CENTER FOR VISION, AUTOMATION & CONTROL

Diplomarbeit: Funktionsapproximation mittels datenbasierter Methoden

Jakob WEBER und Stephan STROMMER

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

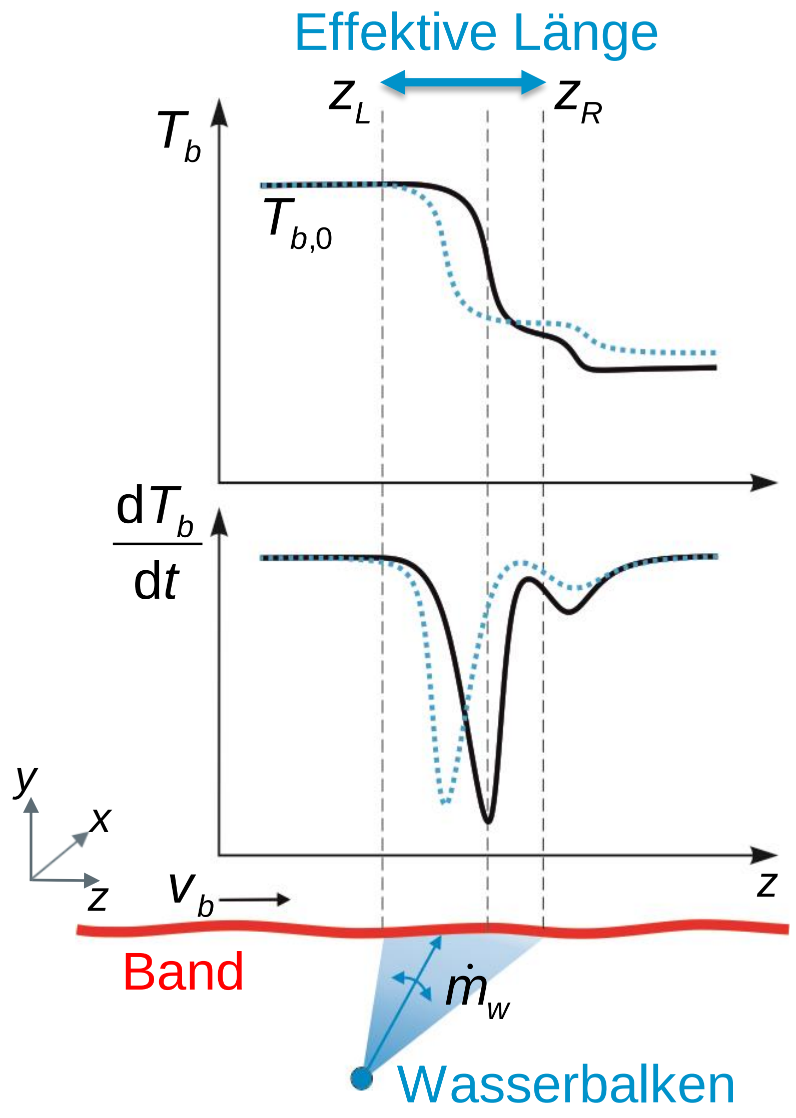
Kühlvorgang:

- Kühlung des Bandes erfolgt mit Luft und Wasser
- Wärmeübergangskoeffizient beeinflusst maßgeblich die Intensität der Kühlung
- Wärmeübergangskoeffizient ist unbekannt und abhängig von einer Vielzahl an Prozessgrößen

Hybrider Modellierungsansatz:

$$\rho_b c_b d_b \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} = \alpha_w \left(T_b - T_w\right)$$

$$\boxed{\alpha_w = \rho_b c_b d_b \frac{1}{\left(T_b - T_w\right)} \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t}}$$



MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

AUSTRIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

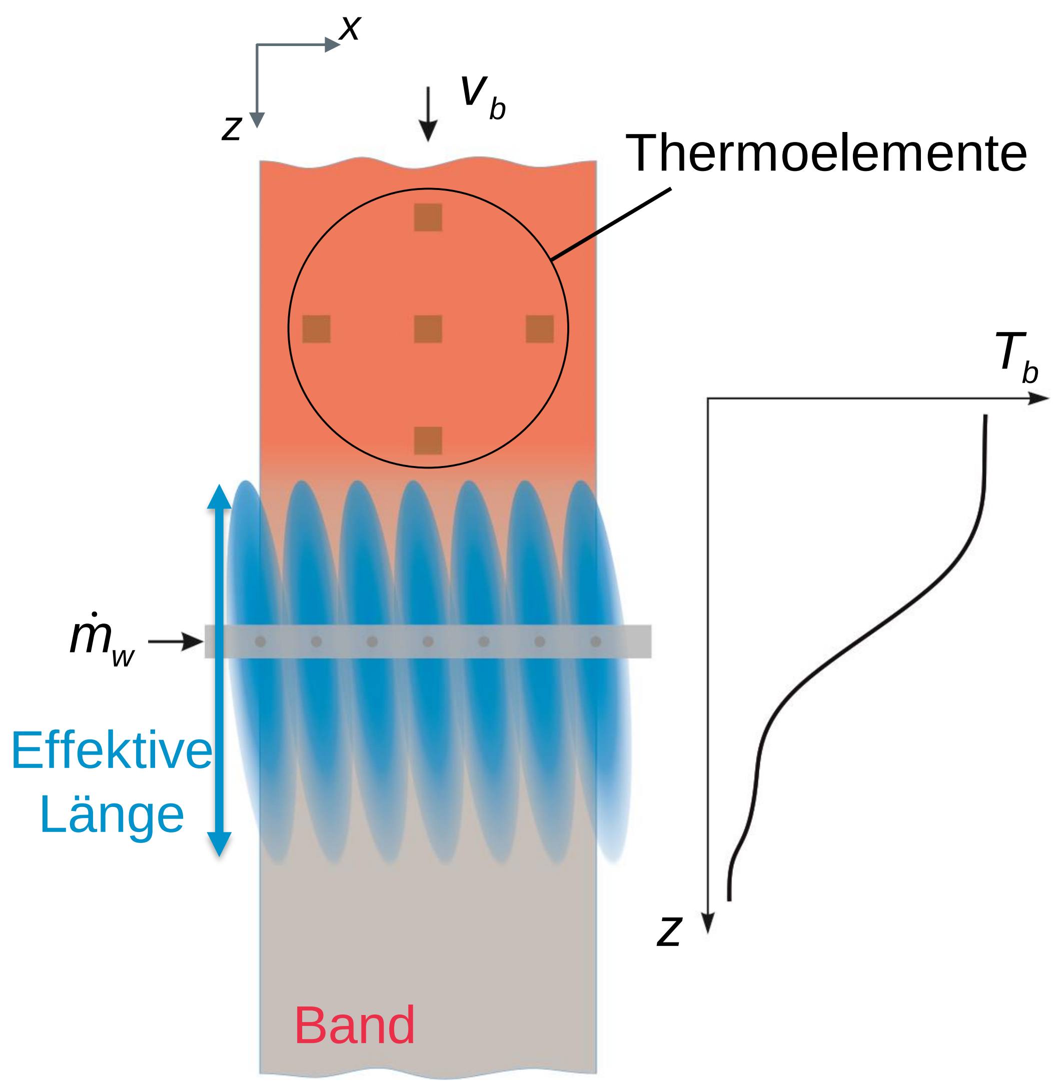
Hybrider Modellierungsansatz:

