



K5: Betaspektroskopi och Fermiteori för betasönderfall av ^{137}Cs

Jonatan Haraldsson jonhara@chalmers.se
Oscar Lindberg oscarlin@chalmers.se

Program: Teknisk fysik.

Kurs: Subatomär fysik, FUF050.

April, 2023

1 Inledning

Betasönderfall är en central sönderfallsprocess inom kärnfysik. Under betasönderfall avges en betapartikel, det vill säga en elektron eller positron, och en tillhörande neutrino eller antineutrino. I atomkärnan omvandlas samtidigt en neutron eller proton till motsatt kärnpartikel, så att det totala masstalet förblir konstant. Betasönderfall (β -sönderfall) förekommer i tre olika former: β^- -sönderfall (β -partikeln är en elektron), β^+ -sönderfall (β -partikeln är en positron) och elektroninfångning. Dessa sönderfallsprocesser har studerats intensivt sedan Ernest Rutherford's banbrytande arbete kring sekelskiftet 1900. Rutherford's experimentella undersökningar lade grunden för utvecklingen av betaspektroskopi.

Betaspektroskopi är en experimentell metod för att studera energifördelningen av de emitterade elektronerna eller positronerna vid betasönderfall. Genom energispektra kan energinivåer, övergångar inom atomkärnan och andra egenskaper studeras. Denna teknik har varit avgörande för att validera Fermiteorin för betasönderfall och för att testa dess förutsägelser med experimentella data. Fermiteorin är en kvantmekanisk teori som bygger på Fermis gyllene regel, och som beskriver viktiga egenskaper för betasönderfall och relaterade processer.

I denna rapport presenteras en undersökning av betasönderfallsspektrat för ^{137}Cs . Genom att tillämpa betaspektroskopi på ^{137}Cs , studeras viktiga egenskaper hos isotopens betasönderfallsprocess.

2 Teori

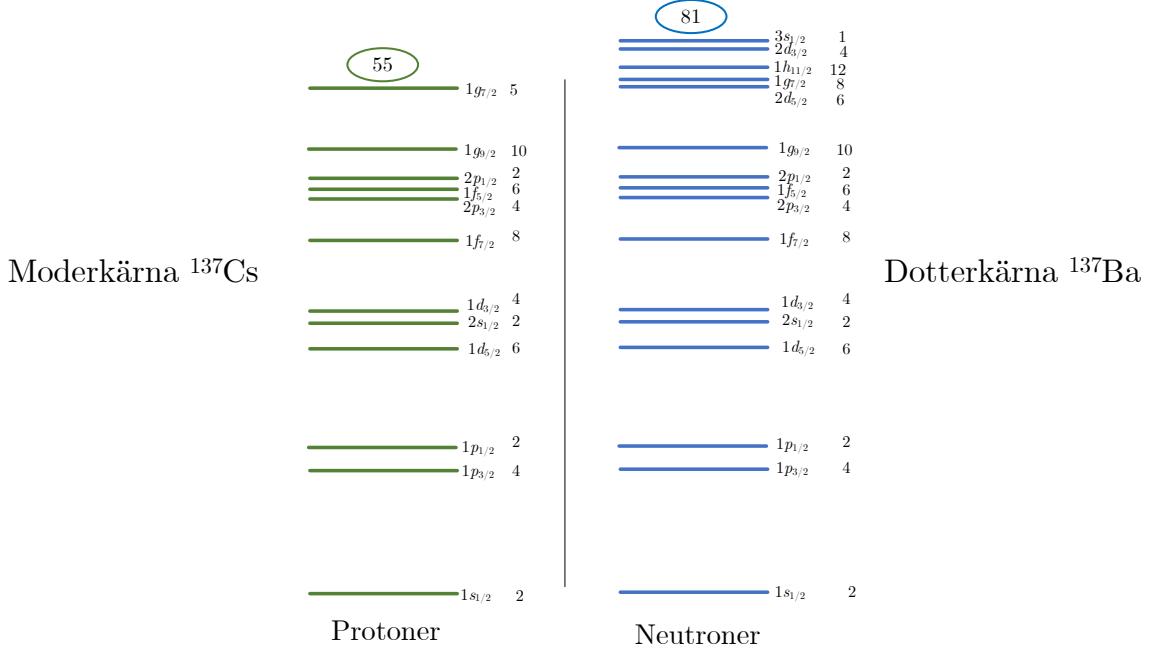
Isotopen ^{137}Cs är instabil kan sönderfalla genom β^- -sönderfall enligt



