FFM234, Datoruppgift 1: Visualisering av fält

Christian Forssén
redigerad av **Andréas Sundström**[†]

Institutionen för fysik, Chalmers
[†] Email: andsunds@chalmers.se
2021-08-13

Introduktion

Ett vetenskapligt användningsområde för datorer, som lätt förbises, är att visualisera olika fysikaliska förlopp. Detta består ofta i att skapa bilder av två- eller tredimensionella fält. Det finns många sofistikerade sätt att göra detta på, särskilt om man vill titta på tidsutvecklingen av tredimensionella fält. Speciella programpaket och, i vissa fall, datorer har specialutvecklats för detta ändamål. Här ska vi dock begränsa oss till enklare fält i två dimensioner, för vilka vi kan använda en enklare programmiljö såsom Matlab eller Python.

Vi särskiljer mellan två huvudtyper av fält inom den här kursen, skalära fält och vektorfält. Ett enkelt exempel på ett skalärt fält är trycket i en gas. Skalära fält illustrerar man ofta genom att rita nivåkurvor, det vill säga kurvor längs med vilka fältet antar ett konstant värde. På väderkartor ritar man till exempel ut isobarer (från den antika grekiskans ἴσος – ”*isos*” – samma, och βάρος – ”*baros*” – vikt) för att illustrera hur lufttrycket varierar över ett kartområde. En annan möjlighet är att ge varje områden en färg, som motsvarar hur starkt fältet är där.

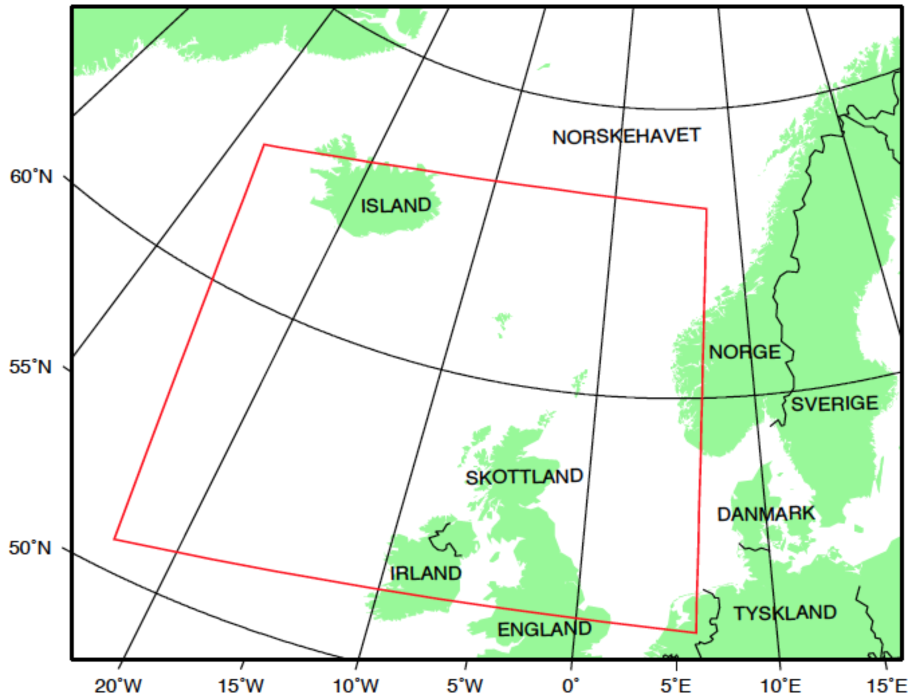
Vektorfält är något krångligare att illustrera eftersom de i varje punkt har både storlek och riktning. Det enklaste sättet att göra detta på en dator, är att rita ut pilar. Fältstyrkan kan då visas genom längden eller färgen på pilen. Ett annat sätt är att konstruera fältlinjer. Tangenten till en fältlinje ger då fältets riktning i en punkt, och tätheten av fältlinjerna ger fältets styrka.

En speciell sorts skalärt fält är en potential. Potentialen kan visualiseras genom att rita nivåkurvor, vilka vi i detta fall kallar ekvipotentialkurvor (eller ekvipotentialytor om vi arbetar i tre dimensioner). Ur en potential ϕ kan vi beräkna en fältstyrka $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$. Till $\vec{F}$ kan vi sedan konstruera fältlinjer. En figur där vi plottar både ekvipotentialytorna till ϕ och fältlinjerna till $\vec{F}$ kallar vi en fältbild.

