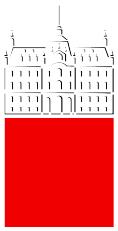
Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Modelska analiza

Zaključna naloga

Avtor: Jan Gavranovič

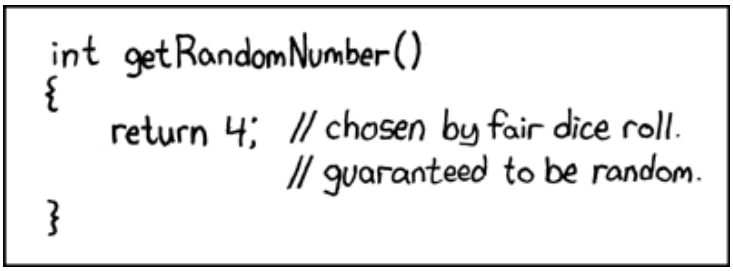
Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

avgust 2021

Besedilo naloge:

Preizkusi, ali lahko konkretne podatke uporabiš kot vir naključnih števil. Uporabiš lahko fizikalne meritve, geografske podatke (velikost mest, jezer, rek), zadnje objave na Twitterju ipd. Številske podatke moraš verjetno najprej transformirati, da dobiš bolj enakomerno porazdelitev. Namig: fizikalne meritve imajo običajno normalno porazdeljen šum. Če se podatki raztezajo čez več velikostnih redov, Benfordov zakon trdi, da je običajno enakomerno porazdeljen logaritem vrednosti oz. vsaj njegov neceli del.

Kazalo



Slika 1: Generator ne preveč naključnih števil [1].

1 Psevdonaključna števila

V numeričnih in statističnih postopkih pogosto potrebujemo števila, ki so čim bolj naključna. Največkrat jih, v fiziki, potrebujemo za različne Monte Carlo simulacije, poleg tega pa se veliko uporabljajo tudi v kriptografiji, kjer je kriteriji za naključnost precej strožji, kot pa pri simulacijah. Računalnik sam od sebe ne more ustvariti pravih naključnih števil, zato uporabljamo deterministične generatorje psevdonaključnih števil (PRNG). Skoraj v vseh primerih želimo imeti generator enakomerno porazdeljenih števil $U(0,1)$, saj lahko nato naredimo pretvorbo v števila porazdeljena po poljubni porazdelitvi. Od dobrega enakomernega naključnega generatorja zaporedja $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ pričakujemo, da bo imel naslednje lastnosti [2]:

- Nekoreliranost zaporedja (podzaporedja $\{x_i\}_{i=n}^{i+k}$ so čim manj korelirana, za vse k).
- Dolgo periodo zaporedja (čim dlje se ne sme ponoviti).
- Enakomernost in nepristranskost zaporedja (enako število točk pade v enako velik prostor).
- Serijsko enakomernost zaporedja (enakomerna porazdelitev točk $\{x_i\}_{i=n}^{i+k-1}$ v hiperkocki s čim večjo dimenzijo k).

1.1 Linearni kongruenčni generator

Preden se lotimo naloge si naprej poglejmo nekaj determinističnih generatorjev, ki jih bomo uporabili za primerjavo z generatorji pravih naključnih števil (TRNG). Najbolj enostaven je linearni kongruenčni generator, ki je definiran z zvezo

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m\,, \quad 0 \leq x_i < m\,, \tag{1}$$

kjer je a multiplikator, c prirastek (*increment*) in m modulo generatorja. Začetni vrednosti x_0 pravimo seme (*seed*) generatorja. Rekurzivna zveza 1 nam vrne zaporedje števil $\{x_i\}$, ki jih lahko skaliramo, $u_i = x_i/m$, da dobimo enakomerno porazdelitev. Vrednost x_i določa vrednost x_{i-1} in ker imamo samo m različnih vrednosti, je perioda takega generatorja enaka $m-1$ (ne štejemo $x_{i-1} = 0$). Generator ima poleg tega še nekaj drugih težav (vrednosti se zbirajo vzdolž hiperravnin), je pa zelo hiter in enostaven, zato se ga včasih še vedno uporablja.

1.2 Mersenne Twister

Sestavimo generator iz zaporedja bitov 0 in 1 z relacijo

$$b_i = (a_p b_{i-p} + a_{p-1} b_{i-p+1} + \ldots + a_1 b_{i-1}) \bmod 2\,, \tag{2}$$

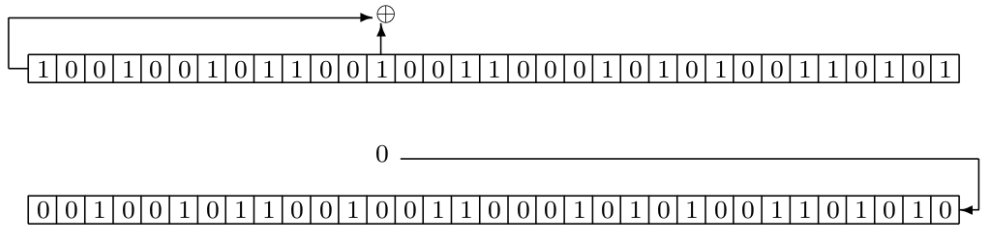
kjer vse spremenljivke zavzamejo vrednosti 0 ali 1. Vsota binarnih 0 in 1 z modulom 2 je enaka binarni exclusive-or operaciji $\oplus$. Včasih se zgornje zapiše tudi z

$$b_i = b_{i-p} \oplus b_{i-p+q} \quad \text{ali} \quad x_i = x_{i-p} \oplus x_{i-p+q} \quad \text{po bitih}\,. \tag{3}$$

Algoritem se izvede kot *feedback shift register*. Imamo vektor bitov, ki ga zamikamo za en bit levo. Zamaknjeni bit po premiku kombiniramo z notranjim bitom z $\oplus$ in ga po operaciji dodamo na desni konec vektorja. Slika 2 prikazuje opisan postopek, kjer kot vir bitov uporabimo dva vektorja (*two tap*). Algoritem Mersenne Twister deluje na osnovi množenja x_{i-p+q} z matriko A:

$$x_i = x_{i-p} \oplus A x_{i-p+q}\,. \tag{4}$$

Vektorje bitov tako popačimo (*twist*) z A pred logičnim kombiniranjem, kar poveča naključnost x_i. Perioda takega generatorja je $2^{19937} - 1$. Algoritem je dober za generacijo naključnih števil pri simulacijah, za kriptografske namene pa je neprimeren.



Slika 2: Primer zamikanja bitov v registru [3].

Zanimivo si je pogledati še kako računalnik generira naključna števila, ki so potrebna za generacijo raznih kriptografsko varnih ključev (SSL, SSH). Generatorja najdemo v `dev/random` in `dev/urandom` na Linux sistemih [4]. Oba uporabljata algoritem ChaCha20, ki spada pod CSPRNG (*Cryptographically-secure PRNG*). Razlika med njima je v tem, da `dev/random` uporabi tudi razne procese iz okolja, kot so vmesni časi prekinitev, napak, odzivi tipkovnice in miške.

2 Resnično naključna števila

Radi bi generirali zares naključna števila. V ta namen rabimo podatke, ki izhajajo iz naključnega procesa. Primer takega procesa je radioaktivni razpad nestabilnega atomskega jedra, ki je zares naključen. Verjetnost za razpad v nekem časovnem intervalu je odvisna samo od dolžine tega intervala. Ob začetku merjenja je verjentost, da jedro ni razpadlo 1, potem pa eksponentno pada proti 0. Za generacijo naključnega števila bi lahko uporabili dolžine časovnih intervalov t_1 in t_2 med dvema razpadoma, ki so tudi naključni. Če je $t_1 < t_2$, to pomeni bit 0, če je $t_1 > t_2$ pa bit 1, kar nam na koncu da naključno zaporedje bitov.

Pri nalogi bom namesto idealnega (zgoraj opisanega) generatorja naključnih števil poskusil uporabiti različne podatkovne sete. Od takega generatorja bom zahteval enake lastnosti, kot so bile opisane za psevdonaključni generator. Prednost takega generatorja je, da nima periode in ne uporablja začetnega semena za inicializacijo zaporedja. Največja slabost takega pristopa je količina naključnih števil (odvisna od velikosti in kvalitete podatkovnega seta) ter počasna generacija, če ne uporabimo že izračunanih in tabeliranih naključnih števil. Preden se lotimo iskanja podatkov in računaja naključnih števil si poglejmo nekaj ključnih konceptov, ki nam bodo pri tem pomagali.

3 Benfordov zakon

Benfordov zakon, poznan tudi pod imenom zakon o anomalnih številih in zakon prve števke, je empirična ugotovitev o porazdelitvi frekvenc vodilnih števk v izmerjenih numeričnih podatkih. Zakon pravi, da vodilne števke številk v podatkih niso porazdeljene enakomerno, ampak so razporejene padajoče. Benfordov zakon drži za različne tipe naravnih pojavov (cene delnic, računi za elektriko, matematične in fizikalne konstante itd.). Zakon je podoben ugotovitvi, da so po normalni (Gaussovi) porazdelitvi ali vsaj približno v skladu z njo porazdeljene številne količine (telesne mase ljudi, izpitne ocene, hitrosti plinskih molekul itd.). Zakon je najbolj točen, ko so vrednosti porazdeljene čez več velikostnih redov.

Benfordov zakon drži za množico številk, če se vodilne števke $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ pojavijo z verjetnostmi

$$P(d) = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right) . \tag{5}$$

Zgornja enačba je zapisana v desetiški bazi, zakon pa velja tudi v vseh ostalih in ni posledica izbire številskega sistema. Količina $P(d)$ je odvisna od razdalje med števko $d+1$ in d v logaritemski skali.

Imejmo število $x \in \{1, 10\}$, ki se začne z 1, če $1 \leq x < 2$ ali z 2, če $2 \leq x < 3$ in tako naprej do števila 10. V logaritemski skali se število začne z 1, če $\log 1 \leq \log x < \log 2$ ali z 2, če $\log 2 \leq \log x < \log 3$ in tako naprej do števila 10. Vidimo, da so zaporedni intervali v logaritemski skali vse ožji ($|\log 1 - \log 2| \approx 0.301$, $|\log 2 - \log 3| \approx 0.176$, ..., $|\log 9 - \log 10| \approx 0.046$), kot je prikazano v spodnji tabeli.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(d)$	0.3010	0.1761	0.1249	0.0969	0.0792	0.0669	0.0580	0.0512	0.0458

Tabela 1: Verjetnosti za prvo števko po Benfordovem zakonu.

Naj bo $\{x_i\}_{i=1}^N$ zaporedje realnih števil iz enakomerne porazdelitve vzorčeno na intervalu $x_i \in [p \log_a 10, (p+1) \log_a 10)$, kjer je p poljubno celo število (npr. $p = 0$). Potem se porazdelitev prve (ali katerikoli druge) števke zaporedja $\{a^{x_i}\}_{i=1}^N$ približuje Benfordovemu zakonu pri $N \to \infty$. V logaritemski skali je verjetnost, da $\log_a a^{x_i}$ pade v razred b_d sorazmerna s širino tega razreda deljeno s širino celotnega intervala

$$P(\log_a a^{x_i} \in b_d) = \frac{\log_a ((d+1) \cdot 10^p) - \log_a (d \cdot 10^p)}{\log_a 10^{p+1} - \log_a 10^p} = \frac{\log_a \frac{1+d}{d}}{\log_a 10} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d}\right) , \quad (6)$$

kar nam da nazaj Benfordov zakon [5]. V nadaljevanju bomo videli, da obstaja močnejša različica Benforodvega zakona, ki vključuje necele dele števila, kar nam bo prišlo bolj prav, saj podatki ponavadi nimajo oblike $\{a^{x_i}\}_{i=1}^N$.

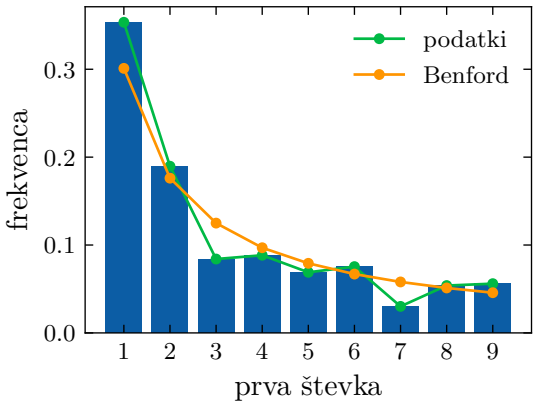
Zanimivo je tudi odkritje Benfordovega zakona. Prvi je pojav zapisal kanadsko-ameriški astronom Simon Newcomb leta 1881. Pri uporabi logaritemskih tabel je opazil, da so začetne strani (na začetku so vrednosti, ki se začnejo z 1) veliko bolj obrabljene kot pa vse ostale. Svoja opažanja je skupaj s formulacijo zakona objavil v kratkem članku na dveh straneh [6]. Pojav je ponovno odkril ameriški fizik Frank Benford leta 1938 in ga tudi bolj podrobno dokumentiral. Za preizkus je med drugim uporabil površine rek, velikosti mest, hišne številke znanih ljudi, fizikalne konstante in molekulske mase.

