x$ ; mientras que la partícula masiva adquiere una velocidad  $v$  tras el impacto y se empieza a mover en el semiplano inferior formando un ángulo  $\phi$  (respecto  $h$ ) con el eje  $x$ .



Denotemos por  $I_1, I_2$  los impulsos de la partícula y el fotón antes de la colisión, respectivamente; y por  $I'_1, I'_2$  los impulsos después del choque. A partir de la deducción del impulso de un fotón conocida su energía vista en 3.8.6 y teniendo en cuenta que la velocidad aparente de la partícula tras el choque debe ser  $\vec{v} = v \cos \phi \, e_1 - v \sin \phi \, e_2$  debe ser claro que

$$\begin{aligned} I_1 &= m e_0, & I'_1 &= m \gamma (e_0 + v \cos \phi \, e_1 - v \sin \phi \, e_2), \\ I_2 &= c^{-2} \varepsilon (e_0 + c e_1), & I'_2 &= c^{-2} \varepsilon' (e_0 + c \cos \theta \, e_1 + c \sin \theta \, e_2), \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon'$  denota la energía del fotón tras el choque. La ley de conservación del impulso establece que  $I_1 + I_2 = I'_1 + I'_2$ , lo que en coordenadas se traduce como

$$\begin{aligned} m + c^{-2} \varepsilon &= m \gamma + c^{-2} \varepsilon', \\ c^{-1} \varepsilon &= m \gamma v \cos \phi + c^{-1} \varepsilon' \cos \theta, \\ 0 &= -m \gamma v \sin \phi + c^{-1} \varepsilon' \sin \theta. \end{aligned}$$

Reescribiendo  $p = m \gamma v$ , de la segunda ecuación tenemos  $\sin \phi = c^{-1} \varepsilon' \sin \theta / p$  y de la tercera  $\cos \phi = (c^{-1} \varepsilon - c^{-1} \varepsilon' \cos \theta) / p$ , con lo que resulta

$$1 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{c^{-2} \varepsilon'^2}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{c^{-2} \varepsilon^2}{p^2} + \frac{c^{-2} \varepsilon'^2}{p^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{c^{-2} \varepsilon \varepsilon' \cos \theta}{p^2},$$

es decir,

$$p^2 c^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon \varepsilon' \cos \theta. \quad (3.25)$$

Por otra parte, multiplicando por  $c^2$  la primera ecuación se obtiene

$$m c^2 + \varepsilon = m c^2 \gamma + \varepsilon' = E_{\text{ap}} + \varepsilon' = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2} + \varepsilon',$$

es decir,  $m c^2 + \varepsilon - \varepsilon' = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2}$ , y por tanto

$$m^2 c^4 + (\varepsilon - \varepsilon')^2 + 2 m c^2 (\varepsilon - \varepsilon') = m^2 c^4 + p^2 c^2 \stackrel{(3.25)}{=} m^2 c^4 + \varepsilon'^2 + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon \varepsilon' \cos \theta,$$

y simplificando  $\varepsilon \varepsilon' \cos \theta = \varepsilon \varepsilon' + m c^2 \varepsilon' - m c^2 \varepsilon$ , es decir,

$$\cos \theta = 1 + m c^2 \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon \varepsilon'} = 1 + m c^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'} \right),$$

con lo que llegamos a

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{m c^2} (1 - \cos \theta)} \quad \textbf{(Efecto Compton)}$$

El efecto toma su nombre del físico norteamericano ARTHUR COMPTON (1892 – 1962), quien lo estudió por primera vez en 1923, y por ello fue galardonado con el nobel de física cuatro años más tarde.



## Capítulo 4

# Gravitación relativista

En la Mecánica Clásica, a lo largo de los capítulos 1 y 2, hemos estudiado la estructura del espacio-tiempo de Galileo, como un espacio afín, en el que posteriormente hemos añadido medidas de longitudes y tiempo, partículas puntuales, distribuciones continuas de materia, etc. Más tarde, en el capítulo 3, hemos vuelto a estudiar tales conceptos en un espacio-tiempo de Minkowski, que volvía a ser un espacio afín (pero que la métrica fuera no singular facilitaba mucho las cosas, al menos conceptualmente). Es decir, hasta ahora siempre hemos estado en un espacio afín.

Decir que estamos en un espacio afín es decir que existen sistemas de referencia inerciales (referencias afines). Cualquier libro de física fundamenta todas sus ecuaciones en un sistema de referencia inercial, y su existencia es admitida por cualquier texto sin ni siquiera recalcar en gran medida esa cuestión. ¿Podemos señalar, al menos, un sistema de referencia inercial<sup>1</sup>? La habitación en la que nos encontramos parece un buen candidato para ser origen de la referencia. Bueno, estamos sobre la Tierra que gira sobre sí misma... mejor el centro de la Tierra. Bueno, la Tierra gira alrededor del Sol, así que mejor el centro del Sol, o más precisamente, el centro de masas del Sistema Solar. Pero nuestro sistema planetario gira alrededor del núcleo galáctico, y la Galaxia respecto a otras,... . Bueno, pues tomemos el centro de masas del Universo,... que como el Universo (a grandes distancias) es homogéneo, está... en el Departamento de Matemáticas de la UEx, en Badajoz. Esto, claramente, no tiene ningún sentido, y lo único que se extrae es que

*Hay que hacer física sin sistemas de referencia inerciales,*

porque no podemos fundamentar la teoría en un elemento que no podemos señalar en la realidad.

### 4.1 Conexión de Cartan

Supongamos que tenemos una gravitación newtoniana

$$X = (\mathbb{A}_4, E, g, h, T^2, \vec{F}).$$

---

<sup>1</sup>El problema se encuentra en señalar el origen de la referencia, con los ejes no hay problema, pues los giroscopios conservan el eje de giro.

A. Einstein se planteó que el movimiento en caída libre no se distingue del movimiento inercial. Es decir, que una persona en una pequeña habitación cerrada que cae hacia el Sol por la acción de la gravedad no sabría decidir si a su existencia le queda un breve periodo de tiempo o si se encuentra en un espacio afín (sin materia). La necesidad de que la habitación sea pequeña (infinitesimal) es porque, si tuviéramos también un objeto en dicha habitación, si la persona y el objeto estuvieran muy separados, debido a que ambos sería atraídos por el centro del Sol, con el tiempo la persona observaría que el objeto se le acerca.

Con lo anterior queremos decir que, si queremos eliminar los sistemas de referencia inerciales, debemos eliminar el espacio-afín, y sustituirlo por una variedad diferenciable. Pero no una cualquiera, debe ser una que infinitesimalmente tenga una estructura afín. Einstein llamó *Principio de Equivalencia* a la afirmación de que la estructura de las trayectorias en caída libre ha de coincidir infinitesimalmente con la de las trayectorias inerciales, es decir, que las trayectorias en caída libre han de ser trayectorias geodésicas de una cierta conexión lineal  $\nabla$  sobre el espacio-tiempo  $X$ . Formalmente,

**Definición.** Diremos que una trayectoria  $\sigma = (t, x(t), y(t), z(t))$  es de **caída libre** si  $T^{\nabla_0}T = \vec{F}$ , lo que en coordenadas inerciales equivale a que

$$x''(t) = F_1(\sigma(t)) \quad , \quad y''(t) = F_2(\sigma(t)) \quad , \quad z''(t) = F_3(\sigma(t)).$$

**Teorema 4.1.1** *Sea  $X$  una gravitación newtoniana. Existe una única conexión lineal simétrica  $\nabla$ , llamada **conexión de Cartan**, cuyas trayectorias geodésicas son las trayectorias de caída libre. Tal conexión viene dada, en una referencia inercial, por los símbolos de Christoffel*

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^k = -F_k, & k = 1, 2, 3 \\ \Gamma_{ij}^k = 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (4.1)$$

*Demostración.* Para la existencia, solo hay que comprobar que las trayectorias de caída libre  $\sigma = (t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  cumplen la condición de geodésica (pág. 128): en efecto, para  $k = 0$  tenemos

$$\sum_{i,j} x'_i x'_j (\Gamma_{ij}^0 \circ \sigma) = 0,$$

y para  $k = 1, 2, 3$ ,

$$\sum_{i,j} x'_i x'_j (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) = (F_k \circ \sigma).$$

Veamos la unicidad. Si  $\bar{\nabla}$  y  $\nabla$  son dos conexiones simétricas que tienen como trayectorias geodésicas<sup>2</sup> a las trayectorias en caída libre, consideremos el tensor diferencia

$$A(D_1, D_2) = D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_1^{\nabla} D_2.$$

<sup>2</sup>Nótese que no podemos aplicar directamente la propiedad de que *dos conexiones con la misma torsión y las mismas geodésicas son iguales*; porque aquí solo estamos considerando curvas geodésicas que sean trayectorias, es decir, cuyos vectores tangentes tengan módulo 1.



Si  $T$  es el campo tangente a una trayectoria en caída libre ( $\omega(T) = 1$ ), entonces  $A(T, T) = 0$ , y por tanto para cada  $p \in X$  y cada  $D_p \in T_p X$  con  $\omega(D_p) = 1$ , hay una trayectoria geodésica que pasa por el punto con vector tangente  $D_p$ , y  $A_p(D_p, D_p) = 0$ . Pero si  $A$  se anula en tales vectores, también se anula en todos sus múltiplos, luego  $A$  en dos campos iguales se anula en todo el espacio salvo a lo sumo en el hiperplano  $\omega = 0$ . Pero como los tensores son continuos,  $A$  en dos campos iguales se anula en todo el espacio, es decir,  $A$  es hemisimétrico. Como era simétrico por tener ambas conexiones la misma torsión (nula),  $A = 0$  y  $\bar{\nabla} = \nabla$ .  $\square$

Luego, si la condición del movimiento en caída libre  $T^{\nabla_0} T = \vec{F}$  la hemos sustituido por la condición de geodésica  $T^{\nabla} T = 0$  para una cierta conexión, ¿qué nos retiene para seguir considerando un espacio afín? La definición de gravitación newtoniana, tal como la tenemos expresada actualmente, depende de la estructura afín del espacio y su conexión estándar. Sin embargo, vamos a ver cómo podemos cambiar todas esas condiciones por otras que se expresan en términos de la conexión de Cartan, y por lo tanto perderemos toda dependencia al espacio afín.

En primer lugar nótese que

$$\partial_t^{\nabla} \partial_t = -\vec{F} \quad , \quad \partial_t^{\nabla} \partial_i = \partial_i^{\nabla} \partial_j = 0. \quad (4.2)$$

**Proposición 4.1.2** *La conexión de Cartan  $\nabla$  de una gravitación newtoniana cumple, en coordenadas inerciales:*

1.  $\nabla \partial_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
2.  $\nabla \partial_t = -dt \otimes \vec{F}$ .
3.  $\nabla dt = 0$ .
4.  $\nabla dx_i = F_i dt \otimes dt$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* 1) Si  $D = \sum_{j=0}^n f_j \partial_j$  en una referencia inercial, entonces

$$(\nabla \partial_i)(D) = D^{\nabla} \partial_i = \left( \sum_j f_j \partial_j \right)^{\nabla} \partial_i = \sum_j f_j (\partial_j^{\nabla} \partial_i) = 0,$$

luego  $\nabla \partial_i = 0$ .

2) Si  $D = \sum_{j=0}^n f_j \partial_j$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla \partial_t)(D) &= D^{\nabla} \partial_t = \left( \sum_j f_j \partial_j \right)^{\nabla} \partial_t = \sum_j f_j (\partial_j^{\nabla} \partial_t) = f_0(-\vec{F}) \\ &= dt(D)(-\vec{F}) = (-dt \otimes \vec{F})(D), \end{aligned}$$

luego  $\nabla \partial_t = -dt \otimes \vec{F}$ .

3) Calculemos las coordenadas de  $\nabla dt$  en la base  $\{dx_i \otimes dx_j\}$ . Para  $i, j = 0, 1, 2, 3$  son:

$$\nabla dt(\partial_i, \partial_j) = (\partial_i^{\nabla} dt)(\partial_j) = \partial_i(dt(\partial_j)) - dt(\partial_i^{\nabla} \partial_j) = 0,$$

porque  $dt(\partial_j) = 1$  ó  $0$  (constantes) y  $\partial_i^\nabla \partial_j = 0$  ó  $-\vec{F}$  (no depende de  $t$ ). Así que  $\nabla dt = 0$ .

4) Calculemos las coordenadas de  $\nabla dx_k$  al igual que antes. Para  $i, j = 0, 1, 2, 3$ , y  $k = 1, 2, 3$  son:

$$\nabla dx_k(\partial_i, \partial_j) = (\partial_i^\nabla dx_k)(\partial_j) = \partial_i(dx_k(\partial_j)) - dx_k(\partial_i^\nabla \partial_j).$$

Ahora, como antes el primer término siempre se anula; y el segundo también, salvo cuando  $i = j = 0$ , que vale  $-F_k$ . Así que  $\nabla dx_k = F_k dt \otimes dt$ .  $\square$

**Proposición 4.1.3** *La conexión de Cartan  $\nabla$  de una gravitación newtoniana es compatible con la métrica del tiempo y la del espacio:*

$$1. \nabla g = 0.$$

$$2. \nabla h = 0.$$

*Demostración.* Por una parte,

$$\nabla g = \nabla(dt \otimes dt) = (\nabla dt) \otimes dt + dt \otimes (\nabla dt) \stackrel{4.1.2}{=} 0,$$

y por otra

$$\nabla h = \nabla \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i \otimes \partial_i \right) = \sum_{i=1}^3 (\nabla \partial_i) \otimes \partial_i + \sum_{i=1}^3 \partial_i \otimes (\nabla \partial_i) \stackrel{4.1.2}{=} 0$$

$\square$

Estudiemos también cómo son los tensores torsión y curvatura de la conexión de Cartan. Como  $\nabla$  es simétrica, automáticamente tenemos  $\text{Tor}_\nabla = 0$ . En cuanto a la curvatura, nótese que, como es alterado en los dos primeros índices, se puede ver como una 2-forma valorada en los endomorfismos. Su expresión es la siguiente:

**Proposición 4.1.4** *El tensor de curvatura de una conexión de Cartan  $\nabla$  de una gravitación newtoniana viene dado, en coordenadas inerciales, por la expresión*

$$R = \sum_{i=1}^3 (dt \wedge dF_i) \otimes \partial_i \otimes dt. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Calculemos cuáles son sus coordenadas en una referencia inercial. Para  $i, j, k = 0, 1, 2, 3$

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = \partial_i^\nabla \partial_j^\nabla \partial_k - \partial_j^\nabla \partial_i^\nabla \partial_k = (*),$$

por la regla de Schwarz. Ahora, teniendo en cuenta que

$$\partial_j^\nabla \partial_k = \begin{cases} 0, & j, k \neq 0 \\ -\vec{F}, & j = k = 0 \end{cases}, \quad \partial_i^\nabla \partial_k = \begin{cases} 0, & i, k \neq 0 \\ -\vec{F}, & i = k = 0 \end{cases}$$

tenemos la siguiente casuística:

- Si  $i, j, k \neq 0$ ,  
 $(*) = 0$
- Si  $i = j = k = 0$ ,  
 $(*) = -\partial_0^\nabla \vec{F} + \partial_0^\nabla \vec{F} = 0$ .
- Si  $j = k = 0, i \neq 0$ ,  
 $(*) = -\partial_i^\nabla \vec{F} = -\partial_i^\nabla (\sum_{l=1}^3 F_l \partial_l) = -\sum_{l=1}^3 (\frac{\partial F_l}{\partial x_i} \partial_l + F_l \partial_i^\nabla \partial_l) =$   
 $= -\sum_{l=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} \partial_l$ .
- Si  $i = k = 0, j \neq 0$ , idéntico al anterior se tiene  
 $(*) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_j} \partial_l$ .

Con esto, en la base  $\{dx_i \otimes dx_j \otimes \partial_l \otimes dx_k\}$  tendremos

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 -\frac{\partial F_l}{\partial x_i} dx_i \otimes dt \otimes \partial_l \otimes dt \right) + \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_j} dt \otimes dx_j \otimes \partial_l \otimes dt \right) \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_j} dt \otimes dx_j \otimes \partial_l \otimes dt - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} dx_i \otimes dt \otimes \partial_l \otimes dt \right) \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_j} dt \otimes dx_j - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} dx_i \otimes dt \right) \partial_l \otimes dt \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} (dt \otimes dx_i - dx_i \otimes dt) \right) \partial_l \otimes dt \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \right) \partial_l \otimes dt \\
&= \sum_{l=1}^3 \left( dt \wedge \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} dx_i \right) \right) \partial_l \otimes dt \\
&= \sum_{l=1}^3 (dt \wedge dF_l) \partial_l \otimes dt
\end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Con todos estos elementos sobre el papel, veamos ya cómo reescribir las condiciones de una gravitación newtoniana en términos de la conexión de Cartan.

En primer lugar recuérdese que, en una variedad Riemanniana, al tensor de curvatura (asociado a la conexión de Levi-Civita) se le puede bajar el índice contravariante, resultando el tensor de Riemann-Christoffel (pág. 130). En una gravitación newtoniana no disponemos de una métrica Riemanniana, pero eso no es impedimento para poder bajar índices: siempre podemos considerar el morfismo

$$\mathcal{D}(X) \longrightarrow \Omega(X) \quad , \quad D \longmapsto i_D g \stackrel{\text{not}}{=} gD, \tag{4.5}$$

pero en este caso no tiene inverso. Lo mismo pasa con la métrica contravariante del espacio  $h^*$ , tampoco es riemanniana pero siempre podemos subir índices vía

$$\Omega(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) \quad , \quad \omega \longmapsto i_\omega h^* \stackrel{\text{not}}{=} h^* \omega. \quad (4.6)$$

De esta manera, podemos considerar el siguiente tensor  $(2, 2)$  definido como la subida de tercer índice covariante del tensor de curvatura asociado a  $\nabla$ ,

$$R_2^2(\omega_1, D_1; \omega_2, D_2) := R_{2,1}^1(h^* \omega_1, D_1; \omega_2, D_2), \quad (4.7)$$

tensor que obviamente sólo depende de la conexión y la métrica del espacio  $h^*$ . Se verifica:

**Teorema 4.1.5** *Sea  $X$  una gravitación newtoniana y  $R_2^2$  definido como antes. Entonces  $\text{rot } \vec{F} = 0$  si y sólo si  $R_2^2$  cumple la simetría  $R_2^2(\omega_1, D_1; \omega_2, D_2) = R_2^2(\omega_2, D_2; \omega_1, D_1)$ .*

*Demostración.* En primer lugar nótese que de acuerdo con (4.6)  $h^*$  manda  $dt$  a  $(\sum_i \partial_i \otimes \partial_i)(dt, \cdot) = \sum_i dt(\partial_i) \partial_i = 0$ , y  $dx_k$  a  $(\sum_i \partial_i \otimes \partial_i)(dx_k, \cdot) = \sum_i dx_k(\partial_i) \partial_i = \partial_k$ , con lo que recuperando la expresión (4.4) tendremos que

$$R_2^2 = - \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} \partial_i \otimes dt \otimes \partial_l \otimes dt,$$

por lo que cumplirá la simetría pedida si y sólo si  $\frac{\partial F_l}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_l}$  coordenadas inerciales, lo que equivale a que  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .  $\square$

Este teorema muestra, además, que el tensor  $R_2^2$  presenta la misma simetría que tiene el tensor de Riemann-Christoffel de una una conexión Riemanniana, hecho que debería sorprender.

