

# Experimentellt bestämmande av tyngdaccelerationen $g$ samt gravitationskonstanten $G$

Jonatan Haraldsson    jonhara  
Oscar Lindberg        oscarlin

Program: Teknisk Fysik.

Kurs: Experimentell fysik 1 - mätteknik, TIF083, del A.

## Sammandrag

Med syftet att bestämma tyngdaccelerationen  $g$  och den universella gravitationskonstan-  
ten  $G$  har experiment med Bessels reversionspendel respektive Cavendishs torsionsvåg  
genomförts. Bessels pendel är en volymsymmetrisk version av Katers pendel som varken  
kräver kännedom om pendelns exakta massfördelning eller luftens påverkan på pendel-  
rörelsen. Cavendishs torsionsvåg utnyttjar principen om momentjämvikts, där momentet  
från gravitation mellan två blykuler balanseras av momentet från en vajer. Resultaten för  
experimenten blev  $g = 9,751 \pm 0,068 \text{ m s}^{-2}$  och  $G = (6,854 \pm 0,729) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ,  
vilket relativt väl stämmer överens med tidigare mätningar. De mest betydande felkällor-  
na skulle sannolikt kunna minimeras genom att använda mer välordnade uppställningar  
och utrustning med högre noggrannhet.

## Abstract

Experiments with Bessel's reversion pendulum and Cavendish's torsion balance have been conducted with the aim to determine the gravitational acceleration  $g$  and the gravitational constant  $G$ . Bessel's pendulum is a volume-symmetric version of Kater's pendulum that does not require attention to the exact mass distribution of the pendulum or the effects of air on the pendulum movement. Cavendish's torsion balance uses the principle of torque equilibrium, where the torque from gravity between two lead balls is balanced by the torque from a wire. The results for the experiments are  $g = 9,751 \pm 0,068 \text{ m s}^{-2}$  and  $G = (6,854 \pm 0,729) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ , which is consistent with previous findings. The most significant sources of errors could probably be minimized by using more well-arranged setups and equipment with higher accuracy.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teori och försöksuppställning</b>	<b>1</b>
2.1	Bessels pendel . . . . .	1
2.2	Cavendishs torsionsvåg . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Metod</b>	<b>4</b>
3.1	Bessels pendel . . . . .	4
3.2	Cavendishs torsionsvåg . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Resultat</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Slutsats</b>	<b>8</b>
<b>A</b>	<b>Felfortplantning</b>	<b>9</b>
A.1	Felberäkning och mätosäkerhet . . . . .	9
A.2	Python-kod för felfortplantning . . . . .	9
<b>B</b>	<b>Python-kod</b>	<b>11</b>
B.1	Beräkning av periodtider för Bessels pendel . . . . .	11
B.2	Visualisering av data från Bessels pendel . . . . .	12
B.3	Visualisering av data från Cavendishs torsionsvåg . . . . .	13
<b>C</b>	<b>Laborationslogg</b>	<b>14</b>

# 1 Introduktion

Gravitation är en av universums fyra fundamentala krafter. Enligt Newtons gravitationslag

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{12},$$

attraherar två kroppar (1 och 2) varandra ömsesidigt med en kraft  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  som är direkt proportionell mot kropparnas massor  $m_1$  och  $m_2$  och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet  $|\mathbf{r}_{12}|$  mellan dem. Konstanten  $G \approx 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  [1] är en universalkonstant som kallas den allmänna gravitationskonstanten. På jorden märks gravitation genom tyngdkraften. Den acceleration som orsakas av gravitation och centrifugalkrafter från jordens rotation kallas tyngdacceleration,  $g$ , och den är direkt proportionell mot tyngdkraften  $F$  enligt  $F = mg$ .

Ett sedan länge mycket viktigt verktyg för mätning av gravitation är pendeln, eftersom pendelns periodtid bland annat beror på tyngdaccelerationen. Förutom tyngdaccelerationen beror periodtiden även på tröghetsmomentet, masscentrums läge samt pendelns längd och massa. Henry Kater konstruerade 1817 en reversibel pendel för mätning av tyngdaccelerationen som inte kräver någon kunskap om pendelns massfördelning. Katers pendel vidareutvecklades 1826 av Friedrich Bessel, som visade att luftmotståndet och luftens lyftkraft kan lämnas utan beaktande om Katers pendel är volymsymmetrisk [2].

Mätningar av den allmänna gravitationskonstanten tog fart redan vid slutet av 1700-talet, då Henry Cavendish konstruerade en torsionsvåg för att bestämma jordens massa och medeldensitet. Cavendish lät under sitt välkända experiment momentet från gravitation mellan två blykulor balanseras av momentet från en vajer. Genom experimentet fick Cavendish indirekt ut gravitationskonstantens värde med hög noggrannhet [3].

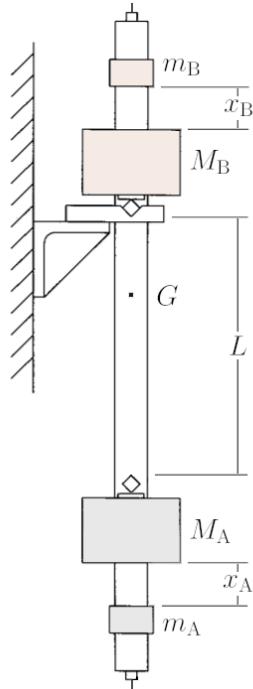
I denna rapport redogörs för experiment med Bessels pendel respektive Cavendishs torsionsvåg med syftet att bestämma tyngdaccelerationen  $g$ , på våning 7 i fysikhuset på Chalmers campus Johanneberg, samt den universella gravitationskonstanten  $G$ .

# 2 Teori och försöksuppställning

I följande avsnitt presenteras Bessels pendel och Cavendishs torsionsvåg samt den teoretiska bakgrundsen till respektive experiment. Relevanta parametrar definieras och slutligen beskrivs de uttryck som ger  $g$  respektive  $G$ .

## 2.1 Bessels pendel

En typisk uppställning av Bessels pendel visas schematiskt i figur 1. Pendeln består av en rak stålstång med upphängningspunkter i form av små järnblock fästa på vardera sida om masscentrum. Näst intill upphängningspunktarna sitter de två massorna  $M_A$  och  $M_B$  av aluminium (A) respektive mässing (B). På stångens ändar finns även två kalibreringsmassor,  $m_A$  och  $m_B$ , på de justerbara avstånden  $x_A$  respektive  $x_B$ . Vardera typ av massa har lika volym men olika densitet för att uppfylla Bessels krav på volymsymmetri och massasymmetri. Eftersom Bessels pendel är reversibel finns två fall att betrakta: fallet då A är nedåt och B uppåt, samt fallet då B är uppåt och A nedåt.



Figur 1: Bessels pendel, schematisk bild av uppställningen från sidan. På pendelns ändar syns två tunna ståltrådar som satts fast i mätningssyfte (se avsnitt 2.1). (Bilden är en modifierad version av originalet från Candela et al. [2].)

Periodtiden för en fysikalisk pendel ges för små utslagsvinklar av

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mag}}, \quad (1)$$

där  $I$  är tröghetsmomentet med avseende på rotationsaxeln,  $M$  är pendelns totala massa och  $a$  är avståndet från en axel genom masscentrum till rotationsaxeln. Enligt parallellaxelteoremet (Steiners sats) kan en kropps tröghetsmoment med avseende på masscentrum,  $I_G$ , förflyttas till en parallell rotationsaxel genom sambandet  $I = I_G + Ma^2$ . Om  $i = A, B$  betecknar något av de två olika fallen A (aluminium nedåt) och B (mässing nedåt), gäller alltså att  $I_i = I_G + Ma_i^2$ . Periodtiden kan då skrivas

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + Ma_i^2}{Mag}}. \quad (2)$$

När periodtiden för de två fallen är lika, det vill säga när  $T_A = T_B$ , måste  $I_G = Ma_A a_B$  givet att  $a_A \neq a_B$ . Insättning i något fall av ekvation 2 ger då efter omskrivning

$$g = L \left( \frac{2\pi}{T_0} \right)^2, \quad (3)$$

där  $L = a_A + a_B$  är avståndet mellan de två rotationsaxlarna och  $T_0 = T_A = T_B$ .

## 2.2 Cavendishs torsionsvåg

I figur 2 och 3 presenteras en uppställning av Cavendishs torsionsvåg. Detta mycket känt mekaniska instrument består av en stång med längden  $\ell$  upphängd i en torsionsvajer.

I vardera ände av stången är en liten blyvikts med massan  $m$  fäst. I uppställningen ingår även två större lösa blyvikter med massorna  $M$ . På en mätskala placerad på avståndet  $R$  från torsionsvågens centrum kan reflektionen från en laserkälla som lyser mitt på torsionsvågen synas. Sträckorna  $S_1$  och  $S_2$  i figur 2 avser de avvikelse i laserljusets position som erhålls genom att placera de stora massorna i position I respektive position II. Dessa sträckor är relaterade till vinkelns  $\theta$ , som är avböjningsvinkel från torsionsvågens jämviktsläge ( $\theta = 0$  vid jämvikt då massorna  $M$  inte är närvarande). Givet att krökningen på skärmen där laserstrålen träffar har radien  $R$  gäller det att  $b = 4\theta R$ , där  $b = |S_2 - S_1|$ .