V primeru, da je porazdelitev prve števke invariantna na skaliranje s poljubno konstanto (neodvisna od enot v kateri so zapisani podatki), potem je porazdelitev prvih števk podana z Benfordovim zakonom. Če torej podatki sledijo Benfodovemu zakonu, potem je delež prve števke (in vseh ostalih) vedno približno konstanten pri zaporednem množenju s konstanto.

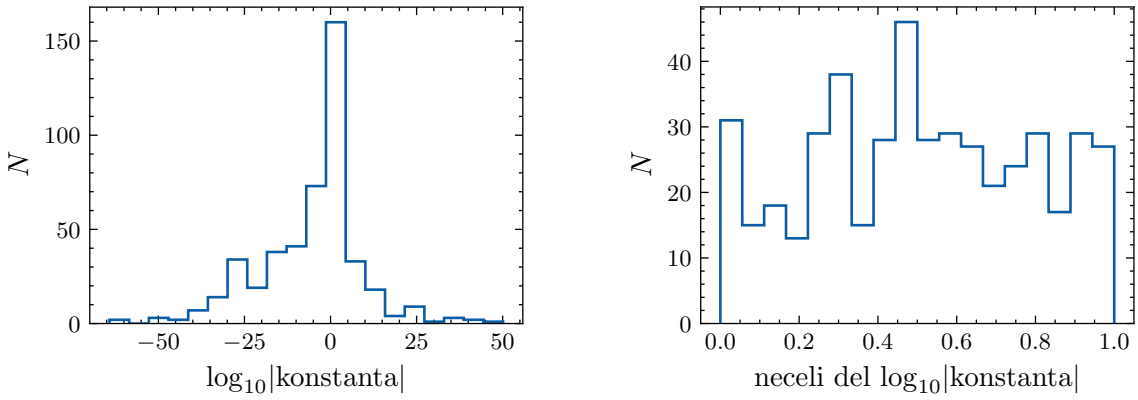
3.1 Matematične in fizikalne konstante

Za začetek preizkusimo Benfordov zakon na matematičnih in fizikalnih konstantah. Uporabil sem 464 konstant iz [7]. Pojavitve prvih števk so prikazane na grafu 3. Vidimo, da prve števke konstant precej dobro sledijo Benfordovemu zakonu. Porazdelitev logaritma konstant je prikazana na sliki 4a in ni enakomerna. Na sliki 4b je prikazana še porazdelitev necelega dela logaritma konstant, ki pa je približno enakomerna. Invariantnost na skaliranje sem preveril z zaporednim množenjem z 1.01, kar prikazuje slika 5. Dobljena odvisnost je periodična, saj se prva števka začne ponavljati pri takem množenju. Vidimo, da je delež enic niha okrog povprečja, ki je okrog 0.3, ki ga tudi napove Benfordov zakone. Amplituda oscilacij okrog te ravnovesne vrednosti pove, kako dobro podatki sledijo Benfordovemu zakonu.

Podobna ugotovitev velja za količine, ki jih je preučeval že Benford (pregled je v [8]). Problem je, da imamo pri takih podatkih na voljo bolj malo števil (okrog $\mathcal{O}(10^3)$), ki jih potem uporabimo za pretvorbo v naključna števila.



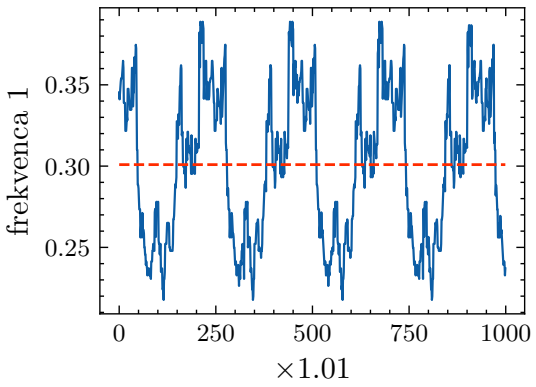
Slika 3: Delež prvih števk v konstantah. Z oranžno je prikazana odvisnost 5.



(a) Logaritem konstant.

(b) Neceli del logaritma konstant.

Slika 4: Porazdelitev vrednosti matematičnih in fizikalnih konstant.



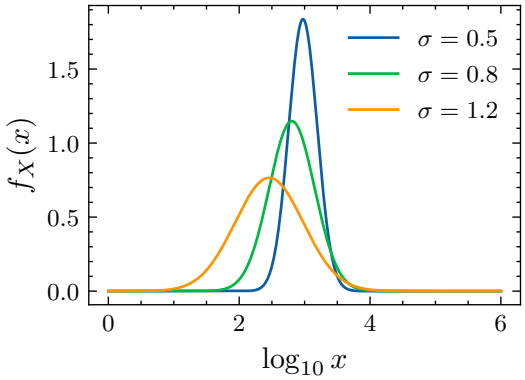
Slika 5: Invariantnost na skaliranje s konstanto.

3.2 Spektralna analiza Benfordovega zakona

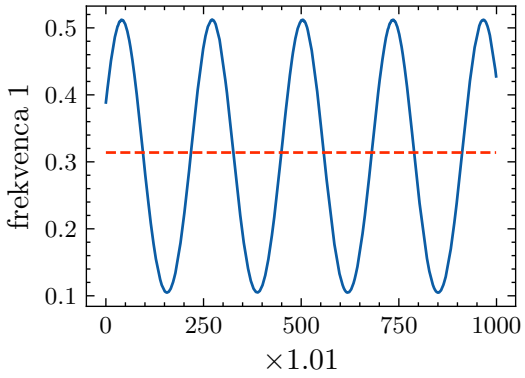
Radi bi vedeli kdaj bo porazdelitev sledila Benfordovemu zakonu. Slika 5 že namiguje na uporabo spektralne analize [9]. Za bolj sistematičen opis si za testno funkcijo (signal) izberemo lognormalno porazdelitev z verjetnostno gostoto

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

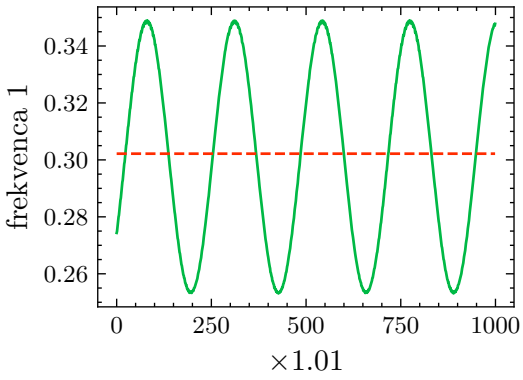
s parametroma σ in μ, ki predstavljata pričakovano vrednost in standardno deviacijo logaritma spremenljivke X. Če je naključna spremenljivka X lognormalno porazdeljena, potem je $Y = \ln X$ normalno porazdeljena. Osnova logaritma pri tem ni pomembna, če je $\log_a(X)$ normalno porazdeljen, potem je tudi $\log_b(X)$ za vse pozitivne $a, b \neq 1$. Uporaba te porazdelitve je prikladna za Benfordov zakon, saj že vemo, da se morajo podatki raztezati čez več velikostnih redov, da zakon drži. Na sliki 6a so prikazane tri različno široke lognormalne porazdelitve, ki so normirane v logaritemski skali. Preostali grafi prikazujejo deleže enic pri skaliranju s konstanto.



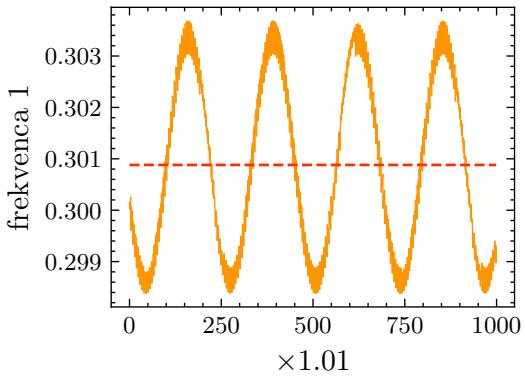
(a) Različne lognormalne porazdelitve.



(b) $\sigma = 0.5$.



(c) $\sigma = 0.8$.



(d) $\sigma = 1.2$.

Slika 6: Lognormalne porazdelitve, ki različno dobro sledijo Benfordovemu zakonu.

Do števila enic v številkah podatkov lahko pridemo na več načinov. Najbolj enostaven je algoritem pri katerem množimo ali delimo številko z 10 dokler ni to število med ≥ 1 in < 10 ter na koncu preštejemo vse enice (slike 6). Ta postopek spremeni številke glede na potence števila 10, ki nam potem da logaritemski vzorec Benfordovega zakona.

Izpeljimo sedaj ekvivalenten postopek štetja enic s pomočjo Fourierove transformacije. Sestavimo vzorčevalno funkcijo s (*sampling function*), ki je enaka 1 v območju kjer se število začne z 1 in 0 drugje (slika 8a). Vrednosti porazdelitve f, ki se začnejo z 1 dobimo z množenjem $s \cdot f$. Delež enic dobimo z integracijo produkta

$$n_1(g) = \int_{-\infty}^{\infty} s(g) f(g) dg \,, \tag{8}$$

kjer g označuje logaritemsko skalo. Invariantnost na skaliranje preverimo z večkratnim računanjem

$$n_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(g) f(g-k) dg \,, \tag{9}$$

kjer je k konstanten premik, ki je v logaritemski skali zaporedno seštevanje z neko majhno konstanto, npr. $\log f + \log 1.01$. Izpeljali smo postopek, ki nam vrne verjetnost, da se številka iz porazdelitve f začne z 1 za poljuben skalirni faktor k. Krajše lahko postopek zapišemo kot konvolucijo v logaritemski skali

$$n_1(g) = s(g) * f(g) \,. \tag{10}$$

Prestavimo se v frekvenčni prostor v katerem se konvolucija zapiše kot produkt transformirank

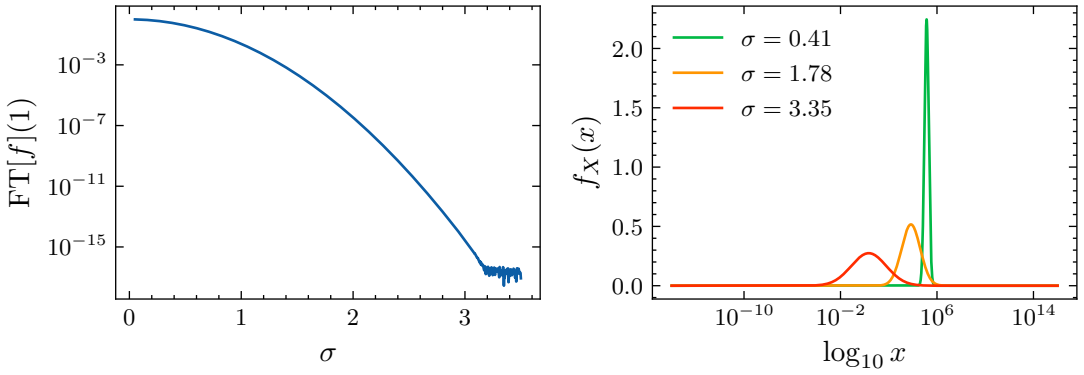
$$\mathcal{F}\left[n_1(g)\right] = \mathcal{F}[s(g)] \cdot \mathcal{F}[f(g)] \;\Rightarrow\; n_1(g) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[s(g)] \cdot \mathcal{F}[f(g)]\right\} \,. \tag{11}$$

Opisan postopek je prikazan na sliki 8. Vrednost pri 0 v frekvenčnem prostoru vedno ustreza povprečni vrednosti signala. Tako je ničta (DC) komponenta transformiranke porazdelitve vedno 1, saj je porazdelitev normirana. Ničta komponenta transformiranke vzorčevalne funkcije in s tem tudi ničta komponenta konvolucije pa je enaka povprečnemu deležu enic v porazdelitvi (povprečju signala iz slike 8e). Povprečni delež enic (slika 8e) je za vse tri porazdelitve enak, saj je ničta komponenta konvolucije neodvisna od porazdelitve, kar je posledica tega, da je porazdelitev normirana (ničta komponenta $\mathcal{F}[s]$ se množi z 1).