Veamos ahora cómo cambiar la ecuación de Gauss  $\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho$ . Necesitamos un nuevo tensor:

**Definición.** Se llama **tensor de Ricci** de una conexión lineal al tensor de tipo  $(2, 0)$

$$R_2 := C_1^1 R_{2,1}^1.$$

Cuando  $X$  es una gravitación newtoniana, dotada de su conexión de Cartan  $\nabla$ , en una referencia inercial tenemos que

$$\begin{aligned} R_2 &= C_1^1 R_{2,1}^1 \stackrel{(4.4)}{=} C_1^1 \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} (dt \otimes dx_i - dx_i \otimes dt) \right) \partial_l \otimes dt \\ &= \sum_{l,i=1}^3 \frac{\partial F_l}{\partial x_i} (dt(\partial_l) dx_i \otimes dt - dx_i(\partial_l) dt \otimes dt) \\ &= - \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) dt \otimes dt \end{aligned}$$

Ahora, recordando que en coordenadas inerciales  $\text{div } \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ , tenemos la equivalencia

$$\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho \iff R_2 = 4\pi\rho \, dt \otimes dt.$$

**Definición.** Sea  $X$  una gravitación newtoniana. El **tensor covariante de materia** es el tensor  $T_2 \in \mathcal{T}_2(X)$  que resulta al bajar los dos índices contravariantes del tensor de materia,

$$T_2(D_1, D_2) := T^2(gD_1, gD_2)$$

Teniendo en cuenta la asignación (4.5), que manda  $\partial_t$  a  $g\partial_t = (dt \otimes dt)(\partial_t, \cdot) = dt$ , y  $\partial_i$  a  $g\partial_i = (dt \otimes dt)(\partial_i, \cdot) = 0$ , resulta que el tensor covariante de materia sólo conserva el primer coeficiente del  $T^2$ , es decir, que en coordenadas inerciales es

$$T_2 = \rho \, dt \otimes dt. \quad (4.8)$$

Toda esta discusión hace evidente el siguiente

**Teorema 4.1.6** *Sea  $X$  una gravitación newtoniana. La ecuación de Gauss  $\operatorname{div} \vec{F} = -4\pi\rho$  es equivalente a la ecuación  $R_2 = 4\pi T_2$ .*

Por último, veamos que la ecuación  $\operatorname{div}_{\nabla_0} T^2 = \rho \vec{F}$  también podemos expresarla en términos de la conexión de Cartan de  $X$ .

**Teorema 4.1.7** *Sea  $X$  una gravitación newtoniana y  $\nabla$  su conexión de Cartan. La ecuación  $\operatorname{div}_{\nabla_0} T^2 = \rho \vec{F}$  es equivalente a la ecuación  $\operatorname{div}_{\nabla} T^2 = 0$ .*

*Demostración.* Para facilitar la notación, pongamos, en coordenadas inerciales

$$T^2 = \sum_{i,j=0}^3 f_{ij} \partial_i \otimes \partial_j$$

(será  $\rho = f_{00}$ , etc). Así, la divergencia de  $T^2$  respecto la conexión de Cartan es

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\nabla} T^2 &= C_1^1(\nabla T^2) = C_1^1 \left( \nabla \left( \sum_{i,j} f_{ij} \partial_i \otimes \partial_j \right) \right) \\ &= C_1^1 \left( \sum_{i,j} df_{ij} \otimes \partial_i \otimes \partial_j + f_{ij} \nabla(\partial_i \otimes \partial_j) \right) \\ &= C_1^1 \left( \sum_{i,j} df_{ij} \otimes \partial_i \otimes \partial_j + f_{ij} (\nabla \partial_i \otimes \partial_j + \partial_i \otimes \nabla \partial_j) \right) \\ &\stackrel{4.1.2}{=} C_1^1 \left( df_{00} \otimes \partial_t \otimes \partial_t + f_{00} (-dt \otimes \vec{F} \otimes \partial_t - \partial_t \otimes dt \otimes \vec{F}) \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 (df_{0j} \otimes \partial_t \otimes \partial_j - f_{0j} dt \otimes \vec{F} \otimes \partial_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 (df_{i0} \otimes \partial_i \otimes \partial_t - f_{i0} \partial_i \otimes dt \otimes \vec{F}) \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^3 df_{ij} \otimes \partial_i \otimes \partial_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f_{00}}{\partial t} \partial_t - \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_{0j}}{\partial t} \partial_j + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_{i0}}{\partial x_i} \partial_t + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \partial_j \\
&= \operatorname{div}_{\nabla_0} T^2 - \rho \vec{F},
\end{aligned}$$

debiéndose la última igualdad a que la expresión de  $\operatorname{div}_{\nabla_0} T^2$  es

$$\operatorname{div}_{\nabla_0} T^2 = \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \partial_j$$

en coordenadas inerciales (pág. 129).  $\square$

Con todo esto, hemos podido reenunciar las condiciones de una gravitación newtoniana en términos de la conexión de Cartan de  $X$ , y además en términos de tensores de  $X$ . Es decir, ni necesitamos las referencias inerciales ni la conexión estándar  $\nabla_0$ . Por tanto, no necesitamos el espacio afín. Podemos pues enunciar una teoría de la gravitación newtoniana en una variedad diferenciable cualquiera:

**Definición.** Una **gravitación de Newton-Cartan** es una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4 junto con una métrica simétrica  $g$  de tipo  $(+, 0, 0, 0)$ , llamada **métrica del tiempo**; una métrica simétrica contravariante  $h^*$  de tipo  $(0, +, +, +)$ , llamada **métrica del espacio**, con radicales mutuamente incidentes; un tensor contravariante de orden 2 simétrico  $T^2$ , llamado **tensor de materia**; y una conexión lineal  $\nabla$  llamada **conexión de Cartan**, que verifican:

$$i) \quad \nabla g = \nabla h^* = 0.$$

$$ii) \quad R_2^2 \text{ presenta la simetría } R_2^2(\omega_1, D_1; \omega_2, D_2) = R_2^2(\omega_2, D_2; \omega_1, D_1).$$

$$iii) \quad R_2 = 4\pi T_2.$$

$$iv) \quad \operatorname{div}_{\nabla} T^2 = 0.$$

$$(X, g, h^*, T^2, \nabla)$$

## 4.2 Edad y destino del Universo. Big Bang

De acuerdo con las observaciones dadas por Hubble, el universo está en expansión. Vamos a comprobar que el universo tuvo un origen, estimaremos su edad y estudiaremos también cuáles son los posibles escenarios del futuro del universo.

Consideremos una gravitación de Newton-Cartan

$$X = (\mathbb{A}_4, g = dt \otimes dt, h^* = \partial_1 \otimes \partial_1 + \partial_2 \otimes \partial_2 + \partial_3 \otimes \partial_3, \vec{F}, \nabla).$$

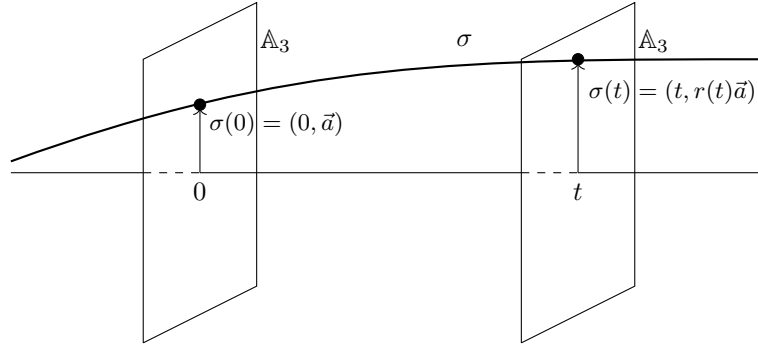
Las observaciones astronómicas indican que, a grandes distancias, el universo es isótropo y homogéneo, de modo que podemos suponer que la materia es una nube de polvo y la densidad de masa del universo  $\rho$  es constante en cada

hiperplano espacial  $\mathcal{E}_t$ , es decir, que es una función que depende únicamente del tiempo. Así, el tensor de materia vendrá dado por

$$T^2 = \rho(t)T \otimes T,$$

donde  $T$  es la velocidad de dicha nube de polvo.

Vamos a estudiar únicamente la posible contracción o expansión del universo, es decir, vamos a suponer que el universo sólo evoluciona por contracciones ó dilataciones. Supongamos que un observador tiene como trayectoria una curva integral de  $T$ , y observa la trayectoria  $\sigma$  de un cierto punto del universo (una cierta galaxia, por ejemplo). Entonces, si en el instante inicial dicho punto se encuentra en la posición  $\sigma(0) = (0, a_1, a_2, a_3) = (0, \vec{a})$ , pasado un tiempo  $t$  se encontrará en la posición  $\sigma(t) = (t, r(t)\vec{a}) = (t, x_1, x_2, x_3)$ , para una cierta función  $r(t)$  llamada **radio del universo**<sup>3</sup>.



En particular,  $r(t) > 0$  y  $r(0) = 1$ , y la velocidad de la nube de polvo vendrá dada por

$$T = \partial_t + \sum_{i=1}^3 r'(t) a_i \partial_i = \partial_t + \sum_{i=1}^3 \frac{r'(t)}{r(t)} x_i \partial_i.$$

Llamemos, para aligerar la notación,  $y(t) := \frac{r'(t)}{r(t)}$ , de modo que

$$T = \partial_t + \sum_{i=1}^3 y(t) x_i \partial_i,$$

y por tanto el tensor de materia de la nube de polvo vendrá dado por

$$T^2 = \rho T \otimes T = \rho \partial_t \otimes \partial_t + \rho y(t) x_i (\partial_t \otimes \partial_i + \partial_i \otimes \partial_t) + \sum_{i,j=1}^3 \rho y(t)^2 x_i x_j \partial_i \otimes \partial_j.$$

En coordenadas inerciales se obtiene, del primer coeficiente de la ecuación  $\text{div}_\nabla T^2 = 0$  (ley de conservación de la masa) que

$$\rho' + 3\rho y = 0,$$

<sup>3</sup>De la palabra *radio* no debe interpretarse que el universo sea una esfera; sino que si la distancia entre dos puntos cualesquiera se hace el doble, los cubos multiplican por 8 su volumen, etc.

es decir,

$$\frac{\rho'}{\rho} = -3\frac{r'}{r} \implies \ln \rho = -3 \ln r + C = \ln r^{-3} + C \implies \rho = C \frac{1}{r^3}$$

y si  $\rho_0 := \rho(0)$  será

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{1}{r(t)^3}. \quad (4.9)$$

Tal expresión de la densidad de masa no debería sorprender, pues de cumplirse la ley de conservación de la masa, al duplicarse las distancias la densidad deberá ser la octava parte. El resto de coeficientes de  $\text{div}_{\nabla} T^2 = 0$  (ley del movimiento) dicen, para  $j = 1, 2, 3$ , que

$$\begin{aligned} (\rho y)_t x_j + 4\rho y^2 x_j &= \rho F_j, \\ -3\rho y^2 x_j + \rho y' x_j + 4\rho y^2 x_j &= \rho F_j, \\ (y^2 + y') x_j &= F_j, \\ \frac{r''}{r} x_j &= F_j. \end{aligned}$$

Nótese que de aquí se deduce que cada observador ve que la intensidad de fuerza gravitatoria, donde está él, es nula; y va creciendo a medida que se aleja de su posición. No es una fuerza propia de la mecánica clásica, pues tiende a infinito cuando el punto tiende al infinito.

Por otra parte, de la ecuación de Gauss  $\text{div } \vec{F} = -4\pi\rho$ , teniendo en cuenta las expresiones anteriores, se obtiene que

$$\begin{aligned} 3\frac{r''}{r} &= -4\pi\rho, \\ r'' &= -\frac{4\pi}{3}\rho r = -\frac{4\pi}{3}\rho_0 \frac{1}{r^2}, \end{aligned}$$

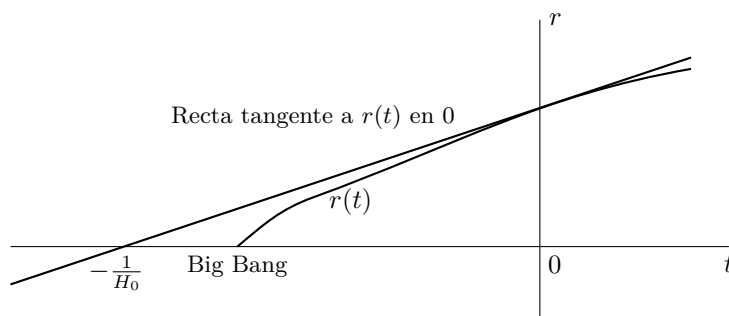
y llamando  $k := \frac{4\pi}{3}\rho_0$  obtenemos que el radio del universo debe satisfacer la ecuación diferencial

$$r''(t) = -\frac{k}{r(t)^2}. \quad (4.10)$$

Automáticamente de esta ecuación ya se obtiene una consecuencia: el universo no puede ser estático, porque dicha ecuación no tiene como solución a  $r(t) \equiv 1$ . Y se ve también otra importante propiedad: la segunda derivada  $r''$  siempre es negativa, luego la función  $r'$  es decreciente. Ahora,  $r'$  es la velocidad con la que se expande o contrae el universo, y sabemos experimentalmente que actualmente es positiva; de modo que *en el pasado el universo siempre ha estado en expansión*, pero de momento no sabemos si en el futuro seguirá siendo positiva o si será negativa a partir de cierto instante.

De todos modos, que  $r''$  sea negativa dice además que la función  $r$  siempre es cóncava: la gráfica de  $r$  está por debajo de su recta tangente en cualquier punto. En el momento presente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $r(t)$  es justamente  $H_0 := y(0) = r'(0) > 0$ , por lo que la ecuación de tal recta es  $r = 1 + H_0 t$ .





Tal recta corta al eje de abscisas en el instante  $t = -\frac{1}{H_0}$ , y como la gráfica de  $r(t)$  siempre está por debajo de dicha recta, debe existir algún punto  $-\frac{1}{H_0} < t_0 < 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = 0$ . Esto significa que debió existir un momento en el pasado en el que el radio del universo era muy pequeño, prácticamente nulo comparado con el radio actual, a partir del cual el universo comenzó a expandirse con velocidad decreciente hasta alcanzar el tamaño que tiene ahora. Se suele denominar **Big Bang** a dicho momento, y el tiempo trascurrido desde entonces es la **edad del universo**.

Si nos fijamos en la figura, podemos ver un hecho aún más sorprendente: que la gráfica de  $r$  quede debajo de su recta tangente en 0 significa que obtenemos una cota inferior para la edad del universo, que es justamente  $-\frac{1}{H_0}$ . En cosmología, la función  $y = \frac{r'}{r}$  se suele denotar por  $H$  y a su valor actual  $H(0) = H_0$  se le llama **constante de Hubble**, y entonces *la edad del universo no supera el inverso de la constante de Hubble*. Tal constante sólo depende del estado actual del universo (es decir, de la expansión actual del universo,  $H_0 = r'(0)/r(0)$ ), y se puede calcular con observaciones astronómicas muy precisas. Actualmente su valor<sup>4</sup> se estima en torno<sup>5</sup> a los  $69.32 \frac{km/s}{Mpc}$ , de modo que la edad del universo está acotada por

$$-t_0 = \frac{1}{69.32 \frac{km/s}{Mpc}} = 14\,100 \text{ millones de años.}$$

Vamos a analizar ahora la cuestión que aún teníamos pendiente, si el universo se expandirá indefinidamente (con velocidad decreciente) o si, por el contrario, su expansión se frenará y empezará a contraerse. Para ello deberemos estudiar más detenidamente la ecuación (4.10).

Denotemos  $s(t) := r'(t)$ , de modo que obtenemos la ecuación

$$s' = -\frac{k}{r^2},$$

<sup>4</sup>Por el momento hay bastante discrepancia con el valor de la constante de Hubble, si bien ha variado enormemente con los años todavía no existe un gran consenso sobre su valor. Nosotros elegiremos el tomado por la sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) de la NASA, de 2012 [2].