Enligt Hookes lag är vridmomentet från en torsionsvåjer

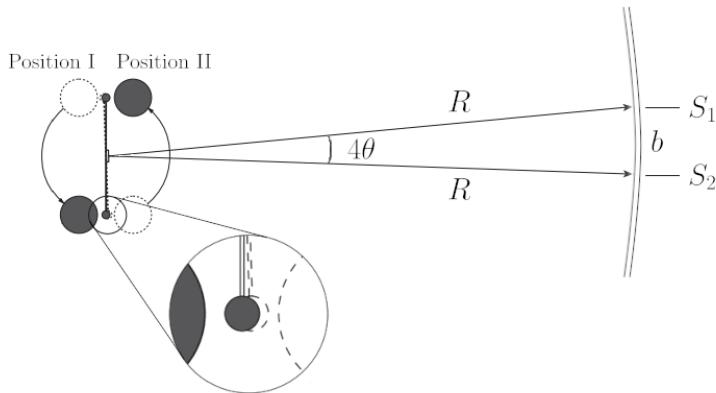
$$\hat{\tau}_{\text{vajer}} = k\theta = k \frac{b}{4R},$$

där  $k$  är torsionskoefficienten med enheten N m. Torsionskoefficienten  $k$  kan för små vinkelutslag beräknas enligt  $T = 2\pi\sqrt{I/k} \Rightarrow k = 4\pi^2 I/T^2$ , där  $I = 2m(\ell^2/4 + 2r^2/5)$  är det approximativa tröghetsmomentet kring stångens rotationsaxel för de små massorna och  $T$  är periodtiden för den dämpade harmoniska oscillationsrörelsen. Det motriktade vridmomentet i uppställningen kommer från Newtons gravitationslag och kan beräknas enligt

$$\hat{\tau}_{\text{grav}} = F\ell = \ell G_0 \frac{Mm}{d^2}.$$

Vid jämviktsläget är  $\hat{\tau}_{\text{vajer}} = \hat{\tau}_{\text{grav}}$ , vilket innebär att  $G_0$  kan lösas ut. Insättning av uttrycket för  $k$  ger då

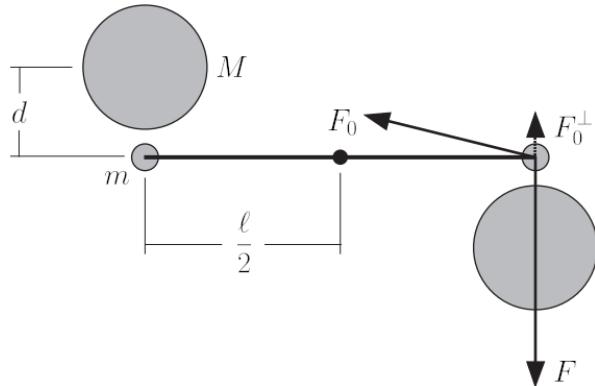
$$G_0 = \frac{\pi^2 (\ell^2 + \frac{1}{10}r^2)}{T^2} \frac{b}{2R} \frac{d^2}{M\ell}.$$



Figur 2: Cavendishs torsionsvåg, schematisk bild av uppställningen ovanifrån. (Bilden är en modifierad version av originalet i PASCO-manualen [4].)

De mindre massorna påverkas båda av en kraft av magnitud  $F_0$  från motstående större massor (se figur 3). Enligt gravitationslagen gäller att  $F_0 = GMm/(d^2 + \ell^2)$ . Komponenten vinkelrät mot stången ges då av  $F_0^\perp = F_0d/(d^2 + \ell^2)^{1/2} = Fd^3/(d^2 + \ell^2)^{3/2}$ , där  $F$  är kraften på en liten massa från en närliggande stor massa. Låt nu  $\beta = d^3/(d^2 + \ell^2)^{3/2}$ . Det totala momentet från gravitationen är då  $\ell(1 - \beta)F$ , vilket innebär att det korrigerade värdet av  $G_0$  är  $G = G_0/(1 - \beta)$ . Härav följer det att

$$G = \frac{\pi^2 (\ell^2 + \frac{1}{10}r^2)}{2MT^2R\ell(1 - \beta)} bd^2. \quad (4)$$



Figur 3: Cavendishs torsionsvåg, schematisk bild av kraftsituationen ovanifrån. Enbart de mest betydelsefulla gravitationskrafter som verkar på en av de små massorna visas. (Bilden är en modifierad version av originalet i PASCO-manualen [4].)

### 3 Metod

I avsnitten nedan presenteras tillvägagångssättet för att bestämma  $g$  och  $G$  med hjälp av Bessels pendel respektive Cavendishs torsionsvåg.

#### 3.1 Bessels pendel

Till att börja med användes pendeln enligt uppställningen i figur 1 ( $M_A$  och  $m_A$  nedåt) med  $x_A = x_B = 0$ . En liten utgångsvinkel  $\varphi_0 \approx 5^\circ$  bestämdes och en stav monterades på den bakomliggande väggen för att säkerställa att  $\varphi_0$  hölls konstant under mätningarna. Pendelarmen bestod av en  $1500\text{ mm} \times \emptyset 12\text{ mm}$  stav av stål. För att mäta avståndet mellan upphängningspunkterna,  $L$ , användes lasermätaren *LEICA Disto d210* som enligt tillverkaren har noggrannheten  $\pm 1\text{ mm}$  [5]. Då avståndet mättes mot en kant genomfördes tre mätningar. Medelvärdet antogs ge  $L$  med en uppskattad felsmarginal på  $\pm 2\text{ mm}$ .

Periodtiden  $T$  mättes genom att låta pendeln bryta en lasersignal riktad mot en ljussensor, *iOLab Wireless Lab System*. Lasern och sensorn placerades vid pendelns jämviktsläge, vardera cirka 3 cm från en 5 cm kort tunn ståltråd som fästs i pendelns båda ändar (se figur 1). Pendeln släpptes från utgångsvinkeln  $\varphi_0$  och lasersignalen mättes under 30 s. Periodtiden beräknades med Python-koden i bilaga B.1 som ett medelvärde av differensen mellan varannat utslag.

Proceduren upprepades 12 gånger med olika värden på  $x_A$ , vilka mättes med skjutmått ( $\pm 0,5\text{ mm}$ ). Samma mätserie upprepades ännu en gång fast med  $M_B$  och  $m_B$  nedåt och med  $x_A = 0$ . Efter att mätningarna hade utförts konstruerades en graf över hur periodtiden  $T$  berodde av avstånden  $x_A$  och  $x_B$ . För att finna en tydlig skärning anpassades mätdatan till andragradskurvor med funktionen *polyfit* från biblioteket NumPy, enligt koden i bilaga B.2. Från grafen erhölls  $T_0$  som skärningen mellan de två kurvorna.

#### 3.2 Cavendishs torsionsvåg

Inledningsvis placerades de stora massorna i position I enligt figur 2. Avståndet  $R$  mellan pendelns spegel och skärmen mättes med en laseravståndsmätare ( $\pm 2\text{ mm}$ ) och anpassades till mätskalans krökning. Instrumentet lämnades sedan ostört över en natt och näst-

kommande morgon hade systemet uppnått jämvikt. Innan mätningarna startades slogs laserkällan på och värdet  $S_1$  avlästes på mätskalan. De stora massorna placerades sedan i position II och omedelbart därefter påbörjades mätningar av laserpunktens position  $S$  och tiden  $t$  under en dryg timme. Under de första fem minuterna gjordes mätningar var 15:e sekund. Därefter följde en halvtimme av mätningar var 30:e sekund och ytterligare en halvtimme av mätningar var 60:e sekund. Efter två timmar avlästes  $S_2$ , det vill säga det asymptotiska värdet för den dämpade harmoniska oscillationsrörelsen.

En graf över laserpunktens position som funktion av tiden konstruerades. Periodtiden  $T$  beräknades som ett medelvärde av de periodtider som fås genom att ta medelvärdet av skillnaden i tid mellan de fyra första topparna respektive skillnaden i tid mellan de fyra första dalarna. Genom ekvation 4 bestämdes slutligen  $G$ . I ekvation 4 var parametrarna  $d$ ,  $M$ ,  $r$ ,  $\ell$  givna i manualen och noggrannheten för dessa presenteras i bilaga A.1 [6].

## 4 Resultat

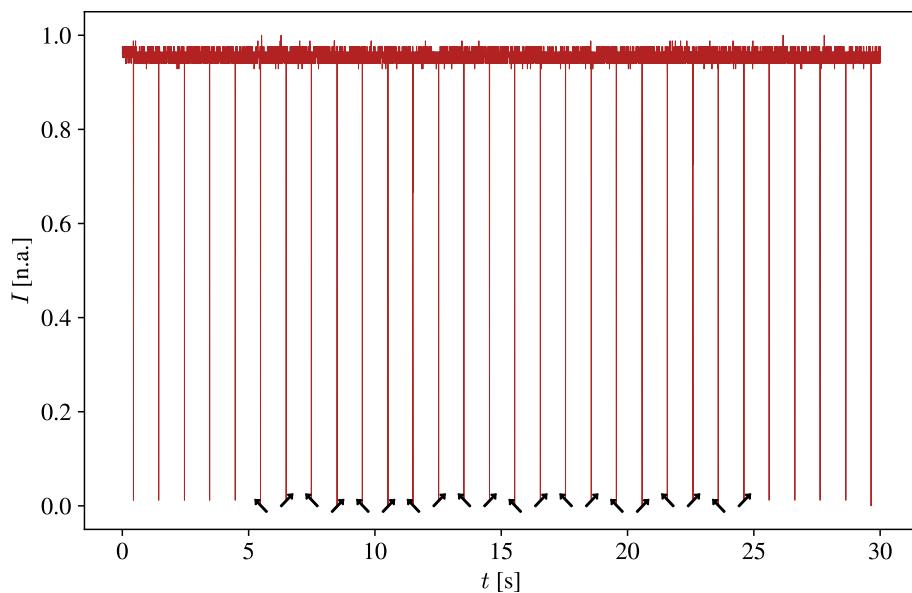
Ett exempel på en mätning med Bessels pendel presenteras i figur 4. Den normaliserade ljusintensiteten  $I$  är här en funktion av tiden  $t$ . Det aktuella exemplet är för fallet med aluminium nedåt (A) och med kalibreringsvikten förskjutten 84,70 mm (denna mätning har namnet H-A-87-70.csv bland samtliga datafiler som nås genom att [klicka här](#)). De 20 pilarna vid grafens lokala intensitetsminima motsvarar de punkter som i dataanalysen används för att beräkna periodtiden  $T$ . Källkoden för dataanalysen och visualiseringen finns i bilaga B.1. I figur 5 visas samtliga erhållna periodtider  $T$  som funktion av kalibreringsmassans förskjutning  $x$  för fallet med aluminium nedåt respektive fallet med mässing nedåt. Till vardera datamängd visas en minstakvadratanpassad andragradskurva (se bilaga B.2 för källkod). Vid skärningspunkten noterades att  $T_0 = 2,014173 \pm 0,005$  s. Avståndet mellan upphängningspunkterna var  $L = 1,002 \pm 0,002$  m. Sammantaget gav ekvation 3 värdet  $g = 9,751 \pm 0,068$  m s $^{-2}$ , där felet beräknats enligt bilaga A.1.

Datapunkterna från experimentet med Cavendishs torsionsvåg presenteras i figur 6 (se bilaga B.3 för källkod). Här är sträckan  $S$  en funktion av tiden  $t$ . Den horisontella linjen motsvarar det uppmätta asymptotiska värdet  $S_2 = 100$  mm som avlästes vid  $t = 7200$  s. Vid  $t = 0$  s avlästes sträckan  $S_1 = 70$  mm. Periodtiden beräknades vara  $T = 591,25 \pm 2$  s. Slutligen gav ekvation 4 värdet  $G = (6,854 \pm 0,729) \times 10^{-11}$  N m $^2$  kg $^{-2}$ .