Betasönderfall sker via den svaga växelverkan och det totala masstalet $A = 137$ bevaras. Energin som frigörs i vid betasönderfall betecknas Q -värdet och för β^- ges det av $Q = \Delta Mc^2$, där $\Delta M = M(^{137}\text{Cs}) - M(^{137}\text{Ba}) = 1,17 \text{ MeV}$ [1, ss. 100 & 112].

Kärnskalmodellen — en modell för att beskriva en kärnas olika energinivåer — kan härledas från Schrödingerekvationen i en potential på formen $V_{\text{central}}(r) + V_{ls}(r)(\vec{L} + \vec{S})$ [2]. LS-termen i potentialen tar hänsyn till ett kärntillstånds spinn- (\vec{S}) och banrörelsemängdsmoment (\vec{L}) och det får konsekvensen att energinivåerna hos kärnan splittras, likt finstruktursplittring inom atomära energinivåer. I figur 1 visas ett kärnskalsdiagram för nukleonerna i moderkärnan ^{137}Cs och dotterkärnan ^{137}Ba [1, s. 346]. I diagramet används notationen $n\ell_j$, där n är energinivån, $\ell = s, p, d, \dots$ dess banrörelsemängdsmoment och $j = \ell \pm s$ dess kopplade spinn-banrörelsemängdsmoment (kärnspinn). Eftersom nukleonerna är fermioner med $s = 1/2$ kommer $j = \ell \pm 1/2$. Vidare kan tillståndets paritet π bestämmas från ℓ enligt $\pi = (-1)^\ell$ och ett tillstånd kan således beskrivas med dess spinn-paritet j^π . En kärnas spinn-paritet kan bestämmas från den oparade nukleonen med högst energi. Exempelvis följer det från figur 1 att Cs har $j^\pi = (7/2)^+$ och Ba $j^\pi = (1/2)^+$.

Vid betasönderfall gäller urvalsregler, vilka grundas på bevarande av rörelsemängdsmoment. De olika övergångarna kan kategoriseras i Gamow-Teller (GT) eller Fermi beroende på om betapartiklarna ($e^- + \bar{\nu}_e$) har parallella eller anti-parallella spin — $S_\beta = s_{e^-} + s_{\bar{\nu}_e} = 1$ respektive $S_\beta = \pm s_{e^-} \mp s_{\bar{\nu}_e} = 0$. Ytterligare en kategorisering görs genom att benämna



Figur 1: Kärnskalsdiagram för ^{137}Cs och för ^{137}Ba , där energinivåerna betecknats på formen $n\ell_j$. Notera att endast den nukleontyp med udda antal har ritats ut i diagrammet, eftersom det bara är dess konfiguration som bidrar till kärnans totala spinn-paritet.

övergångarna som N :te ordningens förbjudna övergång, där N är förändring i banrörelse-mängdsmoment. Tabell 1 illustrerar kategoriseringen av betaövergångarna.