Meteorologi

Meteorologi är ett vetenskapligt område där fältteori ofta tillämpas. För att göra prognoser följer meteorologer utvecklingen av lufttryck, temperatur och vind med hjälp av väderkartor. Vi vill här visa hur $\vec{\nabla}$ operatorn, som t.ex. ger ett vektorfälts divergens och rotation, kan vara användbar i analysen av väderdata. Förhoppningsvis kommer detta exempel också att bidra till att fördjupa den fysikaliska förståelsen av divergens och virvlar.

Den meteorologiska data vi kommer att analysera är från ett område i Nordatlanten, Norska havet och Nordsjön som omfattar Norges västkust, norra England, Skottland, Nordirland och Island



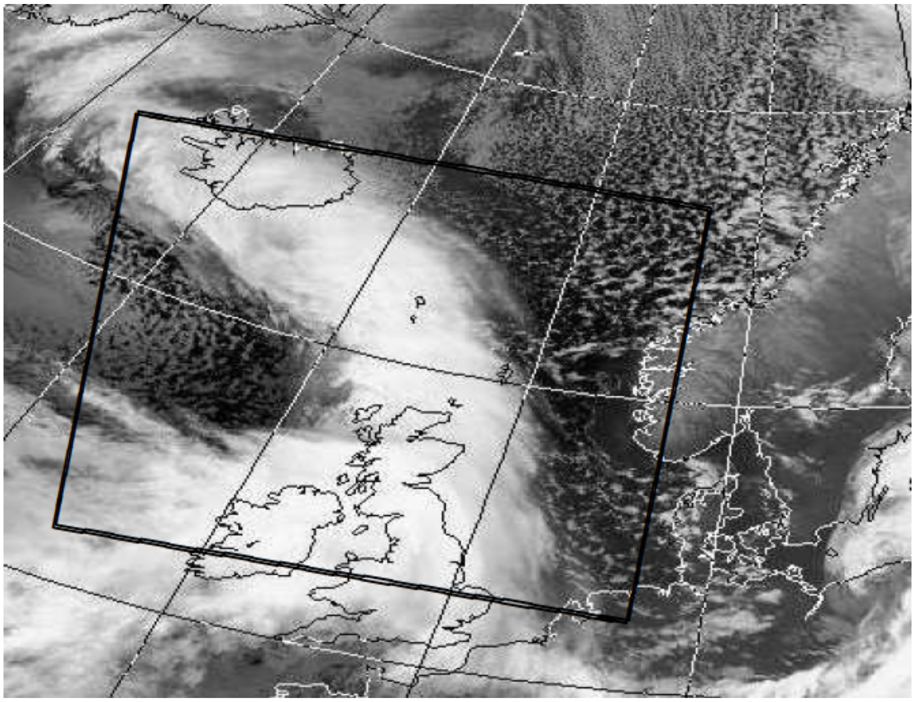
Figur 1: Den väderdata som vi kommer att analysera är från det markerade området i kartan.

(se Figur 1). Ett stort antal manuella och automatiska väderstationer är verksamma i området och genomför regelbundna observationer flera gånger om dagen.

Väderstationer är inte jämnt fördelade och är, av naturliga orsaker, mer frekventa över land än över hav. Mätningar från ett världsomspännande nätverk av mätstationer ger data som analyseras med prognosmodeller. Med dessa modeller kan man bedöma tillståndet i atmosfären också i områden utan observationer. Med sådana modeller kan man till exempel interpolera lufttryck, vindhastighet och vindriktning till en uppsättning punkter som bildar ett regelbundet rutnät längs markytan (Figur 3).

De uppgifter som vi kommer att använda kommer från Meteorologisk institutt, Blindern, Oslo. Det är lufttryck vid havsnivån och vindvektorer på isobarytan 850 hektopascal, som ligger ca 1000–1500 meter över havsnivån. Dessa data beräknas i ett rutsystem med $\Delta x = \Delta y = 55\,\text{km}$, för tisdagen den 19:e februari 2002, kl. 18:00 UTC (standardtid) och representerar den bästa möjliga uppskattningen av tillståndet i atmosfären vid det här tillfället. Datan har gjorts tillgänglig av Universitet i Oslo för kursen MEK1100 – Feltteori og vektoranalyse.