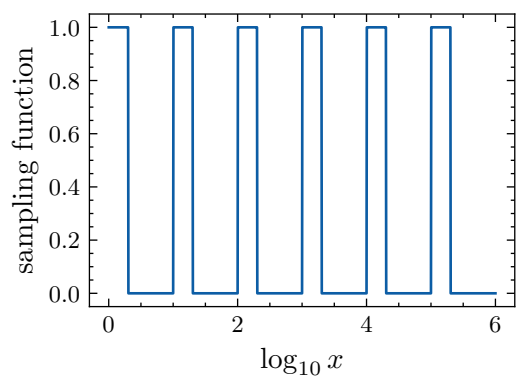
Končno lahko tudi odgovorimo na začetno vprašanje, ali bo dana porazdelitev sledila Benfordovemu zakonu ali pa mu ne bo. Želimo imeti tako porazdelitev f, ki bo vrnila konstanto vrednost $n_1 = 0.301$ za vse premike k. Povprečje n_1 je vedno 0.301 ne glede na to ali podatki sledijo Benfordovemu zakonu ali pa mu ne. Pomembne so torej oscilacije okrog povprečja. n_1 torej ne sme imeti nobenih sinusoidnih komponent. V frekvenčnem prostoru to pomeni, da mora biti konvolucija $\mathcal{F}[s(g)] \cdot \mathcal{F}[f(g)]$ enaka 0 pri frekvencah višjih od 0. Vemo tudi, da je $\mathcal{F}[s(g)]$ neničelna samo pri celoštevilskih frekvencah $f = 0, 1, 2, \ldots$ iz česar izpeljemo, da bo n_1 konstanta samo, če bo vrednost porazdelitve v frekvenčnem prostoru $\mathcal{F}[f(g)]$ enaka nič za vse cele frekvence $f = 1, 2, 3$ in tako naprej.

Vrnimo se nazaj k sliki 6a. Odgovor na to zakaj prvi dve ($\sigma = 0.5$ in $\sigma = 0.8$) porazdelitvi ne sledita Benfordovemu zakonu je v njihovi širini. Če je porazdelitev ozka, potem bo njena Fourierova transoformiranka široka in obratno. Široka porazdelitev v frekvenčnem prostoru pomeni veliko neničelno komponento pri $f = 1$, kar nakazuje na prisotnost sinusnih nihanj pri izračunu konvolucije, kar po inverzni Fourierovi transformaciji vidimo kot oscilacije okrog povprečnega deleža enic.

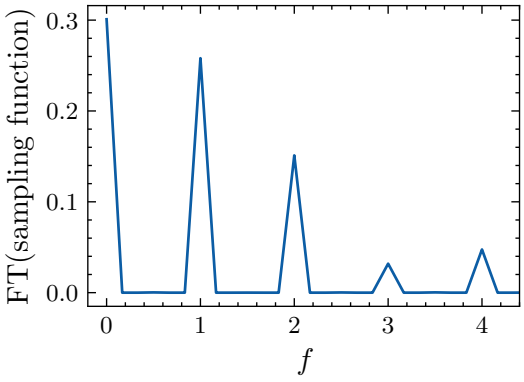
Na sliki 7 je prikazana odvisnost Fourierove komponente porazdelitve pri frekvenci 1 od parametra širine porazdelitve σ.



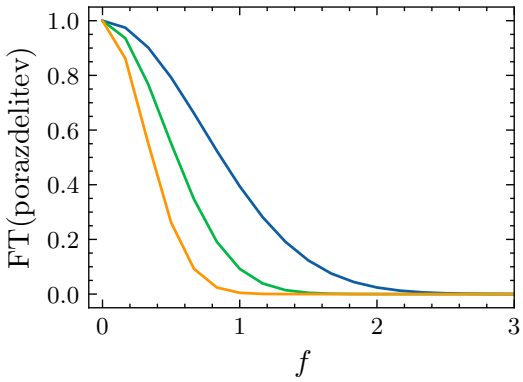
Slika 7: Benfordov zakon in širina porazdelitve.



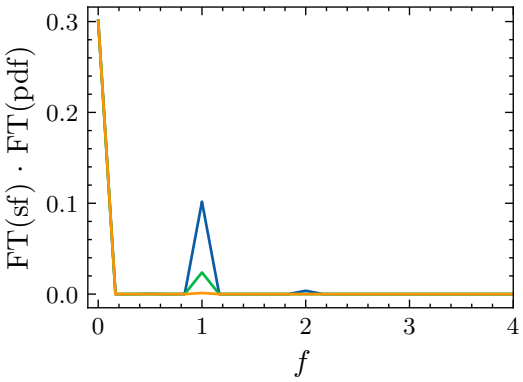
(a) Vzorčevalna funkcija.



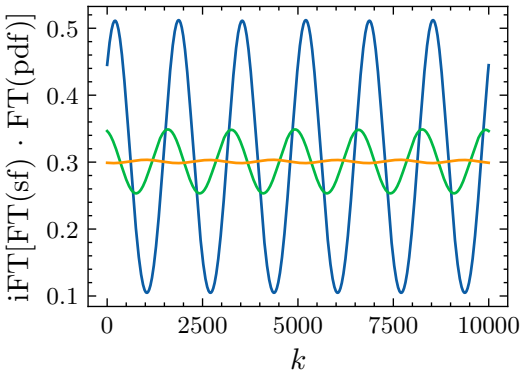
(b) $\mathcal{F}[s(g)]$.



(c) $\mathcal{F}[f(g)]$.



(d) $\mathcal{F}[s(g)] \cdot \mathcal{F}[f(g)]$.



(e) $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[s(g)] \cdot \mathcal{F}[f(g)]\}$.

Slika 8: Vzorčevalna funkcija in njena Fourierova transformiranka, Fourierova transformacija lognormalne porazdelitve, konvolucija v frekvenčnem prostoru in prikaz verjetnosti, da se številka iz lognormalne porazdelitve začne z 1.

4 Statistični testi za enakomerno porazdelitev

Benfordov zakon nam pove, da so neceli deli logaritma števila porazdeljeni približno po enakomerni porazdelitvi. Enakomernost take porazdelitve je seveda odvisna od tega kako dobro podatki sledijo Benfordovemu zakonu. Kriterij za sledenje Benfordovemu zakonu smo že našli v velikosti prve neničelne frekvenčne komponente Fourierove transformiranke verjetnostne gostote. Poleg tega bi radi imeli še dodaten kriterij, ki nam bo povedal kako "dobra" je dobljena enakomerna porazdelitev, oziroma, če je porazdelitev sploh skladna z enakomerno. Čim bolj bo porazdelitev enakomerna, tem boljši bo generator naključnih števil narejen iz podatkov te porazdelitve.

4.1 Pearsonov test χ^2

Imamo množico n podatkov (izmerkov), ki jih razvrstimo v N razredov (*binov*). V i-tem razredu pričakujemo f_i dogodkov, dejansko pa se jih v njem nahaja n_i. Ničelna hipoteza je

$$H_0 : f_1 = f_{01}, f_2 = f_{02}, \ldots, f_N = f_{0N} \,, \tag{12}$$

testna statistika pa je

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - f_{0i})^2}{f_{0i}} \,. \tag{13}$$

Če hipoteza H_0 velja, je χ^2 porazdeljena po porazdelitvi χ^2 z $N - p$ prostostnimi stopnjami, kjer je p število parametrov, ki so bili ocenjeni iz vzorca. V primeru, da je ničelna hipoteza enakomerna porazdelitev, je pričakovano število dogodkov v vsakem razredu

$$f_{0i} = \frac{N}{n} \,. \tag{14}$$

Hipotezo $H_0 : f_{\text{izmerjena}} = f_{\text{enakomerna}}$ na koncu preverimo ob neki stopnji zaupanja $1 - \alpha$.

4.2 Test Kolmogorov-Smirnova (KS)

Je neparametrični test s katerim primerjamo vzorec z modelsko porazdelitvijo, ali pa primerjamo dva vzorca med seboj. Pove ali vzorec izvira iz populacije, porazdeljene v skladu s teoretično modelsko porazdelitvijo, ali da en vzorec izvira iz enake populacije kot drugi. Izmerjene vrednosti $\{x_i\}_{i=1}^n$ razvrstimo po velikosti in definiramo empirično porazdelitveno funkcijo

$$\widetilde{F}_n(x) = \begin{cases} 0 \,;\; x < x_1 \,, \\ i/n \,;\; x_i \le x < x_{i+1} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \,, \\ 1 \,;\; x \ge x_n \,, \end{cases} \tag{15}$$

ki je monotona naraščajoča, stopničasta funkcija. Test primerja empirično porazdelitveno funkcijo $\widetilde{F}_n$ z modelsko porazdelitveno funkcijo F. Ničelna hipoteza je tako

$$H_0 : \widetilde{F}_n(x) = F(x) \,, \tag{16}$$

kjer bomo za modelsko porazdelitveno funkcijo uporabili

$$F(x) = \begin{cases} 0 \,; & x < 1 \,, \\ \frac{x-a}{b-a} \,; & a \le x \le b \,, \\ 1 \,; & x > b \,. \end{cases} \tag{17}$$

Testna statistika pa je maksimalna razdalja med porazdelitvama

$$D_n = \sup_x \left| \widetilde{F}_n(x) - F(x) \right| \,, \tag{18}$$

kjer je porazdelitev statistike D_n je znana in je neodvisna od porazdelitve F.

4.3 Enakomerna porazdelitev in Benfordov zakon

Označimo z $\langle x \rangle$ neceli del realnega števila x, ki ga dobimo kot

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor \,, \quad x > 0 \,, \tag{19}$$

kjer $\lfloor \cdot \rfloor$ predstavlja največje celo število manjše ali enako realnemu številu x (*floor function*). Enakomerno porazdelitev bomo sestavili s pomočjo naslednjega teorema (formalna matematična obravnava z dokazi je zapisana v [10]):

Izrek 1. Zaporedje $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ realnih števil je Benfordovo natanko tedaj, ko je neceli del logaritma absolutne vrednosti enakomerno porazdeljen.

Neko zaporedje števil $\{x_i\}_{i=1}^N$ je torej Benfordovo, če je zaporedje $\{\langle \log_{10} |x_i| \rangle\}_{i=1}^N$ enakomerno porazdeljeno. Z drugimi besedami, zaporedje je Benfordovo, če je logaritem absolutne vrednosti tega zaporedja porazdeljen enakomerno modulo 1.

Zapišimo logaritem števila kot vsoto celega dela (karakteristike) in necelega dela (mantise):

$$\log_{10} x_i = C(x_i) + m(x_i) \,. \tag{20}$$

Antilogaritmiranje nam vrne $10^{\log_{10} x_i} = 10^{C(x_i)} 10^{m(x_i)}$. Vidimo, da $10^{C(x_i)}$ pove položaj decimalne vejice in $10^{m(x_i)}$ dejanske številke, zato je porazdelitev števil odvisna samo od necelega dela $m(x_i)$. Če so torej neceli deli zaporedja $\{m(x_i)\}_{i=1}^N$ enakomerno porazdeljeni, potem so enakomerno porazdeljeni tudi $\{10^{m(x_i)}\}_{i=1}^N$ in s tem tudi $\{x_i\}_{i=1}^N$.

Vrnimo se za trenutek nazaj k lognormalni porazdelitvi 7. Zmnožek n pozitivnih naključnih spremenljivk nam da, v limiti $n \to \infty$, približno lognormalno porazdelitev. Ugotovitev sledi iz centralnega limitnega izreka. Podobno nam centralni limitni izrek pove, da seštevanje naključnih spremenljivk vodi do normalne porazdelitve, ki pa ne sledi Benfordovemu zakonu. Poglejmo si še povezavo med normalno in lognormalno porazdelitvijo. Povezava med parametri je [11]:

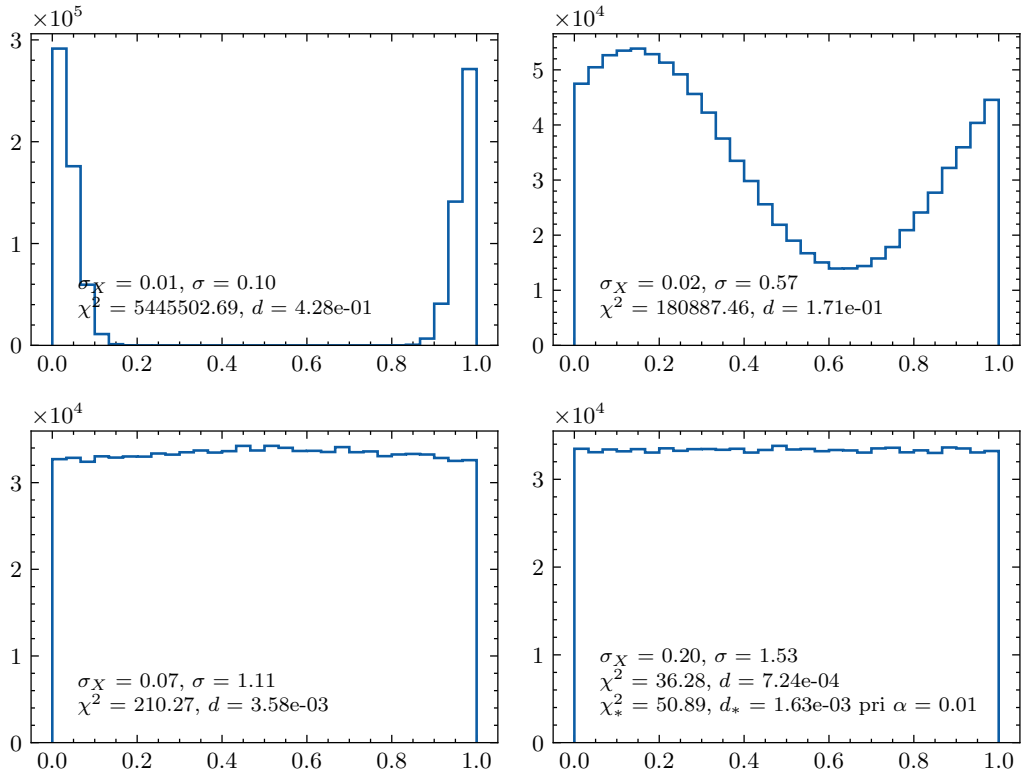
$$\mu = \ln \left(\frac{\mu_X^2}{\sqrt{\mu_X^2 + \sigma_X^2}} \right) \quad \text{in} \quad \sigma^2 = \ln \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right) \,, \tag{21}$$

kjer sta μ in σ^2 povprečje in varianca normalne porazdelitve ter μ_X in σ_X^2 ekvivalentna parametra lognormalne porazdelitve. Formuli bomo uporabili za lažjo predstavo o tem, kako široka je lognormalna porazdelitev (σ pove širino lognormalne porazdelitve v logaritemski skali, ki jo obravnavamo kot normalno).