Tabell 1: Kategorisering efter förbjuden ordning samt om övergången är av Fermi- eller GT-karakter. Δj och $\Delta\pi$ avser förändring i kärnspinn respektive partitet.

| Kategori | Δj | $\Delta\pi$ |
|---|------------|-------------|
| Tillåtna ($S_\beta = 0,1$) | 0, 1 | 0 |
| Första förbjudna, Fermi ($S_\beta = 0$) | 0, 1 | 1 |
| Första förbjudna, GT ($S_\beta = 1$) | 0, 1, 2 | 1 |
| Andra förbjudna, Fermi ($S_\beta = 0$) | 2 | 0 |
| Andra förbjudna, GT ($S_\beta = 1$) | 2, 3 | 0 |

Vid β -sönderfall kommer den frigjorda energin Q fördelas olika mellan de två avgivna partiklarna och detta ger upphov till ett energispektrum. En grafisk metod för att studera besönderfallsspektrum är Kurieplotsanalys. I en Kurieplot är kvantiteten $\sqrt{N(T_e)/(F(Z,T_e)\sqrt{T_e})}$, där $F(Z,T_e)$ är Fermifunktionen, en funktion av elektronenergin T_e (allmänt betapartikelenergin). I enlighet med Fermiteorin ger tillåtna och vissa förbjudna övergångar en rak linje i grafen. Skärningar med energi-axeln motsvarar den maximala energi som kan tilldelas elektronen.

Den totala sannolikheten för ett β -sönderfall ges av sönderfallskonstanten λ och enligt Fermiteorin kan λ beräknas genom

$$\lambda = f(Z,Q) = \frac{\sqrt{2}}{m_e^{7/2} c^7} \int_0^Q \sqrt{T_e} (Q - T_e)^2 F(Z,T_e) dT_e, \quad (1)$$

där m_e elektronens massa och c ljushastigheten. $f(Z,Q)$ i ekvation 1 har givits namnet Fermi-integral. Sönderfallskonstanten λ_i för sönderfallsgren i kan även relateras till sönderfallsgrenens halveringstid enligt

$$\lambda_i = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}(i)}.$$

Ytterligare ett fenomen som kan observeras i ett betaspektrum är toppar från konversionselektroner i atomens inre skal. Fenomenet uppstår då den exciterade kärnan avger en gammafoton, vilken absorberas av en elektron i atomens inre skal; vanligen i K - eller L -skalet. Energin hos den emitterade elektronen i skal n ges av

$$E_n = E_\gamma - B_n, \quad (2)$$

där B_n är elektronens bindningsenergi.

3 Metod

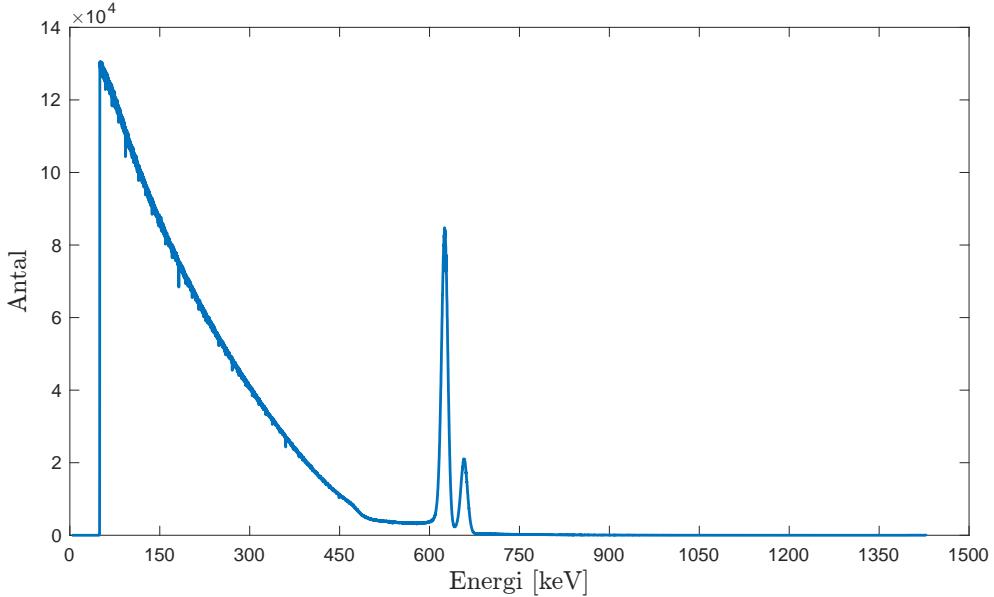
Inledningsvis bestämdes ett förhållande mellan uppställningens kanaler och elektronenergin för ^{207}Bi , vars betaspektrum var känt på förhand. Kalibreringen användes därefter för att bestämma energispektrat för ^{137}Cs . Från de energikalibrerade data för ^{137}Cs konstruerades en Kurieplot med den givna funktionen `kurieplot` i MATLAB. Ytterligare en given funktion, `kuriedata`, användes sedan för att göra två linjära anpassningar i intervall där kurieplotten uppvisade ett tämligen linjärt beteende. För att erhålla de två Q -värdena för β -sönderfallen beräknades skärningen med energi-axeln (x -axeln) för de två anpassningarna. Energin för konversionselektrontoppar beräknades enligt ekvation 2, med $E_{bK} = 35,985$ keV och $E_{bL} = 5,714$ keV [1, s.80]. I bilaga B återfinns källkoden för analysen som gjorts.