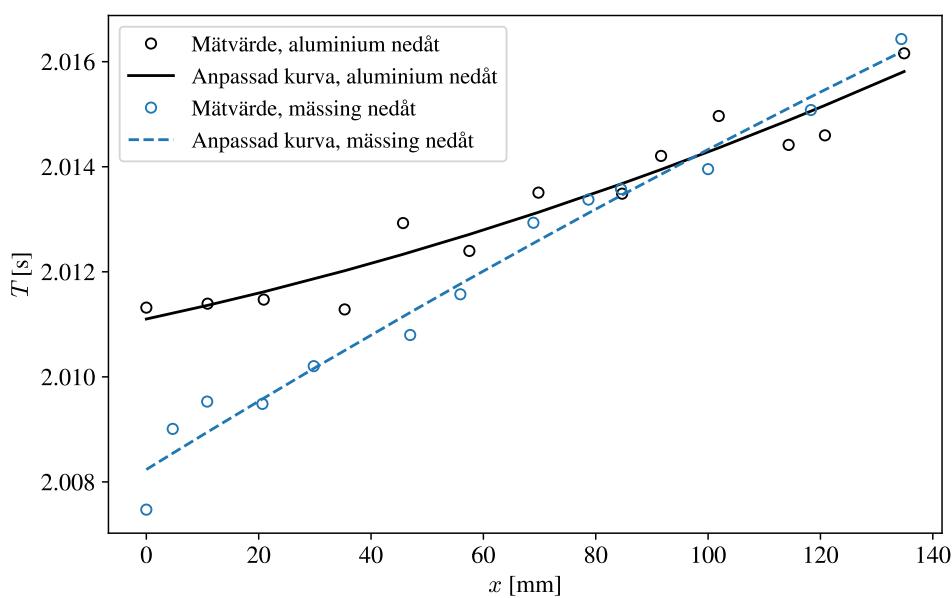
## 5 Diskussion

I jämförelse med ett latitud- och höjdkorrigerat (N 57,69°, 83 m ö. h.) referensvärdet  $g \approx 9,8173$  m s $^{-2}$  [2], var resultatet  $g = 9,751 \pm 0,068$  m s $^{-2}$  från experimentet något mindre. Referensvärdet tillhör det uppskattade felintervallet, men ligger i dess ytterkant. För de uppmätta storheterna från ekvation 3 gäller således att  $L$  var för litet och/eller att  $T_0$  var för stort. Felet i  $T_0$  uppskattades vara  $\delta T_0 = \pm 5$  ms (notera att detta är ett uppskattat värde, eftersom problemet att bestämma hur felen i de ingående periodtiderna fortplantar sig till skärningspunkten mellan de två andragradsanpassningarna anses ligga utan ramen för den här rapporten). Enligt felfortplantningsformeln i bilaga A.1 utgjorde felet i  $T_0$  då 71 % av det totala felet i  $g$ .

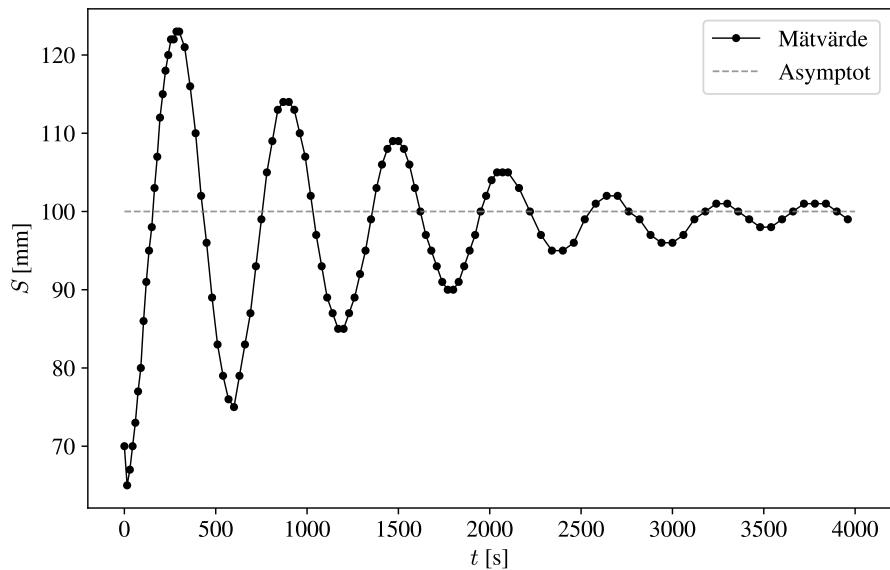
Det som bidrog till den relativt höga osäkerheten i  $T_0$  var osäkerheten i de uppmätta värdena på  $T$  och  $x$ , vilka användes för att beräkna anpassningskurvorna och därmed



Figur 4: Normaliserad ljusintensitet som funktion av tiden för en mätning med Bessels pendel (aluminium nedåt och med kalibreringsvikten förskjuten 84, 70 mm). Distinkta intensitetsminima syns då pendeln passerade bottenläget. Pilarna markerar de tidpunkter som i analysen användes för att beräkna periodtiden. Riktningen på pilarna (vänster eller höger) vittnar om pendelns rörelseriktning sedd utifrån (med riktning mot väggen).



Figur 5: Uppmätt periodtid som funktion av förskjutningen av kalibreringsmassan för fallet med aluminium nedåt (svart markering) respektive fallet med mässing nedåt (blå markering). Den heldragna svarta grafen är ett minstakvadratanpassat andragradspolynom för fallet med aluminium nedåt. Den streckade blå linjen är på motsvarande sätt en anpassning till mätpunkterna för fallet med mässing nedåt.



Figur 6: Uppmätt sträcka som funktion av tiden för experimentet med Cavendishs torsionsväg. Den ljusgrå streckade horisontella linjen motsvarar  $S_2 = 100$  mm.

skärningspunkten. Eftersom värdena på  $x$  varierades inom intervallet  $(0, 140)$ , utgör felet i  $x$  ( $\delta x = \pm 0,5$  mm) ungefär 0,4 % av intervallets storlek. Värdena på  $T$  tillhör, å andra sidan, ett smalare interval  $(2,007; 2,016)$  i jämförelse med felets storlek ( $\delta T = \pm 0,5$  ms). Felet  $\delta T$  utgör i detta fall 5 % av intervallet och följdakligen påverkade mätosäkerheten i  $T$  värdet på  $T_0$  i högre grad än vad mätosäkerheten i  $x$  gjorde.

Under mätningarna uppstod ibland små, "vobblande", oscillationsrörelser vinkelrätt mot pendelns rörelseplan, vilket skulle kunna ha påverkat periodtiden för pendeln. I figur 5 observeras att periodtiderna  $T$  hade större spridning då aluminium var nedåt. Från laboranternas sida upplevdes det också vara svårare att få en stabil pendelbana i detta fall. Det är möjligt att aluminiumvikternas lägre massa bidrog till ökad risk för detta problem. En begränsning i uppställningen som indirekt kan ha bidragit till de oönskade oscillationerna var ljussensorn. För att sensorn skulle ge tydliga utslag krävdes en tillräckligt stor fart vid pendelns bottenläge, vilket i sin tur krävde en större utgångsvinkel  $\varphi_0$ . Om en ljussensor används i framtida experiment med Bessels pendel rekommenderas att sensorn har en smalare apertur. Det bör ge tydliga data samtidigt som pendelns utgångsvinkel kan hållas liten. Vidare är det även troligt att ojämnheter i upphängningsanordningen kan ha bidragit till de oönskade oscillationerna. Begränsningar av detta slag kan också ha lett till friktionsförluster, vilket kan ha gett längre periodtider för båda fallen.

Utöver parametern  $T_0$  bidrog även mätosäkerheter i  $L$  till fel i  $g$ . Längden  $L$  mellan de två spetsiga upphängningsklackarna krävde tre mätningar med lasermätare och noggrannheten uppskattades till  $\pm 2$  mm. Lasermätare fungerar i allmänhet inte optimalt för mätning av avstånd mellan icke-plana ytor. Istället för lasermätare rekommenderas här ett mätdon med högre noggrannhet, men som också är bättre anpassat till spetsiga ytor.

Resultatet  $G = (6,814 \pm 0,377) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  från experimentet med Cavendishs torsionsväg kan jämföras med tabellvärdet  $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  [1]. Då konstateras att experimentets resultat var större och att felmarginen täcker in tabellvärdet. I ekvation 4 mättes periodtiden  $T$ , båglängden  $b$  och avståndet  $R$ .

Av de uppmätta parametrarna bidrog parametern  $b$  med 63 % av det totala felet. I utförandet användes en böjd mätskala som placerades på ett avstånd  $R$ , vilket var detsamma som krökningsradien hos mätskalan. En begränsning i uppställningen var att mätskalans längd inte utnyttjades till fullo. Mätskalan sträckte sig från  $-250$  mm till  $+250$  mm och under experimentet var de maximala utslagen  $65$  mm och  $125$  mm. Genom att placera mätskalan på ett längre avstånd från torsionsvågens spegel skulle utslagen från torsionsvågen givit större skillnader på mätskalan och därmed bättre noggrannhet. Eftersom krökningsradien hos mätskalan då inte längre hade sammanfallit med avståndet till torsionsvågen skulle  $\theta$  behövts uppskattas med  $\theta \approx b/4R$ .

Ytterligare en faktor som påverkade noggrannheten hos  $b$  var avläsningsproceduren. Laserpunktens storlek på ungefär  $\varnothing 1$  mm bidrog till svårigheter att läsa av mätvärdena från mätskalan. En lins som koncentrerar laserpunkten föreslås därför inför framtida experiment. Efter  $b$  bidrog längden  $d$  mest till felet i  $G$ . Eftersom  $d$  tillhörde de givna parametrarna anses uppställningen som helhet utgöra vidare begränsningar experimentet.

En tillämpning av båda experimenten är att beräkna jordens massa och medeldensitet. Om ekvatorialradien  $6378$  km används, erhålls  $M_j = 5,82 \times 10^{24}$  kg och  $\rho_j = 5360$  kg m $^{-3}$ , vilket kan jämföras med tabellvärdena  $5,97 \times 10^{24}$  kg respektive  $5515$  kg m $^{-3}$  [1].