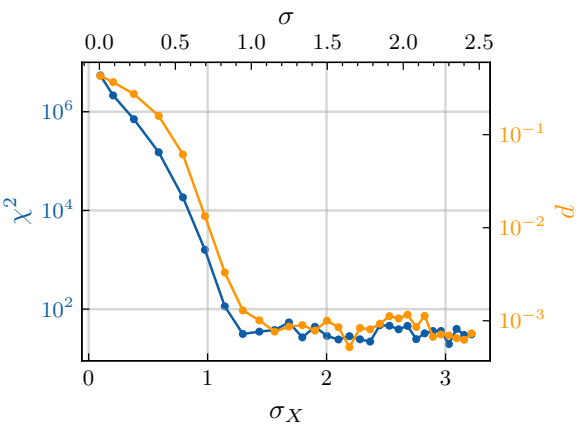
Na sliki 9 so prikazane porazdelitve necelega dela logaritma za lognormalne porazdelitve z različnim parametrom σ. Porazdelitve sem generiral po 7 z uporabo vgrajenega generatorja naključnih števil. Na slikah so zapisane tudi vrednosti testnih statistik, na zadnji sliki pa so še kritične vrednosti χ_*^2 in d_* pri $\alpha = 0.01$. Samo za zadnjo porazdelitev lahko trdimo, da je skladna z enakomerno s stopnjo zaupanja 99%.

Vrednosti obeh testov v odvisnosti od širine porazdelitve prikazuje slika 10a. Parameter σ je podan za lognormalno porazdelitev in tudi kot ekvivalenten parameter normalne porazdelitve (zgornja skala). Iz grafa vidimo, da moramo imeti lognormalno porazdelitev s $\sigma_X \gtrsim 1.5$, da bo zadoščeno ničelni hipotezi o skladnosti z enakomerno porazdelitvijo na stopnji zaupanja $1 - \alpha = 0.99$.

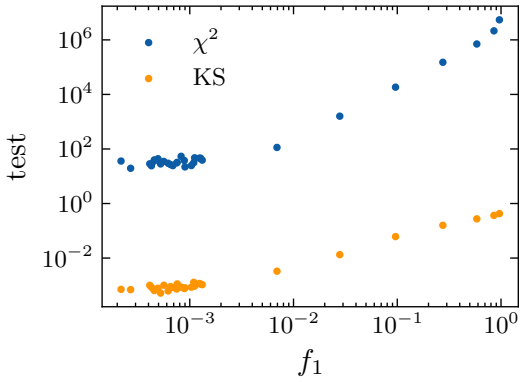
Na sliki 10b je prikazana odvisnost obeh vrednosti statistik v odvisnosti od prve Fourierove frekvenčne komponente f_1. Zaradi končnega naključnega vzorca vrednost f_1 ne pada pod 10^{-4} kljub povečevanju σ. Iz obeh grafov vidimo, da bomo morali za dobro naključno generacijo števil poiskati proces, ki bo vrnil podatke porazdeljene po lognormalni porazdelitvi široki vsaj nekaj velikostnih redov.



Slika 9: Porazdelitve necelega dela logaritma naključnih števil žrebanih iz različnih lognormalnih porazdelitev. Na slikah so zapisani tudi rezultati opisanih statističnih testov.



(a) Vrednosti testa χ^2 in testa KS v odvisnosti od parametra σ lognormalne porazdelitve in σ_X normalne porazdelitve.



(b) Odvisnost vrednosti testnih statistik od širine porazdelitve podane s prvo Fourierovo frekvenčno komponento.

Slika 10: Prikaz različnih odvisnosti pri računanju enakomerne porazdelitve.

5 Kakovost generatorjev naključnih števil

Kakovosti generatorjev naključnih števil preverjamo s statistično utemeljenimi baterijami empiričnih testov. Za preverjanje kakovosti dobljenih naključnih števil sem uporabil zbirko NIST Statisical Test Suite, poznano tudi pod imenom SP 800-22. Testi kot vhodni podatek vzamejo zaporedje naključnih bitov ter vrnejo uspešnost testa (true/false) glede na p-vrednost pri $\alpha = 0.01$ (s to verjetnostjo se test zmoti in vrne false namesto true, *type I error*). Naključno zaporedje bitov je sestavljeno iz 0 in 1, kjer so biti med seboj neodvisni in se pojavijo z verjetnostjo 1/2. Ničta hipoteza H_0 je, da je testirano zaporedje bitov naključno, alternativna hipoteza pa je, da zaporedje ni naključno. Vseh testov je 15 in so podrobno opisani ter tudi implementirani v originalnem članku [12], zato jih bom tukaj samo navedel (tabela 2), jih bom pa uporabil za končno testiranje generatorja. Najbolj pomemben je prvi (frekvenčni) test, ki preverja enakomerno porazdelitev bitov. Če odpove prvi, potem je nadaljnje testiranje nesmiselno.

#	ime testa
1	The Frequency (Monobit) Test
2	Frequency Test within a Block
3	The Runs Test
4	Tests for the Longest-Run-of-Ones in a Block
5	The Binary Matrix Rank Test
6	The Discrete Fourier Transform (Spectral) Test
7	The Non-overlapping Template Matching Test
8	The Overlapping Template Matching Test
9	Maurer's "Universal Statistical"Test
10	The Linear Complexity Test
11	The Serial Test
12	The Approximate Entropy Test
13	The Cumulative Sums (Cusums) Test
14	The Random Excursions Test
15	The Random Excursions Variant Test

Tabela 2: Vrstni red in imena testov.

6 Naključna števila iz fizikalnih podatkov

6.1 Življenjski čas miona

Pri eksperimentu merimo življenjski čas mionov, ki nastanejo pri interakcijah visokoenergijskih kozmičnih delcev z molekulami v zgornjih plasteh atmosfere. Mion ima dva glavna razpadna kanala

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu \tag{22}$$

in

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \,. \tag{23}$$

Za detekcijo mionov smo uporabili sod z mineralnim oljem z dodatkom scintilatorja in fotopomnoževalko, ki je delno potopljena vanj. Ko mion preleti sod povzroči scintilacije, ki jih zaznamo kot več-fotonski signal s fotopomnoževalko. Mioni večinoma sod samo preletijo in se v njem ne ustavijo. Če pa imajo dovolj nizko energijo, se v scintilatorju ustavijo in razpadejo. Tako nastala elektron ali pozitron v scintilatorskem olju znova zasvetita, kar ponovno izmerimo. Z meritvijo časa med nastankom obeh sunkov (slika 12a) lahko ugotovimo razpadni čas miona.

Na slikah so prikazane meritve pri dveh različno dolgih časih merjenja, ki sem jih naredil pri predmetu Fizikalni eksperimenti. Pri vsaki meritvi imamo na voljo 10^3 podatkovnih točk iz katerih bomo poskusili dobiti naključna števila. Na izmerjene podatke v logaritemski skali naprej prilagodimo premico (slika 12b). Prilagojena premica predstavlja linearni trend, ki ga odštejemo od podatkov, da dobimo normalno porazdeljen šum (slika 13).

Iz dobljene normalne porazdelitve bi radi naredili enakomerno porazdelitev. Normalno porazdelitev najprej spremenimo v standardno normalno z uvedbo

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \,, \tag{24}$$

kjer parametra μ in σ dobimo s fitom na podatke. Uporabili bomo obratno Box-Mullerjevo transformacijo. Naj bosta U_1 in U_2 neodvisna vzorca iz enakomerne porazdelitve na intervalu $(0, 1)$. Neodvisni naključni spremenljivki Z_1 in Z_2, porazdeljeni po standardni normalni porazdelitvi $N(0, 1)$, dobimo s transformacijo

$$Z_1 = R\cos\theta = \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \quad \text{in} \quad Z_2 = R\sin\theta = \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2 \,, \tag{25}$$

kjer spremenljivki U_1 in U_2 določata dolžino in kot ravninskega vektorja $[Z_1, Z_2]^\top$

$$R = \sqrt{-2\ln U_1} \quad \text{in} \quad \theta = 2\pi U_2 \,. \tag{26}$$

Z nekaj računanja dobimo obratni zvezi, ki povezujeta enakomerno porazdelitev s standardno normalno:

$$U_1 = \exp\left[-\frac{\left(Z_1^2 + Z_1\sqrt{Z_1^2+Z_2^2} + Z_2^2\right)^2}{2\left(Z_1 + \sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\right)^2}\right] \quad \text{in} \quad U_2 = -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{Z_1 + \sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}{Z_2}\right) \,. \tag{27}$$

Tako dobljeni enakomerni porazdelitvi prikazuje slika 14. Pri $\alpha = 0.01$ lahko rečemo, da je prva enakomerna (druga je pa precej blizu).

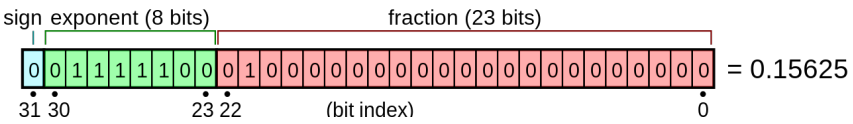
Pojavi se še vprašanje kako dobiti zaporedje bitov iz zaporedje realnih števil (32 ali 64 bitni float v računalniku). Lahko se sprehajamo po binarnem odločitvenem drevesu pri čemer tvorimo:

$$\text{odločitev} = \begin{cases} \text{bit } 0 \,, & \text{če} \quad x_i \leq 0.5 \,, \\ \text{bit } 1 \,, & \text{če} \quad x_i > 0.5 \,, \end{cases} \tag{28}$$

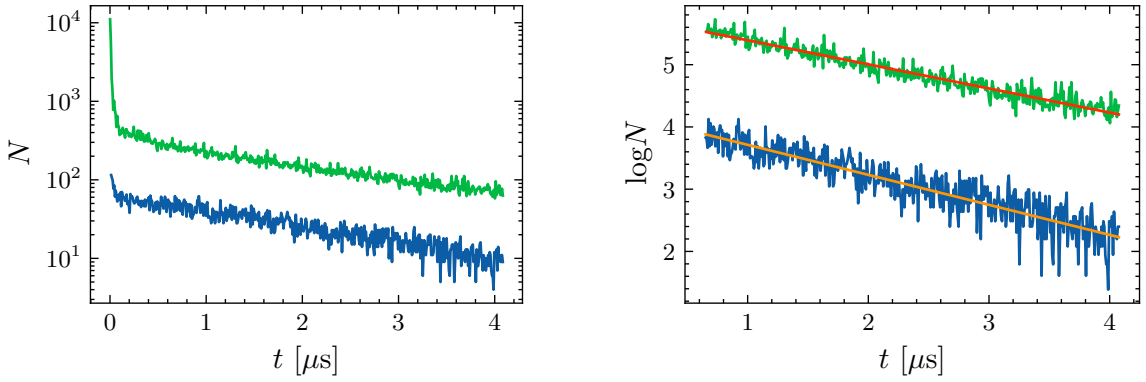
kar nam da naključno zaporedje bitov (en bit za vsako naključno številko). Druga možnost je, da direktno spremenimo število v binarno reprezenatacijo. Pri tem se moramo zavedati IEEE 754 formata, ki je za 32 bitno število na sliki 11. Če želimo imeti naključno zaporedje bitov, moramo torej izpustiti prvih 9 bitov, ki predstavljajo predznak in eksponent števila (imamo enakomerno porazdelitev zato se večina števil začne z 00111111). Postopek nam iz enega naključnega števila da 23 bitov.