Från de två erhållna Q -värdena beräknades sedan $\log_{10}(ft_{1/2})$ genom att summa $\log_{10}(f(Z,Q))$ och $\log_{10}(t_{1/2})$, där $f(Z,Q)$ visas i ekvation 1 och $t_{1/2}$ halveringstiden. $\log_{10}(ft_{1/2})$ -värdet användes sedan för att kategoriera betasönderfallet från ^{137}Cs med hjälp av tabellen i bilaga A. I den processen valdes de typer av övergångar där flest observationer gjorts. En

4 Resultat och diskussion

Det uppmätta betaspektrat av ^{137}Cs presenteras i figur 2, och visar två konversionselektrontopparna vid 625 keV och 657 keV. I figur 3 visas en Kurieplot för sönderfallet av ^{137}Cs tillsammans med två linjära anpassningar i utvalda intervall. Från punkterna där linjerna skär x -axeln erhölls $Q_1 = 521$ keV och $Q_2 = 1,025$ MeV för β -sönderfallets två Q -värden.

Resultatet för halveringstider och $\log_{10}(ft_{1/2})$ -värdet presenteras i tabell 2. Summan av sönderfallskonstanterna blir $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,044\text{ år}^{-1}$. Vid jämförelse med tabellen för övergångar i bilaga A gavs att högenergi-grenen svarar mot en andra ordningens förbjuden övergång, där övergången är en mix av Fermi och GT (icke-unik). Alltså är $\Delta j = 2$ och π oförändrad. En möjlig slutgiltig spinn-paritet för ^{137}Ba är således $(3/2)^+$, och en rimlig energinivå enligt skalmodellen $2d_{3/2}$. Lågenergi-grenen svarar mot en första ordningens icke-unik förbjuden övergång, vilket ger $\Delta j = 0,1$ och $\Delta\pi = 1$. Några möjliga spinn-paritet för $^{137}\text{Ba}^*$ är därmed $(7/2)^-, (9/2)^-$ och $(5/2)^-$. Efter jämförelse med befintliga energinivå-diagram verkar energinivåerna $1h_{9/2}$ eller $2f_{7/2}$ vara mest troliga för $^{137}\text{Ba}^*$, då dessa nivåer