## 6 Slutsats

Syftet med undersökningen var att bestämma tyngdaccelerationen  $g$  på våning 7 i fysikhuset på Chalmers campus Johanneberg, samt den universella gravitationskonstanten  $G$ , genom att använda Bessels pendel respektive Cavendishs torsionsvåg. Resultaten,  $g = 9,751 \pm 0,068$  m s $^{-2}$  och  $G = (6,854 \pm 0,729) \times 10^{-11}$  N m $^2$  kg $^{-2}$ , ligger i linje med tidigare genomförda mätningar. Tillsammans med jordens ekvatorialradie kan jordens massa och densitet då uppskattas till värden som ligger i närheten av tabellvärdet. Den största felkällan vid bestämning av tyngdaccelerationen var osäkerheten i den sökta periodtiden  $T_0$ . I undersökningen av gravitationskonstanten var den största felkällan osäkerheten i den uppmätta båglängden  $b$ . Dessa felkällor skulle sannolikt kunna minimeras genom att använda mer välordnade uppställningar och utrustning med högre noggrannhet.

## Referenser

1. C. Nordling, J. Österman. *Physics Handbook for Science and Engineering*, s. 14, 158-160, 9e utgåvan. Studentlitteratur, Lund.
2. D. Candela et al., “Bessel’s improved Kater pendulum in the teaching lab”, *American Journal of Physics*, årg. 69, nr. 6, s. 714–720, 2001.
3. H. Cavendish, “XXI. Experiments to determine the density of the earth.”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, nr. 88, s. 469-526.
4. *Gravitational Torsion Balance*, Pasco Scientific, 1995.
5. *Leica DISTO D210*, Leica Disto. <https://www.leicadisto.co.uk/shop/leica-disto-d210/>. Hämtad 2021-11-11.
6. *Gravitation Torsion Balance Instruction Sheet (332 101)*, Leybold Didactic, 2015.

## Bilagor

### A Felfortplantning

#### A.1 Felberäkning och mätosäkerhet

För att beräkna felfortplantning för både  $g$  och  $G$  användes

$$\delta f = \pm \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial u_j} \right| \delta u_j \quad (5)$$

där  $\delta f$  är felet.  $f$  i ekvation 5 är uttrycken i ekvation 3 och 4, vilka användes för att beräkna det slutgiltiga värdet på  $g$  och  $G$ .  $u_j$  svarar mot parametrarna som används för  $g$  och  $G$ , medan  $\delta u_j$  är mätosäkerheterna hos varje parameter. Osäkerheten i mätningarna har sammanställts i tabell 1 och 2.

För att beräkna  $\delta f$  användes koden i bilaga A.2. Felmarginalen i procent beräknades sedan genom

$$100 \cdot \frac{f(u_1, \dots, u_n)}{\delta f}.$$

Tabell 1: Mätosäkerheter för  $g$ .

Parameter	Värde	Osäkerhet
$L$	1,002 m	$\pm 2$ mm
$T_0$	2,014 173 s	$\pm 5$ ms

Tabell 2: Mätosäkerheter för  $G$ .

Parameter	Värde	Osäkerhet
$b$	30 mm	$\pm 2$ mm
$T$	591,25 s	$\pm 2$ s
$R$	988 mm	$\pm 2$ mm
$M$	1,5 kg	$\pm 5$ g
$r$	15 mm	$\pm 0,5$ mm
$d$	47 mm	$\pm 0,5$ mm
$\ell$	0,1 m	$\pm 0,5$ mm

#### A.2 Python-kod för felfortplantning

```
from numpy import *
### g ####
# Parameters; errors
T = 2.014173; dT = 0.005
L = 1.002; dL = 2*10**(-3)
```

```

g = L*(2*math.pi/T)**2
err = [dT, dL]

# Partial derivatives w.r.t T and x
part_der = [-(8*math.pi**2*L)/T**3, 4*math.pi**2/T**2]

# Error
err_g = 0
err_list = []
for i in range(len(err)):
    err_g += abs(part_der[i])*err[i]
    err_list.append(abs(part_der[i])*err[i])
marg = err_g/g
print('g =', g, '+-', err_g)
print('Felmarginal', 100*marg, '%')

### G ###

# Parameters; errors
l = 0.1;          dl = 0.5*10**(-3)
b = 30*10**(-3); db = 0.5*10**(-3)
d = 47*10**(-3); dd = 0.5*10**(-3)
L = 0.988;        dL = 0.002 # L is called R in report
M = 1.5;          dM = 5*10**(-3)
T = 591.25;       dT = 2
r = 15*10**(-3); dr = 0.5*10**(-3)

G = (0.5*math.pi**2*(l**2+r**2/10)*b*d**2)/(M*T**2*L*l*(1-d**3/(d**2+l**2)**(3/2)))
err = [dl, db, dd, dL, dM, dT, dr]

# Partial derivatives w.r.t. l, b, d, L, M, T and r
part_der = [(math.pi**2*b*d**2*((l**2+d**2)**(1/2))*(-40*d**3*l**4+
(l**2+d**2)**(5/2)*(10*l**2-r**2)+(-2*d**3*r**2-10*d**5)*l**2+d**5*r**2))/
(5*L*M*T**2*l**2*((l**2+d**2)**(3/2)-d**3)**2),
(2*math.pi**2*d**2*(r**2/10+l**2))/(L*M*T**2*l*(1-d**3/(l**2+d**2)**(3/2))),
(math.pi**2*b*(r**2+10*l**2)*d*math.sqrt(d**2+l**2)*(2*d*(d**2+l**2)**(3/2)+3*d**3*math.sqrt(d**2+l**2)+7*d**4+6*l**2*d**2+2*l**4))/
(5*L*M*T**2*l*(math.sqrt(d**2+l**2)-d)*(d*math.sqrt(d**2+l**2)+2*d**2+l**2)**2),
-(2*math.pi**2*b*d**2*(r**2/10+l**2))/(M*T**2*l*(1-d**3/(l**2+d**2)**(3/2))*L**2),
-(2*math.pi**2*b*d**2*(r**2/10+l**2))/(L*T**2*l*(1-d**3/(l**2+d**2)**(3/2))*M**2),
-(4*math.pi**2*b*d**2*(r**2/10+l**2))/(L*M*l*(1-d**3/(l**2+d**2)**(3/2))*T**3),

```

```
(2*math.pi**2*b*d**2*r)/(5*L*M*T**2*l*(1-d**3/(l**2+d**2)**(3/2)))]
```

```
# Error
err_G = 0
for i in range(len(err)):
    err_G += abs(0.25*part_der[i])*err[i]

marg = err_G/G
print('G =', G, '±', err_G)
print('Felmarginal', 100*marg, '%')
```

## B Python-kod

### B.1 Beräkning av periodtider för Bessels pendel

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *
from scipy.signal import find_peaks
import csv
from scipy.signal import savgol_filter

# LaTeX font
plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'

# Variables
threshold = 7.9 # peak maximum threshold value
distance = 2000 # minimum distance between peaks
start_peak = 6 # first peak
end_peak = 24 # last peak

# Read data
file = open('H-A-84-70.csv', 'r')
csv_reader = csv.reader(file, delimiter=',')
rows = []
i = [] # intensity
t = [] # time
for row in csv_reader:
    i.append(float(row[5]))
    t.append(float(row[3]))
file.close()

# Convert data to ndarrays
i_nd = ndarray((len(i),), buffer=array(i))
t_nd = ndarray((len(i),), buffer=array(t))

# Find peaks
peaks, _ = find_peaks(-i_nd, distance=2000, height=-threshold)
```

```

peaks_0 = t_nd[peaks][start_peak-1:end_peak:2]
peaks_1 = t_nd[peaks][start_peak:end_peak+1:2]

# Calculate period
periods_0 = diff(peaks_0)
periods_1 = diff(peaks_1)
print('Period (start_peak to end_peak):', periods_0)
print('Period (start_peak+1 to end_peak+1):', periods_1)
print('Mean period:', round((mean(periods_0)+mean(periods_1))/2, 8))

# Normalize intensity
def normalize(data):
    return (data - min(data)) / (max(data) - min(data))

i_norm = normalize(i_nd)

# Plot
plt_1 = plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t, i_norm, color='firebrick', linewidth='0.5')
arrow_left = u'$\u2196$'
arrow_right = u'$\u2197$'
plt.plot(peaks_0, i_norm[peaks][start_peak-1:end_peak:2], color='black',
         marker=arrow_left, markersize=7, linestyle='None')
plt.plot(peaks_1, i_norm[peaks][start_peak:end_peak+1:2], color='black',
         marker=arrow_right, markersize=7, linestyle='None')
plt.xlabel('$t$ [s]', fontsize=13)
plt.ylabel('$I$ [n.a.]', fontsize=13)
plt.xticks(fontsize=13)
plt.yticks(fontsize=13)
plt.show()

```

## B.2 Visualisering av data från Bessels pendel

```

import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *

# LaTeX font
plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'

# Data
x_a = [00.00, 10.90, 20.90, 35.30, 45.70, 57.50, 69.80, 84.70, 91.63,
       101.90, 114.34, 120.80, 134.90]
T_a = [2.01131833, 2.01139333, 2.01147056, 2.01128389, 2.01292778,
       2.01239722, 2.01350722, 2.01348722, 2.01420611, 2.01496611,
       2.01441611, 2.01459778, 2.01615944]