En satellitbild (Figur 2) tas samma dag, men vid ett något tidigare tillfälle (16:13 UTC). Bilden visar att ett stort sammanhängande regnsystem täcker Irland och Storbritannien, och som också sträcker sig (ett ljusgrått band) nordväst bort över Island. Nordost om detta regnsystem, d.v.s. över Nordsjön och Norska havet, är det nästan klar himmel med lätta skurar i de norra delarna av Norska havet. På västra sidan av regnsystemet, d.v.s. söder om Island, är det nästan helt klar himmel. Ni kommer att kunna få ett mått på hur bra er dataanalys är genom att jämföra era resultat med denna satellitbild.



Figur 2: Satellitbild från 16:13 UTC den 19:e februari 2002. Ljusgrå färgton motsvarar regnväder, medan mörka toner är hav eller land. Bilden kan laddas ner i pdf-format

Uppgift

Uppgifterna nedan går ut på att analysera och visualisera väderdata. Ni kan förslagsvis använda ett interpreterande programmeringsspråk för att utföra detta. En möjlighet är att använda `Matlab`, men ett minst lika bra alternativ är `Python` – som dessutom är fritt tillgängligt och bygger på öppen källkod. Några nyttiga kommandon för bägge dessa programmeringsspråk beskrivs i nästa avsnitt. Mer finns att läsa i kurskompendiet (*En första kurs i matematisk fysik*, 2018), appendix A.

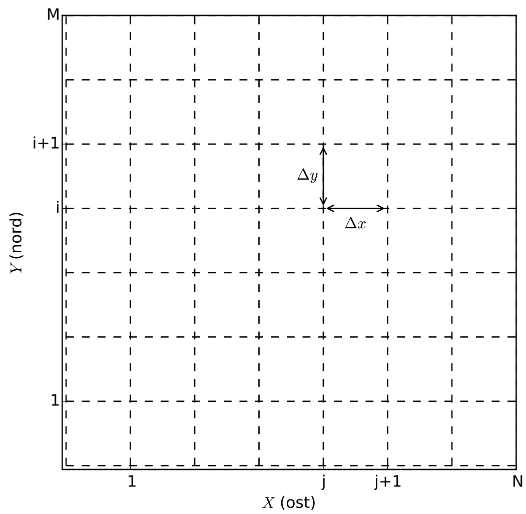
Inläsning av data

Innanför det utmärkta området i Figur 1 definierar vi ett rutsystem med 30×31 punkter (se Figur 3). Det är 30 punkter i syd–nordlig riktning och 31 punkter i väst–ostlig riktning. Väderdatan är alltså sparad som matriser

$$D(y_i, x_j) = D_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, 30, \quad j = 1, 2, \ldots, 31.$$

Datan finns i tre filer:

- `tryckfalt.dat` innehåller lufttrycket (givet i hPa) vid havsnivån.
- `vindfalt_u.dat` innehåller vindfältets komponent i väst–ostlig riktning (dvs x-riktningen) på 850 hPa-isobarytan, given i m/s.
- `vindfalt_v.dat` innehåller vindfältets komponent i syd–nordlig riktning (dvs y-riktningen) på 850 hPa-isobarytan, given i m/s.



Figur 3: Väderdata för området i Figur 1 är givet på ett rutsystem med 30×31 punkter. Avstånden mellan två närliggande gitterpunkter är $\Delta x = \Delta y = 55\,\mathrm{km}$.

En liten kommentar kring vindfältet, som är givet som ett tvådimensionellt fält, vilket alltså betyder att vi försummar komponenten i höjdled (z-riktningen). Detta kan vi enkelt motivera genom att konstatera att de relevanta längdskalorna skiljer väldigt mycket. I horisontell riktning studerar vi ett vädersystem över flera hundratals kilometer (vårt rutsystem karakteriseras av $\Delta x = \Delta y = 55$km). I höjdled däremot är den relevanta längdskalan av storleksordningen hundratals meter. Hastighetskomponenterna är alltså (för det mesta) betydligt mindre i den vertikala än den horisontella riktningen.