Tabela 3 prikazuje uspešnost testov 2 za generirana naključna števila iz obeh meritev. Indeksa 1 in 2 se nanašata na prvo in drugo enakomerno porazdelitev U_1 in U_2. Indeks 3 se nanaša na združeni porazdelitvi (v smislu bitnih zaporedij). Za generacijo bitnega zaporedja sem uporabil drugi opisani postopek. Spodleti samo test 12, ki preverja frekvence prekrivanja m-bitnega vzorca. Razlog za to je verjetno prekratko zaporedje bitov, saj za združeno (daljše) zaporedje dobimo pozitiven rezultat.

Zaporedje bitov lahko predstavimo tudi v kvadratni matriki, kar prikazuje slika 15 za prvo meritev. Na levi sliki je po diagonalah jasno opazen vzorec, ki se pojavi, če v zaporedju vzamemo vseh 32 bitov (očitno ni naključen). Desna slika prikazuje naključen vzorec pri katerem upoštevamo bite, ki se ne ponavljajo.



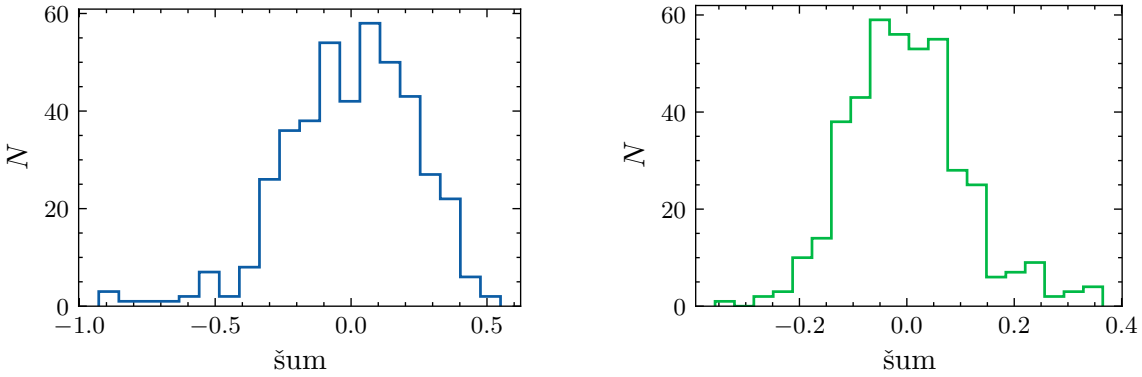
Slika 11: Enojna natančnost binarnega števila [13].



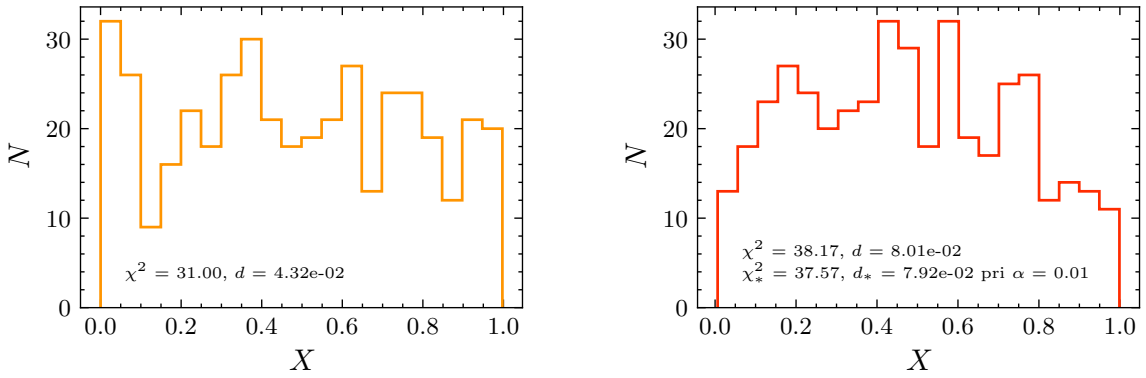
(a) Meritve.

(b) Linearni fit v logaritemski skali.

Slika 12: Meritev časa napetostnih sunkov in prilagajanje linearne odvisnosti.



Slika 13: Normalni šum obeh meritev, ki ga dobimo z odštevanjem linearnega trenda.



Slika 14: Enakomerni porazdelitvi generirani z obratno Box-Mullerjevo transformacijo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_1	0.40	0.27	0.62	0.64	0.21	0.07	0.31	0.91	nan	0.82	0.69	0.00	0.72	0.67	0.59
p_2	0.38	0.14	0.32	0.35	0.13	0.43	0.81	0.28	nan	0.85	0.66	0.00	0.37	0.33	0.82
p_3	0.23	0.16	0.28	0.77	0.42	0.02	0.29	0.86	nan	0.68	0.73	0.02	0.25	0.67	0.58

Tabela 3: Rezultati statističnih testov za naključna števila iz šuma meritev. Vrednost `nan` pomeni premajhen vzorec za dani statistični test.

(a) (b)

Slika 15: Prikaz zaporedja bitov dobljenega iz naključnih števil.

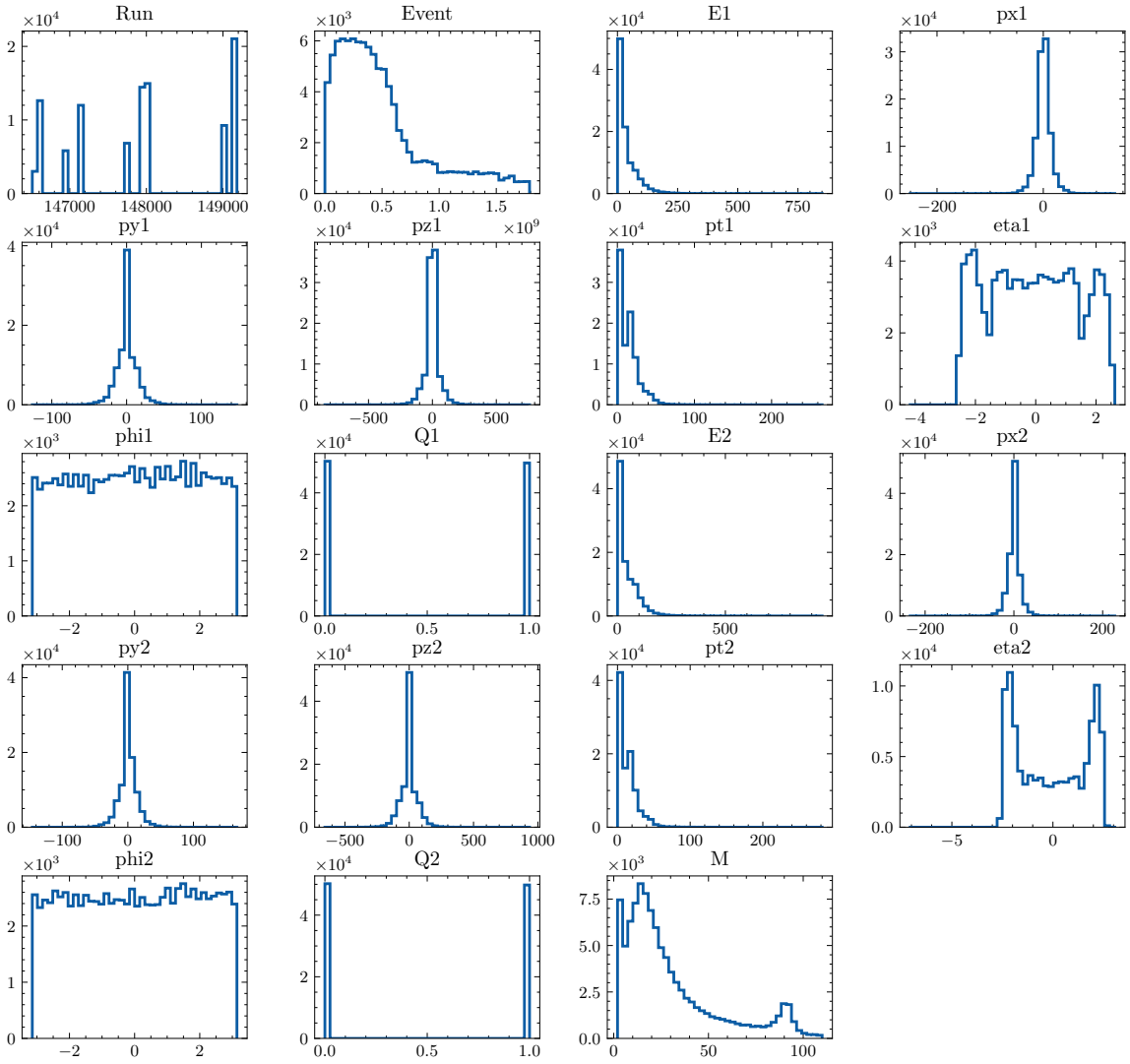
6.2 Dogodki z dvema elektronoma zbrani na detektorju CMS

Podatke sestavlja 10^5 dvo-elektronskih dogodkov invariantih mas 2-110 GeV zbranih na detektorju CMS [14]. Podatki vsebujejo energije E, gibalne količine p, transverzalne gibalne količine p_t, kote ϕ in η, naboj Q (± 1) in invariantno maso obeh elektronov M (slika 16).

Najprej si poglejmo zaporedje izmerjenih nabojev. Naboj pozitrona spremenimo v bit 1, naboj elektrona pa v bit 0. Označimo naboj prvega nastalega elektrona s Q_i^1 in naboj drugega s Q_i^2. Poleg teh dveh zaporedij sem preizkusil še zaporedji $\{Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_N^2, Q_1^2, Q_2^2, \ldots, Q_N^2\}$ in tudi $\{Q_1^1, Q_1^2, Q_2^1, Q_2^2, \ldots, Q_N^1, Q_N^2\}$. Iz spodnje tabele vidimo, da vsi testi potrdijo naključnost bitnega zaporedja iz nabojev. Ostali dve zaporedji pa nista več tako dobro naključni. Prvo zaporedje spodleti na spektralnem testu (spekter ima periodične značilnosti, ker smo ga sestavili iz dveh podobnih zaporedij), drugo zaporedje pa spodleti kar na polovici testov. Razlog je v tem, da pari Q_i^1, Q_i^2 niso neodvisni. Lahko jih preštejemo in ugotovimo, da jih je $\sim 43\%$ enakih (00 ali 11) in da ostali niso enaki (10 ali 01), kar je v nasprotju s predpostavko o enakomerni porazdelitvi podzaporedij.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p_{Q_i^1}$	0.08	0.38	0.08	0.29	0.58	0.18	0.84	0.22	nan	0.10	0.38	0.16	0.07	0.53	0.43
$p_{Q_i^2}$	0.18	0.17	0.64	0.26	0.33	0.06	0.05	0.41	nan	0.74	0.65	0.10	0.11	0.45	0.69
$p_{Q_i^1 \ldots Q_i^2}$	0.03	0.09	0.12	0.29	0.12	0.00	0.62	0.61	nan	0.22	0.60	0.54	0.02	0.53	0.43
$p_{Q_i^1 Q_i^2}$	0.03	1.00	0.00	0.00	0.70	0.00	0.00	0.00	nan	0.75	0.27	0.00	0.02	0.52	0.33

Tabela 4: Statistični testi za zaporedje bitov iz izmerjenih nabojev.

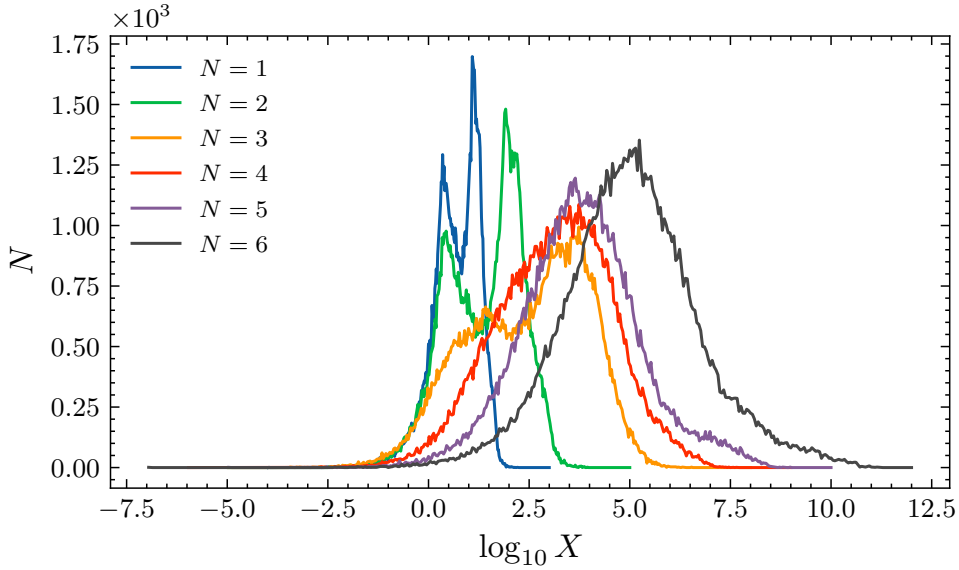


Slika 16: Porazdelitve količin obeh elektronov (prvi dve nista pomembni).