$$\boxed{\alpha_w = \rho_b c_b d_b \frac{1}{\left(T_b - T_w\right)} \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t}}$$

Experimente (Versuchsanlage)**:**

- Thermoelemente direkt am Band fixiert
- Erwärmung des ruhenden Bandes bis zur gewünschten Temperatur
- Band bewegt sich durch den Kühlbereich und wird mit Luft und Wasser gekühlt

$$\alpha_w = \alpha_w\left(\ldots\right)?$$

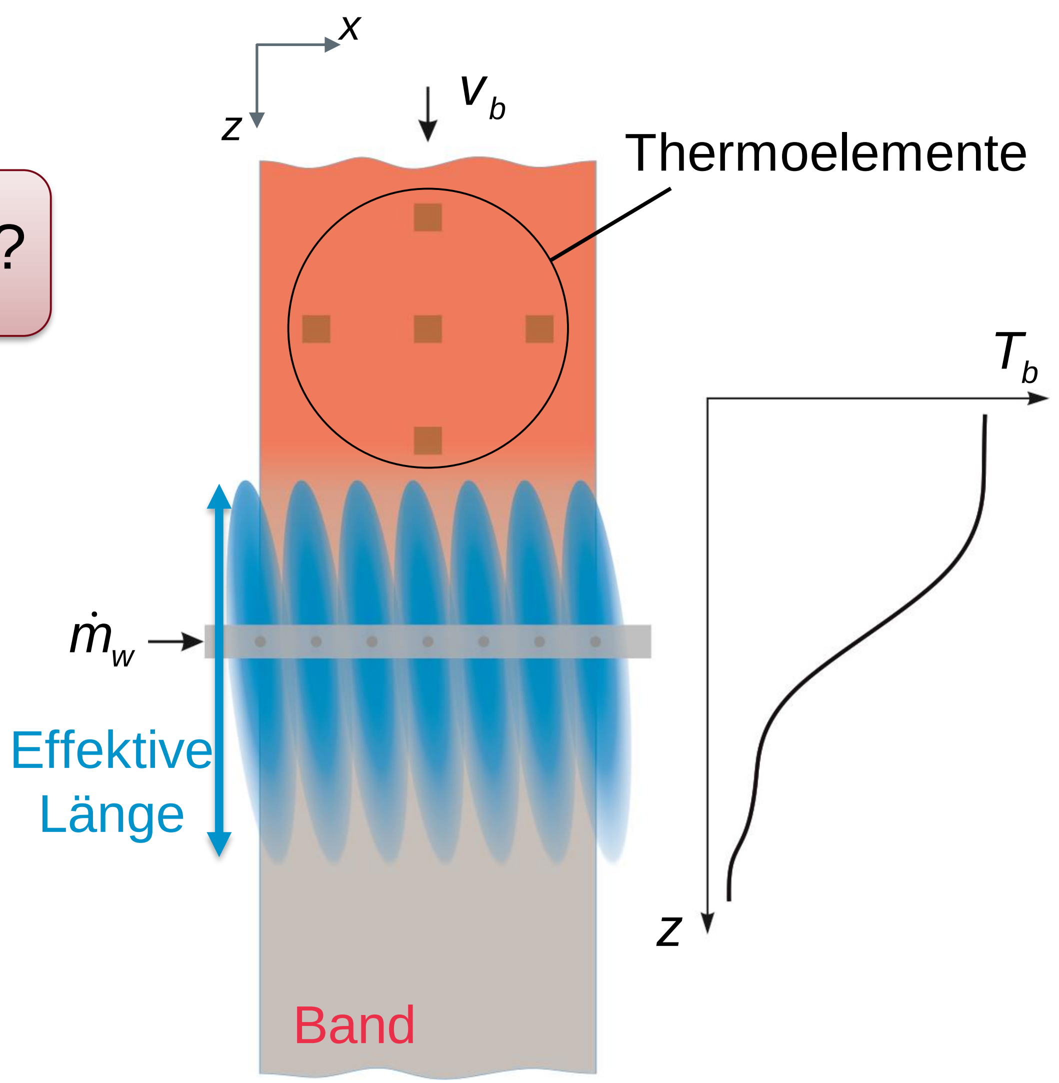


MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

Hybrider Modellierungsansatz:

$$\boxed{\alpha_w = \rho_b c_b d_b \frac{1}{(T_b - T_w)} \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t}}$$

