

Laborationsrapport

TIF083C - Avancerad Elektrisk Mätteknik.
Våren 2022

Laborationsnamn: Brus och stör

Uppgiftsnummer: Uppgift 4

Antal sidor: 20

Antal ord: 1581

Studentnamn: Oscar Litorell

KursID: Y19. Email: litorell@student.chalmers.se

Studentnamn: Jonatan Haraldsson

KursID: Y15. Email: jonhara@student.chalmers.se

Information: Vi har genomfört samtliga uppgifter.

Förstudieinlämning: 2022-04-14

Förstudiesamtal: 2022-04-20

Laboration: 2022-04-22

Analys av brusiga signaler med lock-in-förstärkare

Oscar Litorell (litorell), Jonatan Haraldsson (jonhara)

Experimentell fysik, TIF083, del C.

Teknisk fysik, Chalmers

Sammandrag

Denna rapport ger teoretisk bakgrund samt beskrivning av metod och resultat då en lock-in-förstärkare användes för att analysera brusiga mätsignaler med känd frekvens. Först extraherades en dold signals amplitud och fas från en brusig signal genererad i en ”svart låda”. Därefter bestämdes en glasbits brytningsindex med upp till en decimals noggrannhet genom att mäta svaga ljusintensiteter från reflexion vid brewstervinkel. Slutligen användes lock-in-förstärkaren som AC-voltmeter för att analysera Johnson-brus i en resistor samt jämföra med Nyquists lag om termiskt brus.

Innehåll

1 Inledning	1
2 Teori	1
2.1 Uppgift betyg 3	1
2.2 Uppgift betyg 4	2
2.3 Uppgift betyg 5	5
2.3.1 Mätning av inre bruskällor	6
2.3.2 Nyquists lag för termiskt brus	6
3 Metod	7
3.1 Uppställning	7
3.1.1 Uppgift betyg 3	7
3.1.2 Uppgift betyg 4	7
3.1.3 Uppgift betyg 5	8
3.2 Utförande	9
3.2.1 Uppgift betyg 3	9
3.2.2 Uppgift betyg 4	9
3.2.3 Uppgift betyg 5	9
4 Resultat och diskussion	9
4.1 Uppgift betyg 3	10
4.2 Uppgift betyg 4	10
4.3 Uppgift betyg 5	11
A Källkod för grafer teori Python	13

1 Inledning

Brus och stör är sammanfattande begrepp för slumpmässiga signaler som påverkar hur noggrant signaler kan mätas. Brus är mer eller mindre oundvikligt, då det alltid förekommer oscillationer hos atomer i material. Störsignaler har istället att göra med försökets uppställning samt ytterligare faktorer exempelvis signaler från lampor, radiovågor eller vibrationer. Metoder som extra hämtar mätsignalen från brus och stör är särskilt viktiga då svaga signaler ska mätas. Om mätsignalens frekvens är känd ger instrumentet lock-in-förstärkare goda möjligheter att eliminera brus genom att bilda tidsmedelvärdet över mätsignalen. Lock-in-förstärkaren ger då information om mätsignalens amplitud och fas i förhållande till en känd referenssignal.

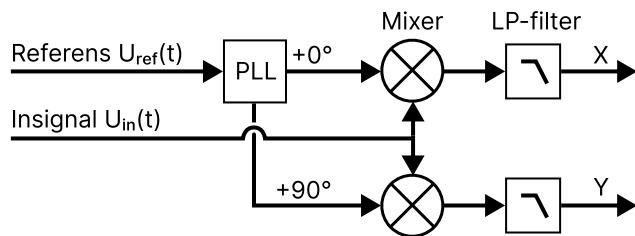
I denna rapport presenteras teoretisk bakgrund, metod och resultat då lock-in-förstärkaren *SR530* användes för att analysera brusiga mätsignaler.

2 Teori

I följande avsnitt presenteras teorin bakom de uppgifter som ska lösas.

2.1 Uppgift betyg 3

Lock-in-förstärkare används till att förstärka svaga och brusiga signaler när det finns en starkare och mindre brusig signal med samma frekvens tillgänglig. Kort sagt elimineras bruset genom att beräkna den brusiga signalens genomsnitt över en period. Följande blockdiagram (figur 1) beskriver funktionaliteten:



Figur 1: Blockdiagram över lock-in-förstärkaren. PLL-blocket (phase locked loop) skapar två signaler med 90 grader fasskillnad synkroniserade med referenssignalen, och mixern multiplicerar signalerna. Lågpassfiltret tar bort högre frekvenser för att i princip lämna en DC-signal. Det förekommer även förstärkarsteg på slutet och på insignalen.

Lock-in-förstärkaren multiplicerar insignalen med två olika signaler som är 0° respektive 90° ur fas med referenssignalen (vinkelfrekvens ω_0), och sedan lågpassfiltrera med tidskonstant T , vilket kan ses som att ta ett viktat medelvärde av signalens senaste värden:

$$X(t) = (u_{in}(t) \cos \omega_0 t) * \left(\frac{1}{T} e^{\frac{-t}{T}} \theta(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{in}(\tau) \cos \omega_0 \tau \left(\frac{1}{T} e^{\frac{\tau-t}{T}} \theta(t-\tau) \right) d\tau \quad (1)$$

$$Y(t) = (u_{in}(t) \sin \omega_0 t) * \left(\frac{1}{T} e^{\frac{-t}{T}} \theta(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{in}(\tau) \sin \omega_0 \tau \left(\frac{1}{T} e^{\frac{\tau-t}{T}} \theta(t-\tau) \right) d\tau \quad (2)$$

$$X(t) - iY(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{in}(\tau) \left(\frac{1}{T} e^{\frac{\tau-t}{T}} \theta(t-\tau) \right) e^{-i\omega_0 t} d\tau \quad (3)$$

$$= \mathcal{F} \left\{ u_{in}(\tau) \cdot \left(\frac{1}{T} e^{\frac{-\tau}{T}} \theta(\tau) \right) \right\} (\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ u_{in}(\tau) \} * \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{T} e^{\frac{-\tau}{T}} \theta(\tau) \right\} (\omega_0) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\hat{U}_{in}(\omega) * \frac{e^{-i\omega t}}{1 - i\omega T} \right) (\omega_0) \quad (5)$$