Tokrat porazdelitve spremenljivk niso očitne in ne moremo uporabiti enakega postopka kot v prejšnjem primeru. Nobena od porazdelitev tudi ni dovolj široka za uporabo Benfordovega zakona, zato bomo skonstruirali novo porazdelitev kot zmnožek porazdelitev gibalnih količin

$$f = \prod_{i=1}^{N} p_i \quad \text{kjer je} \quad p_i = \{p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}\}\,. \tag{29}$$

Pričakujemo, da bo tako sestavljena porazdelitev lognormalna v limiti $N \to \infty$. Slika 17 prikazuje zgoraj opisano množenje za vse različne N. Vidimo, da pri povečevanju števila produktov res dobimo vse boljšo lognormalno porazdelitev. Za generacijo naključnih števil uporabimo neceli del logaritma, kar nam da enakomerno porazdelitev. Parametre n_1 (delež prvih enic), $\Delta n_1 = |n_1 - \log_{10} 2|$, f_1 (Fourierova komponenta porazdelitve pri frekvenci 1) in rezultata χ^2 ter KS prikazuje tabela 5. Iz rezultatov vidimo, da so najbolj enakomerne porazdelitve za $N > 2$. Izračunamo tudi vrednosti statističnih testov bitnega zaporedja (tabela 6), ki nam potrdijo domnevo o tem, da so naključna samo števila iz porazdelitev pri $N > 2$.



Slika 17: Lognormalne porazdelitve kot produkt izmerjenih gibalnih količin.

	n_1	Δn_1	f_1	χ^2	d	p_{χ^2}	p_d
$N = 3$	0.3037	0.0027	0.00227	300.15	0.0040	0.7172	0.0877
$N = 5$	0.3026	0.0016	0.00126	317.54	0.0045	0.4493	0.0334
$N = 6$	0.3041	0.0031	0.00464	332.43	0.0036	0.2394	0.1394
$N = 4$	0.3002	0.0008	0.00458	360.90	0.0020	0.0381	0.7945
$N = 2$	0.3086	0.0076	0.00410	643.26	0.0159	0.0000	0.0000
$N = 1$	0.3848	0.0837	0.00686	6523.96	0.1122	0.0000	0.0000

Tabela 5: $\chi^2_* = 377.41$ in $d_* = 0.0051$ pri $\alpha = 0.01$. Tabela je urejena glede na χ^2 vrednost.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_1	0.00	0.06	0.47	0.81	0.60	0.52	0.34	0.37	0.90	0.24	0.00	0.08	0.00	0.16	0.27
p_2	0.00	0.51	0.00	0.49	0.60	0.24	0.21	0.06	0.06	0.57	0.91	0.79	0.00	0.38	0.21
p_3	0.29	0.93	0.53	0.77	0.86	0.44	0.56	0.13	0.67	0.02	0.42	0.18	0.18	0.34	0.42
p_4	0.79	0.35	0.69	0.92	0.91	0.10	0.61	0.50	0.16	0.51	0.25	0.05	0.82	0.54	0.41
p_5	0.86	0.68	0.13	0.90	0.18	0.03	0.20	0.89	0.99	0.25	0.57	0.78	0.96	0.66	0.49
p_6	0.19	0.72	0.87	0.91	0.15	0.01	0.91	0.66	0.64	0.83	0.30	0.07	0.24	0.42	0.48

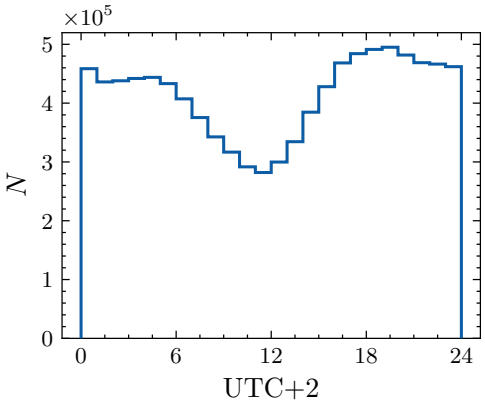
Tabela 6: Rezultati statističnih testov za zaporedje bitov.

7 Naključna števila iz objav in komentarjev

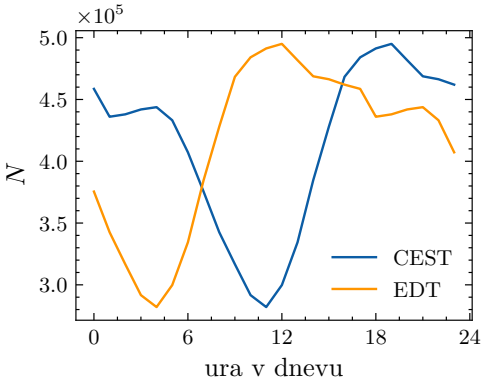
Poglejmo si ali lahko naključna števila generiramo še kako drugače. Kot vir podatkov bomo uporabili Reddit (*"the front page of the Internet"*). Razlog je v tem, da je Reddit precej bolj odprt za zbiranje podatkov v primerjavi z drugimi platformami, kot sta Twitter in Facebook. Za dostopanje do podatkov sem uporabil [15], ki omogoča 1 API klic na sekundo in vsakič vrne 100 objav ali komentarjev. Za generacijo naključnih števil bomo uporabili 600545 objav in 9661650 komentarjev, ki so bili narejeni na različnih subredditih med 9. julijem in 8. avgustom 2021. Zbrani podatki vsebujejo: ime avtorja, besedilo komentarja ali objave ter tudi naslov objave, čas objave (Unix timestamp format natančen na eno sekundo), id objave in komentarja (uporabno za povezavo komentarja z objavo), število točk ter še nekaj bolj tehničnih stvari, ki nas ne zanimajo.

7.1 Časi objav in komentarjev

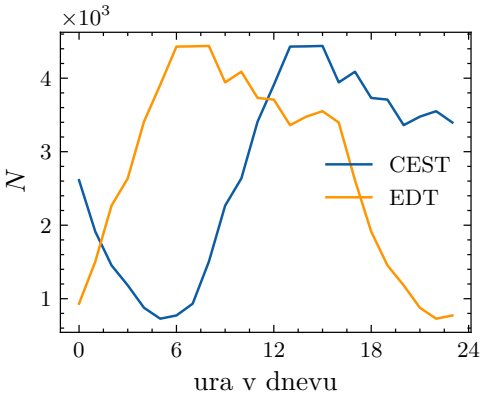
Najprej si bomo ogledali številske podatke, potem pa se bomo lotili še tekstovnih podatkov. Slika 18a prikazuje porazdelitev časa komentarjev (za objave velja podobno). Na abscisni osi je prikazan ura objave v našem poletnem času. V porazdelitvi nemudoma opazimo minimum, ki se zgodi okrog poldneva. Razlog je v uporabnikih Reddita, ki so večinoma (več kot 50%) Američani. Premaknemo porazdelitev v nam najbližji ameriški časovni pas (slika 18b) in ugotovimo, da do minimuma pride okrog štirih zjutraj, kar je bolj skladno s pričakovanji. Vrh aktivnosti (v *Eastern Daylight Time* času) je torej ob 12, potem se začne počasi nižati vse do okrog polnoči, kjer začne strmo padati do zgodnjih jutranjih ur. Preselimo se lahko v enega izmed bolj evropskih subredditov, kjer opazimo enako nihanje, ki je tokrat v skladu z našim časom (slika 18c).



(a) Porazdelitev časov objav.



(b) Različni časovni pasi.



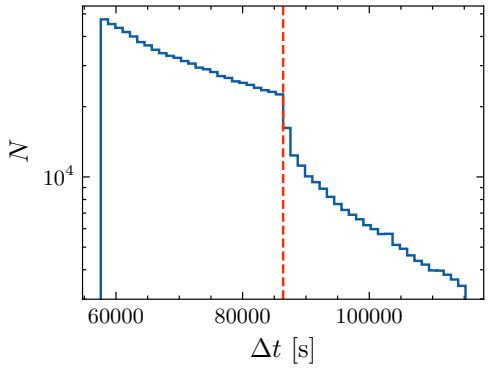
(c) Primerjava z evropsko demografiko.

Slika 18: Časi komentarjev glede na časovni pas.

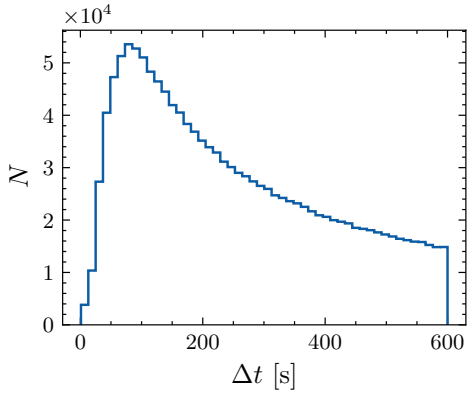
Na žalost nam porazdelitev časov 18a ne pomaga pri generaciji naključnih števil, ker ni dovolj enakomerna. Namesto tega izračunamo razlike časov med objavo in njenimi komentarji Δt, kar je prikazano na slikah 19. Prva slika prikazuje prelom v številu komentarjev. V logaritemski skali se lepo vidita dve premici z različnima naklonoma Do pojava pride zato, ker Redditov algoritem priotizira nove vsebino in začne skrivati objave, ki so stare več kot en dan. Ker algoritem ni javen, tudi ne vemo kako se spreminja vidnost komentarjev pri ostalih časih. Spodnji dve sliki prikazujeta porazdelitve razlik časov v intervalu do 10 minut ter v intervalu do enega dneva. Vidimo, da največ komentarjev nastane takoj po objavi in da imajo časi potenčno odvisnost, ki pa ne velja enako na celotnem območju (vmes se pojavi nekakšen plato). Opazimo tudi, da so grafi precej podobni tistim iz 12a, ker gre pri obeh za podoben pojav. Benfordov zakon za porazdelitev velja slabo (delež enic je samo 24%), zato je ne moremo uporabiti direktno.

Za generacijo naključnih števil iz Δt bomo spet uporabili medsebojno množenje bližnjih podatkov. Rezultat je za N množenj prikazan na sliki 19d. Vidimo, da nam več množenj vrne vse bolj lognormalno porazdelitev za katero velja Benfordov zakon. Vzamemo logaritem necelega dela in dobimo enakomerno porazdelitev, ki nam generira naključna števila. Naključnost je odvisna tudi od tega kako so bili na začetku razvrščeni komentarji. Razvrstili bi jih lahko na več načinov (npr. glede na razne tekstovne podatke), najbolj enostavno pa kar po številu točk, ki jih je prejel komentar. Slika 20 prikazuje odvisnosti že omenjenih statističnih količin od števila množenj N. Iz slike vidimo, da dobimo dobro enakomerno porazdelitev že pri dveh množenjih.

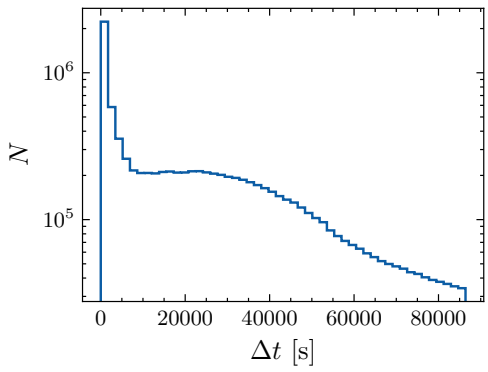
Poglejmo si bolj podrobno statistiko testov pri $N = 2$. Razdelimo besedilo tako, da dobimo 75 vzorcev, ki nam vsak vrne po 10^6 bitov. Za vsakega izmed vzorcev naredimo vseh 15 statističnih testov in zabeležimo p-vrednosti. Če H_0 drži, pričakujemo, da bodo p-vrednosti porazdeljene po enakomerni porazdelitvi. Rezultate, skupaj s χ^2 vrednostmi za dobljeno enakomerno porazdelitev, prikazuje slika 21. Rezultati potrdijo, da sta za podatke 19b res dovolj že dve množenji



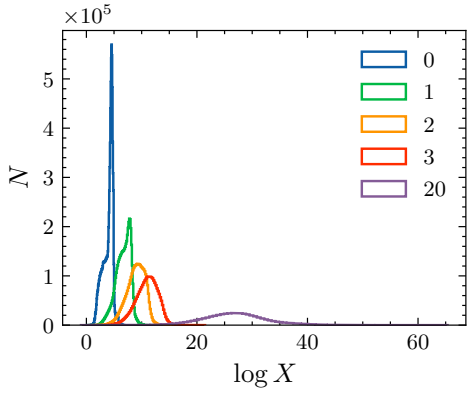
(a) Prelom v aktivnosti objave po enem dnevu.



