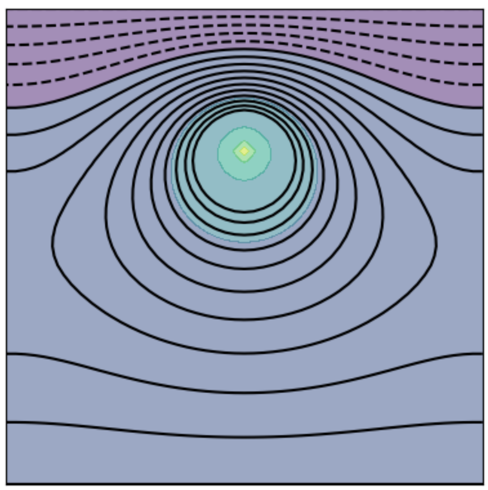
FFM234, Datoruppgift 2: Värmeledning

Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige



Inledning

I den här datorlaborationen skall vi studera värmeledning genom marken under en kall vinterdag. Vi kommer framförallt att studera ett symmetriskt scenario där det räcker att betrakta ett endimensionellt snitt mellan markytan (med fix temperatur -10° C) ner till ett tjälfritt djup på en meter (med fix temperatur 0° C). Vi kommer att betrakta två olika situationer där korrekta lösningar av bägge uppgifterna inom detta endimensionella problem krävs för att bli godkänd på laborationen.

Den fysikaliska processen beskrivs av värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + u, \tag{1}$$

där T är ett skalärfält som beskriver temperaturen som en funktion av läget och tiden. Parametern $k = \lambda/(c\rho)$ består av materialkonstanterna λ (värmeledningsförmågan), c (värmekapacitiviten) och ρ (materialets densitet). Eventuella värmekällor beskrivs av skalärfältet $u \equiv s/(c\rho)$, där SI-enheten för s är $\mathrm{W/m^3}$. För att ge en entydig lösning måste värmeledningsekvationen kompletteras med begynnelse- och randvillkor för temperaturen, det vill säga vi måste beskriva temperaturfördelningen i den aktuella geometrin vid starttidpunkten, och ge villkor för temperaturen (eller temperaturgradienten) på geometrins rand vid varje tidpunkt.

När $\partial T/\partial t = 0$ har vi uppnått en stationärlösning.

Numerisk behandling av värmeledningsekvationen i en dimension

Det finns analytiska tekniker för att lösa den tidsberoende värmeledningsekvationen, men dessa fungerar enbart i vissa situationer och kräver metoder som ingår i Fourier-analys, och faller därmed utanför ramen för vår kurs. Däremot kan vi konstruera en enkel numerisk metod för att lösa värmeledningsekvationen. Låt oss till att börja med att betrakta en endimensionell modell. Detta motsvarar en situation där vi har temperaturvariatoner endast i en riktning medan fältet inte varierar i de andra två riktningarna, t.ex. beroende på att utsträckningen kan betraktas som oändlig. Värmeledningsekvationen reduceras då till den endimensionella ekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u, \tag{2}$$

där x är avståndet från markytan. Vi delar nu in djupriktningen i m punkter, så att den första och sista punkten ligger på markytan respektive på det största djupet d. Med en linjär diskretisering ligger punkterna på ett avstånd $\delta x = d/(m-1)$ från varandra. Temperaturfältet kommer nu att representeras av dess värden i diskreta punkter $T(x_i, t) \equiv T_i(t)$. En enkel numerisk approximation till Laplacianen $\nabla^2 T$ i punkten x_i kan då skrivas

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\delta x^2}. \tag{3}$$

På samma sätt kan vi approximera tidsderivatan i punkten i med

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{T_i\left(t+\delta t\right) - T_i\left(t\right)}{\delta t}. \tag{4}$$

Detta ger oss differensekvationen

$$\frac{T_i\left(t+\delta t\right) - T_i\left(t\right)}{\delta t} = k\frac{T_{i+1}\left(t\right) - 2T_i\left(t\right) + T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2} + u_i\left(t\right), \tag{5}$$

där vi också har diskretiserat källtätheten $u(x_i, t) \equiv u_i(t)$.

Vi kan nu lösa ut $T_i(t+\delta t)$ och beräkna dess värde givet det diskretiserade temperaturfältet vid tiden t:

$$T_i\left(t+\delta t\right) = T_i\left(t\right) + \delta t k \frac{T_{i+1}\left(t\right) - 2T_i\left(t\right) + T_{i-1}\left(t\right)}{\delta x^2} + \delta t u_i\left(t\right). \tag{6}$$

Detta ger oss en enkel metod för att lösa (tidsintegrera) värmeledningsekvationen.

Vad som nu återstår att göra är att bestämma en bra storlek på tidssteget δt. Om δt blir för stor blir nämligen vår algoritm instabil. För stabilitet krävs ett tidssteg

$$\delta t = K\frac{\delta x^2}{k}, \tag{7}$$

där K skall vara av storleksordningen 0.25–0.5. Det syns tydligt om algoritmen blir instabil, eftersom temperaturen i så fall snabbt kommer att bli orimligt hög i någon punkt. Vårt uttryck för δt visar också på begränsningen med vår metod. Tidssteget kommer att bli väldigt kort om vi behöver ett kort avstånd mellan våra punkter. Mer sofistikerade metoder används ofta i professionella beräkningar.