Insättning av $u_{in}(t) = u_0 \cos(\omega_1 t)$ ger

$$X(t) + iY(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_0+\omega_1)t}}{1 + i(\omega_0 + \omega_1)T} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega_1)t}}{1 + i(\omega_0 - \omega_1)T} \right) \quad (6)$$

Om $\omega_1 \neq \omega_0$, det vill säga att insignalen och referenssignalen har olika frekvens, kommer detta gå mot 0 när $T \rightarrow \infty$, men om $\omega_1 = \omega_0$ kommer istället följande gälla:

$$X(t) + iY(t) = \frac{1}{2} u_0 \left(1 + \frac{e^{2i\omega t}}{1 + 2i\omega T} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{u_0}{2}. \quad (7)$$

Lock-in-förstärkaren plockar alltså endast ut amplituden på den komponenten av insignalen med samma frekvens som referenssignalen, givet att tidskonstanten är tillräckligt stor.

$X(t) + iY(t)$ kan även representeras på polär form $R(t)$ och $\Theta(t)$.

2.2 Uppgift betyg 4

I denna uppgift ska lock-in-förstärkaren användas för att bestämma en glasbits brytningsindex genom att mäta brewstervinkelns. När ljus infaller snett mot en gränsyta mellan två medier av olika brytningsindex (n_1 och n_2) ges relationen mellan ljusets infallsvinkel, θ_i , och transmissionsvinkel, θ_t av

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (8)$$

För ljus polariserat parallellt med infallsplanet (p-polariserat) ges andelen intensitet som reflekteras av

$$R_{//} = \left| \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 \quad (9)$$

medan den för ljus polariserat vinkelrätt (s-polariserat) är

$$R_{\perp} = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2. \quad (10)$$

Tillsammans med ekvation 8 kan R_{\parallel} och R_{\perp} skrivas som funktioner av infallsvinkelns θ_i enligt

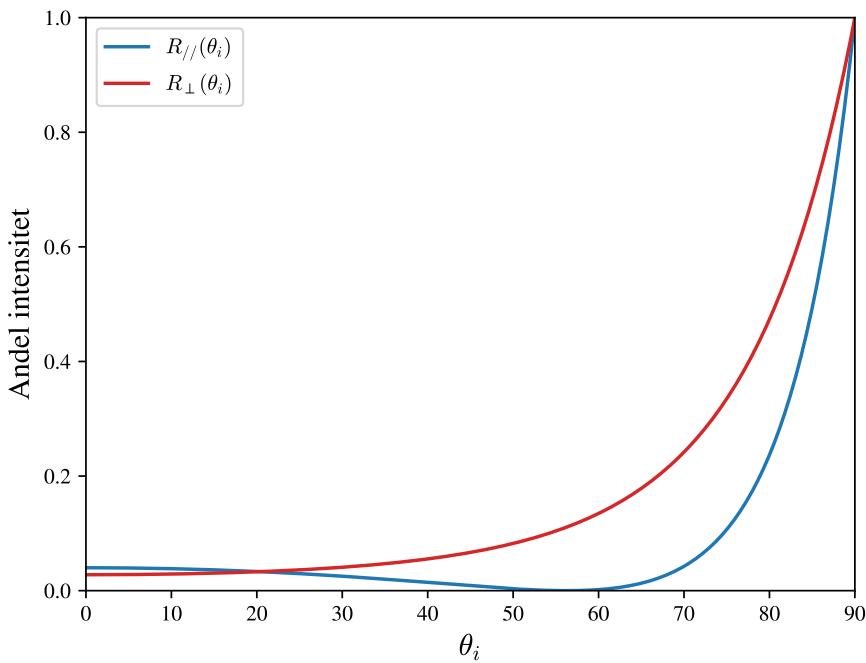
$$R_{\parallel}(\theta_i) = \left| \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n}\right)^2} - n \cos \theta_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n}\right)^2} + n \cos \theta_i} \right|^2 \quad (11)$$

och

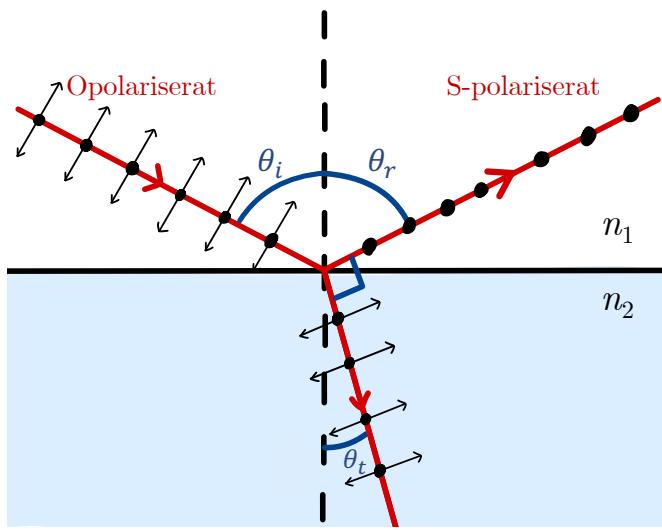
$$R_{\perp}(\theta_i) = \left| \frac{\cos \theta_i - n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n}\right)^2}}{\cos \theta_i + n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n}\right)^2}} \right|^2. \quad (12)$$

För att jämföra reflexionen hos de två polarisationsriktningarna visas dess grafer i figur 2. Det värde på θ_i som ger $R_{\parallel}(\theta_i) = 0$ definieras som brewstervinkeln θ_B (se figur 3). Vid brewstervinkeln gäller även att reflekterad och transmitterad stråle är vinkelräta, vilket ger sambandet

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 = n_1 \tan \theta_B. \quad (13)$$