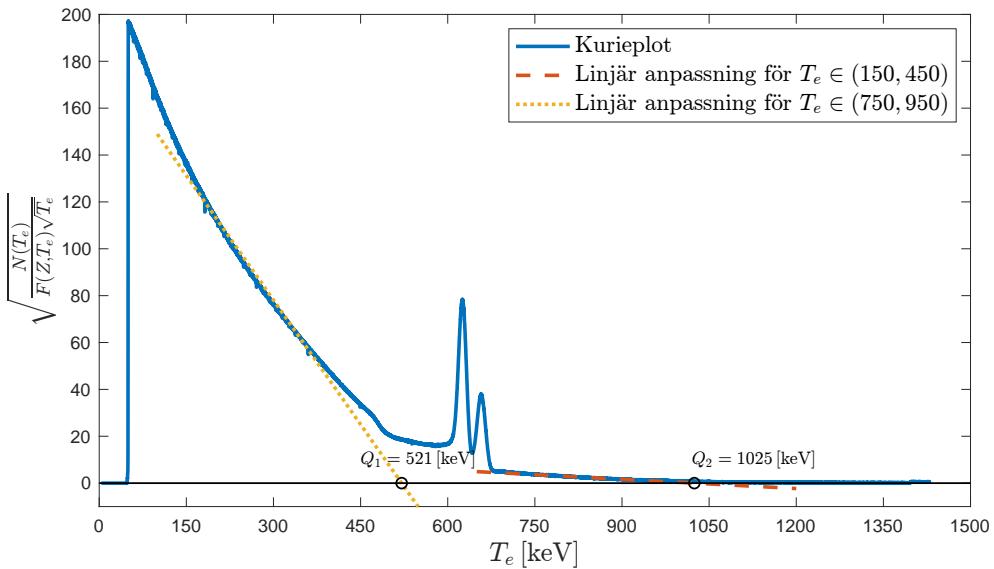
Figur 2: I figuren visas det erhållna betaspektrat för ^{137}Cs , med antal detektioner som funktion av elektronenergin. Vid 625 keV och 657 keV observeras två toppar till följd av konversionselektroner.

ligger lite högre än grundtillståndets nivå [1, s. 346]. Ett alternativ är att lågenergi-grenen är en första ordningens förbjuden unik övergång ($\Delta j = 2$). Det skulle kunna ge en spinn-partitet på $(11/2)^-$, något som bekräftats av [3]. Ett möjligt sönderfallsschema presenteras i figur 4.

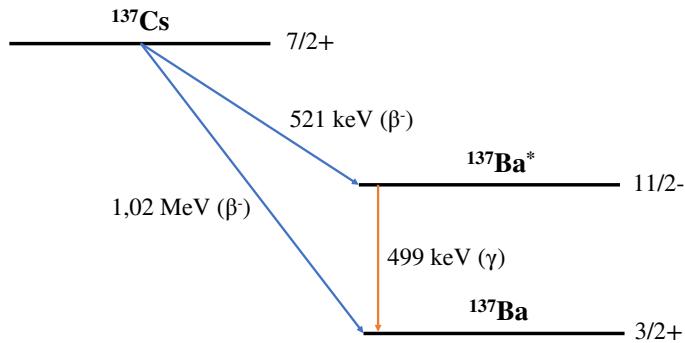
Från konversionselektrontopparna i figur 2 beräknades energin för den virtuella fotonen, E_γ i ekvation 2. Det gav ett medelvärdet på $E_\gamma = 661,8 \text{ keV}$, vilket ligger nära det tabellerade värdet $661,7 \text{ keV}$ [1, s.112] för övergången $^{137}\text{Ba}^* \rightarrow {}^{137}\text{Ba} + \gamma$. Beräknas övergångsenergin mellan $^{137}\text{Ba}^*$ och ${}^{137}\text{Ba}$ genom $Q_2 - Q_1$ erhålls $1,02 \text{ MeV} - 521 \text{ keV} = 499 \text{ keV} \neq E_\gamma$. Sammantaget ger resultatet en indikation på att energikalibreringen är tillförlitlig, men att metoden för att ta fram Q inte ger samma precision. Ett inexakt Q -värde leder vidare till en begränsad tillförlitlighet i framtagandet av spinn-paritet med hjälp av $\log_{10}(ft_{1/2}(i))$. Ytterligare en begränsning i analysen av spinn-paritet är att olika källor har något olika nukleonskalsdiagram.

