Факультет экономических наук

ОП «Экономика и ститистика»

Интервальные уравнения в экономике и финансах

Выполнил: студент группы БСТ184 Яков Коган

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, доцент Лепский А.Е.
Руководитель НИС: кандидат экономических наук, доцент Звездина Н. В.

16 мая 2020 г.

Введение

- Почти всегда работая с данными мы сталкиваемся с неопределенностью.
- В математике существуем как минимум 3 области, описывающие неопределенность в данных:
  - Теория вероятностей,
  - Нечеткие множества,
  - Интервальная арифметика.

Теория вероятностей

- Мы оперируем случайными величинами.
- Случайная величина ξ задается функцией распределения $F_\xi(x)$ (либо другим удобным способом).
- Что мы знаем о неопределенности случайной переменной?
  - Мы знаем, какие значения случайной величины встречаются чаще других.

Нечеткие множества

- Мы оперируем нечеткими множествами / нечеткими числами.
- Нечеткое множество A определяется характеристической функцией $\mu_A(x)$ – степенью принадлежности элемента множеству.
- Что мы знаем о неопределенности нечеткой переменной?
  - Мы знаем, какие элементы с большей точностью принадлежат конкретному множеству, чем другие.

Интервальная арифметика

- Мы оперируем интервальными числами (интервал $\Leftrightarrow$ интервальное число).
- Интервальная величина задается двумя числами: $[a, b]$.
- Что мы знаем о неопределенности интервальной переменной?
    - Мы знаем, в каких границах лежит переменная.

Какую модель выбрать?

- Исходя из того, что мы знаем об изучаемой переменной, какова природа ее неточности, мы можем выбрать, какая модель наилучшим образом подходит для ее описания.
- Довольно часто неоправданным выбором становится самая популярная из моделей — тероетико-вероятностная.
- Встает вопрос о границах применимости математической статистики.
- Впервые критикует и предлагает альтернативу математической статистике Ю.И. Алимов в 1980 году [10].

Цель работы: показать, как методы интервального анализа могут быть использованы в экономике и финансах, применить описанные методы к реальным данным

Актуальность: в последние годы идет бурное развитие интервального анализа как самостоятельной математической науки, так и прикладного инструмента во многих областях науки. Интервальный анализ применяется в вычислительных методах, но потенциал применения интервальных моделей в экономике только начинает раскрываться.

Основные задачи: описание интервальной арифметики (от базовых арифметических действий до более сложных теорем, необходимых для дальнейшего моделирования); демонстрация примеров с интервальными числами; описание классической (не интервальной) модели межотраслевого баланса и её расширение на интервальный случай; применение модели на реальных данных Росстата

Объект исследования: интервальная арифметика.

Предмет исследования: применение интервальной арифметики в экономических моделях.

Интервальный анализ

- Первые примеры решения задач интервальными методами появляются еще в древней Греции ($\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$).
- В 1930-е годы формализуются правила арифметических действий с интервальными числами.
- Первым применением интервальных методов стал подсчет ошибок округления на компьютерах.

Интервальный анализ

- Одной из первых серьезных работ, написанных по интервальному анализу, является статья японского ученого Теруо Сунаги «Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numerical Analysis» [17].
- Еще более значимый прорыв в этой области был достигнут в 1966 году Е.Р. Муром, который написал первую книгу по интревальному анализу [15].
- На данный момент самая подробная книга по интревальным методам написана С.П. Шарым, откуда в этой работе позаимствованы многие определения и необходимые теоремы.

Основы интервальной арифметики

- Интервал $\Leftrightarrow [a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.
- Интервалы будем обозначать следующим образом:
$$\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}]$$
- Множество всех интервалов: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$ – частный случай, когда интервал сходится в точку, то есть:
$$\boldsymbol{x} = \underline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}$$

Основы интервальной арифметики

- Любая арифметическая операция $\oplus \in \{+, -, \cdot, /\}$ с интервалами определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \{x \oplus y : x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}\}$$

- В частности:
  - $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}]$,
  - $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = [\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}]$,
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = [\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}\}, \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}\}]$,
  - $\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot [1/\overline{\boldsymbol{y}}, 1/\underline{\boldsymbol{y}}] \qquad$ для $\boldsymbol{y} \not\ni 0$.