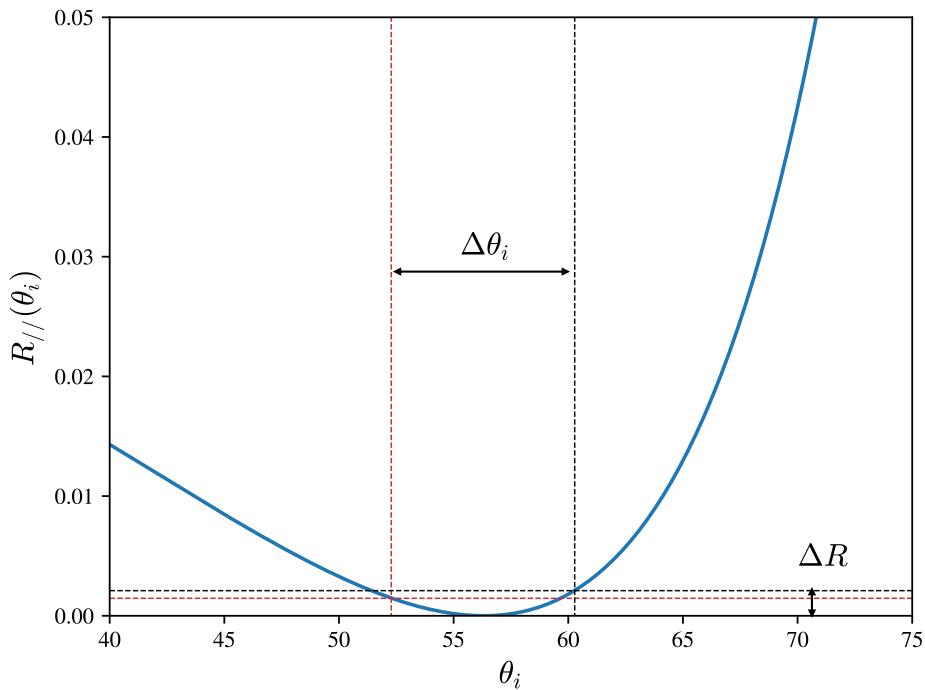
Figur 2: I figuren visas andelen ljus som reflekteras för både polarisationer. Det framkommer av graferna att endast reflexionen för p-polariserat ljus är noll vid brewstervinkeln $\theta_i = \theta_B$.



Figur 3: Figuren visar relationen mellan vinklarna då opolariserat ljus infaller mot en gränsyta med brewstervinkeln $\theta_i = \theta_B$. De elektriska fältets komponenter är utritade i svart och efter reflexion återstår endast fältkomponenten vinkelrätt mot infallsplanet (s-polariserad). Vinkeln θ_t ges av ekvation 8.

Givet att brytningindex ska bestämmas med felsmarginalen Δn kan ett vinkelintervall $\Delta\theta_i$ erhållas genom att derivera ekvation 13. Då kringliggande medium är luft gäller $n_1 = n_{\text{luft}} = 1$ och $n_2 := n$ och intervallet $\Delta\theta_i$ blir då

$$\Delta\theta_i = \Delta n \cos^2 \theta_B (\approx 0,88^\circ, \text{ då } n = 1,5). \quad (14)$$



Figur 4: I figuren visas grafen för $R_{//}(\theta_i)$ med $n = 1,5$ kring dess nollställe. Intervallet $\Delta\theta_i$ har markerats och dess intervallgränser har markerats med rött respektive svart. Vidare har horisontella linjer ritats för funktionsvärdet på intervallgränserna. Det framgår av figuren att det högra funktionsvärdet är större, vilket gör att $\Delta R = R_{//}(\theta_B + \Delta\theta_i/2)$.

2.3 Uppgift betyg 5

I denna uppgift ska termiskt brus i resistorer, Johnson-brus, mäts, där brusets intensitet mäts för en specifik frekvens.

Figur 5 visar hur detta mäts med lock-in-förstärkaren. v_n är resistorns termiska bruskälla, e_B och i_B modellerar det spännings- respektive strömsbrus som finns i lock-in förstärkaren. För att beräkna spänningen U_{in} (som går in till LIA:ns mixer) kan bidragen från de olika bruskällorna superponeras, dock måste de kvadreras enligt

$$U_{in}^2 = v_n^2 |G_{v_n}(j\omega)|^2 + e_B^2 |G_{e_B}(j\omega)|^2 + i_B^2 |G_{i_B}(j\omega)|^2. \quad (15)$$

Genom att nollställa v_n och i_B blir överföringsfunktionen för e_B

$$G_{e_B}(j\omega) := \frac{\partial U_{in}(j\omega)}{\partial e_B(j\omega)} = 1. \quad (16)$$

Nollställning av e_B och i_B ger med spänningsdelning:

$$G_{v_n}(j\omega) := \frac{\partial U_{in}(j\omega)}{\partial v_n(j\omega)} = \left\{ Z_1 := R_i // \frac{1}{j\omega C_{ext}} // \frac{1}{j\omega C_i} \right\} = \frac{Z_1}{R_{ext} + Z_1}. \quad (17)$$

Nollställning av v_n och e_B ger:

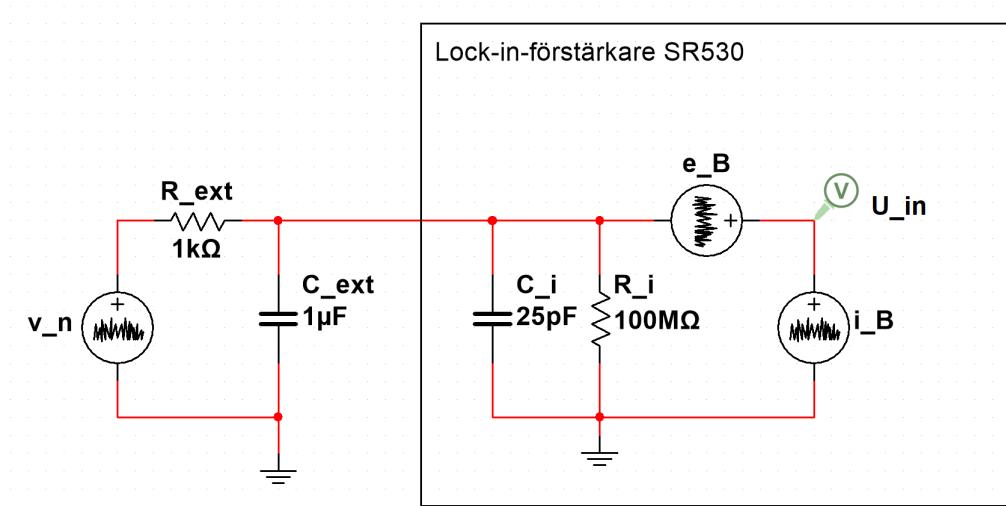
$$G_{i_B}(j\omega) = \frac{U_{in}(j\omega)}{i_B(j\omega)} = \left\{ Z_2 := R_{ext} // R_i // \frac{1}{j\omega C_{ext}} // \frac{1}{j\omega C_i} \right\} = Z_2. \quad (18)$$