(b) Porazdelitev na intervalu $[0, 10]$ min.

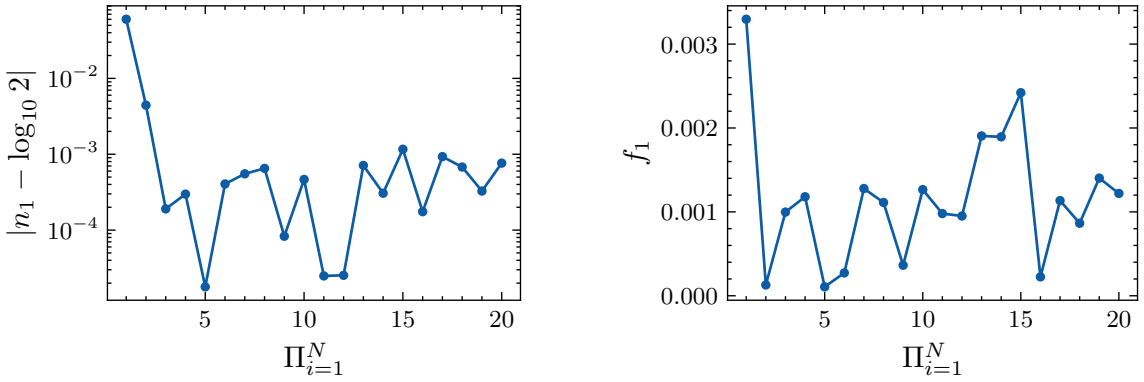


(c) Porazdelitev na intervalu $[0, 1]$ dan.



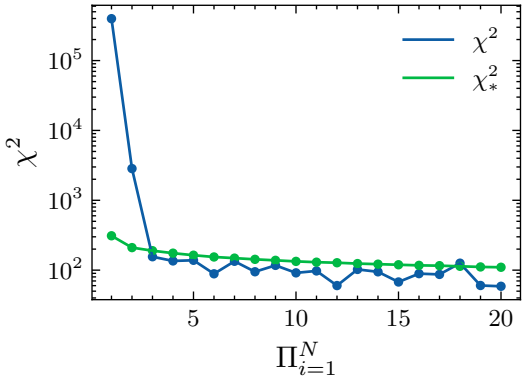
(d) Lognormalne porazdelitve z množenjem.

Slika 19: Razlike časov med objavo in njenimi komentarji.

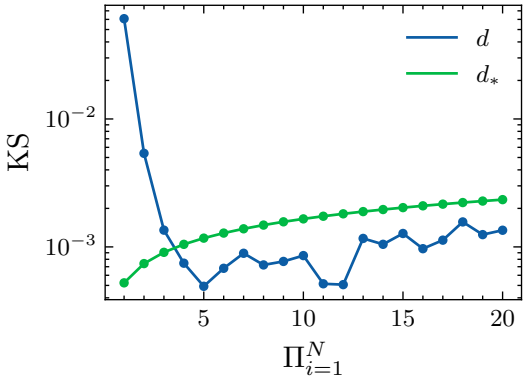


(a) Razlika števila enic od napovedane.

(b) Fourierova komponenta.

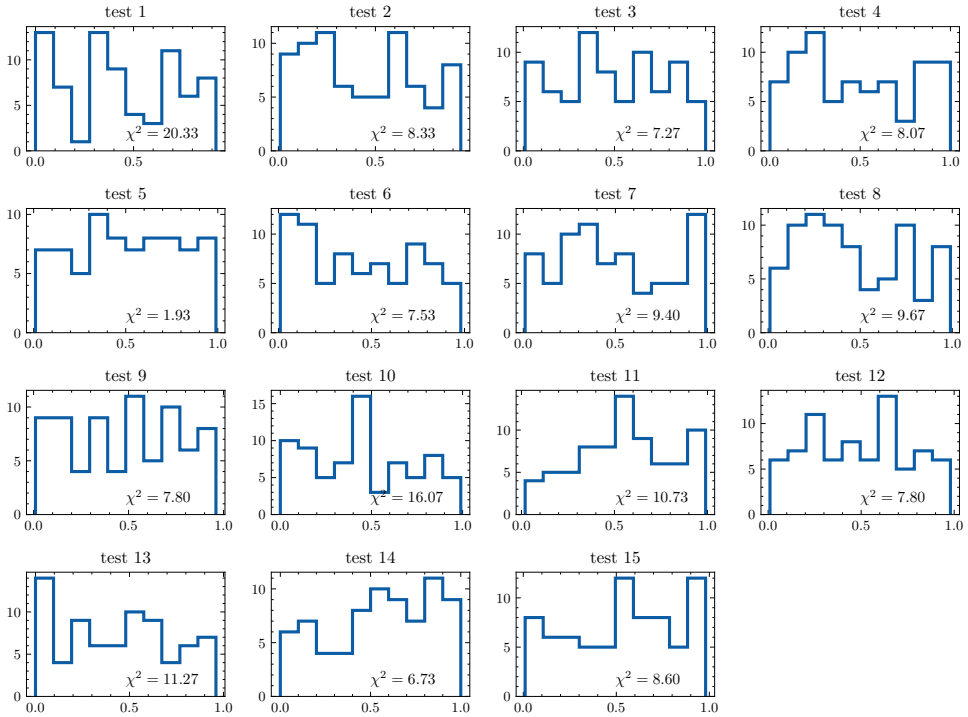


(c) χ^2.



(d) Kolomogorov-Smirnov.

Slika 20: Odvisnost opisanih količin od števila množenj (lognormalnosti porazdelitve).



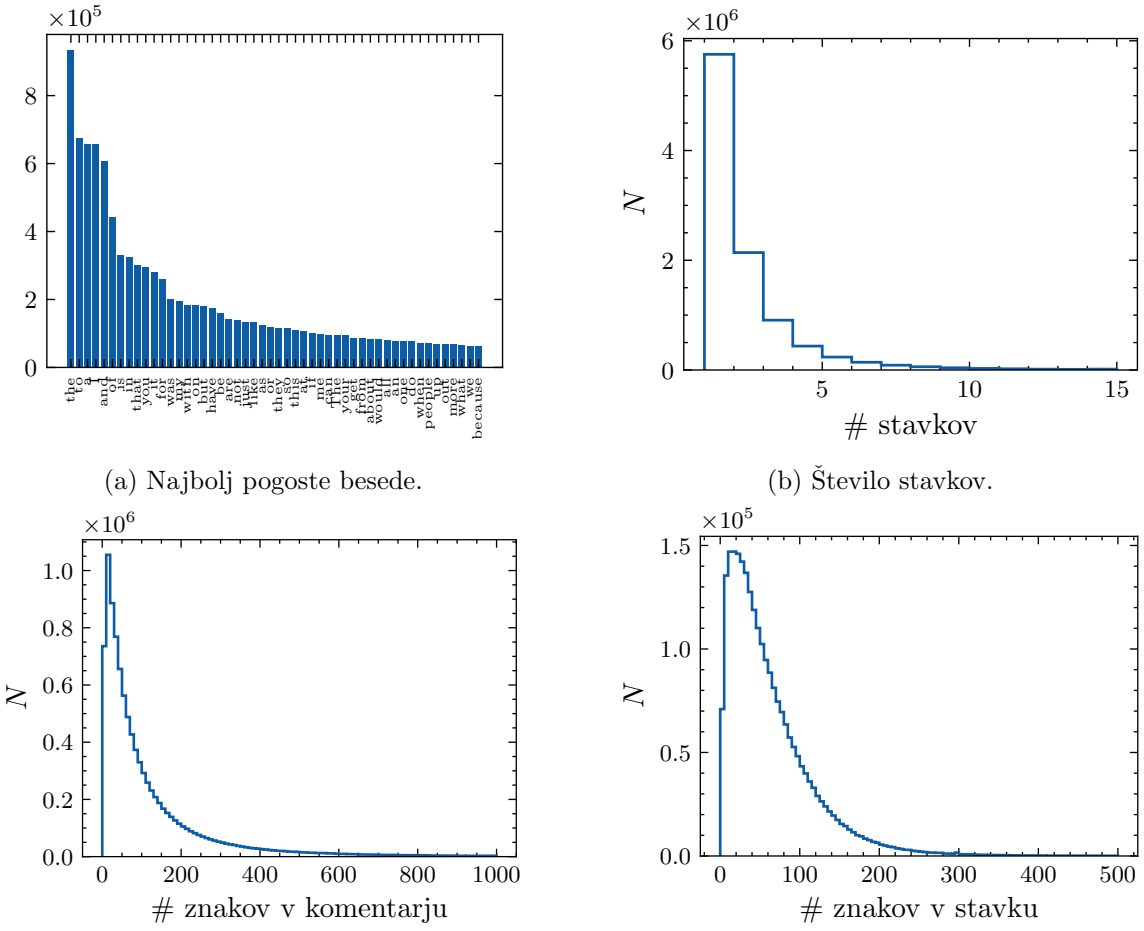
Slika 21: 75 ponovitev NIST testov na različnih vzorcih po 10^6 bitov pri $N = 2$. $\chi^2_* = 24.72$.

7.2 Naključna števila iz besedila

Do zdaj smo vsa naključna števila sestavili iz numeričnih podatkov. Največ informacije je v komentarjih in objavah seveda skrite v samem besedilu. Poskusimo ali lahko naredimo naključna števila tudi iz takšnih tekstovnih podatkov.

Najprej preverimo s kakšnimi podatki imamo opravka. Na sliki 22 so prikazani histogrami 50 najbolj pogostih besed, števila stavkov, znakov v komentarju ter števila znakov v vsakem stavku. Ocena števila stavkov je približna, saj sem za definicijo stavka vzel del besedila, ki se začne z veliko začetnico in konča s piko. Če komentar ne vsebuje nič od naštetega ga štejemo kot stavek. Pri takem štetju se pojavi precej robnih problemov (npr. okrajšave), ki jih nisem upošteval.

Vse porazdelitve imajo dolg rep in predstavljajo potenčni zakon. Iz takih porazdelitev ne moremo direktno narediti naključnih števil lahko pa, enako kot v prejšnjem primeru, sestavimo lognormalno porazdelitev z množenjem nekaj posameznih elementov v podatkih. Ker smo to že naredili, si raje poglejmo način, ki uporabi znake besedila direktno.



(a) Najbolj pogoste besede.

(b) Število stavkov.

(c) Število znakov v komentarju.

(d) Število znakov v stavku.

Slika 22: Nekaj karakterističnih porazdelitev iz besedila komentarjev.

Znaki v besedilu so šifrirani v UTF-8 formatu [16]. Različni znaki so predstavljani z enim do štirimi 8 bitnimi enotami. Prvih 128 znakov je dolgih 1 byte in ustrezajo staremu ASCII formatu. Nekaj primerov:

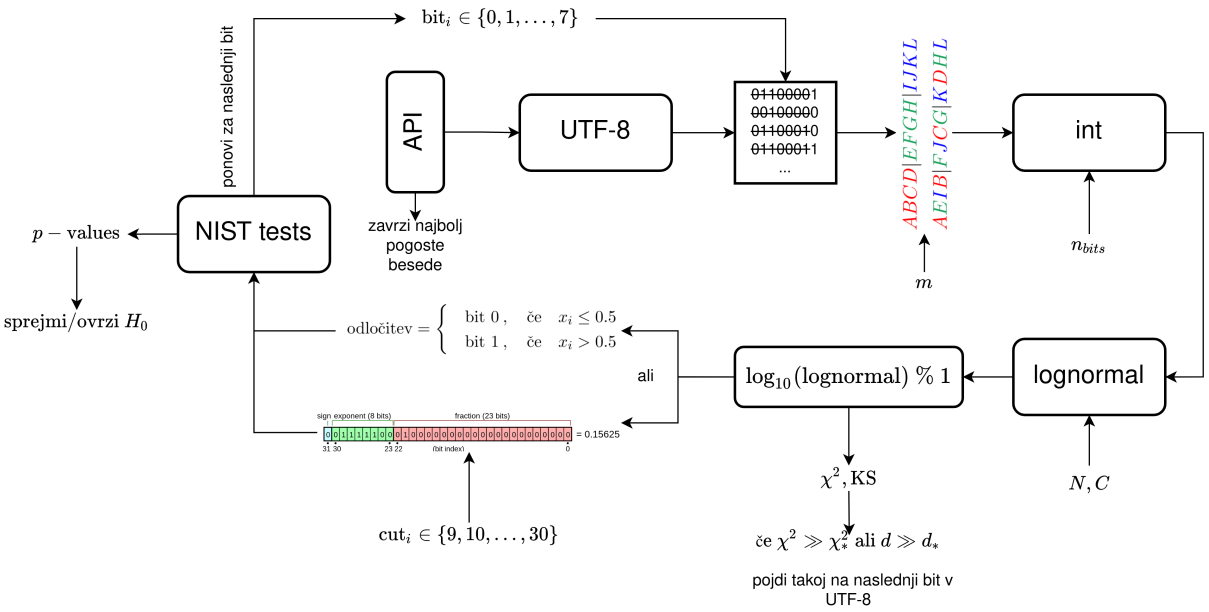
a b c → 01100001 00100000 01100010 00100000 01100011
ž → 11000101 10111110
φ → 11001111 10000110
ツ → 11100011 10000011 10000011
😃 → 11110000 10011111 10011000 10000011