<sup>5</sup>El *pársec* es una unidad de longitud astronómica, definida como la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo de modo que el otro cateto mida 1 unidad astronómica (distancia de la Tierra al Sol) y dicho cateto forme un ángulo con la hipotenusa de 1 segundo de arco. El *megapársec* (Mpc) es un múltiplo suyo que equivale a  $3.0857 \cdot 10^{19} km$ .

$$\left(\frac{s^2}{2}\right)' = ss' = -k\frac{r'}{r^2} = \left(\frac{k}{r}\right)',$$

así que debe existir una cierta constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{k}{r} - \frac{s^2}{2} = C.$$

Pero como  $r(0) = 1$  y  $s(0) = r'(0) = H_0$ , al evaluar en  $t = 0$  obtenemos que  $C = k - \frac{H_0^2}{2}$ , y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{k}{r} &= \frac{s^2 - H_0^2}{2} + k = \frac{s^2 - H_0^2 + 2k}{2}, \\ r &= \frac{2k}{s^2 + (2k - H_0^2)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

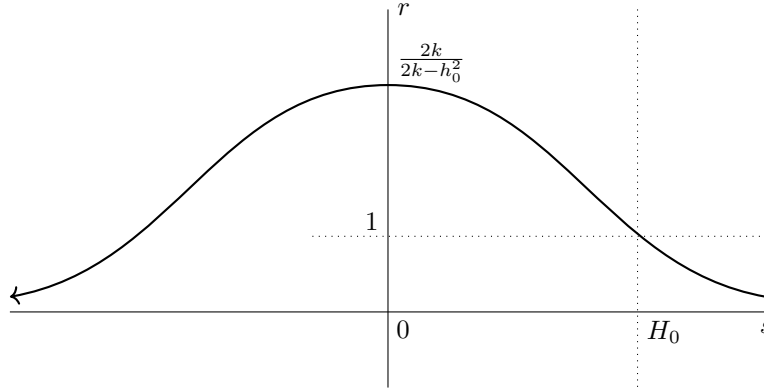
Ésta es la ecuación de una curva plana cuya forma depende de que el valor  $2k - H_0^2$  sea positivo ó negativo. Es positivo cuando

$$2k - H_0^2 > 0 \iff \frac{8\pi}{3}\rho_0 - H_0^2 \iff \rho_0 > \frac{3}{8\pi}H_0^2,$$

y por tanto menor o igual que cero si  $\rho_0 \leq \frac{3}{8\pi}H_0^2$ . A este valor, que representa (como veremos) un cambio cualitativo en el destino final del universo, se le denomina **densidad crítica** y se denota como

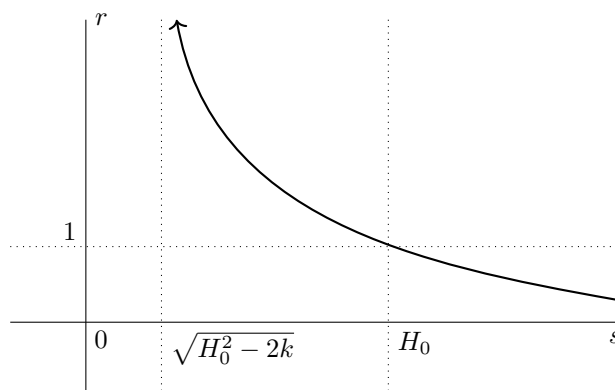
$$\rho_{\text{crit}} := \frac{3}{8\pi}H_0^2.$$

En el caso que  $\rho_0 > \rho_{\text{crit}}$ , el radio evoluciona de la siguiente manera:



Nótese que la curva está parametrizada de derecha a izquierda pues  $s = r'$  es decreciente. Así se ve que en tal caso el universo continuará su expansión hasta alcanzar un radio máximo de  $\frac{2k}{2k-H_0^2}$  veces el actual, momento a partir del cual comenzará a contraerse con velocidad creciente hasta que el radio sea casi nulo. A tal momento en el que el universo vuelva a tener el mismo tamaño que en su origen se le denomina **Big Crunch**. En este escenario, hay tanta masa en el universo que *la acción de la gravedad frenará la expansión actual y producirá la contracción del tamaño del universo*.

Si  $\rho_0 \leq \rho_{\text{crit}}$ , entonces estamos en la siguiente situación:



En este escenario, el universo no tiene tanta masa como para frenar la expansión actual, de modo que continuará la expansión para siempre, con velocidad decreciente pero nunca por debajo de  $\sqrt{H_0^2 - 2k}$ .

En cosmología, al cociente  $\Omega := \frac{\rho_0}{\rho_{\text{crit}}}$  se le llama **parámetro de densidad**, y por lo anterior su valor determina el destino del universo: si  $\Omega > 1$  se producirá el Big Crunch; y si es  $\Omega \leq 1$  continuará su expansión para siempre.

Las observaciones actuales sitúan al parámetro de densidad en torno a  $\Omega = 1.02$ . Sin embargo, a los astrónomos les resulta muy difícil medir la densidad del universo por el hecho de que la materia ordinaria (visible) representa una mínima fracción de la masa que se estima en el universo. El resto se compone de la llamada *materia oscura*, cuya existencia se infiere del hecho de que para que una galaxia permanezca unida se necesita mucha más masa de la que se compone su materia visible; y de la *energía oscura*, cuya naturaleza aún es un misterio para la ciencia.

## 4.3 Relatividad General

Vamos a hacernos la siguiente pregunta: ¿qué ocurre si, sobre una gravitación de Newton-Cartan asumimos, al igual que hicimos en el capítulo 3, que las medidas de tiempo están dadas por una métrica de Lorentz? En dicho capítulo hemos estudiado la Teoría de la Relatividad asumiendo que las propiedades inerciales venían dadas por una estructura afín en el espacio-tiempo, con su conexión usual. Pero, de acuerdo con el Principio de Equivalencia, el movimiento uniforme lejos de grandes masas es infinitesimalmente indistinguible del movimiento en caída libre cerca de grandes masas, de modo que el espacio-tiempo de Minkowski recoge la estructura infinitesimal del espacio-tiempo relativista y la Teoría de la Relatividad General es el análogo relativista a la Gravitación Newtoniana del capítulo 2, cuando la métrica del tiempo se sustituye por una métrica de tipo  $(+, -, -, -)$ .

**Definición.** Una **variedad lorentziana** es una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4 dotada de una métrica simétrica  $g$  que en cada punto es de tipo  $(+, -, -, -)$ .

Vamos a exponer el hecho de que toda variedad lorentziana da una gravitación relativista sobre la variedad; esto es, que si sobre una gravitación de

Newton-Cartan sustituimos la métrica del tiempo por una métrica lorentziana, la métrica recupera (casi en su totalidad) los elementos newtonianos. *La métrica del tiempo lo contiene todo*<sup>6</sup>.

Sea  $(X, g)$  una variedad lorentziana. Podemos señalar una única conexión simétrica y compatible con la métrica mediante el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana:

**Teorema 4.3.1** *Sea  $(X, g)$  una variedad lorentziana. Existe una única conexión lineal  $\nabla$  simétrica y compatible con la métrica (es decir,  $\nabla g = 0$ ), llamada **conexión de Levi-Civita** de  $g$ .*

*Demostración.* La prueba en el caso de variedades riemannianas (pág. 130) también es válida para variedades pseudo-riemannianas.  $\square$

Es decir,

*La medida de los intervalos de tiempo determina las trayectorias en caída libre.*

Ahora, como  $g$  es no singular, tenemos identificados campos con 1-formas mediante

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(X) & \xlongequal{\phi} & \Omega(X) \\ D & \longrightarrow & i_D g \end{array}$$

y por tanto su métrica dual  $g^*$  (es un tensor  $(0, 2)$  sobre  $X$ ) es

$$g^*(\omega_1, \omega_2) = g(\phi^{-1}\omega_1, \phi^{-1}\omega_2).$$

En tal caso, la métrica contravariante del espacio es simplemente

$$h^* := -g^*$$

(véase la analogía con la métrica del espacio en relatividad especial, pág. 41). En particular,  $\nabla h^* = 0$ .

Por otra parte, en variedades pseudo-riemannianas siempre tenemos definido el tensor de Riemann-Christoffel  $R_{2,2}$  (pág. 130), y una propiedad suya es que presenta la simetría

$$R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) = R_{2,2}(D_3, D_4; D_1, D_2).$$

Nótese que como la métrica es no singular, el tensor de Riemann-Christoffel se corresponde justamente con el tensor  $R_2^2$  que equivalía al carácter conservativo de la intensidad de la fuerza en la gravitación de Newton-Cartan. Es decir, la métrica del tiempo (en forma del tensor de curvatura de su conexión Levi-Civita) recoge la segunda condición de una gravitación de Newton-Cartan.

En este momento, uno estaría tentado de afirmar que la materia viene dada por  $T_2 := \frac{1}{4\pi} R_2$ ,  $R_2 = C_1^1 R$ , con lo que automáticamente obtendríamos la tercera condición; y por tanto sólo quedaría probar que  $\text{div}_\nabla R_2 = 0$  para obtener la

<sup>6</sup>Hecho que discrepa de la idea general de que lo verdaderamente importante en la Teoría de la Relatividad es que *el tiempo es relativo*. Es justamente lo contrario: sólo hay una cosa absoluta, que es la métrica del tiempo.

condición equivalente a la última. Pero, desafortunadamente para nosotros, el tensor de Ricci no tiene divergencia nula en general. Así que, en lugar del tensor de Ricci, habrá que buscar otro tensor (asociado a la métrica) que tenga divergencia nula y que en el límite newtoniano obtengamos la ecuación  $R_2 = 4\pi T_2$ .

El problema anterior consiste entonces en asociar a cada métrica lorentziana<sup>7</sup>  $g$  (en una variedad diferenciable de dimensión  $n + 1$ ) un tensor 2-covariante simétrico  $T_2$  con divergencia nula,

$$T_2 : \{\text{métricas lorentzianas}\} \longrightarrow \{\text{tensores de tipo } (2,0)\}$$

$$g \rightsquigarrow T_2(g),$$

donde por  $T_2(g)$  se entiende un tensor que en cada abierto coordenado  $(U; u_0, \dots, u_n)$  se escribe como

$$T_2(g) = \sum_{i,j=0}^n f_{ij}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,k}, g_{\alpha\beta,k,l}, \dots) du_i \otimes du_j,$$

con  $g_{\alpha\beta,k} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_k}$ ,  $g_{\alpha\beta,k,l} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_k \partial u_l}$ , ..., es decir, que los coeficientes del  $T_2(g)$  son funciones que dependen de los coeficientes de  $g$  y sus derivadas. Más aún, vamos a exigirle que sea natural.

**Definición.** Un tensor asociado a las métricas lorentzianas se dice **natural** o intrínseco si para cualquier difeomorfismo  $\tau : X \longrightarrow X$  y cualquier métrica de lorentz  $g$  se verifica que

$$T_2(\tau^*g) = \tau^*T_2(g).$$

Tal exigencia está motivada por el hecho de que el tensor de Ricci es natural.

Cuando Einstein se encuentra con este cuestión desarrollando la Teoría de la Relatividad General, ya era un problema estudiado en matemáticas:

- Que dependa sólo de los coeficientes de  $g$ , tan sólo hay uno (salvo un factor constante), que es la propia  $g$ . Pero afirmar que la materia viene dada por  $g$  es afirmar que estamos en el espacio-tiempo de Minkowski, es decir, que no hay distribuciones de materia.
- Que dependa sólo de los coeficientes de la  $g$  y de sus primeras derivadas, vuelve a estar sólo la propia  $g$  (salvo un factor constante).
- Que dependa sólo de los coeficientes de la  $g$  y de sus primeras y segundas derivadas, hay una única familia<sup>8</sup> de combinaciones lineales de  $g$  y otro cierto tensor; y para derivadas de mayor orden hay muchos más.

Es decir, da la sensación que se está señalando un único tensor que cumple las condiciones exigidas. Concretemos la discusión anterior:

<sup>7</sup>Para dimensión arbitraria, que  $g$  sea lorentziana significa que tenga signatura  $(+, -, \dots, -)$ .

<sup>8</sup>Bien tenía razón Leibniz cuando afirmaba que este es *el mejor de los mundos posibles*, donde entendía “mejor” como matemáticamente perfecto. Que el lector nos permita reformular esta afirmación como *vivimos en el universo más sencillo de los posibles*.

**Definición.** Llamaremos **tensor de Einstein** de una métrica simétrica  $g$  al tensor de tipo  $(2, 0)$

$$G_2 := R_2 - \frac{\kappa}{2}g, \quad (4.12)$$

donde  $\kappa := C_{12}R_2$  es la **curvatura escalar** de  $g$ .

**Teorema 4.3.2 (H. Vermeil, 1917)** *Todo tensor  $T_2 \in \mathcal{T}_2(X)$  natural y de divergencia nula asociado a las métricas lorentzianas que cumple que*

1. *Es simétrico.*
2. *Es de orden 2, es decir, en cada abierto coordenado sus coeficientes  $f_{ij}$  son funciones de los coeficientes de  $g$  hasta el segundo orden,  $f_{ij}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,k}, g_{\alpha\beta,k,l})$ .*
3. *Es lineal en las segundas derivadas, es decir, en cada abierto coordenado sus coeficientes  $f_{ij}$  son funciones lineales en las variables  $g_{\alpha\beta,k,l}$ .*

*es de la forma*

$$T_2 = \lambda G_2 + \Lambda g \quad (4.13)$$

*para ciertos escalares  $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Puede consultarse en [25]. □

Años más tarde, D. LOVELOCK probó que, si asumimos que nuestra variedad ambiente es de dimensión 4, la tercera hipótesis es superflua:

**Teorema 4.3.3 (D. Lovelock, 1971)** *Sea  $X$  una variedad de dimensión 4. Todo tensor  $T_2 \in \mathcal{T}_2(X)$  natural y de divergencia nula asociado a las métricas lorentzianas que cumple que*

1. *Es simétrico.*
2. *Es de orden 2, es decir, en cada abierto coordenado sus coeficientes  $f_{ij}$  son funciones de los coeficientes de  $g$  hasta el segundo orden,  $f_{ij}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,k}, g_{\alpha\beta,k,l})$ .*

*es de la forma*

$$T_2 = \lambda G_2 + \Lambda g$$

*para ciertos escalares  $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Puede consultarse en [13]. □

El año siguiente, Lovelock probó que la hipótesis de la simetría también era superflua, lo cual es sorprendente pues en la Mecánica Clásica era una condición que habíamos exigido nosotros, y sin embargo ahora es una propiedad que se extrae de un teorema.

**Teorema 4.3.4 (D. Lovelock, 1972)** *Sea  $X$  una variedad de dimensión 4. Todo tensor  $T_2 \in \mathcal{T}_2(X)$  natural y de divergencia nula asociado a las métricas lorentzianas que cumple que*

1. Es de orden 2, es decir, en cada abierto coordinado sus coeficientes  $f_{ij}$  son funciones de los coeficientes de  $g$  hasta el segundo orden,  $f_{ij}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,k}, g_{\alpha\beta,k,l})$ .

es de la forma

$$T_2 = \lambda G_2 + \Lambda g$$

para ciertos escalares  $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Puede consultarse en [14].  $\square$

Afirmar que  $\Lambda \neq 0$  implicaría que en el espacio-tiempo de Minkowski hay distribuciones de materia, porque al tener el paralelismo estándar  $\nabla_0$ ,  $R_{\nabla_0} = 0$  luego  $R_2 = 0$  y  $\kappa = 0$ , y la ecuación sería

$$\lambda g = T_2,$$

así que si asumimos que en el espacio-tiempo de Minkowski no hay materia deberá ser  $\Lambda = 0$  y la ecuación resultante sería<sup>9</sup>

$$\lambda G_2 = T_2. \quad (4.14)$$

Sin embargo, desde la década de 1990 las observaciones astronómicas parecen afirmar que la expansión del universo se está produciendo a una velocidad mayor de la que predice la ecuación, por lo que actualmente se incorpora el valor  $\Lambda$  (muy pequeño pero no nulo) para que se ajuste a las observaciones. El hecho de que actualmente los físicos afirmen que *el vacío tiene energía* reside precisamente en la no nulidad de  $\Lambda$ . El valor  $\Lambda$  se suele denominar **constante cosmológica**.

Por tanto, la ecuación que proporcionaría el tensor de materia en una gravitación relativista sería  $T_2 = \lambda G_2 + \Lambda g$ , pero, para ser más precisos, esta ecuación debería escribirse como

$$\boxed{\lambda G_2 = T_2 + \Lambda g} \quad \text{(Ecuación de Einstein)}$$

pues unifica la física y las matemáticas de la Teoría de la Relatividad: el primer miembro representa la geometría del espacio-tiempo, mientras que el segundo reúne la materia. ¿Esta es una ecuación, o una definición? En nuestros términos, diríamos que la geometría *define* la materia; mientras que los físicos afirmarían que la materia *define* la geometría al deformar el espacio-tiempo. Por tanto, la ecuación de Einstein puede resumirse en que

$$\text{Geometría} = \text{Materia}$$

**4.3.5 (Unidades)** Hasta el momento hemos trabajado con unidades de tiempo, distancia, ... fijadas. Vamos a estudiar brevemente qué unidades tienen los elementos que hemos usado a lo largo de la teoría.

<sup>9</sup>Cuando A. Einstein publicó su trabajo sobre Relatividad General en 1915, lo hizo con la ecuación  $\lambda G_2 = T_2$ . Sin embargo, al estudiar tal ecuación se dio cuenta que sólo había solución para un universo en expansión, en contra del pensamiento de la física de su tiempo (y el suyo), de modo que un par de años más tarde introdujo el factor  $\Lambda$  para contrarrestar el efecto expansivo y tener así un universo estático. Años más tarde, cuando Hubble en 1929 descubrió el corrimiento al rojo y por tanto la expansión del universo, Einstein abandonó la constante, afirmando que fue *el mayor error de mi vida*.

Dado que las medidas de tiempo vienen dadas por la métrica del tiempo  $g$ , al ser  $|e| = \sqrt{e \cdot e}$ , resulta que si la unidad de tiempo la multiplicamos por un factor  $\alpha$ , la métrica la estamos cambiando por  $\alpha^2$ . Aquí está incluido el hecho de que, aunque al principio hayamos fijado una métrica, en realidad se debería haber elegido un subespacio vectorial unidimensional que contenga a todas las proporcionales, y así fijar la métrica  $g$  equivale a elegir la unidad de tiempo.

**Definición.** Diremos que una magnitud tiene unidades  $L^a T^b M^c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , cuando si multiplicamos las longitudes por un factor  $\alpha$ , los tiempos por un factor  $\beta$ , y las masas por un factor  $\gamma$ , las medidas de dicha magnitud quedan multiplicadas por un factor  $\alpha^a \beta^b \gamma^c$ .

Veamos algunas unidades:

CONCEPTO	UNIDAD
métrica del tiempo $g$	$T^2$
1-forma del tiempo $\omega$	$T$
velocidad $T$	$T^{-1}$
impulso $I$	$MT^{-1}$
3-forma de impulso $\Pi_3$	$MT^{-1}$
producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$	$L^2$
métrica contravariante del espacio $h^*$	$L^{-2}$
orientación espacial $\Omega_V$	$L^3$
orientación espacio-temporal $\Omega_X$	$TL^3$
tensor contravariante de materia $T^2$	$MT^{-2}L^{-3}$
tensor covariante de materia $T_2$	$MT^2L^{-3}$

La pregunta que surge de modo natural es: ¿son las unidades de longitud, tiempo y masa independientes?