Insättning av (16), (17) och (18) i (15) ger att

$$U_{in}^2 = v_n^2 \left| \frac{Z_1}{R_{ext} + Z_1} \right|^2 + e_B^2 + i_B^2 |Z_2|^2 \quad (19)$$

$$\implies v_n^2 = (U_{in}^2 - e_B^2 - i_B^2 |Z_2|^2)^2 \left| \frac{R_{ext}}{Z_1} + 1 \right|^2 \quad (20)$$

$$= R_{ext} \left((U_{in}^2 - e_B^2) \cdot \left(\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + \omega^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right) - i_B^2 \right). \quad (21)$$



Figur 5: Kopplingsschema för uppgift 5. R_{ext} är resistansen som kopplas in, och C_{ext} är kapacitansen hos BNC-kabeln, i regel runt 50-100 pF/m[1].

2.3.1 Mätning av inre bruskällor

Inre bruskällor mäts med resistorn R_{ext} bortkopplad. Genom att kortsluta signalingången till jord bidrar endast e_B ($U_{in} = e_B$). Efter att e_B bestämts kan i_B bestämmas (med öppen signalingång):

$$U_{in}(j\omega)^2 = \left| i_B(j\omega) \cdot \left(R_i \parallel \frac{1}{j\omega C_i} \right) \right|^2 + e_B(j\omega)^2 \quad (22)$$

$$\implies i_B^2 = \left(\frac{1}{R_i^2} + (\omega C_i)^2 \right) (U_{in}^2 - e_B^2). \quad (23)$$

2.3.2 Nyquists lag för termiskt brus

I teorin borde v_n^2 följa Nyquists lag för termiskt brus, som säger

$$v_n^2 = 4k_B T R_{ext} \Delta f, \quad (24)$$

där $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K är Boltzmanns konstant, T är resistorns temperatur i Kelvin och Δf är bandbredden (ENBW) hos LIA:ns lågpassfilter.

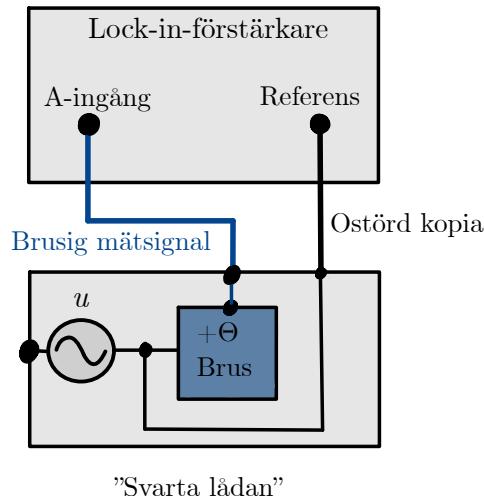
3 Metod

I avsnittet presenteras uppställningar samt tillvägagångssätt för laborationen.

3.1 Uppställning

3.1.1 Uppgift betyg 3

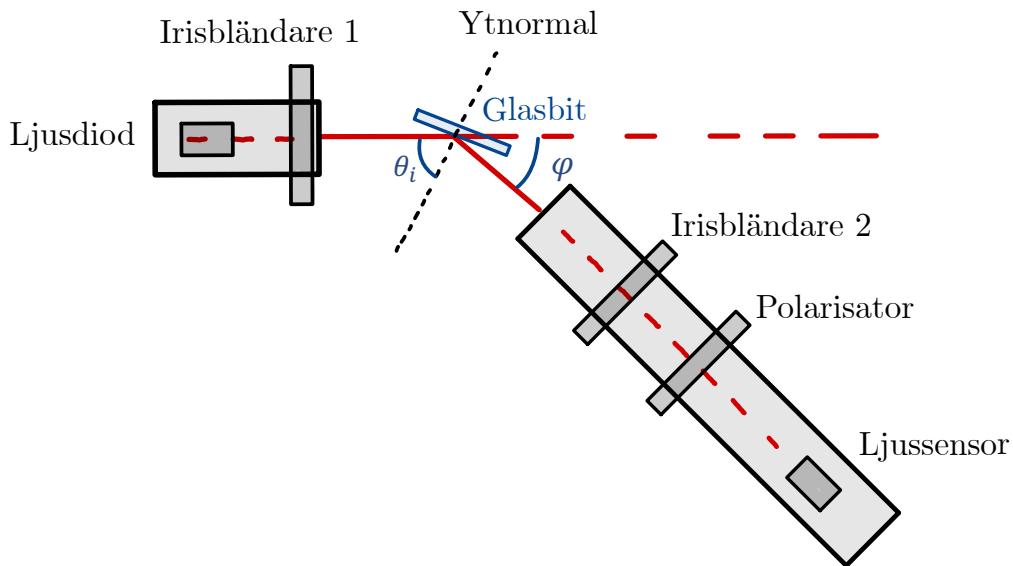
En skiss över uppställningen i uppgift 3 visas i figur 6. Den ”svarta lådan” drivs med nätkontakt ($230\text{ V } \sim, 50\text{ Hz}$) och ger en referens- och mätsignal. Från ”lådan” kopplas mätsignalen in på lock-in-förstärkarens A-ingång, medan ostörda referenssignaler kopplas till referensingången.