x_b = [00.00, 04.70, 10.83, 20.67, 29.80, 46.97, 55.90, 68.90, 78.70,
       87.53, 96.36, 105.19, 114.02, 122.85, 131.68, 140.51, 149.34, 158.17,
       166.99, 175.82, 184.65, 193.48, 202.31, 211.14, 220.97, 229.8, 238.63,
       247.46, 256.29, 265.12, 273.95, 282.78, 291.61, 300.44, 309.27, 318.1,
       326.93, 335.76, 344.59, 353.42, 362.25, 371.08, 380.91, 389.74, 398.57,
       407.4, 416.23, 425.06, 433.89, 442.72, 451.55, 460.38, 469.21, 478.04,
       486.87, 495.7, 504.53, 513.36, 522.19, 531.02, 541.85, 551.68, 561.51,
       571.34, 581.17, 590.99, 600.82, 610.65, 620.48, 630.31, 640.14, 650.97,
       660.8, 670.63, 680.46, 690.29, 700.12, 710.95, 720.78, 730.61, 740.44,
       750.27, 760.1, 770.93, 780.76, 790.59, 800.42, 810.25, 820.08, 830.91,
       840.74, 850.57, 860.4, 870.23, 880.06, 890.89, 900.72, 910.55, 920.38,
       930.21, 940.04, 950.87, 960.7, 970.53, 980.36, 990.19, 1000.02, 1010.85,
       1020.68, 1030.51, 1040.34, 1050.17, 1060.0, 1070.83, 1080.66, 1090.49,
       1100.32, 1110.15, 1120.98, 1130.81, 1140.64, 1150.47, 1160.3, 1170.13,
       1180.96, 1190.79, 1200.62, 1210.45, 1220.28, 1230.11, 1240.94, 1250.77,
       1260.6, 1270.43, 1280.26, 1290.09, 1300.92, 1310.75, 1320.58, 1330.41,
       1340.24, 1350.07, 1360.9, 1370.73, 1380.56, 1390.39, 1400.22, 1410.05,
       1420.88, 1430.71, 1440.54, 1450.37, 1460.2, 1470.03, 1480.86, 1490.69,
       1500.52, 1510.35, 1520.18, 1530.01, 1540.84, 1550.67, 1560.5, 1570.33,
       1580.16, 1590.99, 1600.82, 1610.65, 1620.48, 1630.31, 1640.14, 1650.97,
       1660.8, 1670.63, 1680.46, 1690.29, 1700.12, 1710.95, 1720.78, 1730.61,
       1740.44, 1750.27, 1760.1, 1770.93, 1780.76, 1790.59, 1800.42, 1810.25,
       1820.08, 1830.91, 1840.74, 1850.57, 1860.4, 1870.23, 1880.06, 1890.89,
       1900.72, 1910.55, 1920.38, 1930.21, 1940.04, 1950.87, 1960.7, 1970.53,
       1980.36, 1990.19, 2000.02, 2010.85, 2020.68, 2030.51, 2040.34, 2050.17,
       2060.0, 2070.83, 2080.66, 2090.49, 2100.32, 2110.15, 2120.98, 2130.81,
       2140.64, 2150.47, 2160.3, 2170.13, 2180.96, 2190.79, 2200.62, 2210.45,
       2220.28, 2230.11, 2240.94, 2250.77, 2260.6, 2270.43, 2280.26, 2290.09,
       2300.92, 2310.75, 2320.58, 2330.41, 2340.24, 2350.07, 2360.9, 2370.73,
       2380.56, 2390.39, 2400.22, 2410.05, 2420.88, 2430.71, 2440.54, 2450.37,
       2460.2, 2470.03, 2480.86, 2490.69, 2500.52, 2510.35, 2520.18, 2530.01,
       2540.84, 2550.67, 2560.5, 2570.33, 2580.16, 2590.99, 2600.82, 2610.65,
       2620.48, 2630.31, 2640.14, 2650.97, 2660.8, 2670.63, 2680.46, 2690.29,
       2700.12, 2710.95, 2720.78, 2730.61, 2740.44, 2750.27, 2760.1, 2770.93,
       2780.76, 2790.59, 2800.42, 2810.25, 2820.08, 2830.91, 2840.74, 2850.57,
       2860.4, 2870.23, 2880.06, 2890.89, 2900.72, 2910.55, 2920.38, 2930.21,
       2940.04, 2950.87, 2960.7, 2970.53, 2980.36, 2990.19, 3000.02, 3010.85,
       3020.68, 3030.51, 3040.34, 3050.17, 3060.0, 3070.83, 3080.66, 3090.49,
       3100.32, 3110.15, 3120.98, 3130.81, 3140.64, 3150.47, 3160.3, 3170.13,
       3180.96, 3190.79, 3200.62, 3210.45, 3220.28, 3230.11, 3240.94, 3250.77,
       3260.6, 3270.43, 3280.26, 3290.09, 3300.92, 3310.75, 3320.58, 3330.41,
       3340.24, 3350.07, 3360.9, 3370.73, 3380.56, 3390.39, 3400.22, 3410.05,
       3420.88, 3430.71, 3440.54, 3450.37, 3460.2, 3470.03, 3480.86, 3490.69,
       3500.52, 3510.35, 3520.18, 3530.01, 3540.84, 3550.67, 3560.5, 3570.33,
       3580.16, 3590.99, 3600.82, 3610.65, 3620.48, 3630.31, 3640.14, 3650.97,
       3660.8, 3670.63, 3680.46, 3690.29, 3700.12, 3710.95, 3720.78, 3730.61,
       3740.44, 3750.27, 3760.1, 3770.93, 3780.76, 3790.59, 3800.42, 3810.25,
       3820.08, 3830.91, 3840.74, 3850.57, 3860.4, 3870.23, 3880.06, 3890.89,
       3900.72, 3910.55, 3920.38, 3930.21, 3940.04, 3950.87, 3960.7, 3970.53,
       3980.36, 3990.19, 4000.02, 4010.85, 4020.68, 4030.51, 4040.34, 4050.17,
       4060.0, 4070.83, 4080.66, 4090.49, 4100.32, 4110.15, 4120.98, 4130.81,
       4140.64, 4150.47, 4160.3, 4170.13, 4180.96, 4190.79, 4200.62, 4210.45,
       4220.28, 4230.11, 4240.94, 4250.77, 4260.6, 4270.43, 4280.26, 4290.09,
       4300.92, 4310.75, 4320.58, 4330.41, 4340.24, 4350.07, 4360.9, 4370.73,
       4380.56, 4390.39, 4400.22, 4410.05, 4420.88, 4430.71, 4440.54, 4450.37,
       4460.2, 4470.03, 4480.86, 4490.69, 4500.52, 4510.35, 4520.18, 4530.01,
       4540.84, 4550.67, 4560.5, 4570.33, 4580.16, 4590.99, 4600.82, 4610.65,
       4620.48, 4630.31, 4640.14, 4650.97, 4660.8, 4670.63, 4680.46, 4690.29,
       4700.12, 4710.95, 4720.78, 4730.61, 4740.44, 4750.27, 4760.1, 4770.93,
       4780.76, 4790.59, 4800.42, 4810.25, 4820.08, 4830.91, 4840.74, 4850.57,
       4860.4, 4870.23, 4880.06, 4890.89, 4900.72, 4910.55, 4920.38, 4930.21,
       4940.04, 4950.87, 4960.7, 4970.53, 4980.36, 4990.19, 5000.02, 5010.85,
       5020.68, 5030.51, 5040.34, 5050.17, 5060.0, 5070.83, 5080.66, 5090.49,
       5100.32, 5110.15, 5120.98, 5130.81, 5140.64, 5150.47, 5160.3, 5170.13,
       5180.96, 5190.79, 5200.62, 5210.45, 5220.28, 5230.11, 5240.94, 5250.77,
       5260.6, 5270.43, 5280.26, 5290.09, 5300.92, 5310.75, 5320.58, 5330.41,
       5340.24, 5350.07, 5360.9, 5370.73, 5380.56, 5390.39, 5400.22, 5410.05,
       5420.88, 5430.71, 5440.54, 5450.37, 5460.2, 5470.03, 5480.86, 5490.69,
       5500.52, 5510.35, 5520.18, 5530.01, 5540.84, 5550.67, 5560.5, 5570.33,
       5580.16, 5590.99, 5600.82, 5610.65, 5620.48, 5630.31, 5640.14, 5650.97,
       5660.8, 5670.63, 5680.46, 5690.29, 5700.12, 5710.95, 5720.78, 5730.61,
       5740.44, 5750.27, 5760.1, 5770.93, 5780.76, 5790.59, 5800.42, 5810.25,
       5820.08, 5830.91, 5840.74, 5850.57, 5860.4, 5870.23, 5880.06, 5890.89,
       5900.72, 5910.55, 5920.38, 5930.21, 5940.04, 5950.87, 5960.7, 5970.53,
       5980.36, 5990.19, 6000.02, 6010.85, 6020.68, 6030.51, 6040.34, 6050.17,
       6060.0, 6070.83, 6080.66, 6090.49, 6100.32, 6110.15, 6120.98, 6130.81,
       6140.64, 6150.47, 6160.3, 6170.13, 6180.96, 6190.79, 6200.62, 6210.45,
       6220.28, 6230.11, 6240.94, 6250.77, 6260.6, 6270.43, 6280.26, 6290.09,
       6300.92, 6310.75, 6320.58, 6330.41, 6340.24, 6350.07, 6360.9, 6370.73,
       6380.56, 6390.39, 6400.22, 6410.05, 6420.88, 6430.71, 6440.54, 6450.37,
       6460.2, 6470.03, 6480.86, 6490.69, 6500.52, 6510.35, 6520.18, 6530.01,
       6540.84, 6550.67, 6560.5, 6570.33, 6580.16, 6590.99, 6600.82, 6610.65,
       6620.48, 6630.31, 6640.14, 6650.97, 6660.8, 6670.63, 6680.46, 6690.29,
       6700.12, 6710.95, 6720.78, 6730.61, 6740.44, 6750.27, 6760.1, 6770.93,
       6780.76, 6790.59, 6800.42, 6810.25, 6820.08, 6830.91, 6840.74, 6850.57,
       6860.4, 6870.23, 6880.06, 6890.89, 6900.72, 6910.55, 6920.38, 6930.21,
       6940.04, 6950.87, 6960.7, 6970.53, 6980.36, 6990.19, 7000.02, 7010.85,
       7020.68, 7030.51, 7040.34, 7050.17, 7060.0, 7070.83, 7080.66, 7090.49,
       7100.32, 7110.15, 7120.98, 7130.81, 7140.64, 7150.47, 7160.3, 7170.13,
       7180.96, 7190.79, 7200.62, 7210.45, 7220.28, 7230.11, 7240.94, 7250.77,
       7260.6, 7270.43, 7280.26, 7290.09, 7300.92, 7310.75, 7320.58, 7330.41,
       7340.24, 7350.07, 7360.9, 7370.73, 7380.56, 7390.39, 7400.22, 7410.05,
       7420.88, 7430.71, 7440.54, 7450.37, 7460.2, 7470.03, 7480.86, 7490.69,
       7500.52, 7510.35, 7520.18, 7530.01, 7540.84, 7550.67, 7560.5, 7570.33,
       7580.16, 7590.99, 7600.82, 7610.65, 7620.48, 7630.31, 7640.14, 7650.97,
       7660.8, 7670.63, 7680.46, 7690.29, 7700.12, 7710.95, 7720.78, 7730.61,
       7740.44, 7750.27, 7760.1, 7770.93, 7780.76, 7790.59, 7800.42, 7810.25,
       7820.08, 7830.91, 7840.74, 7850.57, 7860.4, 7870.23, 7880.06, 7890.89,
       7900.72, 7910.55, 7920.38, 7930.21, 7940.04, 7950.87, 7960.7, 7970.53,
       7980.36, 7990.19, 8000.02, 8010.85, 8020.68, 8030.51, 8040.34, 8050.17,
       8060.0, 8070.83, 8080.66, 8090.49, 8100.32, 8110.15, 8120.98, 8130.81,
       8140.64, 8150.47, 8160.3, 8170.13, 8180.96, 8190.79, 8200.62, 8210.45,
       8220.28, 8230.11, 8240.94, 8250.77, 8260.6, 8270.43, 8280.26, 8290.09,
       8300.92, 8310.75, 8320.58, 8330.41, 8340.24, 8350.07, 8360.9, 8370.73,
       8380.56, 8390.39, 8400.22, 8410.05, 8420.88, 8430.71, 8440.54, 8450.37,
       8460.2, 8470.03, 8480.86, 8490.69, 8500.52, 8510.35, 8520.18, 8530.01,
       8540.84, 8550.67, 8560.5, 8570.33, 8580.16, 8590.99, 8600.82, 8610.65,
       8620.48, 8630.31, 8640.14, 8650.97, 8660.8, 8670.63, 8680.46, 8690.29,
       8700.12, 8710.95, 8720.78, 8730.61, 8740.44, 8750.27, 8760.1, 8770.93,
       8780.76, 8790.59, 8800.42, 8810.25, 8820.08, 8830.91, 8840.74, 8850.57,
       8860.4, 8870.23, 8880.06, 8890.89, 8900.72, 8910.55, 8920.38, 8930.21,
       8940.04, 8950.87, 8960.7, 8970.53, 8980.36, 8990.19, 9000.02, 9010.85,
       9020.68, 9030.51, 9040.34, 9050.17, 9060.0, 9070.83, 9080.66, 9090.49,
       9100.32, 9110.15, 9120.98, 9130.81, 9140.64, 9150.47, 9160.3, 9170.13,
       9180.96, 9190.79, 9200.62, 9210.45, 9220.28, 9230.11, 9240.94, 9250.77,
       9260.6, 9270.43, 9280.26, 9290.09, 9300.92, 9310.75, 9320.58, 9330.41,
       9340.24, 9350.07, 9360.9, 9370.73, 9380.56, 9390.39, 9400.22, 9410.05,
       9420.88, 9430.71, 9440.54, 9450.37, 9460.2, 9470.03, 9480.86, 9490.69,
       9500.52, 9510.35, 9520.18, 9530.01, 9540.84, 9550.67, 9560.5, 9570.33,
       9580.16, 9590.99, 9600.82, 9610.65, 9620.48, 9630.31, 9640.14, 9650.97,
       9660.8, 9670.63, 9680.46, 9690.29, 9700.12, 9710.95, 9720.78, 9730.61,
       9740.44, 9750.27, 9760.1, 9770.93, 9780.76, 9790.59, 9800.42, 9810.25,
       9820.08, 9830.91, 9840.74, 9850.57, 9860.4, 9870.23, 9880.06, 9890.89,
       9900.72, 9910.55, 9920.38, 9930.21, 9940.04, 9950.87, 9960.7, 9970.53,
       9980.36, 9990.19, 10000.02, 10010.85, 10020.68, 10030.51, 10040.34, 10050.17,
       10060.0, 10070.83, 10080.66, 10090.49, 10100.32, 10110.15, 10120.98, 10130.81,
       10140.64, 10150.47, 10160.3, 10170.13, 10180.96, 10190.79, 10200.62, 10210.45,
       10220.28, 10230.11, 10240.94, 10250.77, 10260.6, 10270.43, 10280.26, 10290.09,
       10300.92, 10310.75, 10320.58, 10330.41, 10340.24, 10350.07, 10360.9, 10370.73,
       10380.56, 10390.39, 10400.22, 10410.05, 10420.88, 10430.71, 10440.54, 10450.37,
       10460.2, 10470.03, 10480.86, 10490.69, 10500.52, 10510.35, 10520.18, 10530.01,
       10540.84, 10550.67, 10560.5, 10570.33, 10580.16, 10590.99, 10600.82, 10610.65,
       10620.48, 10630.31, 10640.14, 10650.97, 10660.8, 10670.63, 10680.46, 10690.29,
       10700.12, 10710.95, 10720.78, 10730.61, 10740.44, 10750.27, 10760.1, 10770.93,
       10780.76, 10790.59, 10800.42, 10810.25, 10820.08, 10830.91, 10840.74, 10850.57,
       10860.4, 10870.23, 10880.06, 10890.89, 10900.72, 10910.55, 10920.38, 10930.21,
       10940.04, 10950.87, 10960.7, 10970.53, 10980.36, 10990.19, 11000.02, 11010.85,
       11020.68, 11030.51, 11040.34, 11050.17, 11060.0, 11070.83, 11080.66, 11090.49,
       11100.32, 11110.15, 11120.98, 11130.81, 11140.64, 11150.47, 11160.3, 11170.13,
       11180.96, 11190.79, 11200.62, 11210.45, 11220.28, 11230.11, 11240.94, 11250.77,
       11260.6, 11270.43, 11280.26, 11290.09, 11300.92, 11310.75, 11320.58, 11330.41,
       11340.24, 11350.07, 11360.9, 1
```