En mecánica clásica, ya vimos en 2.3.1 que en una gravitación newtoniana la masa no era independiente del tiempo y la longitud, sino que hay una unidad de masa canónica: aquella que a la unidad de longitud produce una aceleración de 1, y resultaba ser  $M = L^3 T^{-2}$ .

En relatividad, la unidad de tiempo y espacio se determinan mutuamente (pues  $g = h$  salvo cierta constante), y por lo tanto también la masa, es decir,  $T = L = M$ . Así, resulta que el tensor covariante de materia *no tiene unidades*, o dicho con precisión, *no depende* de las unidades (pues sí tiene unidades,  $L^0 T^0 M^0$ ).

En lo relativo a la búsqueda de un tensor  $T_2(g)$  asociado a las métricas simétricas de divergencia nula, si se observa la cuestión de las unidades, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.6 (J. Navarro, J.B. Sancho, 2008)** *Todo tensor  $T_2 \in \mathcal{T}_2(X)$  natural y de divergencia nula asociado a las métricas lorentzianas que sea independiente de la unidad de tiempo, es decir,  $T_2(\lambda^2 g) = T_2(g)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y toda métrica lorentziana  $g$ , es de la forma*

$$T_2 = \lambda G_2$$

para cierto escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



*Demostración.* Puede encontrarse en [16].  $\square$

**4.3.7 (Constante de la Ecuación de Einstein)** Asumamos que la constante cosmológica es nula y que la ecuación de Einstein toma la forma

$$G_2 = \alpha T_2$$

( $\alpha = \lambda^{-1}$  en los términos anteriores). Veamos cuál debe ser tal constante para que en el límite newtoniano la gravitación relativista coincida con la gravitación de Newton-Cartan, es decir, para que la ecuación de Einstein coincida con  $R_2 = 4\pi T_2$ .

En una variedad pseudo-riemanniana, la métrica  $g$ , vista como endomorfismo (en cada punto), es la identidad, pues vía el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(T_p X) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{T}_1^1(T_p X) \\ T & \longrightarrow & T_1^1(e, \omega) := \omega(e) \end{array}$$

se tiene que, para  $\omega = g_p(v, \cdot)$ ,

$$T_1^1(e, \omega) = g_p(e, v) = \omega(e) = \omega(\text{Id}(e)),$$

por lo que  $\text{tr } g_p = \dim T_p X = 4$ . Por tanto, teniendo en cuenta que la traza es independiente de la subida o bajada de índices, tomando trazas en la ecuación de Einstein obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa - \frac{\kappa}{2} 4 &= \alpha \text{tr } T_2 = \alpha \text{tr } T^2, \\ \kappa &= -\alpha \text{tr } T^2, \end{aligned}$$

de modo que podemos escribir la ecuación de Einstein como

$$R_2 = \alpha \left( T_2 - \frac{\text{tr } T^2}{2} g \right), \quad (4.15)$$

expresión que sí tiene sentido en una gravitación de Newton-Cartan (la ecuación de Einstein en cambio no pues la curvatura escalar sólo procede en presencia de una métrica no singular). Puesto que, en una gravitación de Newton-Cartan, se tiene que

$$\text{tr } T^2 = C_{12}^{12}(g \otimes T^2) = C_{12}^{12}(dt \otimes dt \otimes (\rho \partial_t \otimes \partial_t + \cdots)) = \rho,$$

la ecuación (4.15) se reescribe, en una gravitación de Newton-Cartan, como

$$R_2 = \alpha \left( \rho dt \otimes dt - \frac{\rho}{2} dt \otimes dt \right) = \frac{\alpha \rho}{2} dt \otimes dt,$$

y puesto que se verifica  $R_2 = 4\pi \rho dt \otimes dt$ , por la ecuación de Gauss, obtenemos que  $\alpha = 8\pi$ , es decir, la ecuación de Einstein es

$$\boxed{G_2 = 8\pi T_2} \quad \text{(Ecuación de Einstein clásica)}$$

es decir,

$$\boxed{\text{Ricci} - \frac{\text{Curvatura escalar}}{2} g = 8\pi \text{ (Tensor de materia)}}$$

Por tanto, concluimos finalmente que una variedad lorentziana  $(X, g)$  da una gravitación relativista sobre  $X$ :

- El paralelismo viene dado por la conexión Levi-Civita de  $g$ .
- La métrica del espacio es la métrica dual de  $g$  afectada de un signo “ $-$ ”.
- La materia viene dada por el tensor de Einstein afectado de un factor  $\frac{1}{8\pi}$ .
- El carácter conservativo de la intensidad de fuerza gravitatoria que produce la distribución de materia viene dado por la simetría del tensor de Riemann-Christoffel.
- Además, la conexión Levi-Civita es compatible con la métrica del tiempo y del espacio (por 4.3.1) y el tensor contravariante de materia tiene divergencia nula (por 4.3.6).

**Nota 4.3.8** El extraño coeficiente  $8\pi$  de la ecuación de Einstein se debe al factor  $4\pi$  de la ecuación de Gauss  $R_2 = 4\pi T_2$ , es decir, que se debe al modo de fijar la unidad de masa a partir de las unidades de distancia y tiempo. En las unidades usuales de  $kg, m, s$  aparece la constante de gravitación universal  $G$  y la velocidad de la luz  $c$ , y la ecuación de Einstein toma la forma de

$$G_2 = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

En todo el desarrollo anterior no aparecen porque inicialmente hemos fijado las unidades de tiempo y distancia para que  $c = 1$ , y posteriormente la de masa, para que  $G = 1$ . Perfectamente podríamos haber fijado otras unidades para que el coeficiente de la ecuación de Einstein fuera 1, y el tensor de materia coincidiera con el tensor de Einstein,

$$G_2 = T_2.$$

## Parte III

# Apéndices



## Apéndice A

# Álgebra Lineal

Este apéndice pretende ser un recordatorio de las nociones básicas del Álgebra Tensorial, la Geometría Afín y la teoría de métricas simétricas.

### A.1 Espacio Dual

Los covectores, 1-formas ó **formas lineales** de un  $K$ -espacio vectorial  $E$  (que supondremos siempre de dimensión finita) son las aplicaciones lineales  $\omega : E \rightarrow K$ , y diremos que  $E^* := \text{Hom}_K(E, K)$  es el espacio **dual** de  $E$ . Tal espacio tiene dimensión  $(\dim E) \cdot 1 = \dim E$ .

**Teorema A.1.1** *Dada una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ , existe una única base  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  tal que  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ , a la que llamaremos **base dual** de la base dada.*

*Demostración.* Las formas lineales  $\omega_i(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) := \lambda_i$  cumplen que  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ , y generan  $E^*$ , ya que  $\omega = \omega(e_1)\omega_1 + \dots + \omega(e_n)\omega_n$ , porque coinciden sobre  $e_1, \dots, e_n$ . Como  $E^*$  tiene dimensión  $n$  se concluye.  $\square$

**Teorema A.1.2 (de Reflexividad)** *La aplicación canónica  $\phi : E \rightarrow E^{**}$ ,  $\phi(e)(\omega) := \omega(e)$  es isomorfismo.*

*Demostración.* Sólo hay que comprobar que es inyectiva. Si  $\phi(e) = 0$ , entonces  $\omega(e) = 0$  para toda  $\omega \in E^*$ , y  $e = 0$ , pues si no lo fuera la forma

$$\omega : E = \langle e \rangle \oplus V \rightarrow K, \quad \omega(\lambda e + v) := \lambda,$$

donde  $V$  es un suplementario de  $\langle e \rangle$  en  $E$  (cuya existencia garantiza el Lema de Zorn) vale 1 sobre  $e$ .  $\square$

Dado un subespacio  $V \subseteq E$ , el **incidente** ó anulador de  $V$  es

$$V^\circ := \{\omega \in E^* : \omega(V) = 0\}.$$

**Lema A.1.3**  $V = (V^\circ)^\circ$ .

*Demostración.* La inclusión directa es clara; y si  $e \in (V^\circ)^\circ$ , y  $\pi : E \rightarrow E/V$  es la proyección al cociente,  $\bar{\omega}(\pi(e)) = 0$  para cada  $\bar{\omega} \in (E/V)^*$ , pues  $\bar{\omega} \circ \pi \in V^\circ$ . Así que  $\pi(e) = 0$  y  $e \in V$ .  $\square$

**Teorema A.1.4** *Se tiene el siguiente anti-isomorfismo de retículos:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios vectoriales} \\ \text{de } E \end{array} \right\} \xlongequal{\quad} \left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios vectoriales} \\ \text{de } E^* \end{array} \right\}$$

$$V \xrightarrow{\quad} V^\circ$$

*Demostración.* Por el lema es una biyección, y su inversa es el paso al incidente de  $E^*$ . Además, si  $V_1^\circ \subseteq V_2^\circ$ , entonces  $V_1 = (V_1^\circ)^\circ \supseteq (V_2^\circ)^\circ = V_2$ .  $\square$

**Corolario A.1.5** *Se verifica:*

1.  $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$ .
2.  $(V + W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$ .
3.  $(V \cap W)^\circ = V^\circ + W^\circ$ .

Dada una aplicación lineal  $f : F \longrightarrow E$ , la **aplicación lineal transpuesta** ó pullback es

$$f^* : E^* \longrightarrow F^* \quad , \quad f^*(\omega) = \omega \circ f.$$

**Proposición A.1.6** *Si  $A$  es la matriz de  $f : F \longrightarrow E$  en ciertas bases entonces  $A^t$  es la matriz de  $f^* : E^* \longrightarrow F^*$  en las bases duales.*

*Demostración.* Si  $A = (a_{ij})$  es la matriz de  $f$  en bases  $v_1, \dots, v_m$  de  $F$  y  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$ , y  $\xi_1, \dots, \xi_m$  y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  son las bases duales, se tiene que  $(f^*\omega_j)(v_i) = \omega_j(f(v_i)) = a_{ji}$ .  $\square$

## A.2 Tensores

Las aplicaciones multilineales son los morfismos  $T : E_1 \times \dots \times E_r \longrightarrow F$  que sean lineales en cada variable.

Los **tensores**  $p$  veces covariantes y  $q$  veces contravariantes, o de tipo  $(p, q)$  son las aplicaciones multilineales

$$T_p^q : E \times \dots \times E \times E^* \times \dots \times E^* \longrightarrow K.$$

Denotaremos como  $\mathcal{T}_p^q(E)$  al espacio vectorial de dichos tensores. En concreto,  $\mathcal{T}_1(E) = E^*$ ,  $\mathcal{T}^1(E) = E^{**} = E$ , y por convenio  $\mathcal{T}_0^0(E) = K$ .

El **producto tensorial** de  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(E)$  y  $T_r^s \in \mathcal{T}_r^s(E)$  es el tensor  $T_p^q \otimes T_r^s \in \mathcal{T}_{p+r}^{q+s}(E)$  siguiente:

$$(T_p^q \otimes T_r^s)(e_1, \dots, e_{p+r}, \omega_1, \dots, \omega_{q+s}) :=$$

$$T_p^q(e_1, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q) \cdot T_r^s(e_{p+1}, \dots, e_{p+r}, \omega_{q+1}, \dots, \omega_{q+s}).$$

**Proposición A.2.1** *Se cumple:*

1.  $(\lambda T_p^q + \mu \bar{T}_p^q) \otimes T_r^s = \lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(\bar{T}_p^q \otimes T_r^s).$
- $T_p^q \otimes (\lambda T_r^s + \mu \bar{T}_r^s) = \lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s).$

$$2. (T_p^q \otimes T_r^s) \otimes T_a^b = T_p^q \otimes (T_r^s \otimes T_a^b).$$

**Teorema A.2.2** Sea  $n = \dim E$ . El espacio vectorial  $\mathcal{T}_p^q(E)$  tiene dimensión  $n^{p+q}$ . En particular, si  $e_1, \dots, e_n$  es base de  $E$ , y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  es su base dual, una base de  $\mathcal{T}_p^q(E)$  la forman

$$\{\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}\}_{1 \leq i_k, j_l \leq n}.$$

*Demostración.* Fijados  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ ,

$$(\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) = 1$$

y en el resto 0, luego son linealmente independientes. Para ver que generan el espacio solo hay que tener en cuenta que si  $\lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$  para cierto tensor  $T_p^q$  entonces

$$T_p^q = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q},$$

porque la diferencia de ambos se anula en todas las sucesiones de índices.  $\square$

Dado un tensor  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(E)$  con  $p \geq 1$ , la **contracción interior** de  $e \in E$  y  $T_p^q$  es el tensor  $i_e T_p^q$  de tipo  $(p-1, q)$  definido por

$$(i_e T_p^q)(e_2, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q) := T_p^q(e, e_2, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q)$$

Dado un tensor  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(E)$  con  $p, q \geq 1$ , la **contracción de índice covariante  $i$  e índice contravariante  $j$**  es el tensor  $C_i^j T_p^q$  de tipo  $(p-1, q-1)$  dado por

$$(C_i^j T_p^q)(v_1, \dots, v_{p-1}, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) := \sum_{k=1}^n T_p^q(v_1, \dots, \overset{\downarrow i}{e}_k, \dots, v_{p-1}, \xi_1, \dots, \overset{\downarrow j}{\omega}_k, \dots, \xi_{q-1}),$$

donde  $e_1, \dots, e_n$  es base de  $E$ , y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  es su base dual. En concreto se cumple que

$$C_i^j(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_q) = \omega_i(e_j)(\omega_1 \otimes \dots \overset{\downarrow i}{\omega}_p \otimes e_1 \otimes \dots \overset{\downarrow j}{e}_q).$$

Un tensor puramente covariante  $\Omega_p \in \mathcal{T}_p(E)$  se dice **hemisimétrico** o **alternado** o una  **$p$ -forma** si se anula en las sucesiones con dos índices repetidos,  $\Omega_p(\dots, e, \dots, e, \dots) = 0$ . El conjunto de tensores alternados de orden  $p$  forman un subespacio vectorial  $\Lambda_p(E)$  de  $\mathcal{T}_p(E)$ .

Dada una permutación  $\sigma$  de orden  $p$ , pondremos  $(\sigma T_p)(e_1, \dots, e_p) := T_p(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)})$ , y además se cumple

1.  $\tau(\sigma T_p) = (\tau\sigma)T$ .
2.  $\sigma(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) = \omega_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma^{-1}(p)}$ .
3.  $\sigma\Omega_p = (\text{sgn } \sigma)\Omega_p$ .

El **operador de hemisimetrización** es la aplicación lineal

$$h_p : \mathcal{T}_p(E) \longrightarrow \mathcal{T}_p(E) \quad , \quad h_p(T_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma)(\sigma T).$$

**Proposición A.2.3** *Se cumple:*

1.  $h_p$  es lineal y su imagen es  $\Lambda_p(E)$ .
2.  $h_p(\Omega_p) = p!\Omega_p$ .
3.  $h_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}$ .

*Demostración.* Véase [17]. □

El **producto exterior** de dos tensores alternados  $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$  y  $\Omega_q \in \Lambda_q(E)$  es

$$\Omega_p \wedge \Omega_q := h_{p+q}(T_p \otimes T_q),$$

donde  $T_p$  y  $T_q$  son representantes de  $\Omega_p$  y  $\Omega_q$  respectivamente, es decir,  $\Omega_p = h_p(T_p)$  y  $\Omega_q = h_q(T_q)$ .

**Proposición A.2.4** *Se verifica:*

1.  $\Omega_p \wedge \Omega_q = \frac{1}{p!q!} h_{p+q}(\Omega_p \otimes \Omega_q)$ .
2.  $(\lambda\Omega_p + \mu\bar{\Omega}_p) \wedge \Omega_q = \lambda(\Omega_p \wedge \Omega_q) + \mu(\bar{\Omega}_p \wedge \Omega_q)$   
 $\Omega_p \wedge (\lambda\Omega_q + \mu\bar{\Omega}_q) = \lambda(\Omega_p \wedge \Omega_q) + \mu(\Omega_p \wedge \bar{\Omega}_q)$
3.  $\Omega_p \wedge \Omega_q = (-1)^{pq} \Omega_q \wedge \Omega_p$ .
4.  $\omega \wedge \omega = 0$ .
5.  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)} = h_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)$ .

**Teorema A.2.5** *Si  $n = \dim E$ , el espacio vectorial  $\Lambda_p(E)$  es de dimensión  $\binom{n}{p}$  ( $\Lambda_p(E) = 0$  si  $p > n$ ), y si  $\omega_1, \dots, \omega_n$  es base de  $E$ , una base de  $\Lambda_p(E)$  es*

$$\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}\}_{i_1 < \cdots < i_p}.$$

*Demostración.* Tales  $p$ -formas generan  $E$  porque dada  $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$

$$\Omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p},$$

como se comprueba aplicando  $h_p$  a  $\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p}$ . Además, como  $(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$  salvo cuando  $j_1, \dots, j_p$  es una reordenación de  $i_1 < \cdots < i_p$ , son linealmente independientes, y por lo tanto base. □

**Teorema A.2.6** *La contracción interior es para el producto exterior una anti-derivación:*

1.  $i_e(\Omega_p \wedge \Omega_q) = (i_e\Omega_p) \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e\Omega_q)$ .



$$2. i_e(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \omega_i(e) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$$

*Demostración.* Véase en [19].  $\square$

$$\textbf{Proposición A.2.7} \quad (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(e_1, \dots, e_p) = \begin{vmatrix} \omega_1(e_1) & \cdots & \omega_1(e_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(e_1) & \cdots & \omega_p(e_p) \end{vmatrix}$$

*Demostración.*  $\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \sigma(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) (\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}).$   $\square$

Las **formas de volumen** de un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$  son los elementos no nulos de  $\Lambda_n(E)$ , y dada  $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$ , el **volumen** (con signo) del paralelepípedo determinado por  $e_1, \dots, e_n$  es  $\Omega_n(e_1, \dots, e_n)$ .

Sobre  $\Lambda_n(E)$  tenemos la siguiente relación de equivalencia:

$$\Omega_n \sim \bar{\Omega}_n \iff \bar{\Omega}_n = \lambda \Omega_n \text{ para cierta } \lambda > 0,$$

y cada una de las dos clases de equivalencia son las **orientaciones** de  $E$ . Fijada una orientación  $[\Omega_n]$ , una base  $e_1, \dots, e_n$  es **positiva** si  $\Omega_n(e_1, \dots, e_n) > 0$ , y **negativa** si  $\Omega_n(e_1, \dots, e_n) < 0$ .