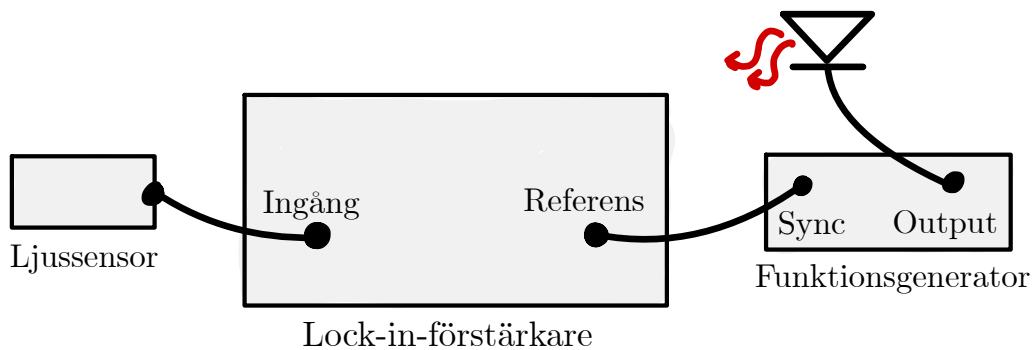
Figur 6: Figuren visar skiss över uppställningen i uppgift 3. Till ”svarta lådan” kopplas vanlig nätkontakt ($230\text{ V } \sim, 50\text{ Hz}$). I ”lådan” genereras en referenssignal u , vilken delas upp i en ostörd kopia och en del där brus och fas adderas. Från ”svarta lådan” kopplas den ostörda kopian med koaxialkabel till lock-in-förstärkarens referensingång och den brusiga mätsignalen med koaxialkabel till lock-in-förstärkarens A-ingång.

3.1.2 Uppgift betyg 4

Uppställningen i uppgift 4 visas i figur 7 och utgörs av ett optikbord med vinkelmätare med nonieskala. På optikbordet finns en ljusdiod, två irisbländare, en roterbar polarisator, en ljussensor och glasbiten. I uppställningen kan φ och θ_i varieras, men eftersom infalls- och reflexionsvinkelarna är lika gäller $\varphi = 180^\circ - 2\theta_i$. Hur uppställningen kopplats visas i figur 8.



Figur 7: I figuren visas en schematisk bild över försökets uppställning. Ljuset från dioden passerar en irisbländare och reflekteras sedan på glasbiten. Därefter passerar ljuset ytterligare en irisbländare och en polarisator innan ljusintensiteten registreras med ljussensorn. Irisbländare 2 har ställts in med aperturen 1 mm.



Figur 8: I figuren visas hur ljussensorn och funktionsgeneratoren kopplas till lock-in-förstärkaren ingång respektive referens. Dessa kopplas samman med koaxialkablar.

3.1.3 Uppgift betyg 5

I denna uppgift kopplas funktionsgeneratornens sync-utgång till lock-in-förstärkarens referensingång. Beroende på vilken mätning som utförs kopplas antingen en kortslutningskontakt, en öppen kontakt eller resistorn med eller utan kabel till A-ingången på lock-in-förstärkaren. Dessutom används en bögare med flytande kväve som resistorn doppas i.

3.2 Utförande

3.2.1 Uppgift betyg 3

Innan uppgift 3 påbörjades verifierades att lock-in-förstärkaren gav förväntade värden på amplitud och frekvens jämfört med ett oscilloskop. Detta gjordes genom att koppla funktionsgeneratorn till lock-in-förstärkarens A-ingång samt sync till referens.

Efter att uppställningen kopplats upp sattes lock-in-förstärkaren i $R\Theta$ -läget för att tydligare kunna observera fas och amplitud hos mätsignalen. För att erhålla ett tydligt resultat ökades tidskontanten successivt från 1 s till 100 s.

3.2.2 Uppgift betyg 4

Inledningsvis monterades uppställningen, höjden på alla de optiska komponenterna justerades till samma nivå och funktionsgeneratorn ställdes in på 5 V (p-to-p) och 130 Hz. Frekvensen 130 Hz användes för att undvika att ljuset från takbelysningen på 100 Hz interfererar ljusdiodens frekvens. Därefter undersöktes ljussensorns maxamplitud då den belystes genom polarisatorn utan närvarande av glasbit.

För att säkerställa att ljuset från lysdioden alltid riktades rakt mot sensorn placerades lysdioden så att $\varphi = 90^\circ$ och därefter justerades θ_i till det värde som gav högst amplitud (utan polarisationsfilter). Skillnaden mellan den uppmätta vinkeln och 45° antecknades, och användes därefter som offset i senare mätningar.

Därefter sattes vinklarna $\theta_i = 55^\circ$ och $\varphi = 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$, vilket är ett närmevärde till brewstervinkelns då $n = 1,5$. Infallsvinkeln θ_i varierades mellan 55° - 58° och samtidigt varierades även φ för att uppfylla $\varphi = 180^\circ - 2\theta_i$. För varje värde på vinklarna avlästes amplituden på lock-in-förstärkaren, vilken ställdes in i $R\Theta$ -läge och hade en tidskonstant satt till $T = 3$ s. Till mätvärdena anpassades ett andragradspolynom med Microsoft Excel och från polynomets minima erhölls brewstervinkelns θ_B .

3.2.3 Uppgift betyg 5

I denna uppgift bestämdes inledningsvis lock-in-förstärkarens interna spännings- och strömsinus (e_B och i_B), se figur 5. För samtliga mätningar användes frekvensen 1,0 kHz. Lock-in-förstärkaren sattes i X - Y -noiseläget och bandbredden, ENBW, $\Delta f = 10$ Hz.

För att mäta spänningsbruset e_B kopplades A-ingången till jord med en kortslutnings-BNC-kontakt. Från mätvärdena X och Y , vilka avlästes på lock-in-förstärkaren, erhölls $e_B^2 = X^2 + Y^2$. Strömsinuset i_B mätttes genom att koppla en öppen BNC-kontakt som skärmade av interferens till A-ingången på lock-in-förstärkaren. X och Y avlästes på skärmen och från ekvation 23 beräknades i_B .

Slutligen kopplades resistorn $R_{ext} = 1 \text{ M}\Omega$ in till A-ingången med en BNC-kabel. Kabelns kapacitans C_{ext} mätttes med en kapacitansmätande multimeter. Ett värde på v_n^2 erhölls sedan från mätvärdena X och Y samt genom ekvation 21. Samma experiment upprepades med resistorn nedsänkt i en kopp med flytande kväve (77 K).