Uppgift 1-1: Endimensionell temperaturfördelning med Dirichlets randvillkor

Skriv ett Matlab- (eller Python-) program för att studera temperaturfördelningen i marken givet följande: Vi betraktar området från markytan ner till ett tjälfritt djup på 1.0 meter där temperaturen alltid är 0 °C. Vi är intresserade av uppkomsten av en stationär lösning som uppnås efter en viss tid. Antag att hela marken vid starttidpunkten ($t = 0$) håller temperaturen 0 °C förutom ytan vid $x = 0$ där tempteraturen är fix -10 °C. I denna första uppgift finns det ingen värmekälla i det aktuella området. Vi antar att vi har Dirichlets randvillkor så att ytan och den djupaste punkten håller sin respektive konstanta temperatur. Vi antar vidare att jorden är leraktig och att de relevanta materialegenskaperna har följande numeriska värden: densiteten $\rho = 1500\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, värmeledningsförmåga $\lambda = 1.0\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, värmekapacitivitet $c = 1000\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (om ni söker själva i tabeller eller digitala källor så inser ni säkert att markens termiska egenskaper beror ganska mycket på jordens sammansättning).

Lös det tidsberoende problemet numeriskt och finn den stationära lösningen där temperaturfördelningen inte längre ändras nämnvärt. Bestäm även den stationära temperaturfördelningen analytiskt och jämför detta med ert numeriska resultat.

Redovisning.

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfätet.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.

- Jämför med den analytiska lösningen för att kontrollera er numeriska lösning.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.
- Ni kommer att finna att värme strömmar in genom den ena ändpunken och ut genom den andra. Beräkna (analytiskt eller numeriskt) det totala flödet ut ur området.

Goda råd: Börja med att bestämma hur många punkter ni skall använda, cirka 30 stycken torde räcka. Den första punkten kommer då att ligga på markytan och den sista motsvarar den djupaste punkten. Skapa sedan två vektorer *T_old* och *T_new*, som båda har lika många element som antalet diskretiseringspunkter. *T_old* skall få lagra temperaturen vid den gamla tidpunkten, medan *T_new* kommer att innehålla temperaturen vid den nya tidpunkten, vilken i sin tur beräknas ur Ekv. (6). Vid starten måste du alltså sätta *T_old* till glasrutans temperaturfördelning vid $t = 0$. Detta är enkelt att göra om du använder funktionen `zeros(m)`, som ger dig en flyttalsvektor med m element, som alla är 0, och sedan kan du bara ändra på temperaturen i den första punkten. Beräkna sedan övriga konstanter som du behöver.

Konstruera en loop som tar små tidssteg och beräknar *T_new* ur *T_old* enligt Ekv. (6), men kom ihåg att de första och sista punkterna i *T_new* bestäms av randvillkoren. Fundera på ett bra villkor för att definiera när stationärlösningen har uppnåtts så att loopen avbryts. Tänk på att i slutet av varje tidssteg, när hela *T_new* är beräknad, måste du tilldela *T_old* = *T_new* har eftersom det blir situationen vid starten på nästa tidssteg.

Vi har nu löst värmeledningsekvationen för en dimension med randvillkoret att temperaturen är konstant på randpunkterna. Detta är ett exempel på ett Dirichletvillkor. I ett värmeledningsproblem betyder detta att värmeströmmen genom randen anpassas så som krävs för att den skall behålla samma temperatur. En annan möjlighet skulle vara att randen är isolerad på ett sådant sätt att ingen värme kan tas emot eller avges till omgivningen. Det betyder att värmeströmmen, $-\lambda dT/dx$ är noll på randen, alltså måste dT/dx försvinna där. Sådana randvillkor kallar vi för Neumann-villkor.

Uppgift 1-2: Endimensionell temperaturfördelning med värmekälla

Antag nu att det finns en konstant och homogen värmekälla s inuti marken. Lös värmeledningsekvationen för fallet att $s = 100\,\mathrm{W\,m^{-3}}$. Använd samma begynnelse- och randvillkor som i den första uppgiften. Bestäm dessutom analytiskt den stationära temperaturfördelningen.

Redovisning.

- Gruppens rapport skall innehålla en figur som visar tidsförloppet för temperaturfältet.
- Det skall framgå hur snabbt tidsförloppet är och vilket kriterium ni har använt för att definiera att stationärlösningen har uppnåtts.
- Jämför med den analytiska lösningen för att kontrollera er numeriska lösning.
- Redovisa kortfattat härledningen av den analytiska lösningen i rapporten.
- Ni kommer att finna att värme strömmar ut genom bägge ändpunkterna. Beräkna (analytiskt eller numeriskt) det totala flödet ut ur området.