**Teorema A.2.8** *En un espacio vectorial euclídeo orientado (i.e., un espacio vectorial dotado de un producto escalar y una orientación), existe una única forma de volumen que asigna volumen 1 sobre las bases ortonormales positivas.*

*Demostración.* Si  $e_1, \dots, e_n$  es base de  $E$  y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  es su base dual,  $\Omega_n = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$  asigna volumen con signo 1 sobre tal base, y puesto que las matrices de cambio de base entre bases ortonormales tienen determinante  $\pm 1$ , asignará volumen con signo  $\pm 1$  sobre cualquier base ortonormal.  $\square$

### A.3 Teoría de Métricas Simétricas

Las **métricas simétricas** sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $E$  son los tensores 2-covariantes simétricos

$$S : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad S(e, e') = e \cdot e'.$$

Las métricas simétricas definidas positivas (es decir,  $S(e, e) > 0$  para todo  $0 \neq e \in E$ ) son los productos escalares ó métricas euclídeas.

Si  $e_1, \dots, e_n$  es base de  $E$ , la matriz de la métrica es  $A = (e_i \cdot e_j)$ , y si  $e = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y  $e' = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  entonces

$$S(e, e') = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

El **radical** de un espacio  $(E, S)$  es

$$\text{rad } E := \{e \in E : e \cdot E = 0\},$$

y se dice que  $S$  es **no singular** cuando  $\text{rad } E = 0$ . El **rango** de una métrica  $S$  es

$$\text{rango } S := \dim E - \dim \text{rad } E.$$

La **polaridad** de una métrica simétrica  $S$  es la aplicación

$$\phi : E \longrightarrow E^* \quad , \quad \phi(e) = i_e S,$$

y es fácil comprobar que

1.  $\ker \phi = \text{rad } E$ .
2.  $S$  es no singular  $\iff \phi$  es isomorfismo.

Un vector  $e \in E$  es **isótropo** si  $e \cdot e = 0$ , y el espacio  $E$  es isótropo si la métrica es idénticamente nula,  $\text{rad } E = E$ .

Dos vectores  $e, e'$  se dicen **ortogonales** si  $e \cdot e' = 0$ , y dos subespacios  $V, W$  son ortogonales si  $V \cdot W = 0$ . Además, se dice que  $V$  y  $W$  están en **suma ortogonal** si están en suma directa y son ortogonales, y se denota como  $V \perp W$ .

El **ortogonal** de un subespacio  $V$  es

$$V^\perp := \{e \in E : e \cdot V = 0\}.$$

Nótese que  $E^\perp = \text{rad } E$ .

**Proposición A.3.1** *Para  $S$  no singular se verifica:*

1.  $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$ .
2. Si  $\text{rad } V = 0$ , entonces  $E = V \perp V^\perp$ .
3.  $(V^\perp)^\perp = V$ .
4. Si  $E = V \perp W$  entonces  $V = W^\perp$ .

Si  $E$  es un espacio dotado de una métrica simétrica  $S$ , se define una métrica no singular  $\bar{S}$  sobre  $E/\text{rad } E$ ,

$$[e] \cdot [e'] := e \cdot e'$$

llamada **proyección** de la métrica  $S$ .

**Teorema A.3.2 (Ley de Inercia de Sylvester)** *Dada una métrica simétrica  $S$  sobre un espacio  $E$ , existe una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  en la que la matriz diagonaliza de la forma*

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & p & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & q & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Al par  $(p, q)$  se le llama **signatura** de la métrica, y no depende de la base elegida.

Si una métrica tiene signatura  $(p, q)$ , se dice también que es de tipo  $(+, \dots, +, -, \dots, -, 0, \dots, 0)$ .

Si  $(E, S)$  es un espacio dotado de una métrica simétrica no singular, el **índice** de  $S$  es la dimensión común de los subespacios isotropos maximales, y se prueba que en el caso de métricas sobre  $\mathbb{R}$  ésta es justamente  $i = \min(p, q)$  (véase [22]).

Dada una métrica no singular  $g$  sobre un espacio  $E$ , podemos definir una métrica sobre  $E^*$  vía la polaridad  $\phi : E \xrightarrow{\sim} E^*$  (en este caso isomorfismo), llamada **métrica dual**:

$$\begin{aligned} g^* : E^* \times E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto g^*(\omega_1, \omega_2) := g(\phi^{-1}\omega_1, \phi^{-1}\omega_2). \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que en efecto  $g^*$  es una métrica sobre  $E^*$ , es decir, una aplicación bilineal y simétrica, y que además vuelve a ser no singular.

**Proposición A.3.3** *La métrica dual cumple las siguientes propiedades:*

1. La polaridad de  $g^*$  es  $\phi^{-1}$  (vía  $E = E^{**}$ ).
2.  $(g^*)^* = g$ .
3. Si  $G$  es la matriz de  $g$  en una cierta base de  $E$ , la matriz de  $g^*$  es  $G^{-1}$ , en la base dual de la anterior.

*Demostración.* 1) Sea  $\psi : E^* \longrightarrow E^{**} = E$  la polaridad de  $g^*$ . Bastará ver que  $\psi \circ \phi = \text{Id}$ . Dado  $e \in E$ , veamos que  $\psi(\phi(e)) = e \in E^{**} = E$ . Para  $\omega' = \phi(e')$  para cierta  $e'$ , tenemos por una parte  $e(\phi(e)) = \phi(e)(e') = g(e, e')$  y por la otra

$$\psi(\phi(e))(\phi(e')) = g^*(\phi(e), \phi(e')) = g(\phi^{-1}(\phi(e)), \phi^{-1}(\phi(e'))) = g(e, e').$$

2) Dados  $e, e' \in E^{**} = E$ , tenemos

$$g^{**}(e, e') = g^*(\psi^{-1}(e), \psi^{-1}(e')) = g^*(\phi(e), \phi(e')) = g(e, e').$$

3) Basta tener en cuenta que la matriz de la polaridad de una métrica simétrica, en una cierta base de  $E$  y su base dual de  $E^*$ , es la matriz de la métrica (porque  $\phi(e_j)(e_i) = e_j \cdot e_i$ ), y por tanto si  $G^*$  es la matriz de  $g^*$ ,

$$G^* = (\psi) = (\phi)^{-1} = G^{-1},$$

donde  $(\psi)$  y  $(\phi)$  representan las matrices de  $\psi$  y  $\phi$  en las bases dadas.  $\square$

## A.4 Geometría Afín

Un **espacio afín** sobre un cuerpo  $K$  es una terna  $(\mathbb{A}, E, +)$  formada por un conjunto  $\mathbb{A}$ , un  $K$ -espacio vectorial  $E$  y una aplicación

$$\mathbb{A} \times E \xrightarrow{+} \mathbb{A}, \quad (p, e) \longmapsto p + e$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$i) (p + e) + e' = p + (e + e'), \quad \forall p \in \mathbb{A}, \quad e, e' \in E.$$

$$ii) p + e = p \iff e = 0, \quad \forall p \in \mathbb{A}, \quad e \in E.$$

$$iii) \text{ Dados } p, p' \in \mathbb{A}, \text{ existe un } \acute{u}\text{nico } e \in E \text{ tal que } p' = p + e.$$

A los elementos de  $\mathbb{A}$  se les llamará **puntos** del espacio afín, y  $E$  es el **espacio vectorial asociado**. La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión de su espacio vectorial asociado.

El primer ejemplo de espacio afín es un espacio vectorial  $E$ , donde el espacio vectorial asociado es el propio espacio y la suma es la adición de vectores de  $E$ .

Una **referencia afín** sobre un espacio afín  $\mathbb{A}_n$  de dimensión  $n$  es una sucesión  $(p_0; e_1, \dots, e_n)$ , donde  $p_0$  es un punto de  $\mathbb{A}_n$  llamado **origen de la referencia** y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es base de  $E$ . Por *iii)* de la definición, todo punto es  $p = p_0 + e = p_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , y la sucesión  $(x_1, \dots, x_n)$  son las **coordenadas afines** de  $p$  en la referencia dada.

Dados  $(\mathbb{A}, E)$  y  $(\mathbb{A}', E')$  dos espacios afines sobre un cuerpo  $K$ , una aplicación  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es un **morfismo afín** si existe una (necesariamente única) aplicación lineal  $\vec{\varphi} : E \rightarrow E'$ , llamada **aplicación lineal asociada**, tal que

$$\varphi(p + e) = \varphi(p) + \vec{\varphi}(e) \quad , \quad \forall p \in \mathbb{A}, \quad e \in E.$$

Un morfismo afín  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  es una **afinidad** si tiene inversa (se llama **auto-afinidad** cuando ambos espacios son el mismo). Esta condición equivale a que su aplicación lineal asociada sea isomorfismo de espacios vectoriales.

Sean  $(\mathbb{A}, E)$  y  $(\mathbb{A}', E')$  dos espacios afines, con referencias afines

$$(p_0; e_1, \dots, e_n) \quad , \quad (p'_0; e'_1, \dots, e'_n)$$

respectivamente. Dado un punto  $p \in \mathbb{A}_n$  de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , las coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\varphi(p)$  en la referencia afín de  $\mathbb{A}'$  vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \varphi(p_0) & \text{matriz de } \vec{\varphi} & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde “ $\varphi(p_0)$ ” representan las coordenadas de  $\varphi(p_0)$  en la referencia  $(p'_0; e'_1, \dots, e'_n)$ .

## Apéndice B

# Geometría Diferencial

El objetivo de este apéndice es recordar de modo breve los elementos básicos de la Teoría de Variedades Diferenciables.

### B.1 Estructura diferenciable

Dada una aplicación continua  $\varphi : X \longrightarrow Y$  entre espacios topológicos, tenemos el morfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras

$$\varphi^* : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \quad , \quad \varphi^* f := f \circ \varphi$$

entre los espacios de las funciones continuas de  $Y$  y  $X$ . Es fácil ver que se verifica  $(\varphi^* \circ \phi^*) = (\phi \circ \varphi)^*$ .

Dar un **haz de funciones** sobre un espacio topológico  $X$  consiste en asignar a cada abierto  $U$  de  $X$  una subálgebra  $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{C}(U)$  que cumpla

- i) *La restricción de funciones del haz son del haz:* dados abiertos  $V \subset U$ , si  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  entonces  $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$ .
- ii) *Toda función que localmente es del haz pertenece al haz:* si  $\{U_i\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $U$ , dada  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ , si  $f|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i)$  para todo  $i$ , entonces  $f \in \mathcal{O}_X(U)$ .

Ambas condiciones se suelen expresar como *una función es del haz si y sólo si localmente es del haz*.

Llamaremos **espacio anillado** al par  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

Un **morfismo de espacios anillados** es una aplicación  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  entre espacios anillados que cumple

- i)  $\varphi : X \longrightarrow Y$  es continua.
- ii) *Componer con funciones del haz  $\mathcal{O}_Y$  da funciones del haz  $\mathcal{O}_X$ :* dado un abierto  $V \subset Y$ , si  $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ , entonces  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$

Son propiedades inmediatas comprobar que la composición de morfismos de espacios anillados es otro morfismo de espacios anillados, y que una aplicación es morfismo de espacios anillados si y sólo si lo es localmente.

Un **isomorfismo de espacios anillados** es un morfismo de espacios anillados  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  tal que existe otro morfismo de espacios anillados  $\psi : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  tal que  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_Y$ ,  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_X$  (que denotaremos  $\varphi^{-1}$ ). Equivalentemente, un morfismo de espacios anillados  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es isomorfismo si y sólo si es homeomorfismo y su inversa es morfismo de espacios anillados.

**Teorema B.1.1** Sea  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  un morfismo de espacios anillados. Se cumple que  $\varphi$  es isomorfismo de espacios anillados si y sólo si

1.  $\varphi : X \rightarrow Y$  es homeomorfismo.
2. Para cada abierto  $V \subset Y$ ,

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_Y(V) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi, \end{aligned}$$

es isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras.

*Demostración.* Si  $\varphi$  es isomorfismo, es homeomorfismo, y si  $U = \varphi^{-1}(V)$ , los morfismos de  $\mathbb{R}$ -álgebras

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X(U) \quad , \quad \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_Y(V)$$

son inversos uno del otro porque

$$\begin{aligned} \varphi^* \circ (\varphi^{-1})^* &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)^* = \text{Id}_{\mathcal{O}_Y(V)} \\ (\varphi^{-1})^* \circ (\varphi^*)^* &= (\varphi \circ \varphi^{-1})^* = \text{Id}_{\mathcal{O}_X(U)}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si se cumplen ambas condiciones,  $\varphi^{-1}$  es morfismo de espacios anillados, porque el isomorfismo  $\varphi^*$  transforma la subálgebra  $\mathcal{O}_Y(V)$  en  $\mathcal{O}_X(U)$   $\square$

Una **variedad diferenciable de dimensión  $n$**  es un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  que cumple:

- i) El espacio topológico  $X$  es Hausdorff y segundo contable.
- ii) Todo punto de  $X$  tiene un entorno abierto que es isomorfo como espacio anillado a un abierto de  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty)$ .

Llamaremos **funciones diferenciables** sobre la variedad  $X$  a las funciones del haz  $\mathcal{O}_X$ , y en general lo denotaremos como  $\mathcal{C}^\infty(X)$ .

Una aplicación  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre variedades diferenciables se dice **diferenciable** si es morfismo de espacios anillados; y se dice **difeomorfismo** cuando sea isomorfismo de espacios anillados.

Un **abierto coordinado** (diferenciable) en una variedad diferenciable  $X$  es un abierto  $U \subset X$  no vacío junto a  $n$  funciones diferenciables  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , llamadas **funciones coordenada**, tales que para algún abierto  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^n$

$$U \subset X \xrightarrow{\varphi=(u_1, \dots, u_n)} \bar{U} \subset \mathbb{R}^n$$

sea difeomorfismo. En la literatura es común denominar a tal aplicación  $\varphi$  **carta**.

## B.2 Espacio tangente

Sea  $X$  una variedad diferenciable y  $x \in X$ . El cociente de

$$\coprod_{\substack{U \text{ entorno} \\ \text{abierto de } x}} \mathcal{C}^\infty(U)$$

por la relación de equivalencia

$$f \equiv g \iff f = g \text{ en algún entorno de } x$$

es el **anillo de gérmenes** de funciones diferenciables en  $x$ , que denotaremos como  $\mathcal{O}_x$ .

Una **derivación** en un punto  $p \in X$  es una aplicación  $D_p : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica:

$$i) \quad D_p \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \quad D_p(f + g) = D_p f + D_p g.$$

$$ii) \quad D_p(fg) = (D_p f)g + f D_p g.$$

El conjunto de derivaciones en un punto  $p$  es el **espacio tangente** en el punto, que denotaremos  $T_p X$ , y a sus elementos les llamaremos **vectores tangentes**.

En un abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$ , si  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , existe una única función  $F \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$  (diferenciable en el sentido usual) tal que  $f = F(u_1, \dots, u_n)$ , y la **derivada parcial respecto**  $u_i$  se define como

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x) := \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1, \dots, u_n).$$

Ésto define una derivación  $(\partial_{u_i})_p f := \frac{\partial f}{\partial u_i}(p)$ .

**Teorema B.2.1** *Sea  $(U; u_1, \dots, u_n)$  un entorno abierto coordenado y  $p \in U$ . Las derivaciones  $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$  forman una base de  $T_p X$ , luego  $\dim T_p X = \dim X$ .*

*Demostración.* Son linealmente independientes porque si  $\sum_i \lambda_i (\partial_{u_i})_p = 0$  entonces

$$0 = \sum_i \lambda_i (\partial_{u_i})_p(u_j) = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j,$$

y generan porque toda derivación  $D_p$  es

$$D_p = (D_p u_1)(\partial_{u_1})_p + \dots + (D_p u_n)(\partial_{u_n})_p$$

porque si  $D_p u_i = 0$  para todo  $i$ , entonces  $D_p = 0$ , lo que se comprueba teniendo en cuenta que  $\mathcal{O}_p$  un anillo local de maximal  $(u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n)$ , donde  $p = (a_1, \dots, a_n)$ .  $\square$

La **aplicación lineal tangente** de una aplicación diferenciable  $\varphi : X \rightarrow Y$  en un punto  $p \in X$  es la aplicación lineal

$$\varphi_* : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y \quad , \quad \varphi_* D_p := D_p \circ \varphi^*.$$

Es fácil ver que  $(\phi_* \circ \varphi_*) = (\phi \circ \varphi)_*$ .

Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una aplicación diferenciable,  $p \in (U; u_1, \dots, u_n)$ ,  $q = \varphi(p) \in (V; v_1, \dots, v_n)$ , la matriz de  $\varphi_*$  es la matriz Jacobiana,

$$\varphi_* \equiv \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(p) \right),$$

donde  $\varphi_i = \varphi^* v_i$ .

El Teorema de la Función Inversa se reformula en Geometría Diferencial del siguiente modo:

**Teorema B.2.2** *Una aplicación diferenciable  $\varphi : X \rightarrow Y$  es difeomorfismo local en  $p \in X$  si y sólo si  $\varphi_* : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$  es isomorfismo.*

El **espacio cotangente** es el dual del espacio tangente,  $T_p^* X := (T_p X)^*$ . Sus elementos son las **1-formas** en  $p$ . La **diferencial** de una función  $f \in \mathcal{O}_p$  es la 1-forma

$$d_p f : T_p X \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad d_p f(D_p) := D_p f.$$

**Teorema B.2.3** *Sea  $(U; u_1, \dots, u_n)$  un entorno abierto coordinado y  $p \in U$ . Las 1-formas  $\{d_p u_1, \dots, d_p u_n\}$  forman una base de  $T_p^* X$*

*Demostración.* Nótese que es la base dual de  $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$ . □

En concreto, las coordenadas de  $d_p f$  en la anterior base son

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial u_1}(p) d_p u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(p) d_p u_n.$$

**Teorema B.2.4** *Sean  $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(X)$ , y  $p \in X$ . Entonces  $\{d_p f_1, \dots, d_p f_n\}$  es base de  $T_p^* X$  si y sólo si  $f_1, \dots, f_n$  forman un sistema de coordenadas locales en el punto  $p$ .*

*Demostración.* Pongamos  $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$  y  $q = \varphi(p)$ . Si  $x_1, \dots, x_n$  son las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $\varphi^*(d_q x_i) = d_p f_i$ , así que  $\varphi^* : T_q^* \mathbb{R}^n \rightarrow T_p^* X$  es isomorfismo porque transforma una base en otra base, y por el Teorema de la Función Inversa es difeomorfismo local. □

Una aplicación diferenciable  $\varphi : X \rightarrow Y$  es **inmersión local** en  $p \in X$  si  $\varphi_* : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$  es inyectiva. Diremos que es una **inmersión** si es inyectiva e inmersión local en todo punto, y que es una **subvariedad diferenciable regular** si además  $\varphi(X)$ , con la topología de subespacio de  $Y$ , es homeomorfo a  $X$  vía  $\varphi$ .