4 Resultat och diskussion

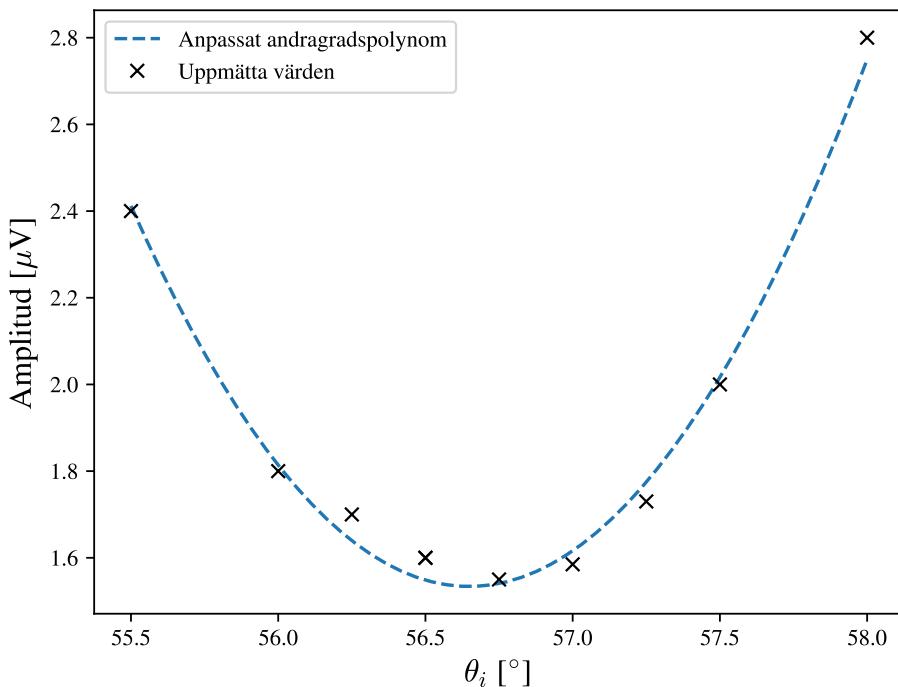
Här presenteras laborationens resultat med tillhörande diskussion.

4.1 Uppgift betyg 3

I denna uppgift lyckades den dolda signalen amplitud och fas i ”svarta lådan” extraheras med lock-in-förstärkaren. Från ”lådan” gavs en referensignal på 568 Hz och samma värde erhölls då referenssignalen kopplades direkt till ett oscilloskop. Den dolda signalens amplitud och fas fluktuerade smärt kring $21,5 \mu\text{V}$ respektive 140° . Större tidskonstanter gav stabilare värden, vilket bekräftar att mer brus elimineras.

4.2 Uppgift betyg 4

Resultatet från uppgift 4 presenteras i figur 9. Till mätdatan har ett andragradspolynom anpassats och vid interpolationspolynoms minimum erhölls värdet $\theta_B = 56,65^\circ$ på brewstervinkeln. Från θ_B bestämdes glasets brytningsindex till $n = 1,52 \pm 0,014$, där felsmarginalen $\Delta n = 0,014$ är mindre än den efterfrågade $\Delta n = 0,5$.



Figur 9: I figuren visas resultatet från brewstermätningen. De svarta markörerna är de uppmätta värdena medan den streckade linjen är ett anpassat andragradspolynom.

Varför polynomet i figur 9 inte blir noll vid brewstervinkeln kan bero på flera faktorer. Att polarisatorn är icke-ideal samt att den ej roterats helt till rätt läge kan ha bidragit till att ljus i motsatt polarisationsriktning nådde ljussensorn. Enligt figur 2 ger det att θ_B blev något för liten. Hur noggrant θ_B kunde bestämmas påverkades sannolikt också av att glasbiten inte var helt rak i hållaren, vilket medför att infalls- och reflexionsvinkel inte var lika och att strålen kan ha hamnat förskjutet i förhållande till sensorn.

Vidare var uppställningen i sig känslig för yttere påverkan. Om laboranternas exempelvis skuggade ljussensorn eller stötte till bordet påverkades amplituden på intensiteten. En förbättring till framtida experiment kan således vara att utföra mätningarna i en mörk

omgivning samt att uppställningen står på ett stabilare bord. En metod för att bättre säkerställa att ljuspunkten hamnar i mitten på ljussensorn hade också varit önskvärt, då detta upplevdes svårt under laborationen.

4.3 Uppgift betyg 5

BNC-kabelns kapacitans uppmättes till 56 pF.

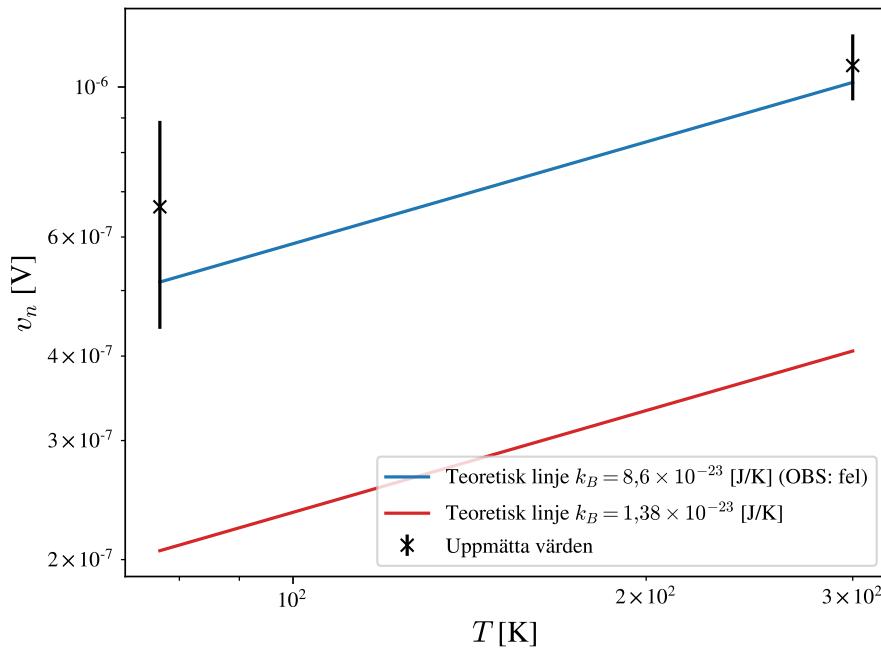
För 300 K varierade x_{noise} och y_{noise} mellan 600 nV och 750 nV, vilket enligt ekvation 15 ger v_n mellan 960 nV och 1200 nV. För 77 K varierade x_{noise} och y_{noise} mellan 280 nV och 560 nV vilket gav v_n mellan 440 nV och 890 nV. Ekvation 24 ger ett teoretiskt värde på $v_n = 407$ nV för 300 K och $v_n = 206$ nV för 77 K. Detta innebär att det uppmätta resultatet var 2-4 gånger så stort som det teoretiska, dock så minskade fortfarande brusnivån med roten ur temperaturen.