Tabell 2: Beräkning av $\log_{10}(ft_{1/2}(i))$ i låg- och hög-energi-grenen för sönderfallet av ^{137}Cs .

| Kvantitet | Lågenergi-gren | Högenergi-gren |
|------------------------------|--------------------|--------------------|
| $\lambda_i [\text{år}^{-1}]$ | 0,021 | 0,0023 |
| $t_{1/2}(i) [\text{år}]$ | 33 | 300 |
| $t_{1/2}(i) [\text{s}]$ | $1,05 \times 10^9$ | $9,46 \times 10^9$ |
| $\log_{10} t_{1/2}(i)$ | 9,022 | 9,976 |
| $\log_{10} f(Z, Q_i)$ | 0,197 | 1,247 |
| $\log_{10}(ft_{1/2}(i))$ | 9,2 | 11,2 |



Figur 3: I figuren visas en Kurieplot för sönderfallet av ^{137}Cs , med kvantiteten $\sqrt{N(T_e)/(F(Z,T_e)\sqrt{T_e})}$ som funktion av elektronenergin. Linjära anpassningar i intervallen $T_e \in (150, 450)$ (prickad gul linje) och $T_e \in (750, 950)$ (streckad orange linje) ger skärningspunkter med x -axeln som motsvarar sönderfallets två Q -värden.



Figur 4: Sönderfallsschema för ^{137}Cs med angivna dotterkärnor, energier och spinn-paritet.

Referenser

- [1] C. Nordling och J. Österman, "Physics Handbook for Science and Engineering", i 9. utg. Lund, Sverige: Studentlitteratur, 2021, ISBN: 9780198520115.
- [2] B. R. Martin och G. Shaw, "Nuclear and Particle Physics, an Introduction", i 3. utg. Hoboken, NJ USA: Wiley, 2019, kap. Models and Theories of Nuclear Physics, s. 313, ISBN: 978-1-119-34461-2.
- [3] I. Bikit, I. Aničin, J. Slivka, M. Krmar, J. Puzović och L. Čonkić, "Population of the 283 keV level of ^{137}Ba by the β decay of ^{137}Cs ", *Phys. Rev. C*, årg. 54, s. 3270–3272, 6 dec. 1996. DOI: [10.1103/PhysRevC.54.3270](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.54.3270). [Online]. Tillgänglig: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.54.3270>.

Bilagor

A Tabell för övergångar kopplade till $\log_{10}(ft_{1/2})$ -värde

| $\log_{10}(ft)$ | Super-allowed | Allowed | First-forbidden | | Second-forbidden | |
|-----------------|---------------|---------|------------------------|---------------------|------------------------|---------------------|
| | | | Nonunique ^a | Unique ^b | Nonunique ^a | Unique ^b |
| 2.8-3.2 | 6 | | | | | |
| 3.3-3.7 | 25 | 1 | | | | |
| 3.8-4.2 | 2 | 8 | | | | |
| 4.3-4.7 | | 57 | | | | |
| 4.8-5.2 | | 120 | 8 | | | |
| 5.3-5.7 | | 99 | 5 | | | |
| 5.8-6.2 | | 74 | 24 | | | |
| 6.3-6.7 | | 47 | 57 | | | |
| 6.8-7.2 | | 25 | 40 | 1 | | |
| 7.3-7.7 | | 20 | 57 | 1 | | |
| 7.8-8.2 | | 9 | 38 | 28 | | |
| 8.3-8.7 | | 5 | 25 | 35 | | |
| 8.8-9.2 | 9 | | 21 | 10 | | |
| 9.3-9.7 | | | 3 | 7 | 1 | |
| 9.8-10.2 | | | 5 | 2 | | |
| 10.3-10.7 | | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 10.8-11.2 | | | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 11.3-11.7 | | | 1 | | 2 | 1 |
| 11.8-12.2 | | | 5 | | 4 | 1 |
| 12.3-12.7 | | | 2 | | 3 | 2 |
| 12.8-13.2 | | | | | 3 | |
| > 13.3 | | | | 1 | 3 | |
| Total | 33 | 475 | 295 | 87 | 20 | 6 |

^aMixed Fermi and Gamow-Teller

^bPure Gamow-Teller

Figur 5: Med grön och blå har de vanligaste övergångarna för respektive $\log_{10}(ft_{1/2})$ -värde markerats.