## B.3 Campos tensoriales

Un **campo de vectores tangentes** en  $X$  es una familia de vectores  $D = \{D_x \in T_p X : x \in X\}$ , y se dice diferenciable (lo que siempre supondremos) si para cada abierto  $U$  de  $X$  y cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  la función  $(Df)(x) := D_x f$  es diferenciable. Denotaremos como  $\mathcal{D}(X)$  al  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo de campos tangentes.

**Teorema B.3.1** *El conjunto de campos tangentes se identifica de forma canónica con el  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo de derivaciones  $D : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ .*

*Demostración.* A cada derivación  $D$  se le asigna el campo tangente que en cada punto es la derivación  $D_p f_p := (Df)(p)$ , donde  $f_p \in \mathcal{O}_p$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$  es un representante global de  $f_p$ , y no depende de dicho representante.

Recíprocamente, a cada campo  $D$  se le asigna la derivación  $D$  siguiente:  $(Df)(p) := D_p f$ .  $\square$

Si  $(U; u_1, \dots, u_n)$  es un abierto coordenado, tenemos la derivación  $\partial_{u_i} := \{(\partial_{u_i})_x : x \in U\}$ .

**Teorema B.3.2** *Sea  $(U; u_1, \dots, u_n)$  un abierto coordenado en  $X$ . El  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo  $\mathcal{D}(U)$  es libre de rango  $n$ , y una base suya es  $\{\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_n}\}$ .*

Una **1-forma** (ó campo de 1-formas) sobre  $X$  es una familia  $\omega = \{\omega_x \in T_p^* X : x \in X\}$ , y se dice diferenciable (lo que siempre supondremos) si para cada abierto  $U$  de  $X$  y cada  $D \in \mathcal{D}(U)$  la función  $\omega(D)(x) = \omega_x(D_x)$  es diferenciable. Denotaremos como  $\Omega(X)$  al conjunto de 1-formas en  $X$ .

**Teorema B.3.3** *El módulo  $\Omega(X)$  de las 1-formas en  $X$  es isomorfo al módulo dual de los campos tangentes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)}(\mathcal{D}(X), \mathcal{C}^\infty(X))$ .*

*Demostración.* A cada 1-forma  $\omega$  se le asigna el morfismo  $\omega(D)(p) := \omega_p(D_p)$ .

Recíprocamente, a cada morfismo  $\omega : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$  se le asigna la 1-forma que en cada punto es  $\omega_p(D_p) := \omega(D)(p)$ , donde  $D$  es un campo tangente cuyo valor en  $p$  es  $D_p$ .  $\square$

La **diferencial** de una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$  es la 1-forma  $df := \{d_x f \in T_p^* X : x \in X\}$ .

**Teorema B.3.4** *Sea  $(U; u_1, \dots, u_n)$  un abierto coordenado en  $X$ . El  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo  $\Omega(U)$  es libre de rango  $n$ , y una base suya es  $\{du_1, \dots, du_n\}$ .*

Un **tensor** ó campo tensorial de tipo  $(p, q)$  sobre  $X$  es una familia  $T = \{T_x \in \mathcal{T}_p^q(T_p X) : x \in X\}$ , y se dice diferenciable (lo que siempre supondremos) si para cada abierto  $U$  de  $X$  y cada  $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}(U)$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega(U)$  la función  $T(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q)(x) := T_x(D_{1,x}, \dots, D_{p,x}, \omega_{1,x}, \dots, \omega_{q,x})$  es diferenciable. Denotaremos como  $\mathcal{T}_p^q(X)$  al  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo de tensores sobre  $X$ .

**Teorema B.3.5** *El módulo  $\mathcal{T}_p^q(X)$  de tensores en  $X$  es isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)-\text{multilin}}(\mathcal{D}(X)^p \times \Omega(X)^q, \mathcal{C}^\infty(X))$ .*

**Teorema B.3.6** *Sea  $(U; u_1, \dots, u_n)$  un abierto coordenado en  $X$ . El  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo  $\mathcal{T}_p^q(U)$  es libre de rango  $n^{p+q}$ , y una base suya es*

$$\{du_{i_1} \otimes \dots \otimes du_{i_p} \otimes \partial_{u_{j_1}}, \dots, \partial_{u_{j_q}}\}_{i_l, j_k=1, \dots, n}$$

Una **curva** (parametrizada) en  $X$  es una aplicación diferenciable  $\sigma : I \rightarrow X$  donde  $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Si  $t$  es la coordenada cartesiana de  $I$ , el **campo de vectores tangentes** a la curva es  $T := \sigma_*(\partial_t)$ . Si en un abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$ ,  $\sigma(t) = (g_1, \dots, g_n)$ , entonces  $T = \sum_i g'_i(t) \partial_{u_i}$ . En general denotaremos como  $T_{t_0} \in T_{\sigma(t_0)}X$  al vector tangente a la curva en el punto  $\sigma(t_0)$ .

Se dice que una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  es una **curva integral** de un campo  $D \in \mathcal{D}(X)$  si sobre los puntos de la curva cumple que  $T = D$ . El teorema de existencia y unicidad de Ecuaciones Diferenciales asegura que dado un campo tangente y un punto, existe una curva integral del campo que pasa por el punto en  $t = 0$ , y que dos de tales curvas coinciden en la intersección de sus intervalos de definición. Las **trayectorias** ó curvas integrales máximas de un campo  $D$  son las curvas integrales definidas en el mayor intervalo posible (es decir, que no se pueden extender a un intervalo mayor), y cuando están definidas en todo  $\mathbb{R}$  se dicen **completas**.

## B.4 Cálculo diferencial exterior

Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un difeomorfismo entre variedades diferenciables, en todo punto tenemos que la aplicación lineal tangente  $\varphi_* : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$  es isomorfismo, así como su aplicación lineal dual, la **aplicación lineal cotangente** denotada como  $\varphi^* : T_{\varphi(p)}^* Y \rightarrow T_p^* X$ . En general escribiremos indistintamente  $\varphi^*$  para referirnos a la aplicación lineal cotangente ó a la inversa de la tangente  $\varphi^* = (\varphi_*)^{-1}$ ; así como  $\varphi_*$  para referirnos a la aplicación lineal tangente ó la inversa de la cotangente  $\varphi_* = (\varphi^*)^{-1}$ . Quedará claro por el contexto a cuál nos referimos.

Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un difeomorfismo, la **imagen inversa** de un tensor  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(Y)$  es el tensor sobre  $X$  del mismo tipo  $\varphi^* T_p^q$  que en cada punto vale

$$(\varphi^* T_p^q)(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q)(x) := (T_p^q)_{\varphi(x)}(\varphi_* D_{1,x}, \dots, \varphi_* D_{p,x}, \varphi_* \omega_{1,x}, \dots, \varphi_* \omega_{q,x}),$$

y la **imagen directa** de  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(X)$  es el tensor sobre  $Y$  del mismo tipo  $\varphi_* T_p^q$  que en cada punto vale

$$(\varphi_* T_p^q)(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q)(y) := (T_p^q)_{\varphi^{-1}(y)}(\varphi^* D_{1,y}, \dots, \varphi^* D_{p,y}, \varphi^* \omega_{1,y}, \dots, \varphi^* \omega_{q,y}),$$

y las siguientes propiedades son de cálculo directo:

**Proposición B.4.1** *Se verifica:*

1.  $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$  ,  $\varphi_*(df) = d(\varphi_* f)$ .
2.  $\varphi^*(T_p^q + \bar{T}_p^q) = \varphi^* T_p^q + \varphi^* \bar{T}_p^q$  ,  $\varphi_*(T_p^q + \bar{T}_p^q) = \varphi_* T_p^q + \varphi_* \bar{T}_p^q$
3.  $\varphi^*(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s) = \varphi^* T_p^q \otimes \varphi^* \bar{T}_r^s$  ,  $\varphi_*(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s) = \varphi_* T_p^q \otimes \varphi_* \bar{T}_r^s$
4.  $\varphi^*(f T_p^q) = (\varphi^* f) \varphi^* T_p^q$  ,  $\varphi_*(f T_p^q) = (\varphi_* f) \varphi_* T_p^q$ .

$$5. \varphi^*(C_i^j T_p^q) = C_i^j(\varphi^* T_p^q) \quad , \quad \varphi_*(C_i^j T_p^q) = C_i^j(\varphi_* T_p^q).$$

$$6. (\varphi^* D)_x = \varphi^*(D_{\varphi(x)}).$$

$$7. (\varphi_* D)_{\varphi(x)} = \varphi_*(D_x).$$

Un **grupo uniparamétrico local** (g.u.l.) sobre  $X$  es una aplicación  $\tau : W \longrightarrow X$  definida en un abierto  $W$  de  $\mathbb{R} \times X$  tal que, si denotamos  $\tau_t(x) = \tau(t, x)$ , se cumple:

i)  $\text{dom } \tau_0 = X$  y  $\tau_0 = \text{Id}$ .

ii) Si  $x \in \text{dom } \tau_{t_1}$  entonces

$$\tau_{t_1}(x) \in \text{dom } \tau_{t_2} \iff x \in \text{dom } \tau_{t_1+t_2},$$

y en cuyo caso se satisface que  $\tau_{t_2}(\tau_{t_1}(x)) = \tau_{t_1+t_2}(x)$ .

EL **generador infinitesimal** de un g.u.l.  $\tau$  es el campo tangente  $D$  que sobre cada  $f \in C^\infty(X)$  y cada  $p \in X$  es

$$(Df)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\tau_t(p)) - f(p)}{t},$$

y en el curso de Ecuaciones Diferenciables se prueba que todo campo tangente es el generador infinitesimal de un g.u.l., es decir, hay una correspondencia biyectiva entre grupos uniparamétricos locales y campos tangentes a  $X$ .

Sea  $D \in \mathcal{D}(X)$  un campo tangente y  $\tau$  su grupo uniparamétrico local. La **derivada de Lie** de un tensor  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q(X)$  respecto  $D$  es el tensor del mismo tipo

$$D^L T_p^q := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* T_p^q - T_p^q}{t},$$

y el **corchete de Lie** de dos campos  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(X)$  es el campo tangente

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

**Proposición B.4.2** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  $D^L f = Df$ .
2.  $D^L(T_p^q + \bar{T}_p^q) = D^L T_p^q + D^L \bar{T}_p^q$ .
3.  $D^L(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s) = (D^L T_p^q) \otimes \bar{T}_r^s + T_p^q \otimes (D^L \bar{T}_r^s)$ .
4.  $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$ .
5.  $[D_1 + D_2, D] = [D_1, D] + [D_2, D]$ .
6.  $[D_1, fD_2] = (D_1 f)D_2 + f[D_1, D_2]$ .
7. (*Identidad de Jacobi*)  $[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0$

**Teorema B.4.3** *Para todo par de campos  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(X)$  se cumple que*

$$D_1^L D_2 = [D_1, D_2].$$

*Demostración.* Véase [21].  $\square$

Llamaremos  **$p$ -formas** sobre  $X$  a los tensores covariantes alternados de orden  $p$  sobre  $X$ , y denotaremos como  $\Omega^p(X)$  al módulo de las  $p$ -formas sobre  $X$ . Se dice que  $p \geq 1$  es el **grado** de  $\omega_p \in \Omega^p(X)$ .

El **álgebra exterior** de una variedad diferenciable  $X$  es

$$\Omega^\bullet(X) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(X),$$

y tiene estructura de  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -álgebra graduada anti-conmutativa, respecto el producto exterior.

Si  $\dim X = n$ ,  $\Omega^p(X) = 0$  para  $p > n$  porque lo es en cada abierto coordenado, así que

$$\Omega^\bullet(X) = \mathcal{C}^\infty(X) \oplus \Omega^1(X) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(X).$$

Una **diferencial exterior** sobre una variedad diferenciable  $X$  es un operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $d : \Omega^\bullet(X) \rightarrow \Omega^\bullet(X)$  que cumple:

i)  $d$  es una aplicación homogénea de grado 1: manda  $p$ -formas a  $(p+1)$ -formas.

ii)  $d$  coincide con la diferencial ordinaria sobre  $\mathcal{C}^\infty(X)$ .

iii)  $d$  es una anti-derivación:

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q.$$

iv)  $d \circ d = 0$ .

**Teorema B.4.4** *Sobre toda variedad diferenciable existe una única diferencial exterior.*

*En particular, en cada abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$  toda  $p$ -forma se expresa como  $\omega_p = \sum_{\alpha} f_{\alpha} du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_p}$ ,  $\alpha = (i_1, \dots, i_p)$ , y la diferencial exterior de  $\omega_p$  es*

$$d\omega_p = \sum_{\alpha} df_{\alpha} \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_p}$$

*Demostración.* Puede consultarse en [21].  $\square$

**Proposición B.4.5** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. (Teorema de Cartan)  $D^L = d \circ i_D + i_D \circ d$ .
2.  $D^L \circ d = d \circ D^L$ .
3. (Fórmula de Cartan para las 1-formas) Si  $\omega$  es una 1-forma entonces la 2-forma  $d\omega$  es

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega(D_2)) - D_2(\omega(D_1)) - \omega([D_1, D_2]).$$

Una  $p$ -forma  $\omega_p$  se dice **cerrada** si  $d\omega_p = 0$ , y se dice **exacta** si es la diferencial de alguna  $(p-1)$ -forma, es decir, si  $\omega_p = d\omega_{p-1}$  para alguna  $(p-1)$ -forma  $\omega_{p-1}$ . Es claro que toda forma exacta es cerrada y en el  $\mathbb{R}^n$  se tiene también el recíproco:

**Lema B.4.6 (Poincaré)** *En el  $\mathbb{R}^n$ , una  $p$ -forma es exacta si y sólo si es cerrada.*

*Demostración.* Véase [17].  $\square$

## B.5 Integración en variedades

Una variedad diferenciable  $X$  de dimensión  $n$  es **orientable** si existe alguna  $n$ -forma que no se anule en ningún punto. Sobre todas las  $n$ -formas no nulas en todo punto se define una relación de equivalencia,

$$\omega \equiv \omega' \iff \omega = f\omega' \quad \text{con } f \in C^\infty(X) \text{ y } f(x) > 0 \forall x \in X,$$

y cada una de las clases de equivalencia son las **orientaciones** de  $X$ . Una **variedad orientada** es un par  $(X, [\omega])$ .

Una **variedad con borde** en  $X$  es un cerrado  $\Omega$  de  $X$  que verifica:

- i)  $\partial\Omega = \partial\overset{\circ}{\Omega}$ .
- ii)  $\partial\Omega$  o bien es una subvariedad diferenciable de dimensión  $n-1$ , o bien es vacío.

A la frontera  $\partial\Omega$  se le llama **borde** de  $\Omega$ .

**Proposición B.5.1** *Sea  $\Omega$  una variedad con borde, y  $p \in \partial\Omega$ . Entonces existe algún entorno coordinado  $(U; u_1, \dots, u_n)$  tal que*

$$U \cap \Omega = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}.$$

*Demostración.* Ver [17].  $\square$

Se dice que un vector  $D_p \in T_p X$  **apunta hacia fuera** si en el sistema de coordenadas anteriores es  $D_p = \sum_i \lambda_i (\partial_{u_i})_p$  con  $\lambda_1 > 0$ .

**Teorema B.5.2 (Orientación inducida en el borde)** *Sea  $(X, [\omega])$  una variedad orientada y  $\Omega$  una variedad con borde con  $\partial\Omega$  no vacío. La orientación de  $X$  induce de modo natural una orientación sobre  $\partial\Omega$ : dado  $D \in \mathcal{D}(X)$  que sobre los puntos de  $\partial\Omega$  apunte hacia fuera, sobre  $\partial\Omega$  una orientación es*

$$[(i_D \omega)|_{\partial\Omega}].$$

*Demostración.* Puede consultarse en [21].  $\square$

El **soporte** de una  $n$ -forma  $\omega$  es el cerrado

$$\text{sop } \omega := \overline{\{x \in X : \omega_x \neq 0\}}.$$

Si  $\omega$  es una  $n$ -forma de soporte compacto, vamos a definir la **integral** de  $\omega$ :

- Si  $\text{sop } \omega$  está contenido en un abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$ , podemos suponer que la  $n$ -forma  $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$  define la orientación en  $U$  inducida por la de  $X$ . Así  $\omega = f du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ , donde  $f = F(u_1, \dots, u_n)$  para cierta función  $F$  diferenciable en el  $\mathbb{R}^n$ , y definimos

$$\int_X \omega := \int_{\mathbb{R}^n} F dx_1 \dots dx_n.$$

- En general, se toma un recubrimiento por abiertos  $\{U_i\}$  de  $X$  y una partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $\{\phi_i\}$ . Se comprueba que  $\text{sop } \omega$  corta a un número finito de cerrados  $\{\text{sop } \phi_i\}$ , digamos a los índices  $1, \dots, r$ ; así que  $\omega = \sum_{i=1}^r \phi_i \omega$  y cada uno de los sumandos está en el caso anterior; y se define

$$\int_X \omega := \int_X \phi_1 \omega + \dots + \int_X \phi_r \omega.$$

En ambos casos el teorema de cambio de variable demuestra que no depende del abierto coordenado elegido.