Основы интервальной арифметики

Примеры арифметических операций с интервалами $\boldsymbol{x} = [2, 3]$ и $\boldsymbol{y} = [1, 5]$:

- $[2, 3] + [1, 5] = [2 + 1, 3 + 5] = [3, 6]$,
- $[2, 3] - [1, 5] = [2 - 5, 3 - 1] = [-3, 2]$,
- $[0.5, 2] \cdot [1, 5] = [\min\{0.5, 2.5, 2, 10\}, \max\{0.5, 2.5, 2, 10\}] = [0.5, 10]$,
- $[0.5, 2]/[1, 5] = [0.5, 2] \cdot [1/5, 1/1] = [\min\{0.5, 2, 0.1, 0.4\}, \max\{0.5, 2, 0.1, 0.4\}] = [0.1, 2]$.

Основы интервальной арифметики

Нетривиальные свойсвта:

- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$,
- $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$.

Для $\boldsymbol{a} = [2,5]$, $\boldsymbol{b} = [1,3]$:

- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b} = ([2,5]+[1,3])-[1,3] = [3,8]-[1,3] = [0,7] \neq \boldsymbol{a}$,
- $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/\boldsymbol{b} = ([2,5]\cdot[1,3])/[1,3] = [2,15]/[1,3] = \left[\frac{2}{3}, 15\right] \neq \boldsymbol{a}$.

Основы интервальной арифметики

Характеристики интервалов:

- $\operatorname{mid} \boldsymbol{x} := \frac{1}{2} \cdot (\underline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{x}})$ середина интревала $\boldsymbol{x}$,
- $\operatorname{rad} \boldsymbol{x} := \frac{1}{2} \cdot (\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}})$ радиус интервала $\boldsymbol{x}$,
- $\operatorname{wid} \boldsymbol{x} := \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}$ ширина интервала $\boldsymbol{x}$,
- $|\boldsymbol{x}| := \max\{|\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}|\}$ абсолютная величина $\boldsymbol{x}$.

Основы интервальной арифметики

Для интервала $[-5,-1]$:

- $\mathrm{mid}[-5,-1] = \frac{1}{2}(-5-1) = -3$,
- $\mathrm{rad}[-5,-1] = \frac{1}{2}(-1+5) = 2$,
- $\mathrm{wid}[-5,-1] = -1+5 = 4$,
- $|[-5,-1]| = \max\{1,5\} = 5$.

Интервальные вектора и матрицы

Интервальный вектор:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)^T \in \mathbb{IR}^n.$$

Обозначения:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = (\underline{\boldsymbol{a}}_1, \underline{\boldsymbol{a}}_2, ..., \underline{\boldsymbol{a}}_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\overline{\boldsymbol{a}} = (\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2, ..., \overline{\boldsymbol{a}}_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}].$$

Интервальные вектора и матрицы

Интервальная матрица:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{a}_{ij} & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{IR}^{m\times n}.$$

Обозначения:

- $\underline{\boldsymbol{A}} = (\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{\boldsymbol{a}}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$.

Замечание: операции $\mathrm{mid}, \mathrm{rad}$ и wid к интервальным векторам и матрицам применяются покомпонентно и поэлементно.

Интервальные вектора и матрицы

Вершины интервального вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{vert} \boldsymbol{a} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i\}, i = 1, \dots, n\}.$$

Вершины интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\operatorname{vert} \boldsymbol{A} := \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}\}\}.$$

Вершинами интервального вектора/матрицы является множество всех комбинаций пограничных значений эелементов вектора/матрицы.

Интервальные вектора и матрицы

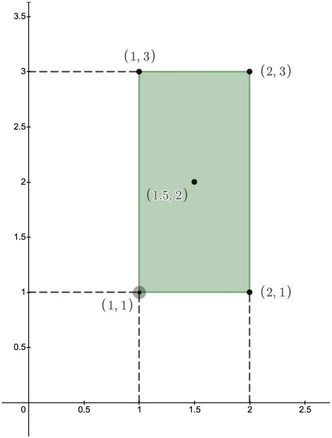


Рис. 1: Интервальный вектор в $\mathbb{R}^2$

Пример: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 3] \end{pmatrix} \in \mathbb{IR}^2$.