```

84.50, 100.00, 118.30, 134.40]
T_b = [2.00747222, 2.00900944, 2.00952944, 2.00948556, 2.01020389,
       2.01079667, 2.01157167, 2.01293389, 2.01337444, 2.013575,
       2.01395444, 2.01508, 2.01643111]

# Second degree polynomial fit
p_a = polyfit(x_a, T_a, 2)
p_b = polyfit(x_b, T_b, 2)

# Plot
plt_1 = plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x_a, T_a, color='black', marker='.', markersize=11,
          markerfacecolor='None', linestyle='None',
          label='Mätvärde, aluminium nedåt')
plt.plot(x_a, polyval(p_a, x_a), color='black',
          label='Anpassad kurva, aluminium nedåt')
plt.plot(x_b, T_b, color='CO', marker='.', markersize=11,
          markerfacecolor='None', linestyle='None',
          label='Mätvärde, mässing nedåt')
plt.plot(x_b, polyval(p_b, x_b), color='CO', linestyle='dashed',
          label='Anpassad kurva, mässing nedåt')
plt.legend(prop={'size': 12})
plt.xlabel('$x$ [mm]', fontsize=13)
plt.ylabel('$T$ [s]', fontsize=13)
plt.xticks(fontsize=13)
plt.yticks(fontsize=13)
plt.show()

```

### B.3 Visualisering av data från Cavendishs torsionsvåg

```

import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *
import csv

# LaTeX font
plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'

# Variables
threshold = 99
distance = 1

# Data
file = open('cavendish.csv', 'r')
csv_reader = csv.reader(file, delimiter=';')
rows = []
b = []
t = []

```

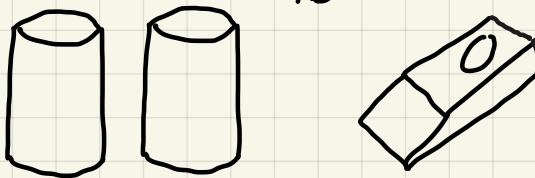
```
for row in csv_reader:  
    b.append(float(row[0]))  
    t.append(float(row[1]))  
file.close()  
  