B Källkod i MATLAB

I denna bilaga presenteras källkoden, vilken användes under laborationen.

B.1 Källkod för huvudskriptet i MATLAB

```

1  clc;clf;clear;hold off
2  E1 = 482 ;
3  E2 = 976 ;
4  E4 = 1048;
5
6  datacs = load("137cs_117h.txt");
7  data = load("207bi_46.5h.txt");
8
9  rangemin = 2720;
10 rangemax = 2760;
11
12 [peak1,fit1,fitrange]=fitpeak(rangemin,rangemax,data(:,1),data(:,2));
13
14 rangemin = 5550;
15 rangemax = 5600;
16
17 [peak2,fit2,fitrange]=fitpeak(rangemin,rangemax,data(:,1),data(:,2));
18

```

```

19 rangemin = 5980;
20 rangemax = 6020;
21 [peak4,fit4,fitrange]=fitpeak(rangemin,rangemax,data(:,1),data(:,2));
22
23
24 x = polyfit([peak1 peak2 peak4],[E1 E2 E4],1);
25
26 ch = data(:,1);
27 ch1 = datacs(:,1);
28 e=x(1)*ch+x(2);
29 figure(2)
30 hold on
31 plot(e,data(:,2));
32 title('Energy-calibrated data')
33 xlabel('Energy [keV]')
34 ylabel('Counts')
35 plot(E1,694,'o')

36
37
38 figure(3)
39 Ecs = x(1) * ch1 + x(2);

40 plot(Ecs,dataacs(:,2),'LineWidth',1.5);
41 xlabel('Energi [keV]','Interpreter','latex','FontSize',14)
42 ylabel('Antal','Interpreter','latex','FontSize',14)
43 xticks(linspace(0,1500,11))

44 %%
45 Z = 56;
46 clf;
47 [kuriedata] = kurieplot(Ecs,datacs,Z);

48 range1 = 150:400;
49 [slope1,offset1] = kuriefit(Ecs,kuriedata,range1);

50
51 Q1 = -offset1/slope1;

52 range2 = 750:950;
53 [slope2,offset2] = kuriefit(Ecs,kuriedata,range2);

54 Q2 = -offset2/slope2 * 0.001;

55
56 figure(1)
57 hold on
58 x2 = linspace(650,1200);
59 plot(x2,slope2 * x2 + offset2,'LineWidth',2,'LineStyle','--')
60 txt1 = {'$Q_1 = 521\,$[keV]'};txt2 = {'$Q_2 = 1025\,$[keV]'};
61 x1 = linspace(100,550);
62 plot(x1,slope1 * x1 + offset1,'LineWidth',2,'LineStyle',':')
63 plot(Q1,0,'o','Color','black','LineWidth',1)
64 plot(1000*Q2,0,'o','Color','black','LineWidth',1)
65 text(450,10,txt1,'Interpreter','latex')
66 text(1020,10,txt2,'Interpreter','latex')

67 x = linspace(0,1500);
68 y = zeros(size(x));
69 plot(x,y,'black','LineWidth',1)
70 ylim([-10 200])

```

```

77 legend('Kurieplot','Linj$\ddot{\mathrm{a}}$r anpassning f$\ddot{\mathrm{o}}$r
    $\mathrm{T}_e\in(150,450)$','Linj$\ddot{\mathrm{a}}$r anpassning f$\ddot{\mathrm{o}}$r
    $\mathrm{T}_e\in(750,950)$','Interpreter','latex','FontSize',13)
78
79 disp(Q1);disp('keV')
80 disp(Q2);disp('MeV')
81
82 Bk = 37441;
83
84
85 %%
86 logf1 = log10f(Z,Q1);
87 logf2 = log10f(Z,Q2*1000);
88
89 lam = log(2)/30;
90 lam1 = 0.9*lam;lam2 = 0.1*lam;
91 thalf1 = log(2)/lam1 * 3600*24*365;
92 thalf2 = log(2)/lam2 *3600*24*365;
93
94 lgt1 = log10(thalf1);
95 lgt2 = log10(thalf2);
96
97 logft1 = lgt1 + logf1;
98 logft2 = lgt2 + logf2;
99