En potentiell källa till felet skulle kunna vara att LIA:ns inre bruskällor inte kan modelleras på det sättet som antas i figur 5.

En annan möjlig källa till detta fel skulle kunna vara interferens från annan elektronik som drivs av nätpänningen, då experimentets frekvens 1000 Hz är en överton till näts frekvens på 50 Hz.

Under laborationen beräknades v_n , dock hade det felaktiga värdet $k_B = 8,6 \times 10^{-23}$ J/K använts, vilket gav teoretiska värden som stämde överens med de uppmätta (se figur 10). På grund av detta gjordes inga ytterligare kontrollmätningar för att felsöka den stora skillnaden mellan uppmätta och teoretiska värden.

Brusnivån varierade långsamt i alla mätningar i relativt stora intervall (upp mot 15 s). För att få en mer exakt nivå på bruset hade det hjälpt att ta ett medelvärde av de senaste sekunderna med exempelvis ett oscilloskop. Detta kan också ha bidragit till att värdena för e_B och i_B var lite fel, som sedan förstärkte felet i v_n när det beräknades med ekvation 21.



Figur 10: I figuren visas resultatet brusets amplitud v_n i förhållande till temperaturen T . I grafen är axlarna logaritmiska. Det noteras att mätvärdena stämde bättre överens med teorin om det felaktiga värdet $k_B = 8,6 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ används.

Referenser

- [1] Digi-Key, BNC Cable Data Sheet 0510
https://media.digikey.com/pdf/Data%20Sheets/TPI%20PDFs/BNC_Cable_Assemblies.pdf
- [2] Stanford Research Systems, About Lock-In Amplifiers
<https://www.thinksrs.com/downloads/pdfs/applicationnotes/AboutLIAs.pdf>

Bilagor

A Källkod för grafer teori Python

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# LaTeX font
plt.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
plt.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'
x = np.linspace(0,90,1000)

for i in range(0,5):
    n=1.4+i*0.05

    R = (np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)-n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
    / (np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)+n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
    Rp = (n*np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)-np.cos(np.deg2rad(x)))**2
    / (n*np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)+n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
    plt.figure(1)
    plt.plot(x,R,linewidth = 1.4)
    plt.xlabel('$\theta_i$', fontsize=14)
    plt.ylabel('$R_{//}(\theta_i)$', fontsize=14)
    plt.legend(['$n=1,4$', '$n=1,45$', '$n=1,5$', '$n=1,55$', '$n=1,6$'])
    plt.xlim(0,90)
    plt.ylim(0,1)

n=1.5
R = (np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)-n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
/ (np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)+n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
Rp = (n*np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)-np.cos(np.deg2rad(x)))**2
/ (n*np.sqrt(1-np.sin(np.deg2rad(x))**2/n**2)+n*np.cos(np.deg2rad(x)))**2
dth = 4
thmin = (56.28-dth)*np.ones(len(x))
thmax = (56.28+dth)*np.ones(len(x))
I = np.linspace(-.2,1.2,len(x))
dI1 = 0.00146*np.ones(len(x))
dI2 = 0.0021*np.ones(len(x))

plt.figure(2)
plt.plot(x,R,'tab:blue', linewidth = 1.6)
plt.plot(x, Rp, 'tab:red', linewidth = 1.6)
plt.xlabel('$\theta_i$', fontsize=14)
plt.ylabel('Andel intensitet', fontsize=14)
plt.legend(['$R_{//}(\theta_i)$', '$R_{\perp}(\theta_i)$'])
plt.xlim(0,90)

```

```
plt.ylim(0,1)
plt.figure(3)
plt.plot(x,R,'tab:blue',linewidth = 1.6)
plt.plot(thmin,I,'tab:red',linestyle='dashed',linewidth = 0.65)
plt.plot(x,dI1,'tab:red',linestyle='dashed',linewidth = 0.65)
plt.plot(x,dI2,'k--',linewidth = 0.65)
plt.plot(thmax,I,'k--',linewidth = 0.65)
plt.xlim(40,75)
plt.ylim(0,.05)

plt.xlabel('$\theta_i$', fontsize=14)
plt.ylabel('$R_{//}(\theta_i)$', fontsize=14)
plt.text(70,0.004,'$\Delta R$', fontsize=14)
plt.text(56.28-1,0.03,'$\Delta \theta_i$', fontsize=14)

plt.show()