- $\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{wid} \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{vert} \boldsymbol{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Интервальные вектора и матрицы

Пример: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [3,4] \\ [5,6] \end{pmatrix} \in \mathbb{IR}^3$

- $\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{mid}\, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{vert}\, \boldsymbol{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

Интервальные вектора и матрицы

Если S — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{m\times n}$, то его *интервальной оболочкой* $\square S$ называется пересечение всех интервальных векторов (матриц), содержащих S:

$$\square S = \bigcap\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^n \mid S \subseteq \boldsymbol{a}\} \qquad \text{или} \qquad \square S = \bigcap\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n} \mid S \subseteq \boldsymbol{A}\}.$$

Интервальные вектора и матрицы

Черный прямоугольник – интервальная оболочка зеленой фигуры в $\mathbb{R}^2$.

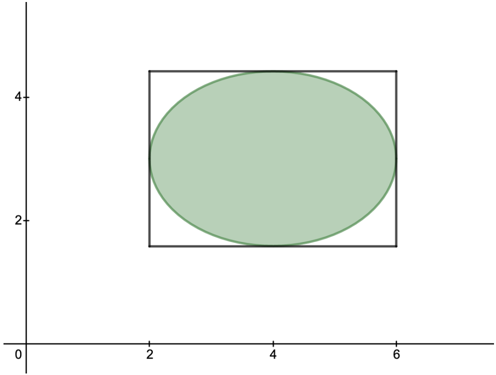


Рис. 2: Интервальная оболочка

Интервальные вектора и матрицы

Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется *неособенной* (невырожденной), если неособенны все точечные $n \times n$ матрицы $A \in \boldsymbol{A}$. Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется *особенной* (вырожденной), если она содержит хотя бы одну особенную точечную $n \times n$ матрицу $A \in \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n} \text{– неособенная} \iff \forall A \in \boldsymbol{A} : \det A \neq 0,$$

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n} \text{– особенная} \iff \exists A \in \boldsymbol{A} : \det A = 0.$$

Интервальные вектора и матрицы

Пример: Найдем определители матриц из $\mathbb{IR}^{2\times 2}$ (в этом случае можно использовать обычное определение определителя матрицы):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [3,8] & [0,9] \\ [4,5] & [2,6] \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} [0,1] & [2,3] \\ [4,5] & [6,7] \end{pmatrix}$$

$\det \boldsymbol{A} = [3,8]\cdot[2,6]-[0,9]\cdot[4,5] = [-39,48] \ni 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$ – особенная

$\det \boldsymbol{B} = [0,1]\cdot[6,7]-[2,3]\cdot[4,5] = [-15,-1] \not\ni 0 \Rightarrow \boldsymbol{B}$ – неособенная

Интервальные вектора и матрицы

Теорема 1:

$$\boxed{\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n} \text{ неособенная} \Leftrightarrow \forall A', A'' \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A} : (\det A') \cdot (\det A'') > 0}$$

Обратной интервальной матрицей к неособенной матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называют интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} := \square\{A^{-1} \mid A \in \boldsymbol{A}\}.$$

Интервальные вектора и матрицы

- Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является М-матрицей, если внедиагональные элементы A неположительны и $A^{-1} \geq 0$.

- Матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется интервальной М-матрицей, если каждая вещественная матрица $A \in \boldsymbol{A}$ является М-матрицей.

Приведем пример M-матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ -4 & 25 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -17 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4, -18 \leq 0 \\ A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} & 6 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff A_1 \text{ – } M\text{-матрица}$$

$$\begin{cases} -3, -17 \leq 0 \\ A_2^{-1} = \frac{1}{53} \begin{pmatrix} 26 & 17 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff A_2 \text{ – } M\text{-матрица}$$

Теорема 2:

Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ является M-матрицей тогда и только тогда, когда $\underline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$ — M-матрицы. Любая M-матрица – неособена (невырождена) и $\boldsymbol{A}^{-1} = [\underline{\boldsymbol{A}}^{-1}, \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}]$.