```

B.2 Källkod för kurieplot och kuriedata i MATLAB

```

1 function [kuriedata]=kurieplot(Te,data,Z)
2 % INPUT:
3 % Te = Electron kinetic energy vector (in keV) from calibration.
4 % data = Raw data in 2-column matrix form [ch,counts]
5 % Z = daughter nucleus proton number (positive for beta-minus decay)
6
7 % OUTPUT:
8 % kuriedata = data for Kurie plot (vector, same length as Te)
9 % Physical constants
10 mc2=511;
11 alpha=1/137;
12
13 % Number of counts
14 Ne=data(:,2)';
15 Te=reshape(Te,size(Ne));
16
17 % Dimensionless (scaled by electron rest mass energy) electron
18 % total energy.
19 epsi = 1 + Te/mc2;
20 % Dimensionless (scaled by m*c) electron momentum
21 p = sqrt(epsi.^2-1);
22
23 % Fermi function (Primakoff-Rosen approx)
24 FPR = 2*pi*alpha*Z / (1-exp(-2*pi*alpha*Z));
25 F0=FPR*epsi./p;
26
27 % Output
28 kuriedata=sqrt(Ne./(F0.*p.*epsi));
29
30

```

```

31 % Plot
32 clf
33 figure(1)
34 plot(Te,kuriedata,'LineWidth',2);
35
36 %<-- ylabel('$\sqrt{\frac{N(T_e)}{F(Z,T_e)\sqrt{T_e}}}$','Interpreter','latex','FontSize',15);
37 xlabel('$T_e$ [keV]','Interpreter','latex','FontSize',15);
38 xticks(linspace(0,1500,11))
39 %title('Kurieplot','Interpreter','latex','FontSize',15)
40
41 %% -----
42 function [slope,offset]=kuriefit(Te,kuriedata,range)
43 % INPUT:
44 % Te = electron kinetic energy vector (in keV) from calibration.
45 % kuriedata = from kurieplot function
46 % range = energy range for fit
47
48 % OUTPUT:
49 % slope = slope of linear fit to Kurie plot
50 % offset = offset of linear fit to Kurie plot
51 kr=interp1(Te,kuriedata,range);
52 figure
53 plot(range,kr)
54
55 % Linear fit of kurie data and extract the zero crossing
56 lr = polyfit(range,kr,1);
57 %disp(['slope = ', num2str(lr(1))])
58 %disp(['offset = ', num2str(lr(2))])
59
60 slope=lr(1);
61 offset=lr(2);
62
63 Q=-lr(2)/lr(1);
64
65 % plot
66 hold on;
67 plot(range,lr(1)*range+lr(2),'--k')
68
69 %--% Extract Fermi integral
70 %--mc2=511;
71 %--alpha=1/137;
72 %--
73 %--e0=Q/mc2+1;
74 %--% Dimensionless (scaled by electron rest mass energy) electron
75 %--% total energy.
76 %--delta=0.000001;
77 %--epsi = 1+delta:0.01:e0;
78 %--% Dimensionless (scaled by m*c) electron momentum
79 %--p = sqrt(epsi.^2-1);
80 %--
81 %--% Fermi function (Primakoff-Rosen approx)
82 %--FPR = 2*pi*alpha*Z/(1-exp(-2*pi*alpha*Z));
83 %--F0=FPR*epsi./p;
84 %--
85 %--% Fermi integrand
86 %--Fint = F0.*epsi.*p.*(e0-epsi).^2;
87 %--% fermi integral evaluated with trapetzoid rule
88 %--f = trapz(epsi,Fint);

```

```
89      %--  
90      %%--lf = log10(f);  
91  
92  
93
```