print(np.rad2deg(0.05*(np.cos(np.arctan(1.5))))**2))
```

Mer detaljerade beräkningar för uppgift 3

$$U_{in}(t) = U_0 \cos(w_0 t)$$

$$X(t) = (U_{in}(t) \cos w_0 t) * \left(\frac{1}{T} e^{\frac{-t}{T}} \theta(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\tau) \cos(w_0 \tau) \left(\frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right) d\tau$$

$$Y(t) = (U_{in}(t) \sin w_0 t) * \left(\frac{1}{T} e^{\frac{-t}{T}} \theta(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\tau) \sin(w_0 \tau) \left(\frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right) d\tau$$

$$X(t) - i Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\tau) \left(\frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right) (\cos(w_0 \tau) - i \sin(w_0 \tau)) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_{in}(\tau) \left(\frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right) e^{-iw_0 \tau} d\tau$$

$$\mathcal{F} \{ A(t) \cdot B(t) \} = \frac{1}{2\pi} \hat{A} * \hat{B}$$

$$= \mathcal{F} \left\{ U_{in}(\tau) \cdot \left(\frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right) \right\}(w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_\tau \{ U_{in}(\tau) \} * \mathcal{F}_\tau \left\{ \frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) \right\}(w)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\hat{U}_{in}(w) * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{\frac{T-\tau}{T}} \theta(t-\tau) e^{-iw\tau} d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t e^{\frac{T-t}{T}} e^{-iw\tau} d\tau = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T} \int_{-\infty}^t e^{\tau \left(\frac{1}{T} - iw \right)} d\tau = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{1-iwT} \left[e^{\tau \left(\frac{1}{T} - iw \right)} \right]_{-\infty}^t$$

$$= \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{1-iwT} \frac{e^{\frac{t}{T}-iwt}}{e^{-iwt}} = \frac{e^{-iwt}}{1-iwT}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\hat{U}_{in}(w) * \frac{e^{-iwt}}{1-iwT} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_{in}(w-\xi) \cdot \frac{e^{-i\xi t}}{1-i\xi T} d\xi = \begin{cases} U_{in}(t) = \cos w_0 t \cdot u_0 \\ \hat{U}_{in}(\xi) = \pi (\delta(\xi + w_0) + \delta(\xi - w_0)) u_0 \end{cases} =$$

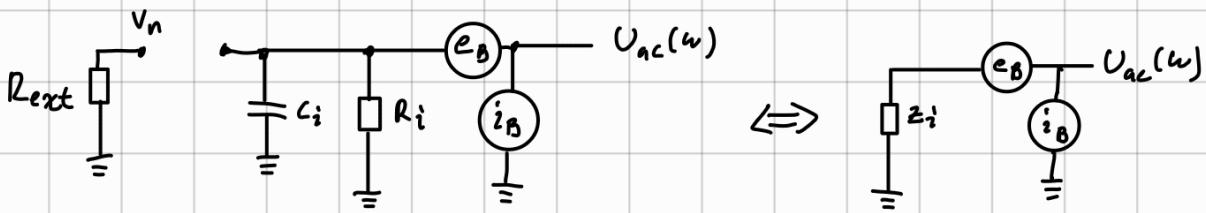
$$w_0 - \xi + w_0 = 0 \Rightarrow \xi = w_0 + w_1$$

$$w_0 - \xi - w_0 = 0 \Rightarrow \xi = w_0 - w_1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \left(\frac{e^{-i(w_0+w_1)t}}{1-i(w_0+w_1)T} + \frac{e^{-i(w_0-w_1)t}}{1-i(w_0-w_1)T} \right) \cdot u_0$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-i(w_0+w_1)t}}{1-i(w_0+w_1)T} + \frac{e^{-i(w_0-w_1)t}}{1-i(w_0-w_1)T} \right) \cdot u_0$$

Mer detaljerade uträkningar för uppgift 5



e_B : koppla ingång till jord och mät.

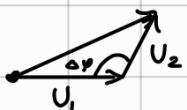
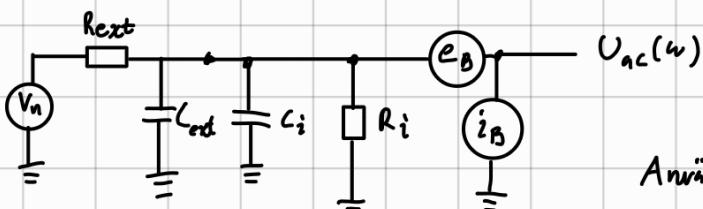
i_B : Mät utan kopplad ingång enligt nedan:

$$z_i = C_i // R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_i} + j\omega C_i} = \frac{R_i}{1 + j\omega R_i C_i}$$

$$|z_i \cdot i_B|^2 + e_B^2 = U_{ac}(w)^2 \Rightarrow i_B = \left| \frac{1}{R_i} + j\omega C_i \right| \sqrt{U_{ac}(w)^2 - e_B^2}$$

$$\Rightarrow i_B^2 = \left(\frac{1}{R_i^2} + (\omega C_i)^2 \right) (U_{ac}(w)^2 - e_B^2)$$

Inkopplad:



Använder superposition av kunderade spänningar. Motivering: Visardiagram, fasskillnad, cosinusssatsen, tidsmedeldvärdet.

Bidrag från V_n : ($e_B = i_B = 0$)

$$U_{ac}(w) = V_n \frac{\frac{1}{j\omega C_{ext}} // \frac{1}{j\omega C_i} // R_i}{R_{ext} + \left(\frac{1}{j\omega C_{ext}} // \frac{1}{j\omega C_i} // R_i \right)} = V_n \left[1 + R_{ext} \left(\frac{1}{R_i} + j\omega (C_i + C_{ext}) \right) \right]^{-1}$$

$$\left| \frac{U_{ac}}{V_n} \right|^2 = \left| 1 + R_{ext} \left(\frac{1}{R_i} + j\omega (C_i + C_{ext}) \right) \right|^{-2} = \left[\left(1 + \frac{R_{ext}}{R_i} \right)^2 + (R_{ext} \omega (C_i + C_{ext}))^2 \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{R_{ext}^2} \left[\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + \omega^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right]^{-1}$$

Bidrag från i_B : ($V_n = e_B = 0$)

$$U_{ac}(w) = i_B \left| R_{ext} // R_i // \frac{1}{j\omega C_{ext}} // \frac{1}{j\omega C_i} \right|$$

$$\left| \frac{U_{ac}}{i_B} \right|^2 = \left| \frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} + j\omega (C_{ext} + C_i) \right|^{-2} = \left[\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + \omega^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right]^{-1}$$

Bidrag från e_B : ($V_n = i_B = 0$)

$$\left| \frac{U_{ac}}{e_B} \right|^2 = 1$$

Superponera brusbidrag: ($V_n \neq 0, e_B \neq 0, i_B \neq 0$)

$$U_{ac}(w)^2 = V_n^2 \left| \frac{U_{ac}}{V_n} \right|^2 + e_B^2 \left| \frac{U_{ac}}{e_B} \right|^2 + i_B^2 \left| \frac{U_{ac}}{i_B} \right|^2$$

$$V_{ac}(w)^2 = \left(\frac{V_0^2}{R_{ext}^2 + i_0^2} \right) \left[\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + w^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right]^{-1} + e_B^2$$

$$V_h^2 = R_{ext}^2 \left[(V_{ac}(w)^2 - e_B^2) \left(\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + w^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right) - i_0^2 \right]$$

$$V_h = R_{ext} \sqrt{(V_{ac}(w)^2 - e_B^2) \left[\left(\frac{1}{R_{ext}} + \frac{1}{R_i} \right)^2 + w^2 (C_{ext} + C_i)^2 \right] - i_0^2}$$