Так как матрицы A_1 и A_2 из последнего примера являются M-матрицами, а также каждый элемент матрицы A_1 меньше соответствующего элемента матрицы A_2, то по теореме 2 мы можем утверждать, что матрица $\boldsymbol{A}$ (см. ниже) является интервальной M-матрицей:

$$\boldsymbol{A} = [A_1, A_2] = \begin{pmatrix} [3,4] & [-18,-17] \\ [-4,-3] & [25,26] \end{pmatrix}.$$

Интервальная система уравнений

Интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) аналогична обычной системе линейных уравнений, за тем лишь исключением, что коэффициенты и свободные челны системы не числа а интервалы.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 + \boldsymbol{a}_{m2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{mn}x_n = \boldsymbol{b}_m \end{cases}$$

Интервальная система уравнений

- ИСЛАУ можно переписать в матричный вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \dots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

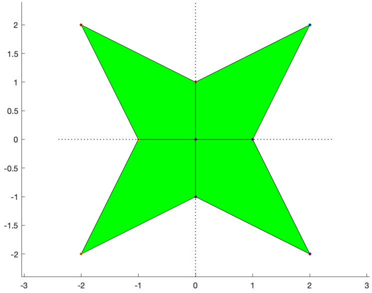
  где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$.

- Множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ для x:

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}.$$

Интервальная система уравнений

- Пример множества решений ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$:



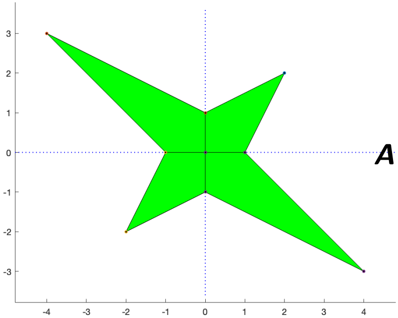
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [1, 2] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

Рис. 3: $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Интервальная система уравнений

- Пример множества решений ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$:



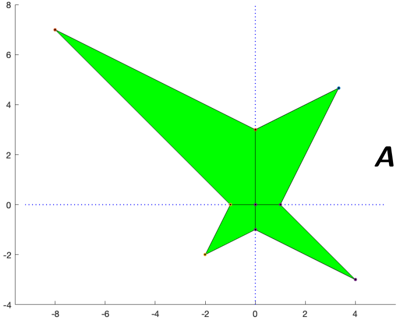
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-0.5, 1] \\ [-0.5, 0.5] & [1, 2] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

Рис. 4: $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Интервальная система уравнений

- Пример множества решений ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$:



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-0.5, 1] \\ [-0.5, 0.5] & [1, 2] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 3] \end{pmatrix}$$

Рис. 5: $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Интервальная система уравнений

- Как видно из примеров, множество решений интервальной системы линейных уравнений является достаточно сложной геометрической фигурой в $\mathbb{R}^n$.
- По этой причине вводится такое понятие, как внешняя оценка множества решений.
- Внешняя оценка множества решений – это интервальный вектор $\boldsymbol{x}$, полностью содержащий в себе множество решений:
$$\boldsymbol{x} \supset \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).$$

Интервальная система уравнений

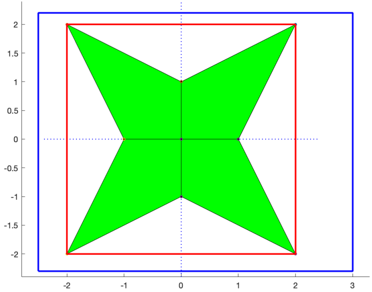


Рис. 6: Внешние оценки $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- Оптимальной оценкой является наименьшая из всех оценок (в данном случае красная оценка – оптимальна).

Интервальная система уравнений

- Формально: $\boldsymbol{x}$ – оптимальная оценка $\Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \square \varXi$.
- К системам интервальных уравнений вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, так же как и к обычным линейным урвнениям, применим метод Гаусса (приведение матрицы $\boldsymbol{A}$ в диагональный вид), который дает какой-то вектор $\boldsymbol{x_g}$, который будет пересекаться с $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.
- Однако результатом метода Гаусса не всегда является оптимальная внешняя оценка множества решений.

Интервальная система уравнений

Теорема 3:

Если в ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ является интервальной M-матрицей и справедливо одно из условий $\boldsymbol{b} < 0$, $\boldsymbol{b} \ni 0$ или $\boldsymbol{b} > 0$, то тогда результатом метода Гаусса (интервальный вектор $\boldsymbol{x_g}$) в применении к этой системе будет являться оптимальная внешняя оценка множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Пример: дана система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,-0.5] \\ [-2,-1] & [2,4] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [2,3] \\ [2,3] \end{pmatrix}.$$

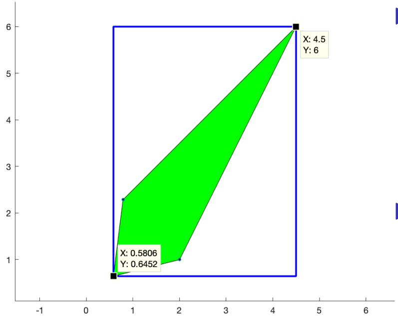


Рис. 7: Внешняя оценка $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- С помощью интервального метода Гаусса получаем вектор $$\boldsymbol{x_g} = \begin{pmatrix} [0.5806, 4.5] \\ [0.6451, 6] \end{pmatrix}.$$
- Так как $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, полученная оценка является оптимальной.