# Asymptote  
b_as = 100*ones(100)  
x = linspace(0, 4000, 100)  
  
# Plot  
plt_1 = plt.figure(figsize=(8, 5))  
plt.plot(b, t, color='black', marker='.', markersize=7,  
         linewidth=0.8, label='Mätvärde')  
plt.plot(x, b_as, color='grey', alpha=0.8, linestyle='dashed',  
         linewidth=1, label='Asymptot')  
plt.legend(loc="upper right", prop={'size': 13})  
plt.xlabel('$t$ [s]', fontsize=13)  
plt.ylabel('$S$ [mm]', fontsize=13)  
plt.xticks(fontsize=13)  
plt.yticks(fontsize=13)  
plt.show()
```

## C Laborationslogg

Tisdag 9/11

Uppstart, Finna material till Bessel.

↳ Stäng, stativ,  $M_{A/B}$ ,  $m_{A/B}$  samt pivoteggar har funnit.



Hur funkar upphängningen?

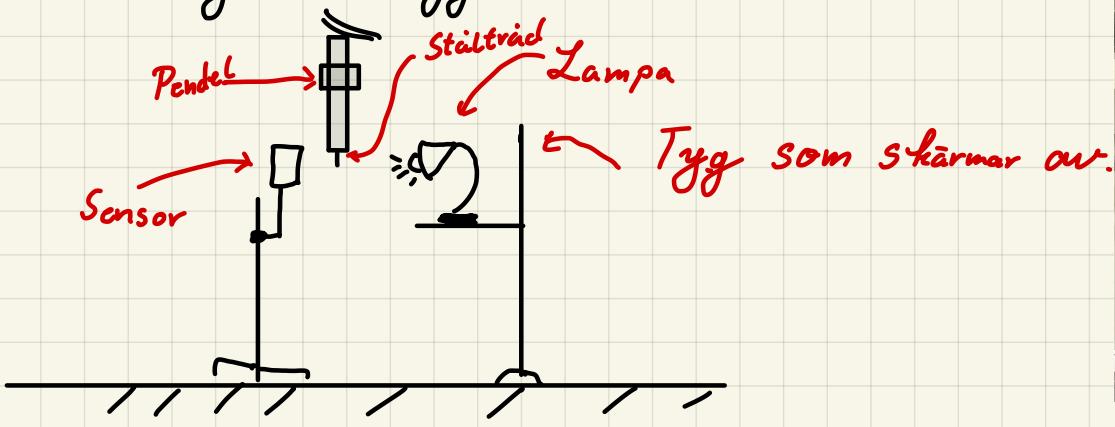
Vi har två st. - Hur fästs dessa?

↳ Behöver väggfaste samt något sätt s.a. pendeln kan pivotera.

↳ Det nu har funnits

- Hängde upp pendeln vid väggen

↳ Satte upp lampa & stålträdspinnar för att  
gör skuggan minimal.



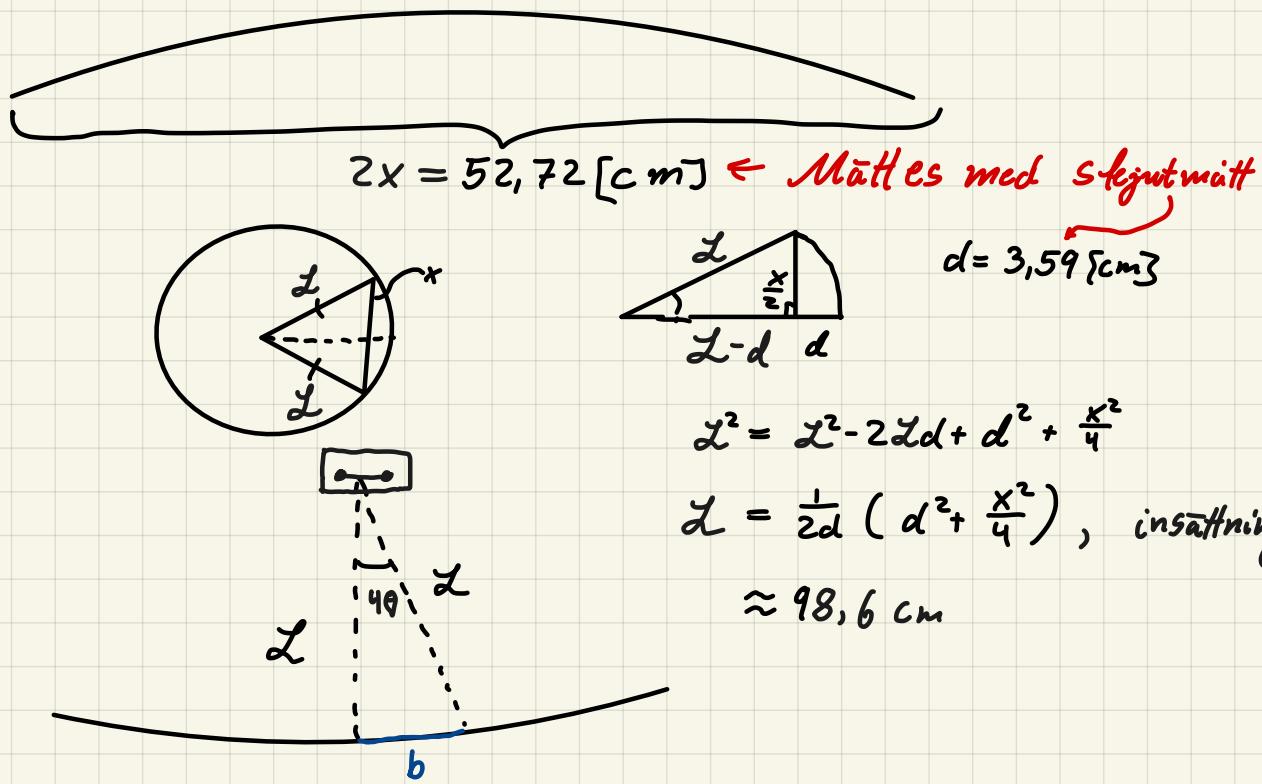
Genomförde sedan testmätningar. Verkar funka bra att  
bestämma  $T$  med  $\pm 10^2$ , kanske även noggrannare.

Går vidare att spara mätningarna i .CSV-fil. Mycket trevligt.

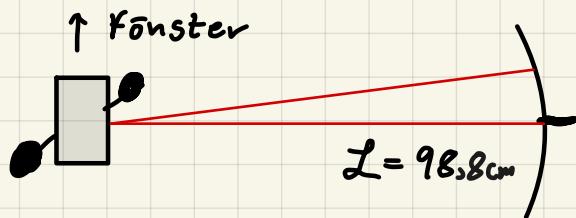
Kl. 17:30: Börjar nu kolla på Cavendish, då vi vill låta  
den stå och ställa in sig över natten.

Försökte ställa in lasern i god höjd, men det var lite surigt.

Mätlinjärmen för Cavendish var böjd. Vi valde att matcha bågens radie med avståndet  $L$ .



Cavendish är riggad:



Plan inför imorgon

Cavendish

- ↳ Fixa elv.lins, mäta  $L$
- ↳ Kicka igång

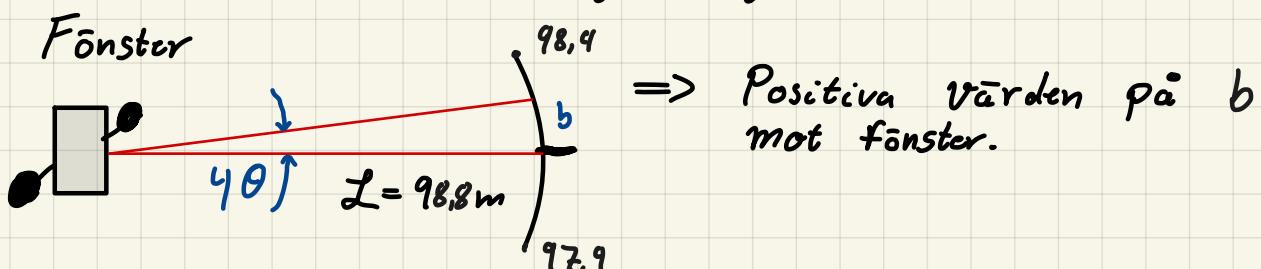
Bessel

- ↳ Fixa till smässaker innan mätningar

Cavendish har stabiliseringat sig över natten.

- Markrar upp utrustningens platser med tejp.

Cavan: Definierar  $\theta$  enligt figur



Strategi: Genomför försök med böjd linjal på avstånd  $L = 98,8 \text{ cm}$ . Giv det ej bra värden finns även rak längre linjal, vilken kan placeras på större avstånd.  
 ↳ Data lagras i Excel-fil **m.csv** vilken kan behandlas i Python på ett smidigt sätt.

→ Lins fanns i optiklabbet vägg i vägg.

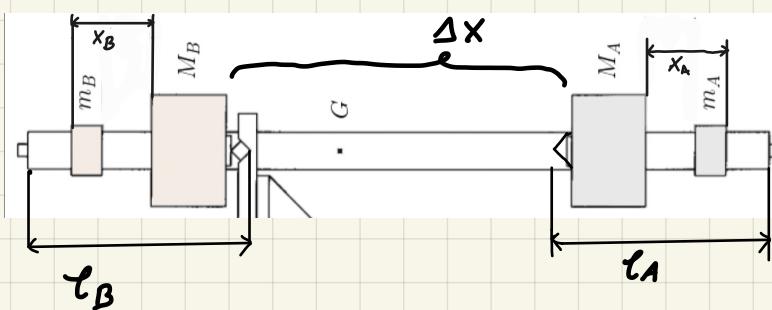
→ Upplever att linjalen ej är särskilt stabil ...

↳ Även svårt att ställa in lasern optimalt.

↳ Provar en förning ändå

## Bessel

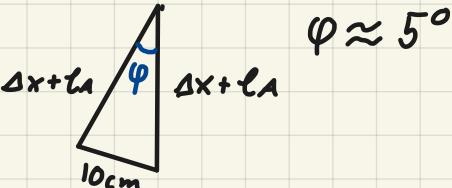
Uppmätt  $\ell_A = \ell_B = 292,8 \text{ mm}$



Skjutmått.

Har även satt upp en pinne  $\Rightarrow$  Samma utg. Vinkel varje gång.

Definierar om  $x_A$ ,  $x_B$ ,



5 mätningar med mässing nedat har körts.

Data har samlats i excel & i Python-lista.

Python tar medelvärde av 5 T. Preliminär plott i excel

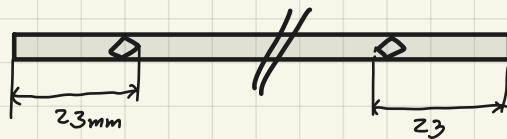
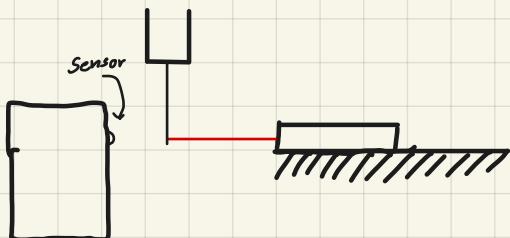
- Mätningar blev kass!

↳ Behöver stabilare ställning för Iθ-labs

↳ Tjockare brytning... & laser istället för lampa.

↳ Se till att flossen är  $\perp$  mot spåret i upphängning

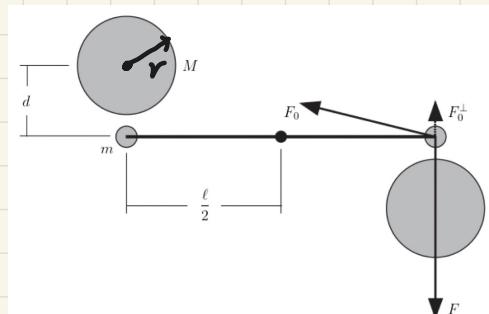
Har nu riggat med laser & tagit fram ett bord.



Mätning med Cavendish

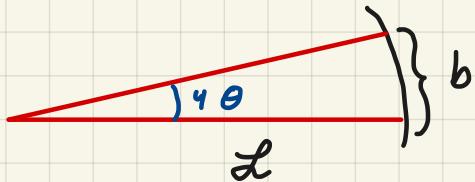
Givna parametrar:

$$\begin{aligned}M &= 1,5 \text{ kg} \\d &= 47 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\l &= 100 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\r &= 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$



$$\text{Vår formel: } G = \frac{\pi^2 (\ell^2 + \frac{l}{10} r^2) 15 d^2}{2 M T^2 L \ell (1 - \beta)}$$

Reviderad formel, då  $\frac{\Delta S}{4z} \approx \theta$ , ty vi har böjd linjal.



$$4z\theta = b \Leftrightarrow \theta = \frac{b}{4z}$$

$$\Rightarrow G = 2 \frac{\pi^2 (\ell^2 + \frac{l}{10} r^2) b d^2}{M T^2 L \ell (1 - \beta)} ; \beta = \frac{d^3}{(d^2 + \ell^2)^{3/2}}$$

$$G = 2 \frac{\pi^2 (l^2 + \frac{1}{10} r^2) \Delta b d^2}{M T^2 L l (1 - d^2 / (d^2 + l^2)^{3/2})}$$

Uppmätt:  $T \approx 600^*$  s,  $\Delta b = 100 - 70 = 30$  mm,  $\Delta b = 30 \cdot 10^{-3}$