Fysikaliska storheter

Följande mått på de uppmätta fysikaliska storheterna tryck och vindhastighet *skall presenteras och diskuteras i denna uppgift*:

Isobarer Läs in lufttrycksdata och rita konturlinjer för tryckfältet (isobarer) eftersom detta är ett skalärfält. Det kan krävas lite experimenterande för att finna ett bra antal konturlinjer så att figuren blir tydlig. Kom ihåg att väderdata är sparad som en matris och att rutsystemet motsvarar en fix steglängd på 55 km.

Försök att identifiera ett lågtrycksområde och beskriv var det ligger.

Vindfält Vindhastigheten i (x, y)-planet är sparad i komponentform, med en matris för varje hastighetskomponent. Visualisera vektorfältet genom att rita ut vindvektorerna samt genom att rita upp fältlinjer.

Jämför bilden av vindfältet med lufttrycket i samma område. Vad är den största vindstyrkan och vad motsvarar denna i en vindstyrketabell (t.ex. Beaufortskalan) eller jämför med allmänt samhällspåverkade vindar (t.ex. Gudrun 2005)? Notera dock att vår vinddata är insamlad på cirka 1000–1500 m.ö.h. vilket innebär betydligt starkare vindar än vid havsytan.

Divergens och rotation av vindhastighetsfältet Divergensen av ett vektorfält är en skalär storhet. Med hastighetskomponenterna $v_x = u$ och $v_y = v$ samt $v_z = 0$ så får vi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Men eftersom u och v bara är kända på det diskreta rutsystemet med matriserna U_{ij} och v_{ij}, måste vi approximera derivatorna med finita differenser. Vi kan t.ex. använda trepunktsformeln

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta x} + \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta x}\right) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta x}.$$

Vi får givetvis ett liknande uttryck för $(\partial v/\partial y)_{ij}$.

Rotationen till vårt tvådimensionella vektorfält kommer ju att bli riktat i normalriktningen, dvs i z-led ($\vec{\nabla} \times \vec{v} \propto \hat{z}$). Kontrollera gärna detta för att vara helt säker. Denna storhet blir därför i detta fall en skalär

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

och vi får återigen utnyttja finita differenser för att räkna ut de relevanta derivatorna.

Räkna ut och rita upp divergens och rotation för vårt vindfält. Jämför speciellt divergensen med vädersystemet i Figur 2 och rotationen med lågtrycksområdet från Uppgift 1.

Tips 1 På randpunkterna, där man ju saknar datavärden utanför området, kan man använda en enkel tvåpunktsapproximation till derivatan istället för trepunktsformeln ovanför.

Det finns också färdiga funktioner i både `Matlab` och `Python` som utför dessa derivator på en diskret datamängd. Notera dock att dessa funktioner vanligtvis antar att $\Delta x = \Delta y = 1$ och att man därför måste applicera en skalfaktor för att få rätt enhet.

Tolkning

Försök att ge en kortfattad tolkning av dataanalysen ovan och jämförelsen med det faktiskt observerade vädersystemet.

Tips 2 Luften kan betraktas som inkompressibel. Det betyder att luften måste stiga uppåt i områden där vindfältet uppvisar en konvergens (dvs där konvergerande vindströmmar ansamlar luftmassa). Som ett resultat stiger fuktig luft uppåt, kyls ned och ger moln och nederbörd. Situationen blir tvärtom i områden där vindfältet expanderar. Luft från de övre skikten tvingas då att röra sig nedåt med resultatet att den värms upp och molnen löses upp.

Matlab och Python

Programmeringsspråket `Matlab` har ni antagligen redan stiftat bekantskap med. Det finns dock vissa speciella funktioner som är särskilt användbara för att visualisera och hantera vektorfält. Vi diskuterar några av dessa nedan. Mer finns att läsa i kurskompendiet (*En första kurs i matematisk fysik*, 2017), appendix A.

För den intresserade rekommenderar vi även det mycket kraftfulla programmeringsspråket `Python` som också diskuteras i kurskompendiet, appendix A. Tillsammans med modulen `numpy`, för matematiska funktioner, och `matplotlib`, för visualisering med Matlab-liknande syntax, erbjuder detta ett fullgott alternativ. Att följa andras exempel är ofta en bra start. Se gärna Matplotlib Tutorials om ni vill testa.