Sea  $\omega$  una  $n$ -forma. Si  $\text{sop } \omega \cap \Omega$  es compacto, la integral de  $\omega$  sobre  $\Omega$  es

$$\int_{\Omega} \omega := \int_X I_{\Omega} \omega.$$

**Teorema B.5.3 (Stokes)** *Sea  $X$  una variedad orientada de dimensión  $n$ , y  $\Omega$  una variedad con borde. Si  $\omega$  es una  $(n-1)$ -forma tal que  $\text{sop } \omega \cap \Omega$  es compacto, entonces se cumple que*

$$\boxed{\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega} \quad (\text{B.1})$$

*Demostración.* Véase [17]. □

Una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable dotada de un tensor  $g \in \mathcal{T}_2(X)$  que en cada punto es un producto escalar, es decir, una métrica simétrica definida positiva, y el teorema A.2.8 se reformula como

**Teorema B.5.4** *Sobre toda variedad riemanniana orientada  $X$  de dimensión  $n$  existe una única  $n$ -forma  $\omega_X$  que toma valor 1 sobre las bases ortonormales positivas de campos tangentes. A dicha  $n$ -forma se le llama la **forma de volumen** de  $X$ .*

En cada abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$ , si  $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$  define la orientación, y  $g = \sum_{i,j} g_{ij} du_i \otimes du_j$ , la forma de volumen de  $X$  es

$$\omega_X = \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 \wedge \dots \wedge du_n. \quad (\text{B.2})$$

Si  $\Omega$  es una variedad con borde compacta de una variedad riemanniana orientada  $X$ , y  $\omega_X$  es su forma de volumen, se llama **volumen** de  $\Omega$  a la integral

$$\int_{\Omega} \omega_X,$$

y la **integral** de una función  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(X)$  sobre  $\Omega$  es

$$\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} f \omega_X.$$

## B.6 Tensores valorados en un espacio vectorial

A lo largo de esta sección, fijemos un espacio vectorial real  $E$  de dimensión  $m$  y una variedad diferenciable  $X$  de dimensión  $n$ .

Un **tensor de tipo  $(p, q)$  valorado en  $E$**  en un punto  $x \in X$  es una aplicación multilinear

$$T : T_x X \times \cdots \times T_x X \times T_x^* X \times \cdots \times T_x^* X \longrightarrow E.$$

El hecho que sea multilinear asegura que, fijada una base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $E$ , un tensor  $T$  de tipo  $(p, q)$  valorado en  $E$  en el punto  $x \in X$  se escriba como

$$T = T_1 e_1 + \cdots + T_m e_m$$

para ciertos tensores ordinarios  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}_p^q(T_x X)$ .

Un **campo tensorial** (ó tensor) de tipo  $(p, q)$  valorado en  $E$  sobre  $X$  es una colección de tensores  $T = \{T_x : x \in X\}$ , donde cada  $T_x$  es un tensor de tipo  $(p, q)$  valorado en  $E$  en  $x \in X$ ; y diremos que es diferenciable (lo que supondremos siempre) si en cualquier base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $E$  se escribe como

$$T = T_1 e_1 + \cdots + T_m e_m,$$

con  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}_p^q(X)$  diferenciables (y no depende de la base de  $E$  elegida pues de una a otra se pasa por una transformación lineal con coeficientes constantes).

Si  $\omega = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_m e_m$  es un campo de  $p$ -formas valoradas en  $E$ , la **diferencial exterior** de  $\omega$  es el campo de  $(p+1)$ -formas valoradas en  $E$

$$d\omega := (d\omega_1)e_1 + \cdots + (d\omega_m)e_m,$$

y no depende de la base elegida pues los coeficientes del cambio de base son constantes.

Si  $\omega = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_m e_m$  es un campo de  $n$ -formas valoradas en  $E$ , y  $\Omega$  es una variedad con borde de  $X$ , la **integral** de  $\omega$  sobre  $\Omega$  es

$$\int_{\Omega} \omega := \left( \int_{\Omega} \omega_1 \right) e_1 + \cdots + \left( \int_{\Omega} \omega_m \right) e_m,$$

y de nuevo no depende de la base elegida pues de una a otra se pasa por una transformación lineal con coeficientes constantes. Con estas definiciones, es claro que el Teorema de Stokes es válido también para formas valoradas.

En particular, cuando la variedad  $X$  es un espacio afín  $\mathbb{A}$  de espacio vectorial asociado un espacio vectorial  $E$ , todos los espacios tangentes se identifican canónicamente con  $E$ , de modo que los tensores valorados en los campos tangentes pueden verse como tensores valorados en  $E$ , por lo que podemos hacer la diferencial exterior de formas valoradas en los campos tangentes y la integración de formas de grado máximo valoradas en los campos tangentes, como antes.

## B.7 Elementos matemáticos en la física

Sea  $X$  una variedad riemanniana orientada, y denotemos por  $\omega_X$  su forma de volumen. Se llama **divergencia** de un campo  $D \in \mathcal{D}(X)$  a la coordenada de la  $n$ -forma  $D^L \omega_X$  en la base  $\{\omega_X\}$  de  $\Omega^n(X)$ , es decir, a la función  $\operatorname{div} D \in \mathcal{C}^\infty(X)$  tal que  $D^L \omega_X = (\operatorname{div} D) \omega_X$ .

En el  $\mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas, es sencillo comprobar que si  $D = \sum_i f_i \partial_{x_i}$  entonces

$$\operatorname{div} D = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Sea  $\Omega$  una variedad con borde compacta, y  $N$  el campo normal unitario a  $\partial\Omega$  que apunta hacia fuera. Dado un campo tangente  $D \in \mathcal{D}(X)$ , se llama **flujo de  $D$  a través de  $\partial\Omega$**  a la integral

$$\int_{\partial\Omega} D \cdot N = \int_{\partial\Omega} i_D \omega_X$$

(la igualdad se debe a que  $D \cdot N$  es precisamente la primera coordenada de  $D$  en una base  $\{N, D_2, \dots, D_n\}$  de campos tangentes).

**Teorema B.7.1 (de la divergencia)** *Sea  $X$  una variedad riemanniana orientada,  $\Omega$  una variedad con borde compacta, y  $N$  el campo normal unitario a  $\partial\Omega$  que apunta hacia fuera. Entonces el flujo de un campo a través de  $\partial\Omega$  es igual a la integral de la divergencia del campo en  $\Omega$ ,*

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} D \cdot N = \int_{\Omega} \operatorname{div} D} \quad (\text{B.3})$$

*Demostración.*  $\int_{\Omega} \operatorname{div} D = \int_{\Omega} d(i_D \omega_X) = \int_{\partial\Omega} i_D \omega_X$ , donde la segunda igualdad es el teorema de Stokes.  $\square$

Si  $X$  es una variedad riemanniana, tenemos el siguiente isomorfismo de  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulos (vía la polaridad en cada punto):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(X) & \xlongequal{\quad} & \Omega(X) \\ D & \longrightarrow & i_D g \end{array}$$

Se llama **gradiente** de una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$  al único campo tangente  $\operatorname{grad} f \in \mathcal{D}(X)$  que se identifica por el isomorfismo anterior con la 1-forma  $df$ , es decir, que cumple la igualdad  $i_{\operatorname{grad} f} g = df$ .

En el  $\mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas, es sencillo comprobar que dada una función  $f$  se verifica

$$\operatorname{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_i}.$$

El **laplaciano** de una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$  es la función  $\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ . Se dice que una función es **armónica** si su laplaciano es nulo. Un cálculo directo



prueba que en  $\mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas el laplaciano de una función  $f$  es

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Si  $X$  es una variedad riemanniana orientada de dimensión 3, y  $\omega_X$  es su forma de volumen, se tiene el siguiente isomorfismo de  $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulos :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) & \xlongequal{\quad} \Omega^2(X) \\ D & \longrightarrow i_D \omega_X \end{aligned}$$

Se llama **rotacional** de un campo  $D \in \mathcal{D}(X)$  al único campo tangente  $\text{rot } D$  que se corresponde por el isomorfismo anterior con la 2-forma  $d(i_D g)$ , es decir, que cumple la igualdad  $i_{\text{rot } D} \omega_X = d(i_D g)$ .

En el  $\mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas, se comprueba que dado un campo  $D = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$ , entonces

$$\text{rot } D = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (g_x - f_y)\partial_z.$$

Sea  $X$  una variedad riemanniana. La **circulación** de un campo  $D \in \mathcal{D}(X)$  sobre una curva orientada  $C$  de  $X$  es la integral

$$\int_C i_D g.$$

**Teorema B.7.2 (del rotacional)** *En el espacio, la circulación a lo largo de una curva cerrada, frontera de una superficie  $S$ , es igual al flujo del rotacional a través de  $S$ ,*

$$\int_C i_D g = \int_S i_{\text{rot } D} \omega_C$$

*Demostración.*  $\int_C i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\text{rot } D} \omega_C$  □

Consideremos en adelante la variedad  $\mathbb{R}^3$  con la métrica euclídea  $g = \sum_{i=1}^3 dx_i \otimes dx_i$ .

Se llama **trabajo** de un campo tangente  $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  (entendido como fuerza) a lo largo de una curva orientada  $C$  a la integral

$$\int_C i_F g,$$

es decir, a la circulación de  $F$  a lo largo de  $C$ . En coordenadas, si  $F = \sum_i f_i \partial_{x_i}$ ,  $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$ , y  $p = \sigma(a)$ ,  $q = \sigma(b)$ ,  $a < b$ , el trabajo realizado para ir desde  $p$  hasta  $q$  es

$$\int_p^q i_F g = \int_a^b F \cdot T dt = \int_a^b \sum_{i=1}^3 f_i(\sigma(t)) \sigma'_i(t) dt$$

Diremos que un campo de fuerzas  $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  es **conservativo** si el trabajo realizado para ir de un punto a otro de  $\mathbb{R}^3$  no depende de la curva elegida.

**Proposición B.7.3** Sea  $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  un campo de fuerzas. Son equivalentes:

1.  $F$  es un campo conservativo.
2.  $F$  es un gradiente, es decir, existe  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $F = \text{grad } u$ .
3.  $\text{rot } F = 0$ .

*Demostración.* 1)  $\Rightarrow$  2). Si  $F$  es conservativo, fijemos  $p \in \mathbb{R}^3$ , y definamos la siguiente función: para cada  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x)$  es el trabajo realizado por  $F$  a lo largo de cualquier curva para ir de  $p$  a  $x$ ,

$$f(x) = \int_p^x i_F g.$$

Si  $F = \sum_i f_i \partial_{x_i}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_p^{x+\varepsilon e_i} i_F g - \int_p^x i_F g}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\varepsilon e_i} i_F g}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 F \cdot T dt}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(x + t\varepsilon e_i) dt = f_i(x) \end{aligned}$$

2)  $\Rightarrow$  3).  $\text{rot } F$  es el único campo que cumple  $i_{\text{rot } F} \omega_{\mathbb{R}^3} = d(i_F g) = d(du) = 0$ , luego  $\text{rot } F = 0$ .

3)  $\Rightarrow$  1). Si  $\text{rot } F = 0$ , entonces  $d(i_F g) = 0$ , es decir, la 1-forma  $i_F g$  es cerrada, y por el lema de Poincaré exacta: existe  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $i_F g = du$ . Por tanto para cualquier curva  $\sigma$ , y  $p = \sigma(a)$ ,  $q = \sigma(b)$ ,  $a < b$ ,

$$\int_p^q i_F g = \int_p^q du = \int_a^b (u \circ \sigma)'(t) dt = u(q) - u(p).$$

□

Si  $F$  es un campo conservativo, se llama **potencial** asociado a  $F$  a toda función  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $F = \text{grad } u$ . En tal caso se cumple que el trabajo realizado para ir de un punto  $p$  a un punto  $q$  es  $u(q) - u(p)$ .

## Apéndice C

# Geometría Riemanniana

Recordemos las nociones básicas de la Geometría Riemanniana:

### C.1 Conexiones Lineales

Una **conexión lineal**, **derivada covariante** o **traslado paralelo** en una variedad diferenciable  $X$  es una aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow \mathcal{D}(X) \\ (D, \bar{D}) &\longmapsto D^\nabla \bar{D}\end{aligned}$$

que cumple:

- i)  $D^\nabla(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) = D^\nabla \bar{D}_1 + D^\nabla \bar{D}_2.$
- ii)  $D^\nabla(f\bar{D}) = (Df)\bar{D} + fD^\nabla \bar{D}.$
- iii)  $(D_1 + D_2)^\nabla \bar{D} = D_1^\nabla \bar{D} + D_2^\nabla \bar{D}.$
- iv)  $(fD)^\nabla \bar{D} = fD^\nabla \bar{D}.$

**Lema C.1.1** Si  $D$  ó  $\bar{D}$  se anulan en un abierto  $U$  de  $X$ , también  $D^\nabla \bar{D}$ .

*Demostración.* Dado  $x \in U$ , tómese una función meseta  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X)$  tal que  $\phi(x) = 1$  y  $\text{sop } \phi \subset U$ .

Si  $D|_U = 0$ , entonces  $0 = (\phi D)^\nabla \bar{D} = \phi(D^\nabla \bar{D})$ , luego  $(D^\nabla \bar{D})_x = 0$ .

Si  $\bar{D}|_U = 0$ , entonces  $0 = D^\nabla(\phi \bar{D}) = (D\phi)\bar{D} + \phi(D^\nabla \bar{D})$ , así que  $(D^\nabla \bar{D})_x = 0$ .  $\square$

**Corolario C.1.2**  $(D^\nabla \bar{D})_p$  sólo depende del valor de  $D_p$  y del valor de  $\bar{D}$  en un entorno de  $p$ .

El lema muestra que  $\nabla$  induce una conexión lineal en cada abierto  $U$  de  $X$ , de modo que  $(D^\nabla \bar{D})|_U = (D|_U)^\nabla(\bar{D}|_U)$ . En cada abierto coordinado  $(U; u_1, \dots, u_n)$  la conexión  $\nabla$  viene dada por sus **símbolos de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ,

$$\partial_{u_i}^\nabla \partial_{u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{u_k},$$

y por tanto dados dos campos  $D = \sum_i f_i \partial_{u_i}$  y  $\bar{D} = g_j \partial_{u_j}$ , tendremos que

$$D^\nabla \bar{D} = \sum_k \left( Dg_k + \sum_{i,j} f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_{u_k} \quad (\text{C.1})$$

**Lema C.1.3** *Dada una conexión lineal  $\nabla$ , el vector  $(D^\nabla \bar{D})_p$  sólo depende del valor de  $D_p$  y del valor de  $\bar{D}$  a lo largo de una curva cuyo vector tangente en  $p$  sea  $D_p$ .*

*Demostración.* La fórmula anterior en  $p$  dice que

$$(D^\nabla \bar{D})_p = \sum_k \left( D_p g_k + \sum_{i,j} f_i(p) g_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) (\partial_{u_k})_p,$$

así que se ve que para determinar  $(D^\nabla \bar{D})_p$  sólo hay que conocer los valores de  $D_p$  y  $\bar{D}_p$ , y los valores de  $D_p g_j$ , que están determinamos por lo que valga  $g_j$  en una curva  $\sigma$  que pase por  $p$  en  $t = 0$  y cuyo vector tangente en  $p$  sea  $D_p$ , porque en tal caso  $D_p g_j = (g \circ \sigma)'(0)$ .  $\square$

**Ejemplo C.1.4 (Conexión estandar del espacio afín)** En un espacio afín real  $\mathbb{A}_n$ , su conexión estándar (que denotaremos por  $\nabla_0$ ) viene dada por la anulación de todos los símbolos de Christoffel,

$$D^{\nabla_0} \bar{D} = \sum_k Dg_k \partial_k,$$

para  $\bar{D} = \sum g_k \partial_k$ .

**Teorema C.1.5** *Toda variedad diferenciable admite conexiones lineales.*

*Demostración.* En un abierto coordinado consiste en elegir los símbolos de Christoffel (es decir, dar  $n^3$  funciones), y mediante el argumento estándar de particiones de la unidad se comprueba que puede definirse una sobre toda la variedad.  $\square$

**Teorema C.1.6** *Toda conexión lineal  $\nabla$  extiende de modo único a una derivación de tensores (respecto  $\otimes$ ) que conserva el tipo y verifica*

1.  $D^\nabla f = Df$ .
2.  $D^\nabla (C_i^j T) = C_i^j (D^\nabla T)$ .

*Demostración.* Para la unicidad, derivando  $\omega(\bar{D}) = C_1^1(\omega \otimes \bar{D})$  vemos que

$$(D^\nabla \omega)(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega(D^\nabla \bar{D}),$$

y derivando  $T(D_1, \dots, \omega_q) = C_1^1 \dots C_1^1 (D_1 \otimes \dots \otimes D_p \otimes T \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q)$ , vemos que

$$\begin{aligned} (D^\nabla T)(D_1, \dots, \omega_q) &= D(T(D_1, \dots, \omega_q)) \\ &\quad - T(D^\nabla D_1, \dots, \omega_q) - \dots - T(D_1, \dots, D^\nabla \omega_q). \end{aligned}$$

Para la existencia basta tomar estas fórmulas como definición.  $\square$

La **diferencial covariante** o derivada covariante total de un tensor  $T$  de tipo  $(p, q)$  es el tensor  $\nabla T$  de tipo  $(p+1, q)$  siguiente:

$$(\nabla T)(D, D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) = (D^\nabla T)(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q),$$

y diremos que  $T$  es **paralelo** cuando  $\nabla T = 0$ .

La **torsión** de una conexión lineal  $\nabla$  es el tensor de tipo  $(2, 1)$

$$\text{Tor}_\nabla(D, \bar{D}) := D^\nabla \bar{D} - \bar{D}^\nabla D - [D, \bar{D}],$$

y diremos que  $\nabla$  es **simétrica** cuando  $\text{Tor}_\nabla = 0$ , lo que en un abierto coordenado equivale a  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , para todo  $i, j, k$ .

La **curvatura** de una conexión lineal  $\nabla$  es el tensor de tipo  $(3, 1)$ , que denotaremos indistintamente  $R, R_\nabla$ , ó  $R_{2,1}^1$  siguiente:

$$R(D_1, D_2, D_3) := D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 - D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 - [D_1, D_2]^\nabla D_3,$$

y un cálculo directo prueba que es alternado en los dos primeros índices, así como la *identidad de Bianchi*:

$$R(D_1, D_2, D_3) + R(D_2, D_3, D_1) + R(D_3, D_1, D_2) = 0.$$

Un **campo tangente con soporte en una curva**  $\sigma : I \rightarrow X$  es una familia de vectores  $\{D_t \in T_{\sigma(t)}X : t \in I\}$ . Tal campo se dirá diferenciable (lo que supondremos siempre) si para cada abierto  $U$  de  $X$  y cada función  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  la función  $(Df)(t) := D_t f$  es diferenciable, de modo que define una derivación  $D : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I)$ .