Önskade värden:  $\Delta b = \pm 0,5$  mm  $= \pm 0,5 \cdot 10^{-3}$  m

$T = \pm 2$  s  $\leftarrow$  Uppskattad \* Anpassning

$L = \pm 1$  mm  $\Leftrightarrow 10^{-3}$  m  $A e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) + B$

$M = \pm 5 \cdot 10^{-3}$  kg

i Logger Pro gav

$r = \pm 0,5$  mm

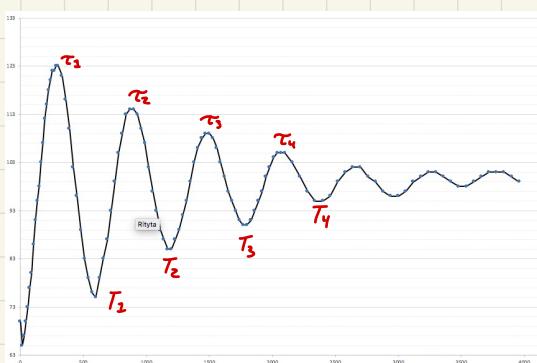
$T = 593,3$

$d = \pm 0,5$  mm

Beräknat Värde:  $[6,814 \cdot 10^{-11}] \leftarrow$

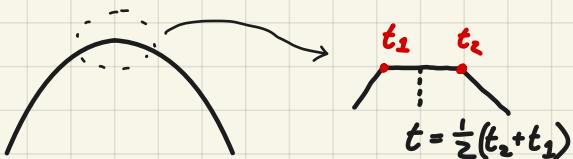
## Dataanalys av Cavendish

Graf över b & tiden



För att verifiera kurvanpassningen

beräknas medelvärde i varje topp.



Periodtiden  $T$  ges av:

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{8} \approx 591,25$$

Känner oss nöjda med Cavendish. I mån av tid kan en till mätning göras.

Bessel:

För att underlätta mätningar kan  $g$  lösas ut som funktion av tiden &  $X$ .

$$g = X \left( \frac{2\pi}{T_0^2} \right)^2 \Rightarrow X = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}, \text{ detta blir en hjälp för att ställa in pendeln.}$$

Tankar inför morgondagen

- Finn en bra längd på  $\Delta x$  & kör ett gäng mätserier.
- Testa ändpunkter på olika  $\Delta x$  & kolla om skärning är möjlig.

## Torsdag 11/11

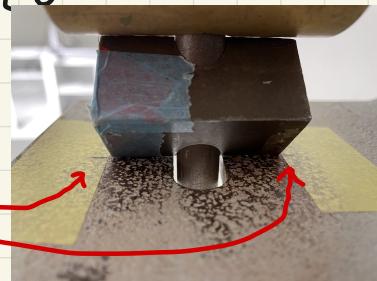
Efter repeatabilitetskontroll av uppställning observerar vi större mätskillnader.

Vi ser också att  $\Delta x = 0,88 \text{ m}$  ej kommer ge en skärning. Slutsatser & förändringar. Ökar  $\Delta x$  till  $1,16 \text{ m}$ ,

vilket ger en teoretiskt  $T_0$  på  $2,16 \text{ [s]}$ .

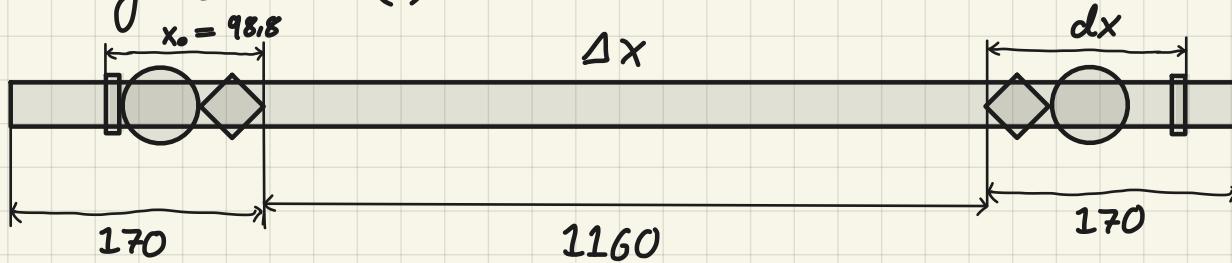
Vi ser även till så att upphängningen blir samma varje gång. Ritar två linjer

mässing nedat.



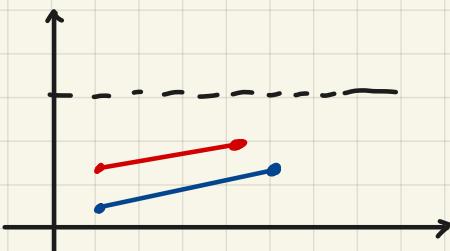
Vi har observerat att mässingslinjen har större  $f_c$ -värde än aluminiumlinjen  $\Rightarrow$  Från första mätning kan man verifiera  $\Delta x$

### Mätning Bessel (1)



JH - Startar igång & mäter  $dx$  med skyutmätt.

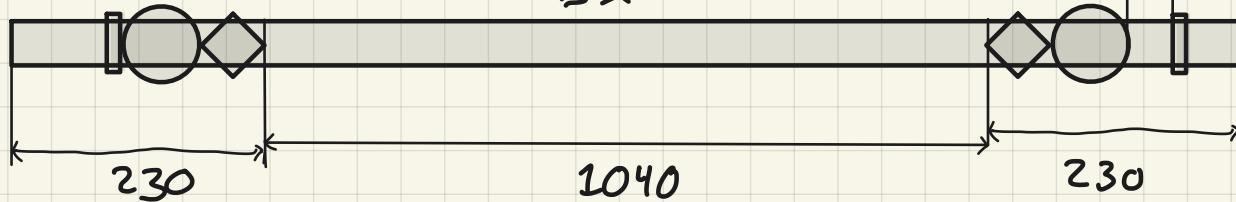
ÖL - Kollar upphängspunkt & beräknar periodtider.



Insäg att vi ej hunde åstadkomma en skärning inom intervallet.

Provar att justera  $\Delta x$

## Mätning Bessel (2)



Omedf.

$dx$

[mm]

Mätningar med mässing nedåt gav mycket fina värden.

Resultatet efter 12 mätningar anpassades med en andragradskurva, där koeficienten framför  $x^2$ -termen var mycket liten. Punkterna hamnade mer eller mindre på en linje.

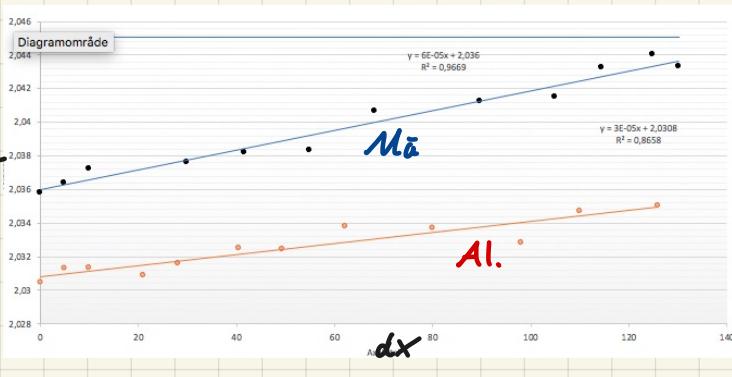
Efter lunch skall motsvarande mätningar göras fast med aluminium nedåt.

Resultat blev:

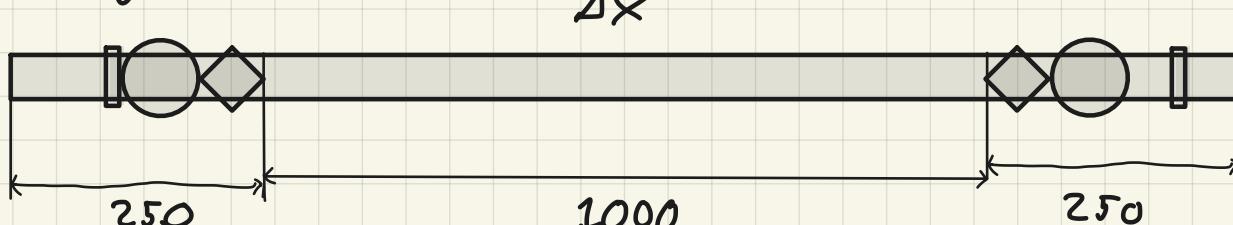
Får ingen skärning ... Dock har

vi fått två fina linjer, vilket  
bäddar gott inför nästa mätning.

Kurvorna har här anpassats  
med linjer.



## Mätning Bessel (3)

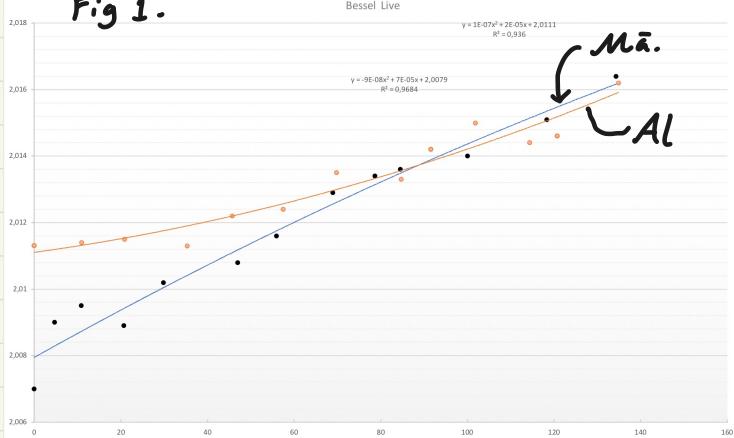


[mm]

Värdena 250, mättes med skejutmått & värdet 1000  
har fästs genom 1500 - 500. Detta mäts noggrannare efter  
skärning. 13 mätningar med aluminium resp. mässing  
gjordes.

Resultatet blev följande grafen

Fig 1.



punkterna runt omkring. Vi känner oss trygga med vår mätstabilitet i övrigt, då vi får förutsägbara värden som följer relativt raka linjer. Pga. tidsbrist, har de mätningarna (ca 1 på 4) som gav orörliga resultat exkluderats i plotten ovan.

Ungefär var 3:e till var 4:e mätning gav ett orimligt stort värde på  $T$ .

Tex. har vi haft några värden på  $T \approx 2,035$ , vilket är signifikanta avvikelse från

Gjorde även noggrannare mätning av  $\Delta x$  gav:



$$1,002 \text{ [m]} \pm 0,5 \text{ mm}$$

Mha. Wolfram beräknades skärningen mellan interpolationspolynomen i plotten (Fig 1).

Det gav skärning  $T_0 = 2,0145$  ↪ Stämmer inte  
riktigt  
med Fig...

$$\Rightarrow g = \Delta x \left( \frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \approx 9,7475$$

↑ Vi är nöjda.

Labbet städades & dataanalys fortsätter under fredagen och helgen.