Inläsning av data. Datafilerna som listas ovan läses enkelt in med `Matlab`-funktionen `load`

```
% % Read data
p = load('tryckfalt.dat');
u = load('vindfalt_u.dat');
v = load('vindfalt_v.dat');
```

eller med `Python/numpy`-funktionen `loadtxt`

```
# Import modules.
# pylab contains matplotlib
import numpy as np
import pylab as p

# Read data
P = np.loadtxt('tryckfalt.dat')
u = np.loadtxt('vindfalt_u.dat')
v = np.loadtxt('vindfalt_v.dat')
```

För att återskapa rutsystemet i uppgiften använder vi t.ex. kolon-notationen i `Matlab`

```
x = 0:55:55*30;
y = 0:55:55*29;
```

eller funktionen `linspace` i `Python/numpy` (som även finns i `Matlab`)

```
x = np.linspace(0,55*30,31)
y = np.linspace(0,55*29,30)
```

Andra bra funktioner är

- `quiver` (`Matlab`) och `quiver` (`Python/matplotlib`) för att rita vektorfält.[1]
- `streamline` (`Matlab`) och `streamplot` (`Python/matplotlib`) för att rita fältlinjer.
- `contour` (`Matlab`) och `contour` (`Python/matplotlib`) för att rita nivåkurvor.
- Funktionerna `divergence` och `curl` i `Matlab` medan `Python`-programmerare får nöja sig med `gradient`[2] och räkna ut övriga storheter därifrån.

Eftersom ni ska rita ut en ”karta” över vädersystem, är det lämpligt att skalorna på x- och y-axlarna är samma. Detta åstadkommer ni med `axis equal` (`Matlab`) eller `p.axis('equal')` (`Python`).

[1]Till sjöss händer det att vindar anges med ”vindpilar” som har ett antal hel- och halvstreck i bakändan för att ange stryka, t.ex. för Beaufortstyrka 5 – vid styrka 10 läggs en ”flagga” till istället . I `Python/matplotlib` finns paketet `barbs` som ritar sådana pilar, vilket ter sig synnerligen passande för den här uppgiften.

[2]Observera att den första dimensionen (axel 0) i datamatriserna motsvara y-led, och den andra dimensionen (axel 1) motsvarar x-led. Om du väljer att använda `gradient` i Python, måste därför x- och y-derivatorna beräknas med detta i åtanke, t.ex. `dfdy=np.gradient(f,axis=0); dfdx=np.gradient(f,axis=1)`, eller kort och gott `dfdy,dfdx=np.gradient(f)`. Sedan måste man fortfarande multiplicera med rätt skalfaktor (se tips 1).

Om rapporten

- Uppgiften utförs i par. Rapporten skall laddas upp i PDF-format (använd helst TeX/LaTeX) och varje par lämnar in en gemensam rapport.
- Rapporten skall inte omfatta mer än fyra sidor inklusive era figurer. Detta innebär att inledningen kan göras väldigt kortfattad.
- Tänk på att hålla en god rapportstruktur och att ge så mycket detaljer att någon annan kan följa er lösning och era resonemang. Bifoga er källkod i ett appendix (räknas ej med i sidantalet).
- Beskriv i rapporten hur ni går tillväga och vilka ekvationer ni använder. Det skall gå att läsa er rapport utan att ha tillgång till den bakomvarande uppgiftsformuleringen.
- Redovisa era resultat i grafisk form när det är lämpligt. Glöm inte enheter och skalor (t.ex. färgskalor eller styrkan på vektorpilarna).
- Diskutera och tolka era resultat.

För att bli godkänd måste rapporten (minst) innehålla:

1. Figur som visar lufttrycket med isobarer
    - Försök att identifiera lågtrycksområdet och jämför med satellitbilden.
2. Figur med vindhastighetsfältet
    - Vad är den största vindhastigheten. Jämför med lämplig skala för vindstyrka (t.ex. Beaufortskalan) eller med andra samhällspåverkande vindstyrkor (t.ex känd storm).
    - Jämför vindfältet med tryckfältet
3. Figur med divergensen av vindhastigheten
    - Tolka figuren i jämförelse med vindfältet och satellitbilden.
4. Figur med rotationen i vindhastighetsfältet
    - Tolka figuren i jämförelse med vindfältet.

Samtliga figurer måste ges med korrekta enheter på axlar och färgskalor/konturer.

Lycka till!