$$\alpha_w = \alpha_w(\ldots)?$$

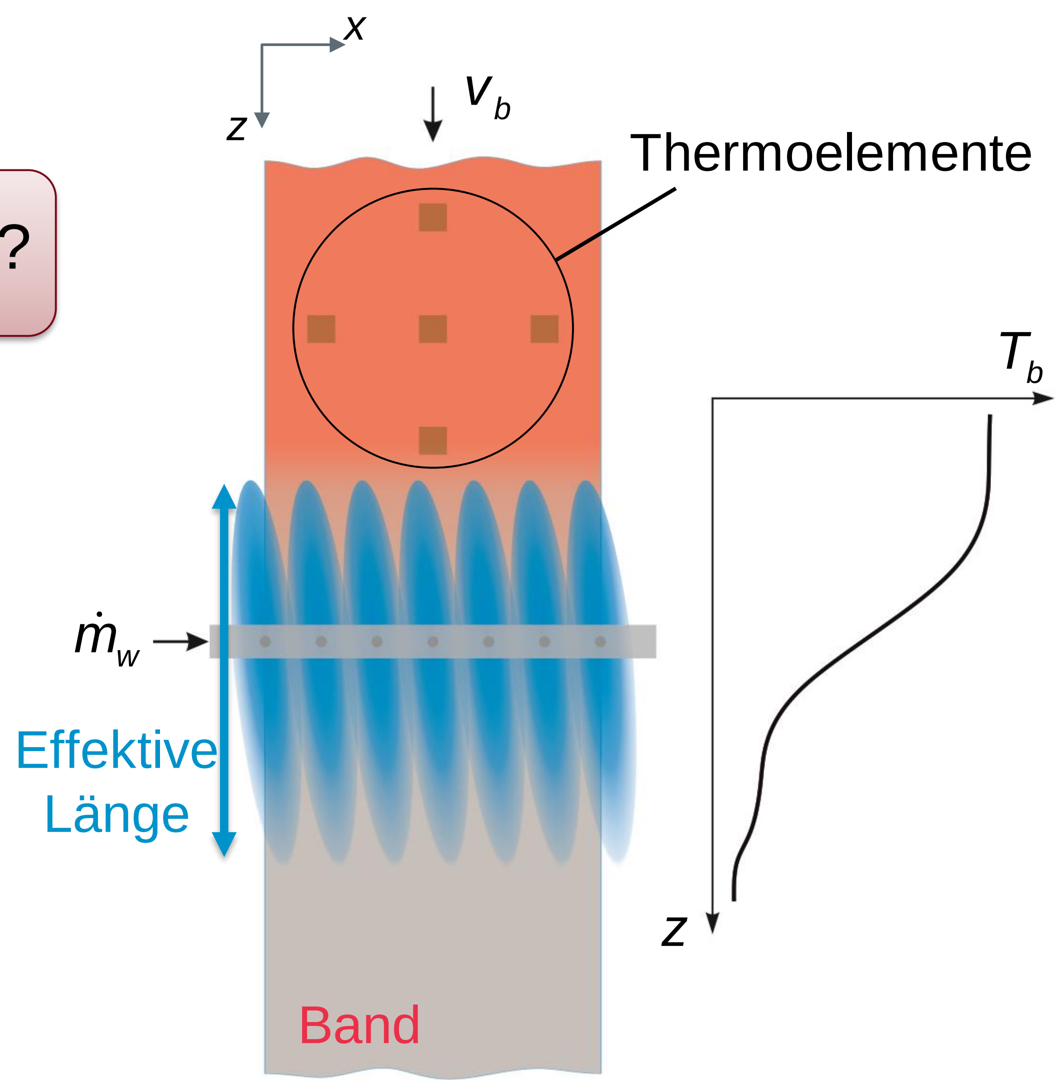


MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

Hybrider Modellierungsansatz:

$$\boxed{\alpha_w = \rho_b c_b d_b \frac{1}{(T_b - T_w)} \frac{dT_b}{dt}}$$

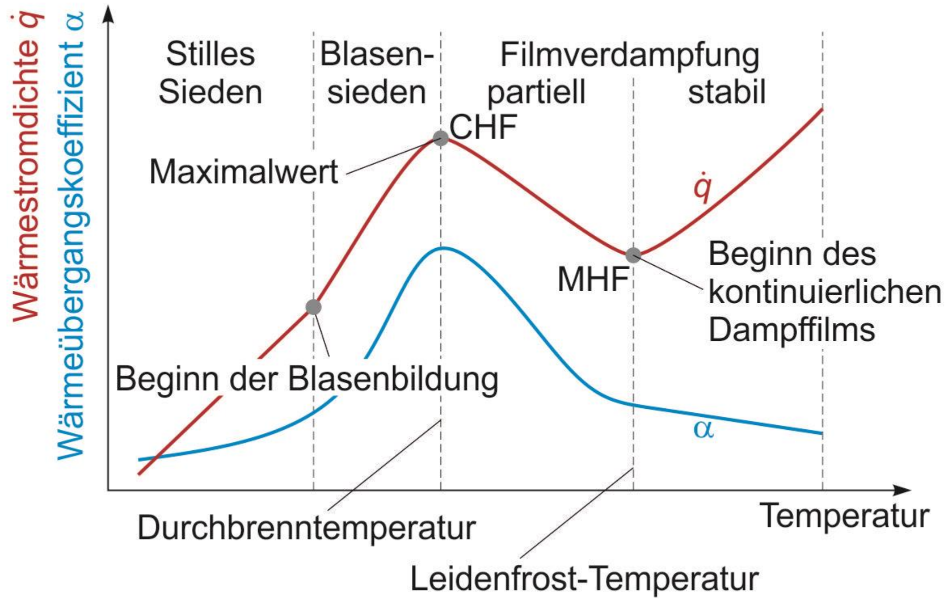
$$\alpha_w = \alpha_w(\ldots)?$$



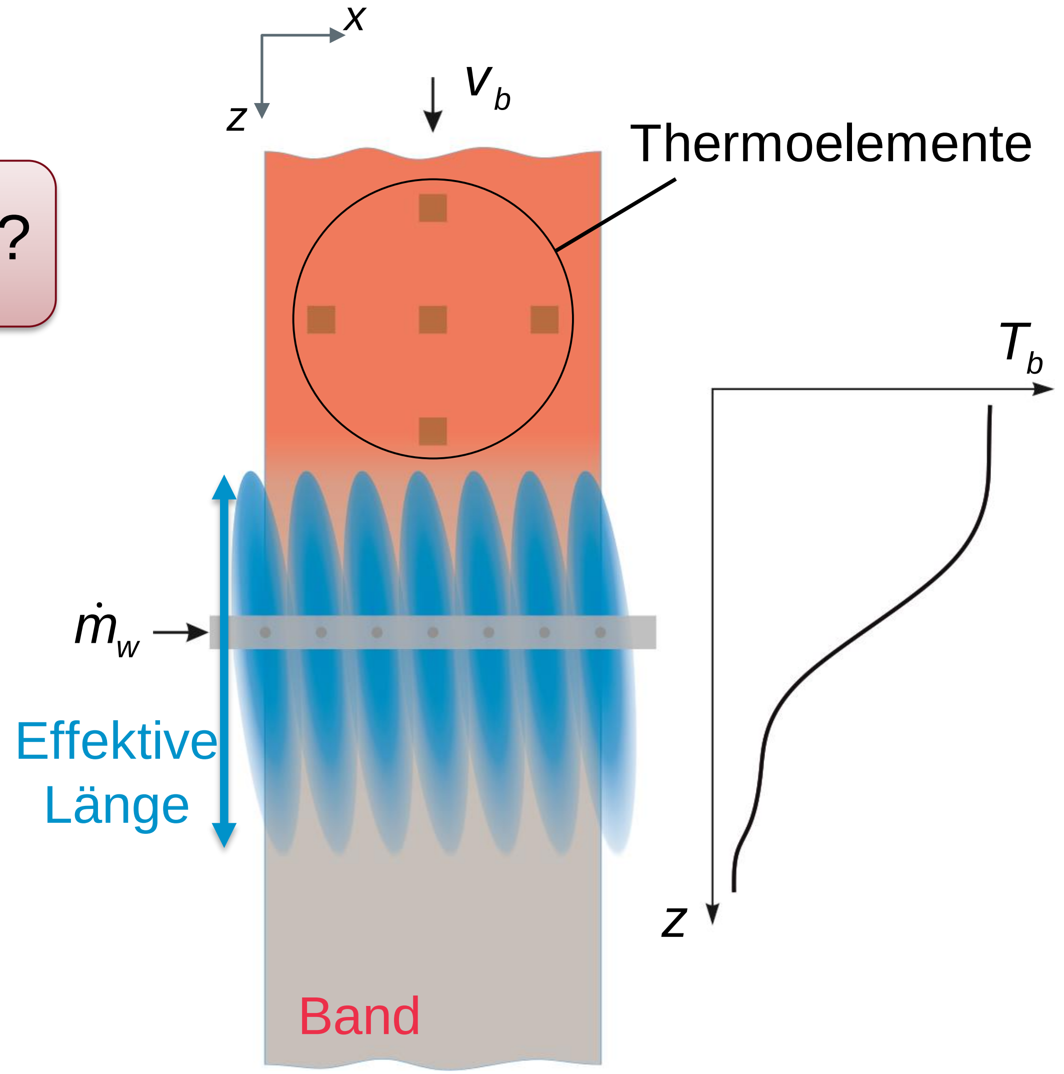
Korrelation:

- Literatur (physikalisches Wissen)
- Messdaten

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG



$$\alpha_w = \alpha_w(\ldots)?$$

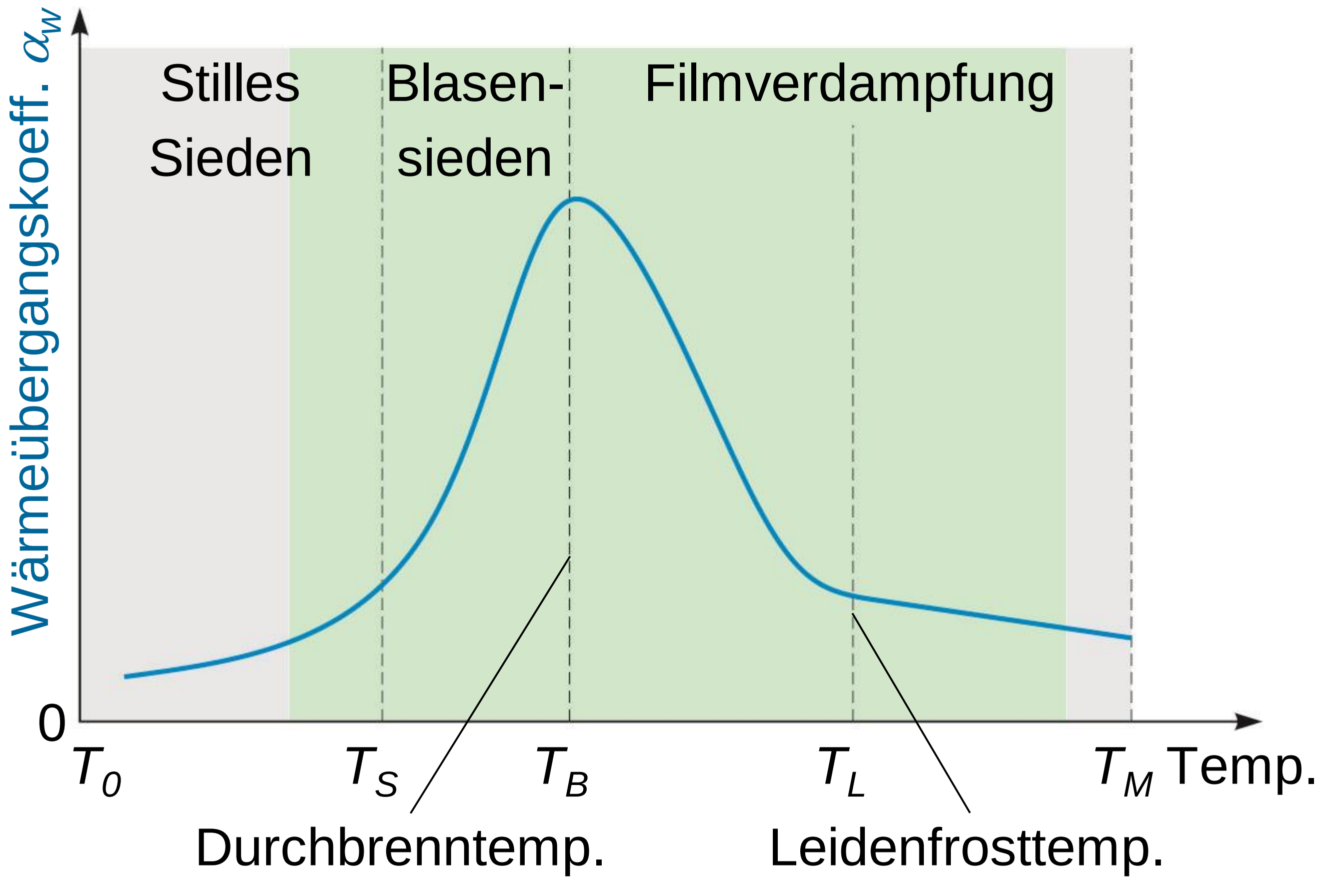


Korrelation:

- Literatur (physikalisches Wissen)
- Messdaten

$$\boxed{\alpha_w = \alpha_w(T_b, \dot{m}_w)}$$

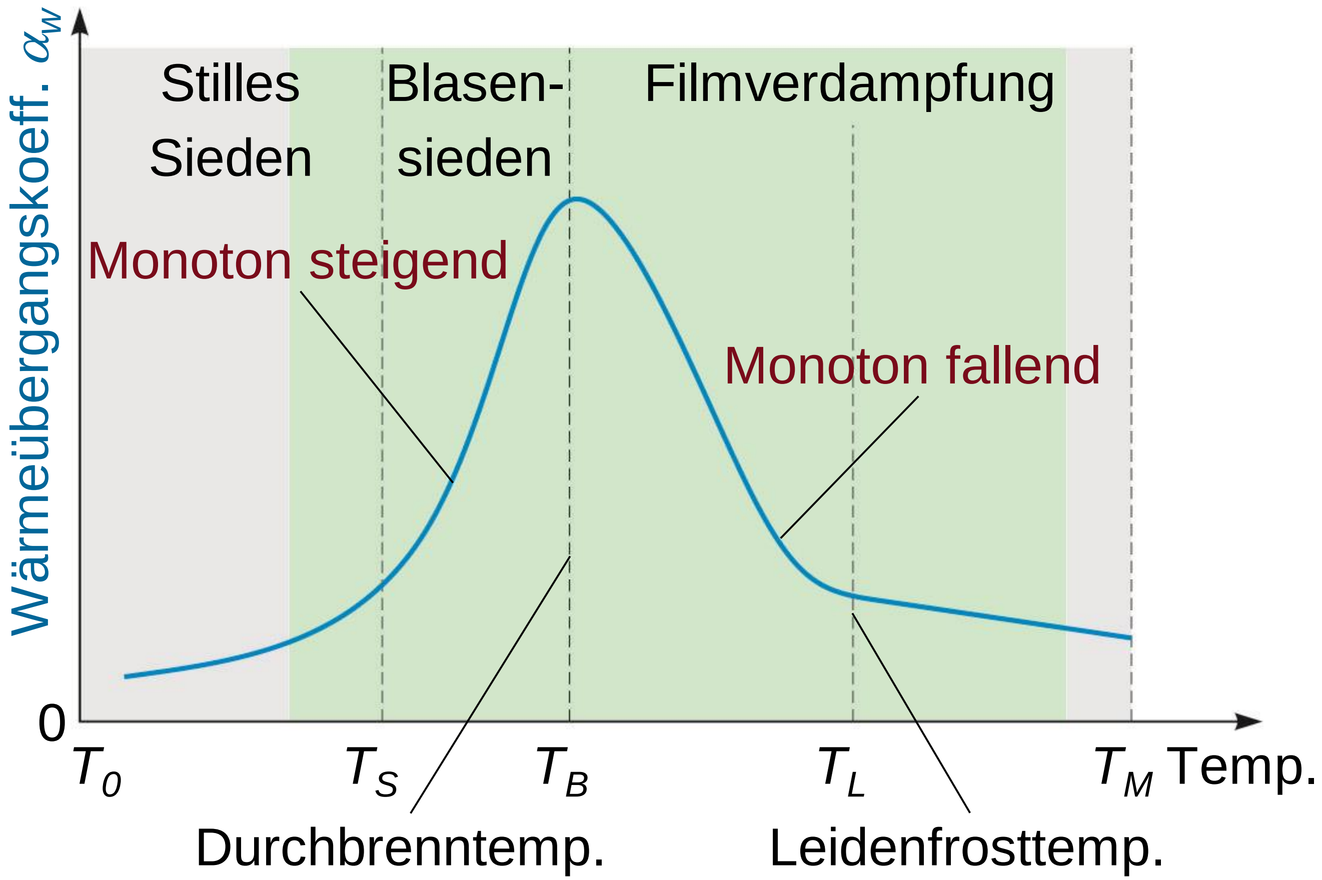
MATHEMATISCHE MODELLIERUNG



Wärmeübergangskoeffizient:

$$\boxed{\alpha_w = \alpha_w\left(T_b, \dot{m}_w\right)}$$

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG



Wärmeübergangskoeffizient:

$$\boxed{\alpha_w = \alpha_w\left(T_b, \dot{m}_w\right)}$$

Eigenschaften:

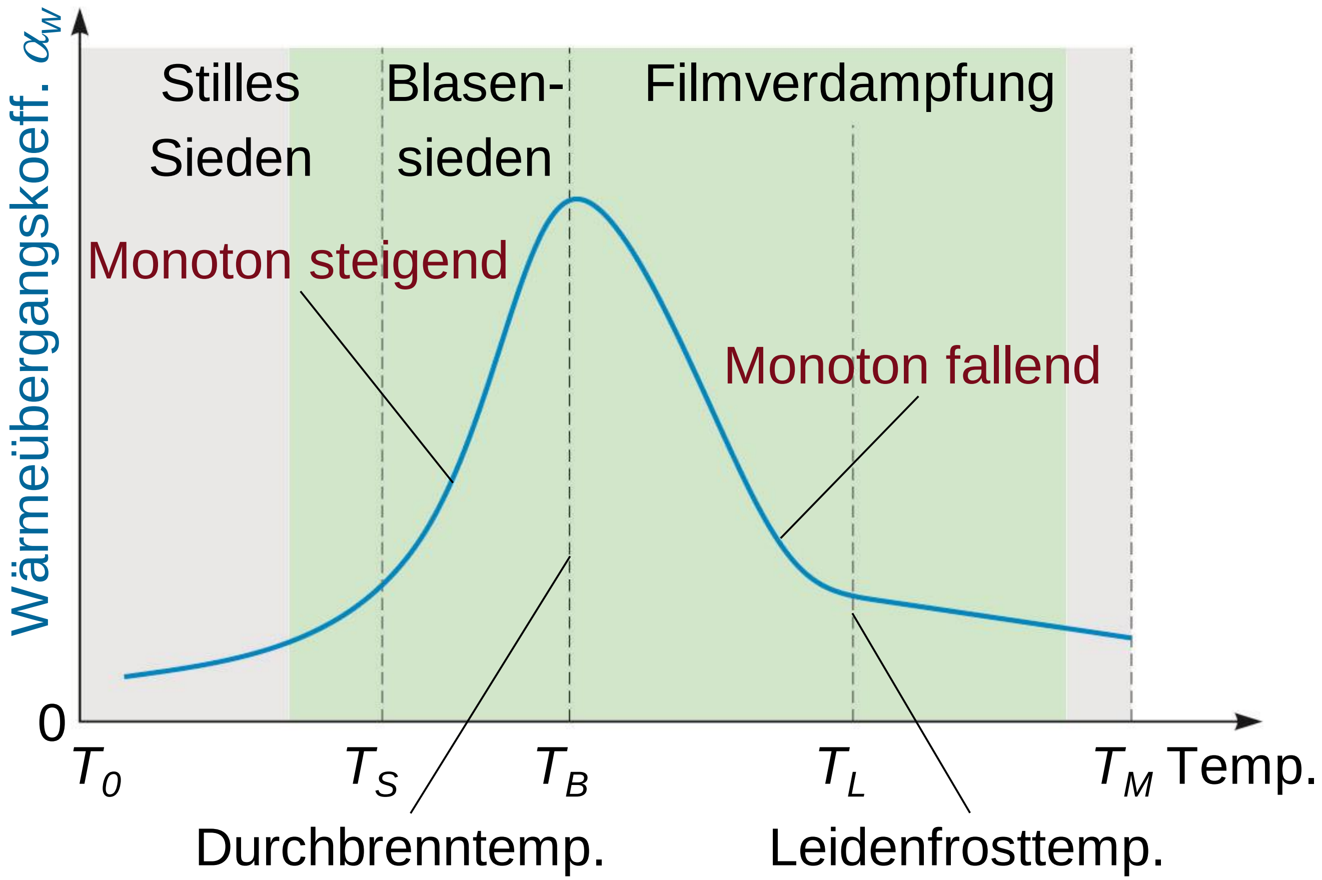
$$\alpha_w \geq 0 \qquad \forall T_b, \dot{m}_w$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial \dot{m}_w} \geq 0 \qquad \forall \dot{m}_w$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial T_b} \geq 0 \qquad T_b \in \left[T_0, T_B\right]$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial T_b} \leq 0 \qquad T_b \in \left[T_B, T_M\right]$$

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG



Wärmeübergangskoeffizient:

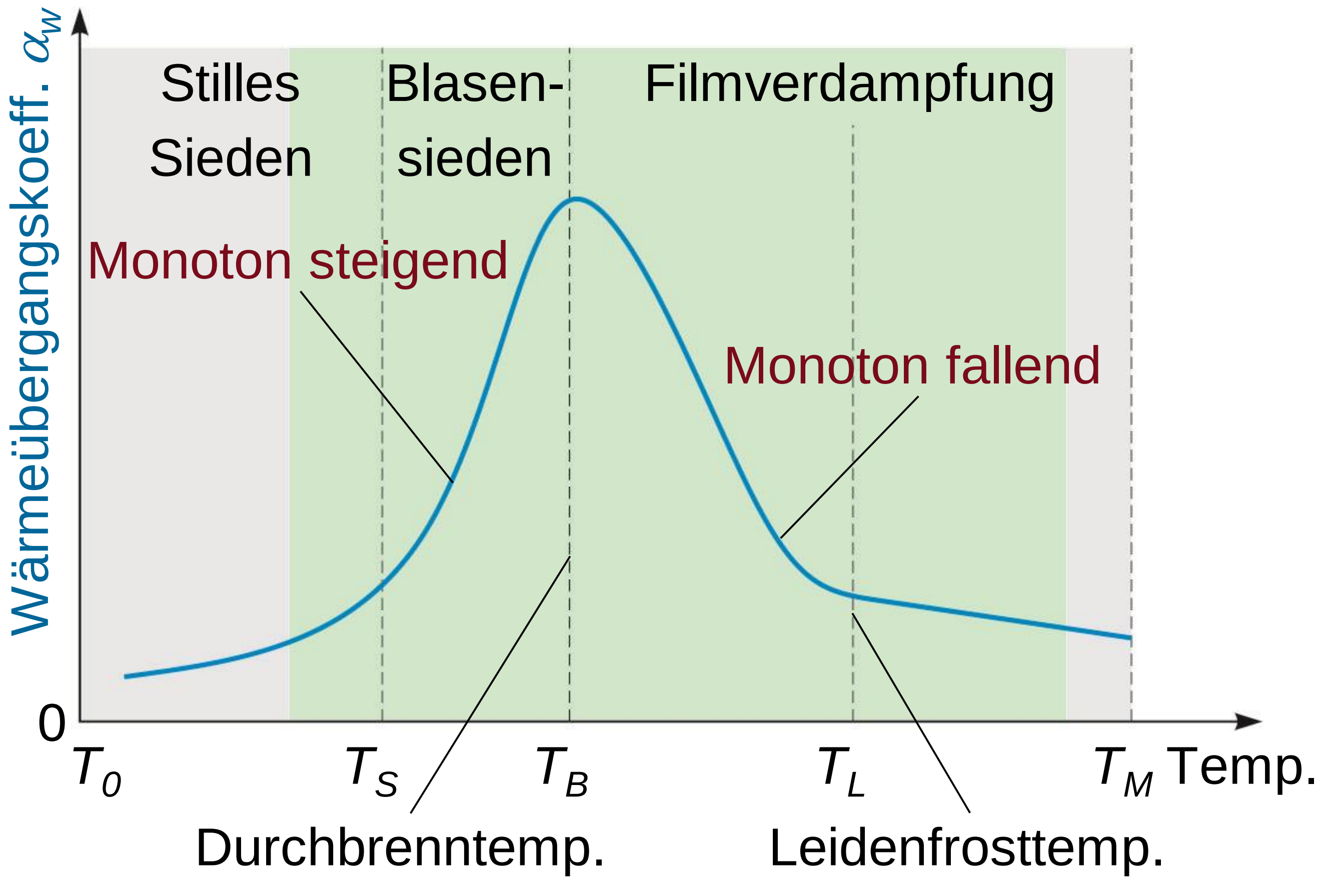
$$\boxed{\alpha_w = \alpha_w\left(T_b, \dot{m}_w\right)}$$

Eigenschaften:

- Qualitativer Verlauf aus physikalischem Wissen bekannt (Durchfluss & Temperatur)

- Prozessrelevanter Wertebereich
- Bereiche ohne Messdaten (qualitativer Verlauf)
- Bereiche mit Messdaten (qual. und quant. Verlauf)

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG



Wärmeübergangskoeffizient:

$$\boxed{\alpha_w = \alpha_w\left(T_b, \dot{m}_w\right)}$$

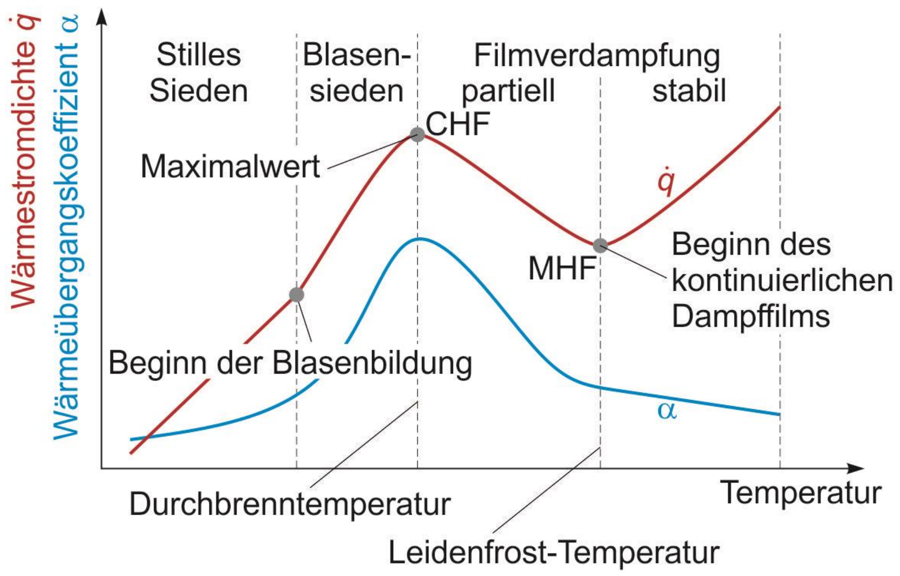
Nostalgische Punkte:

- Beginn des Blasensiedens T_S
- Durchbrenntemperatur T_B
- Leidenfrosttemperatur T_L

$$\left(T_S, \alpha_S\right),\ \left(T_B, \alpha_B\right),\ \left(T_L, \alpha_L\right)?$$

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

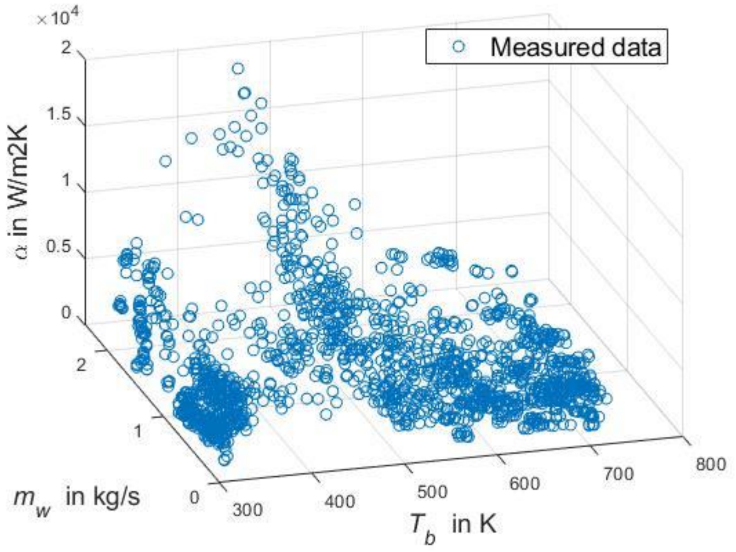
AUSTRIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY



Prozessmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},\theta)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u},\theta)$$

u → → **y**



$$\dot{q} = \alpha_w (T_w - T_b)$$

$$\alpha_w = \alpha_w (T_b, \dot{m}_w, \ldots)$$

Physikalische Grundgesetze
(qualitatives Verhalten)

datengetriebene Methoden
(quantitatives Verhalten)

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

AUSTRIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Physikalisch basierte Modellierung

- Bilanz- und Konstitutivgleichungen
- Verknüpfung unterschiedlicher Domänen

+ Skalierbar, extrapolierbar, übertragbar
+ Parameter haben eine physikalische Bedeutung

− Zeitaufwändig, komplex

Datengetriebene Modellierung

- Methoden aus der Datenanalyse
- Vorverarbeitung der Daten

+ Unabhängig von der Domäne
+ Effizient und schnell, geeignet auch für stochastische Prozesse

− Nicht skalierbar, nicht extrapolierbar
− Große Datenmengen notwendig, Datenqualität entscheidend

AUFGABENSTELLUNG

1. **Literaturstudie**

2. **Datenbasierte Modellierung**:
   1. Implementierung einer statischen Funktionsapproximation unter systematischer Berücksichtigung von vorhandenem Wissen in Matlab
   2. Effiziente Umsetzung des Algorithmus hinsichtlich Echtzeitanwendungen

3. **Verifikation des Algorithmus**:
   1. Verifikation erfolgt durch reale Produktionsdaten (z.B. Wärmeübergangs-koeffizienten und Masseströme)

AUFGABENSTELLUNG

Datenbasierte Modellierung:

- Approximation von beliebigen 2- und 3-dimensionalen statischen Funktionen

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Systematische Berücksichtigung von vorhandenem Wissen (Eigenschaften)
    - Monotonie (abschnittsweise)
    - Zulässige Wertebereiche (z.B.: Funktionswert größer Null)

AUFGABENSTELLUNG

Datenbasierte Modellierung:

- Approximation von beliebigen 2- und 3-dimensionalen statischen Funktionen

$$y = f\left(x_1, x_2\right)$$

- Systematische Berücksichtigung von vorhandenem Wissen (Eigenschaften)
  - Monotonie (abschnittsweise)
  - Zulässige Wertebereiche (z.B.: Funktionswert größer Null)

- Interpolation und Extrapolation
- Genauigkeit
- Glattheit und Empfindlichkeit gegen Rauschen (Varianz)
- Interpretierbarkeit

VORGEHENSWEISE

Approximation mittels Basisfunktionen:

$$\hat{y} = \hat{f}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^l \Phi_i\left(x, \theta_i^{nl}\right)$$

θ_i^l … Lineare Parameter

θ_i^{nl} … Nichtlineare Parameter

Φ_i … Basisfunktion

Strukturoptimierung

- Zufällig
- Clustering
- Auswahl von Teilmengen (OLS)
- Nichtlineare Optimierung

→

Ansatzfunktion

- Lokal vs. global
- Radiale Funktion
- B-Splines

→

Optimierung der Parameter

- Linear vs. nichtlinear
- LSQ-Methode
- Gradienten-basierte Methoden

VORGEHENSWEISE

AUSTRIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Approximation mittels Basisfunktionen:

$$\hat{y} = \hat{f}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^l \Phi_i\left(x, \theta_i^{nl}\right)$$

B-Splines

$$\hat{y} = \hat{f}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^l b_{i,r}\left(x, \theta_i^{nl}\right)$$

- Systematische Berücksichtigung vorhandenem Wissen
  - Monotonie
  - Zulässige Wertebereiche

- Interpolation und Extrapolation
- Genauigkeit
- Glattheit und Rauschempfindlichkeit
- Interpretierbarkeit

VORGEHENSWEISE

Approximation mittels Basisfunktionen:

$$\hat{y} = \hat{f}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^l \Phi_i\left(x,\theta_i^{nl}\right)$$

B-Splines

$$\hat{y} = \hat{f}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^l b_{i,r}\left(x,\theta_i^{nl}\right)$$

- Systematische Berücksichtigung vorhandenem Wissen
  - Monotonie
  - Zulässige Wertebereiche
- Interpolation und Extrapolation
- Genauigkeit
- Glattheit und Rauschempfindlichkeit
- Interpretierbarkeit

$$\underset{\theta}{\text{minimiere}} \quad \sum_{k=1}^{K}\left(y_k - \hat{f}(x_k,\theta)\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad & 0 \le \hat{f}(x,\theta), && x \in \left[x^-,x^+\right] \\ & 0 \le \hat{f}'(x,\theta), && x \in \left[x^-,x^m\right] \\ & 0 \ge \hat{f}'(x,\theta), && x \in \left[x^m,x^+\right] \\ & 0 = \hat{f}''(x,\theta), && x \in \left[x^-,x^+\right] \end{aligned}$$

VORGEHENSWEISE

1. **Zweidimensionale statische Funktionen:**
   1. Implementierung von linearen, quadratischen und kubischen B-Splines
   2. Parameteroptimierung ohne Beschränkungen
   3. Parameteroptimierung mit Beschränkungen
   4. Strukturoptimierung – Gitteranpassung

<u>Zu berücksichtigen:</u> Rauschen, unregelmäßige Verteilung von Messdaten, …

<u>Testfunktion:</u> $y = f(x) = \dfrac{a}{1+(bx)^2}$

VORGEHENSWEISE

AUSTRIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

2. **Dreidimensionale statische Funktionen:**
   1. Implementierung von mehrdimensionalen B-Splines (Nurbs)
   2. Parameteroptimierung ohne Beschränkungen
   3. Parameteroptimierung mit Beschränkungen
   4. Strukturoptimierung – Gitteranpassung

<u>Zu berücksichtigen:</u> Rauschen, unregelmäßige Verteilung von Messdaten, …

<u>Testfunktion:</u>

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$$