Ideja naključnega generatorja števil iz komentarjev in objav je naslednja (slika 23):

1. Podatke dobimo preko API vmesnika (uporabimo poljubno HTTP requests knjižnico), ki nam vrne 100 objav/komentarjev na sekundo.
2. Iz dobljenega besedila odstranimo presledke, nove vrstice in nekaj najbolj pogostih besed (ne več kot 100).
3. Spremenimo znake besedila v UTF-8 format.
4. Iz UTF-8 bitnih nizov vzamemo i-ti bit.
5. Dobljeno bitno zaporedje premešamo, da razbijemo lokalno korelacijo v posameznem komentarju ali objavi. Uporabimo:

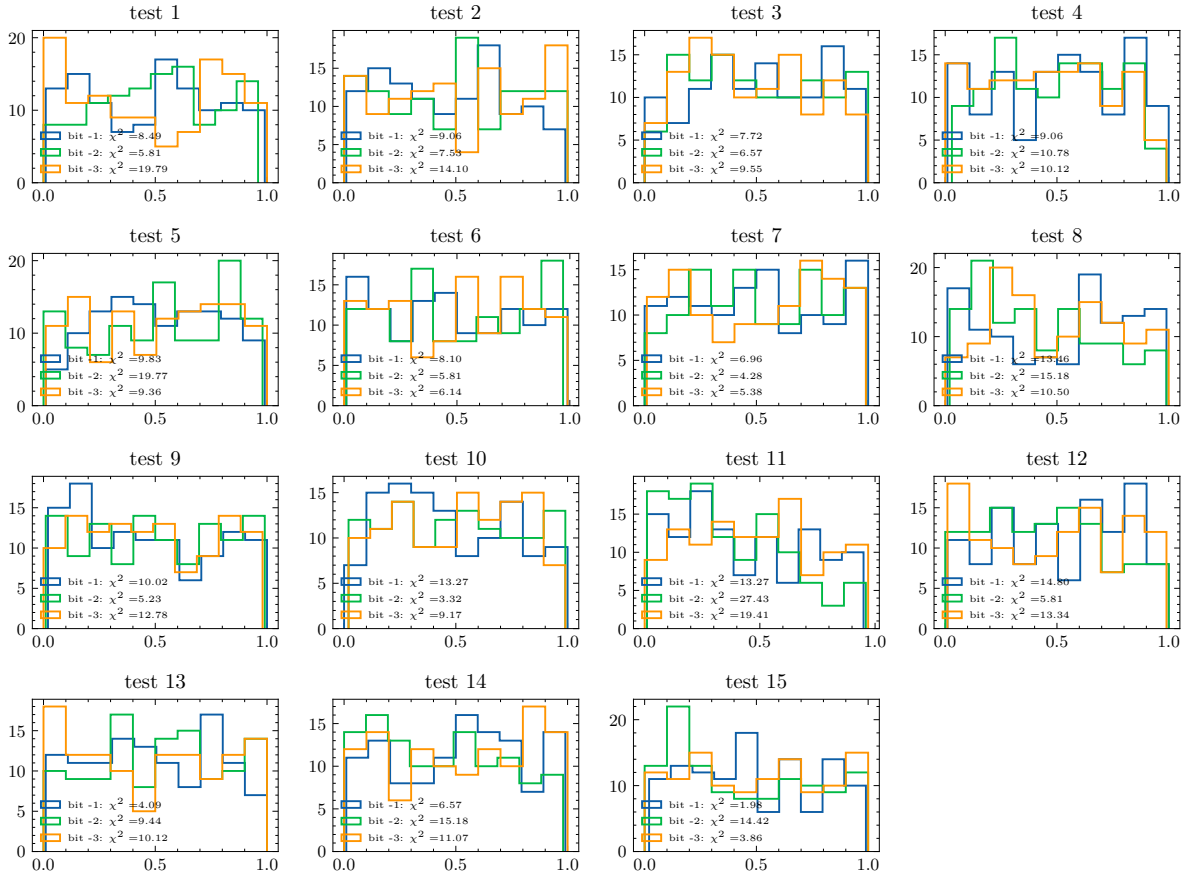
$$\begin{aligned} &ABCD|EFGH|IJKL \\ &AEIB|FJCG|KDHL \\ &AFKE|JDIC|HBGL \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{aligned}$$

   kjer vsaka črka predstavlja bit 0 ali 1 (primer prikazuje 12 bitov). Celoten postopek poskusi maksimizirati razdalje med začetnimi sosedi bitov. Zaporedje bitov najprej razdelimo v m podskupin. Nove podskupine gradimo z zaporednim dodajanjem bitov iz naslednjih skupin. Prvi in zadnji bit se pri celem postopku ne spremenita. Postopek lahko ponovimo večkrat ter vsakič dobimo drugačno zaporedje.
6. V premešanem zaporedju vzamemo n zaporednih bitov ter iz njih tvorimo pozitivna neničelna cela števila.
7. Dobljen vektor števil delimo s pozitivno neničelno konstanto C, da ne dobimo prevelikih števil. Vektor dimenzije M spremenimo v matriko dimenzije $\lfloor \frac{M}{N} \rfloor \times N$ ter zmnožimo vse vrstice, kar nam vrne manjši vektor. Dobljena števila so po tem postopku porazdeljena lognormalno.
8. Uporabimo ugotovitve Benfordovega zakona. Izračunamo neceli del logaritma, kar nam da enakomerno porazdelitev, ki jo preverimo s χ^2 in KS testoma. Postopek lahko tukaj že končamo.
9. Sledijo statistični testi za naključno zaporedje bitov. Dobljeno enakomerno porazdelitev pretvorimo nazaj v bitno zaporedje z odločitvenim drevesom ali pa z direktno pretvorbo pri kateri se moremo določiti do katerega bita bomo vzeli število.
10. Naredimo vseh 15 NIST testov, ki nam vrnejo p-vrednosti glede na katere se odločimo ali je naključnost zaporedja sprejemljiva.
11. Ponavljamo za različne prametre bit_i, m, n, N dokler ni zaporedja bitov naključno.



Slika 23: Postopek generacije in testiranja bitov dobljenih iz komentarjev.

Postopek sem preveril na komentarjih, ki sem jih razdelil na 100 vzorcev, ki vrnejo 2×10^6 bitov. Rezultati statističnih testov za tri zadnje bite prikazuje slika 24. Izkaže se, da prvi trije biti v UTF-8 niso naključni, naslednje dva sta vprašljivo naključna, rezultati za ostale tri pa prikazuje spodnja slika. Za ostale parametre sem izbral: $m = 16$ in samo eno mešanje, $n = 8$, $N = 6$, $C = 10^6$ ter cut$_i = 9$.



Slika 24: Rezultati statističnih testov naključnosti za zadnje tri bite v UTF-8 formatu.

Naredimo še grobo oceno koliko naključnih bitov dobimo s tem postopkom na sekundo. Izračun sem naredil za vzorec velikosti 10^6 komentarjev. Vzorec je vseboval 1.305×10^9 bitov (vsi znaki skupaj s presledki in novimi vrsticami), kar nam da $\sim$ 1300 bitov na komentar. Postopek porabi $\sim$ 38 začetnih bitov za en naključni bit. Upoštevamo limit 100 komentarjev na sekundo, kar nam da $\sim$ 3400 naključnih bitov vsako sekundo (ali $\sim$ 150 z uporabo postopka 28).

8 Zaključek

Pri nalogi sem poskusil sestaviti generator naključnih števil iz konkretnih podatkov. Generatorji, ki jih ponavadi uporabljamo niso naključni, saj za delovanje uporabljajo različne matematične predpise, kar jih naredi predvidljive. Značilnost takih generatorjev je začetno seme ter neka končna perioda. S pravimi naključnimi generatorji se lahko, na račun hitrosti same generacije števil, znebimo teh slabosti.

Naključna števila ne moremo dobiti direktno iz podatkov, ker ponavadi ne gre za enakomerno porazdelitev. V ta namen sem uporabil Benfordov zakon iz katerega sledi, da so neceli deli logaritma števil porazdeljen enakomerno, če seveda velja ta zakon. Izkaže se, da je porazdelitev za katero lepo velja Benfordov zakon lognormalna, ki jo lahko dobimo z množenjem različnih količin, kar sledi iz centralnega limitnega izreka. V nalogi sem pokazal, da Benfordov zakon velja dobro samo za dovolj široke lognormalne porazdelitve, kjer lahko širino porazdelitve definiramo v Fourierovem frekvenčnem prostoru. Enakomernost tako dobljene porazdelitve preverimo s testoma χ^2 in testom Kolomogorov-Smirnova. Pojavi se tudi netrivialno vprašanje kako vemo ali so dobljena števila zares naključna. V ta name sem uporabil NIST Statisical Test Suite, ki vsebuje 15 testov, ki preverjajo različne lastnosti naključnih zaporedij bitov.

Za generacijo naključnih števil sem najprej uporabil fizikalne podatke. Vzel sem meritve življenjskega časa miona ter iz njih izluščil šum, ki je normalno porazdeljen. Enakomerno porazdelitev sem iz standardne normalne genererial z inverzno Box-Mullerjevo transformacijo, kar se je izkazalo za precej uspešno. Naslednji uporabljeni fizikalni podatki so bili dielektronski dogodki izmerjeni na detektorju CMS na LHC-ju. Pokazal sem, da so posamezni predznaki nabojev elektronov porazdeljeni naključno. Iz ostalih podatkov (gibalnih količin) pa sem generiral lognormalno porazdelitev ter pokazal, da je tudi tako dobljeno zaporedje števil naključno.

Iz fizikalnih podatkov sem na koncu prešel na podatke iz družbenih omrežij, kot so objave in komentarji. Izkazalo se je, da časi objav niso enakomerno porazdeljeni, zato sem za generacijo naključnih števil uporabil razlike časov med objavo in komentarjem, ki sem jih potem spremenil v lognormalno porazdelitev. Najtežja je bila generacija naključnih števil iz samega besedila. Očitno je, da tekst komentarjev in objav ni naključen. Predlagani algoritem vsebuje pretvorbo v UTF-8 format ter obravnavo samo zadnjih nekaj bitov in njihovo mešanje, ki mu sledi znan postopek pretvorbe v lognormalno porazdelitev ter obravnavo logaritma necelega dela. Postopek nam da, pri dobri izberi parametrov, sprejemljivo naključna števila glede na statistične teste.

Literatura

[1] xkcd. URL: https://xkcd.com/221/.

[2] Simon Širca. *Verjetnost v fiziki*. Ljubljana: DMFA, 2016.

[3] James E Gentle. *Random number generation and Monte Carlo methods*. Springer, 2003.

[4] Archlinux wiki. URL: https://wiki.archlinux.org/title/Random_number_generation.

[5] Victor Romero-Rochin. *A derivation of Benford's Law … and a vindication of Newcomb*. 2009. arXiv: 0909.3822 [math.PR].

[6] Simon Newcomb. "Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers". In: *American Journal of Mathematics* 4.1 (1881), pp. 39–40. ISSN: 00029327, 10806377. URL: http://www.jstor.org/stable/2369148.

[7] SciPy. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/constants.html.

[8] Paul D Scott and Maria Fasli. "Benford's law: An empirical investigation and a novel explanation". In: *Unpublished manuscript* (2001). URL: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1.9527&rep=rep1&type=pdf.

[9] Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. USA: California Technical Publishing, 1997. ISBN: 0966017633.

[10] Arno Berger and Theodore P Hill. "A basic theory of Benford's Law". In: *Probability Surveys* 8 (2011), pp. 1–126.

[11] Wikipedia contributors. *Log-normal distribution — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 4-August-2021]. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Log-normal_distribution&oldid=1034516769.

[12] Lawrence E. Bassham et al. *SP 800-22 Rev. 1a. A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*. Tech. rep. Gaithersburg, MD, USA, 2010. URL: https://csrc.nist.gov/publications/detail/sp/800-22/rev-1a/final.

[13] Wikipedia contributors. *Single-precision floating-point format — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 11-August-2021]. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Single-precision_floating-point_format&oldid=1036922912.

[14] Thomas McCauley. *Events with two electrons from 2010*. CERN Open Data Portal. 2014. DOI: 10.7483/OPENDATA.CMS.PCSW.AHVG.

[15] Jason Baumgartner et al. *The Pushshift Reddit Dataset*. 2020. arXiv: 2001.08435 [cs.SI].

[16] Wikipedia contributors. *UTF-8 — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 15-August-2021]. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=UTF-8&oldid=1037871107.