El  $\mathcal{C}^\infty(I)$ -módulo de campos a soporte en  $\sigma$  se denotará  $\mathcal{D}_\sigma$ .

**Teorema C.1.7** *Existe una única forma de extender  $\partial_t^\nabla : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$  a una derivación covariante  $\partial_t^\nabla : \mathcal{D}_\sigma \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$  de campos a soporte que cumple*

1.  $\partial_t^\nabla(D + \bar{D}) = \partial_t^\nabla D + \partial_t^\nabla \bar{D}$ .
2.  $\partial_t^\nabla(fD) = f'D + f(\partial_t^\nabla D)$ , donde  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ .

*Demostración.* Si en un entorno coordenado  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , la única extensión posible es

$$\partial_t^\nabla \left( \sum_k g_k \partial_k \right) = \sum_k (g'_k \partial_k + g_k \partial_t^\nabla \partial_k) = \sum_k \left( g'_k + \sum_{i,j} \sigma'_i g_j (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) \right) \partial_k$$

□

Un campo  $D$  con soporte en  $\sigma$  se dice **paralelo** si  $\partial_t^\nabla D = 0$ .

**Teorema C.1.8** *Sea  $\sigma : I \rightarrow X$  una curva y  $D_p \in T_p X$  tal que  $p = \sigma(0)$ . Existe un único campo paralelo  $D$  con soporte en la curva tal que  $D_0 = D_p$ .*

*Demostración.* Aplíquese el teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales en un abierto coordenado, y compruébese que puede extenderse a todo el intervalo de definición de la curva. □

## C.2 Geodésicas

Sea  $(X, \nabla)$  una variedad diferenciable dotada de una conexión lineal. Una curva  $\sigma : I \rightarrow X$  se dice **geodésica** si su vector tangente es paralelo,  $\partial_t^\nabla \partial_t = 0$ .

**Teorema C.2.1** *Fijado  $D_p \in T_p X$ , existe una geodésica  $\sigma : I \rightarrow X$  tal que en  $t = 0$  pasa por  $p$  con vector tangente  $D_p$ . Además, dos de ellas coinciden en el intervalo común de definición.*

*Demostración.* Por la expresión anterior, en un abierto coordenado la condición de ser geodésica es

$$\sigma_k'' + \sum_{i,j} \sigma_i' \sigma_j' (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

y basta aplicar el teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales.  $\square$

Dadas dos conexiones lineales  $\nabla, \bar{\nabla}$ , el **tensor diferencia**

$$A(D_1, D_2) := D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_1^\nabla D_2$$

es un tensor de tipo  $(2, 1)$ .

**Proposición C.2.2** *El tensor diferencia de las conexiones  $\nabla, \bar{\nabla}$  verifica:*

1.  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  tienen las mismas geodésicas si y sólo si  $A$  es hemisimétrico.
2.  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  tienen la misma torsión si y sólo si  $A$  es simétrico.
3.  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  son iguales si y sólo si tienen las mismas geodésicas y el mismo tensor torsión

*Demostración.* 1) En una geodésica común,  $A(D_p, D_p) = (D^{\bar{\nabla}} D)_p - (D^\nabla D)_p = 0$ ; y si  $D^\nabla D = 0$  y  $A$  es alternado,  $D^{\bar{\nabla}} D = A(D, D) + D^\nabla D = 0$ .

2) La igualdad  $A(D_1, D_2) = A(D_2, D_1)$  ocurre si y sólo si  $\text{Tor}_\nabla(D_1, D_2) = \text{Tor}_{\bar{\nabla}}(D_1, D_2)$ .

3) Obvio por lo anterior.  $\square$

## C.3 Divergencia de un tensor

Sea  $(X, \nabla)$  una variedad diferenciable dotada de una conexión lineal. Se llama **divergencia** de un tensor  $T_p^q \in \mathcal{T}_p^q$  ( $q \geq 1$ ) al tensor de tipo  $(p, q-1)$

$$\text{div}_\nabla T_p^q := C_1^1(\nabla T_p^q). \quad (\text{C.2})$$

**C.3.1 (Expresión en coordenadas con la conexión estándar)** Consideremos un espacio afín real  $\mathbb{A}_{n+1}$  de dimensión  $n+1$ , dotado de la conexión estándar  $\nabla_0$  (es decir, aquella que en cualquier referencia afín tiene todos sus símbolos de Christoffel nulos), y veamos cómo se expresa en coordenadas la divergencia de un campo (tensor 1-contravariante) y un tensor 2-contravariante. En primer lugar notar que

$$\partial_i^{\nabla_0} dx_j = 0 \quad , \quad \nabla_0 \partial_i = 0, \quad (\text{C.3})$$

para cualquier  $i, j$ . En efecto,

$$(\partial_i^{\nabla_0} dx_j)(\partial_k) = \partial_i(dx_j \partial_k) - dx_j(\partial_i^{\nabla_0} \partial_k) = 0,$$

y por otra parte

$$(\nabla_0 \partial_i)(\partial_j, dx_k) = (\partial_j^{\nabla_0} \partial_i)(dx_k) = 0.$$

Veamos en primer lugar  $\text{div}_{\nabla_0} D$ . Sea  $D \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{n+1})$ , que en la base de campos se escriba como  $D = \sum_k f_k \partial_k$ . La diferencial covariante del campo será un tensor  $(1, 1)$  que tiene como coordenadas

$$\begin{aligned} \nabla_0 D(\partial_i, dx_j) &= (\partial_i^{\nabla_0} D)(dx_j) = \left( \partial_i^{\nabla_0} \left( \sum_k f_k \partial_k \right) \right) (dx_j) \\ &= \left( \sum_k \left( \partial_i^{\nabla_0} f_k \partial_k \right) \right) (dx_j) = \left( \sum_k \left( \partial_i f_k \partial_k + f_k \partial_i^{\nabla_0} \partial_k \right) \right) (dx_j) \\ &= \left( \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \partial_k \right) (dx_j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

por lo que entonces

$$\nabla_0 D = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \otimes \partial_j.$$

Por tanto,

$$\text{div}_{\nabla_0} D = C_1^1(\nabla_0 D) = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} C_1^1(dx_i \otimes \partial_j) = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i(\partial_j)$$

y concluimos que

$$\text{div}_{\nabla_0} D = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad (\text{C.4})$$

que coincide con la expresión en coordenadas de divergencia (clásica) de un campo en una variedad orientada (en el caso en el que estamos: un espacio afín con su conexión estándar).

Consideremos ahora un tensor 2-contravariante  $T^2$ , que en una cierta referencia afín se escribirá como  $T^2 = \sum_{i,j} f_{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ . Puesto que la diferencial covariante es una derivación, se sigue que

$$\nabla_0 T^2 = \sum_{i,j} (df_{ij} \otimes \partial_i \otimes \partial_j + f_{ij} \nabla_0(\partial_i \otimes \partial_j)) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} dx_k \otimes \partial_i \otimes \partial_j,$$

luego

$$\text{div}_{\nabla_0} T^2 = C_1^1(\nabla_0 T^2) = \sum_{i,j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \partial_j$$

y por tanto concluimos que

$$\text{div}_{\nabla_0} T^2 = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \right) \partial_j. \quad (\text{C.5})$$

## C.4 Variedades Riemannianas

**Teorema C.4.1** *Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana.*

*Demostración.* En un abierto coordenado se puede elegir la métrica euclídea  $g = \sum_i du_i \otimes du_i$ , y mediante el argumento estándar de particiones de la unidad se comprueba que se puede definir una sobre toda la variedad.  $\square$

En general denotaremos  $g(D_1, D_2) = D_1 \cdot D_2$ .

Una conexión lineal sobre  $(X, g)$  se dice **compatible con la métrica** si cumple la siguiente “regla de Leibniz”:

$$D(D_1 \cdot D_2) = (D^\nabla D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^\nabla D_2) \quad , \quad D, D_1, D_2 \in \mathcal{D}(X),$$

lo que claramente equivale a que la métrica sea paralela,  $\nabla g = 0$

**Teorema C.4.2 (Fundamental de la Geometría Riemanniana)** *Toda variedad riemanniana posee una única conexión lineal simétrica y compatible con la métrica, llamada **conexión de Levi-Civita** ó conexión riemanniana.*

*Demostración.* Para la unicidad, dados campos  $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}(X)$ , por la compatibilidad de la métrica se tiene que

$$D_1(D_2 \cdot D_3) = (D_1^\nabla D_2) \cdot D_3 + D_2 \cdot (D_1^\nabla D_3),$$

$$D_2(D_3 \cdot D_1) = (D_2^\nabla D_3) \cdot D_1 + D_3 \cdot (D_2^\nabla D_1),$$

$$D_3(D_1 \cdot D_2) = (D_3^\nabla D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D_3^\nabla D_2),$$

y sumando las dos primeras y restando la tercera se tiene la **fórmula de Koszul**,

$$\begin{aligned} (D_1^\nabla D_2) \cdot D_3 = \frac{1}{2} \bigg( & D_1(D_2 \cdot D_3) + D_2(D_3 \cdot D_1) - D_3(D_1 \cdot D_2) \\ & + D_2 \cdot [D_3, D_1] + D_3 \cdot [D_1, D_2] - D_1 \cdot [D_2, D_3] \bigg), \end{aligned}$$

que determina unívocamente la conexión, pues el segundo miembro de la fórmula no depende de la conexión.

Para la existencia basta comprobar que en cada abierto coordenado  $(U; u_1, \dots, u_n)$  la fórmula de Koszul se traduce en que los símbolos de Christoffel de  $\nabla$  deben ser

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right), \quad (\text{C.6})$$

donde  $g = (g_{ij})$  y  $g^{-1} = (g^{ij})$ ; y dichos símbolos definen una conexión que es compatible con la métrica y simétrica.  $\square$

El **tensor de Riemann-Christoffel** de  $g$  es la bajada del índice contravariante del tensor de curvatura de su conexión Levi-Civita,

$$R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) := R(D_1, D_2, D_4) \cdot D_3$$

Mediante computación directa se tiene la siguiente



**Proposición C.4.3** *El tensor de Riemann-Christoffel presenta las siguientes simetrías:*

1. *Es hemisimétrico en los dos primeros índices y en los dos últimos.*
2.  $R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) = R_{2,2}(D_3, D_4; D_1, D_2)$
3. *La suma circular en tres índices cualquiera es nula (para el cuarto fijo es la identidad de Bianchi).*



# Bibliografía

- [1] ARGYLE, J., CONNORS, R., DEXTER, K., AND SCOULAR, C. P1\_3 Relativistic Optics. *Physics Special Topics* **11**, 1 (2012). <https://physics.le.ac.uk/journals/index.php/pst/article/view/549/360>.
- [2] BENNETT, C. L., LARSON, D., ET AL. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. arXiv:1212.5225, 2012.
- [3] BLANCO LASERNA, D. *Einstein, La teoría de la relatividad : el espacio es una cuestión de tiempo*. RBA, 2012.
- [4] EINSTEIN, A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? [¿Depende la inercia de un cuerpo de la energía que contiene?]. *Annalen der Physik* **323**, 13 (1905), 639–641.
- [5] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper.[Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento]. *Annalen der Physik* **322**, 10 (1905), 891–921.
- [6] FARO RIVAS, R. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales*, 2017. <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/LibroEDLat.pdf>.
- [7] FERNÁNDEZ BUEY, F. *Albert Einstein : ciencia y conciencia*. El Viejo Topo, 2005.
- [8] FLORES, J. L. Relatividad especial. In *Una introducción a la Relatividad desde un punto de vista Matemático* (2010). <http://www.uco.es/geometria/documentos/JLFlores.pdf>.
- [9] GEROCH, R. *Mathematical Physics*. University Of Chicago Press, 1985.
- [10] HAWKING, S. *A brief history of time : from the big bang to black holes*. Bantam Books, 1988.
- [11] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds*, vol. 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 1997.
- [12] LEVI-CIVITA, T. *The absolute differential calculus : (calculus of tensors)*. Dover Publications, 1977.
- [13] LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.* **12** (1971), 498–501.

- [14] LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.* **13** (1972), 874–876.
- [15] NABER, G. L. *The Geometry of Minkowski Spacetime*, vol. **92** of *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, New York, NY, 2012.
- [16] NAVARRO, J., AND SANCHO, J. B. On the naturalness of Einstein’s equation. *Journal of Geometry and Physics* **58**, 8 (aug 2008), 1007–1014.
- [17] NAVARRO GONZÁLEZ, J. A. *Apuntes para una Licenciatura*, 2014. <http://matematicas.unex.es/~navarro/licenciatura.pdf>.
- [18] NAVARRO GONZÁLEZ, J. A., AND SANCHO DE SALAS, J. B. *Gravitación Newtoniana y Relatividad*, 2004. <http://matematicas.unex.es/~navarro/relatividad/apuntrel.pdf>.
- [19] REQUEJO FERNÁNDEZ, B. *Álgebra Lineal y Geometría*, 2012. <http://matematicas.unex.es/~brequejo/ALGEBRA%20LINEAL%20Y%20GEOMETRIA/>.
- [20] REQUEJO FERNÁNDEZ, B. *Geometría Diferencial I*. Universidad de Extremadura, 2016. [http://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA\\_DIFERENCIAL\\_I/](http://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA_DIFERENCIAL_I/).
- [21] REQUEJO FERNÁNDEZ, B. *Geometría Diferencial II*. Universidad de Extremadura, 2016. [http://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA\\_DIFERENCIAL\\_II/](http://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA_DIFERENCIAL_II/).
- [22] SANCHO DE SALAS, J. B. *Geometría I*, 2013.
- [23] SHARAN, P. *Spacetime, Geometry and Gravitation*. Birkhäuser Basel, Basel, 2009.
- [24] TIPLER, P. A., AND MOSCA, G. *Physics for scientists and engineers*. W.H. Freeman, 2008.
- [25] VERMEIL, H. Notiz uber das mittlere krummungsmass einer n-fach ausgedehnten riemann’schen mannigfaltigkeit. *Nachrichten Göttinger Gesellschaft Wissenschaften* **334** (1917).
- [26] ZEEMAN, E. C. Causality Implies the Lorentz Group. *Journal of Mathematical Physics* **5**, 4 (1964), 490.

# Índice de Materias

- 1-forma del tiempo, 5
- 3-forma
  - de impulso, 20
  - de masa, 20
- aberración de la luz, 77
- aceleración, 12, 39
  - aparente, 12
- adición de velocidades, 74
- automorfismo causal, 62
- Big Bang, 91
- Big Crunch, 92
- boost, 55, 59
- caída libre, 82
- causalidad, 62
- conexión
  - de Cartan, 82, 88
  - de Levi-Civita, 94
- constante
  - cosmológica, 97
  - de Hubble, 91
  - de la ecuación de Einstein, 99
- contracción de la longitud, 71
- corrimiento
  - al azul, 75
  - al rojo, 75
- curvatura escalar, 96
- densidad
  - crítica, 92
  - de cantidad de movimiento, 22
  - de fuerza, 24, 27
  - de impulso, 22
  - de masa, 20
- desigualdad
  - de Cauchy-Schwarz invertida, 43
  - triangular invertida, 44
- diagrama de Minkowski, 55
- dilatación del tiempo, 50, 68
- distribución de materia, 27
- ecuación
  - de continuidad, 29
  - de Einstein, 97
  - de Einstein clásica, 99
  - de Euler, 29
  - de Gauss, 32, 87
  - de Navier-Stokes, 30
  - de Poisson, 32
- edad del universo, 91
- efecto
  - Compton, 78
  - Doppler, 76
- energía, 63, 65
  - aparente, 65
  - cinética, 65
  - en reposo, 65
- equivalencia masa-energía, 65
- espacio-tiempo
  - de Galileo, 5, 9
  - de Minkowski, 38
  - relativista, 100
- factor de Lorentz, 49
- flujo
  - de impulso, 26
  - de masa, 26
- fotón, 63
- fuerza, 14, 32
- gravitación
  - de Newton-Cartan, 88
  - newtoniana, 33
  - relativista, 100
- grupo
  - de Galileo, 13
  - de causalidad, 62
  - de Lorentz, 54
  - de Poincaré, 58

- especial ortogonal generalizado, 54
- ortogonal generalizado, 53
- hiperplano de simultaneidad, 10, 41
- impulso, 14, 62
- intensidad de fuerza gravitatoria, 31
- isometría
  - impropia, 54
  - no ortocrona, 54
  - ortocrona, 54
  - propia, 54
- ley
  - de conservación de la masa, 14, 64
  - de conservación del impulso, 14, 22, 64
  - de la gravitación universal, 30
  - del movimiento inercial, 14, 64
  - newtoniana del movimiento, 14
- métrica
  - de Lorentz, 38
  - del espacio, 6, 9, 41, 88
  - del tiempo, 4, 9, 38, 88
- masa, 14, 63, 65
  - aparente, 63
  - en reposo, 63
  - intrínseca, 63
- momento lineal, 15, 63
- nube de polvo, 21, 27
- observador
  - inercial, 40
- orientación
  - del espacio, 5
  - del espacio-tiempo, 7, 9, 38
  - del tiempo, 9, 38, 42
- parámetro de densidad, 93
- paradoja
  - de los gemelos, 69
  - del garaje, 72
- partícula, 14, 62
- potencial gravitatorio, 31
- principio de equivalencia, 82
- radio del universo, 89
- rayo de luz, 40
- referencia inercial, 10, 44, 81
- simultaneidad, 40
- suceso, 3
- tensor
  - contravariante de materia, 24
  - covariante de materia, 87, 88
  - de Einstein, 96
  - de Ricci, 86
  - de Riemann-Christoffel, 86, 94
  - de tensiones, 26
  - natural, 95
- tiempo, 10
- tiempo propio, 48–50
- transformación
  - de Galileo, 13
  - de Lorentz, 54
  - de Poincaré, 58
- trayectoria, 11, 39
- unidad, 98
  - de longitud, 98
  - de masa, 30, 98
  - de tiempo, 38, 98
- vector
  - de tipo espacio, 39
  - de tipo luz, 39
  - de tipo tiempo, 39
  - espacial, 4, 40
- velocidad, 10, 12, 39
  - aparente, 12