Пример: дана система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,-0.5] \\ [-2,-1] & [2,4] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [2,3] \\ [-3,-2] \end{pmatrix}.$$

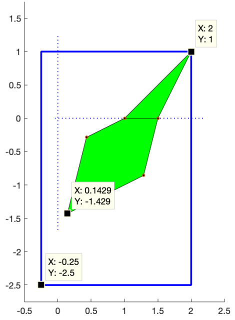


Рис. 8: Внешняя оценка $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- С помощью интервального метода Гаусса получаем вектор $\boldsymbol{x_g} = \begin{pmatrix} [-0.25, 2] \\ [-2, -3] \end{pmatrix}$.
- Так как вектор $\boldsymbol{b}$ не удовлетворяет условию теоремы 2, полученная оценка является неоптимальной.

Применение в экономике

Прежде чем объяснять, как можно применить интервальный анализ в экономике, рассмотрим не интервальную экономическую модель, которую потом обобщим с точечного случая на интервальный.

Межотраслевой баланс

- Модель «затраты - выпуск» (input - output model), или межотраслевой баланс, была впервые предложена в 1930-е годы В.В. Леонтьевым в его труде «Исследования структуры Американской экономики» [3].
- Модель заключается в следующем:
  - есть экономика с n секторами,
  - каждый сектор производит x_i гомогенных товаров,
  - для того, чтобы j-й отрасли произвести 1 товар, ей необходимо a_{ij} товаров i-й отрасли,
  - на рынок i-ая отрасль поставляет d_i своего товара.

Межотраслевой баланс

Таким образом, выпуск каждого сектора x_i составляется из межотраслевого потребления и рыночного потребления:

$$\text{потребление} - x_i = \underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n}_{\text{межотраслевое}} + \underbrace{d_i}_{\text{рыночное}}$$

Аналогичные уравнения можно составить для каждой отрасли $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + d_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n \end{cases} .$$

Межотраслевой баланс

Данную систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \qquad x = Ax + d \qquad \iff \qquad \boxed{(I_n - A)x = d}$$

Межотраслевой баланс

Обозначения:

- n – количество отраслей в экономике,
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ – матрица технологических коэффициентов,
- $a_{ij} \in [0, 1]$ – объем поставок из i-го сектора в j-й,
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор выпусков отраслей,
- $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор рыночного спроса (для потребления на рынке),
- $L = (I_n - A)$ – матрица Леонтьева (Leontief matrix),
- I_n – единичная матрица $n \times n$.

Важно: Исходя из свойств матрица технологических коэффициентов, матрица Леонтьева L всегда будет являтся M-матрицей . Впервые это докозал М.Е. Джеррел в своей работе «Interval Arithmetic for Input-output Models with Inexact Data» [14]. Когда мы работаем с обычными данными, этот факт нам мало что дает, но в случае с интервальными данными это утверждение окажется ключевым для оценки множества решений.

Межотраслевой баланс

Пример: дана простая экономика с $n = 3$ секторами: нефть, уголь и сталь. Необходимо найти вектор выпуска отраслей.

	Уголь	Нефть	Сталь	Рыночный спрос
Уголь	0.2	0.6	0.1	0
Нефть	0.1	0	0.25	1000
Сталь	0.3	0.4	0.5	3000

Таблица 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.10 \\ 0.1 & 0.0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.4 & 0.50 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$x = (I_3 - A)^{-1} d \approx \begin{pmatrix} 5166 \\ 4739 \\ 12891 \end{pmatrix}$$

Межотраслевой баланс

Пример: дана простая экономика с $n = 3$ секторами: нефть, уголь и сталь. Необходимо найти матрицу технологических коэффициентов.

Кто производит	Для кого производит				Сумма
	Уголь	Нефть	Сталь	Рынок	
Уголь	20	30	40	50	140
Нефть	25	0	60	100	185
Сталь	35	10	30	120	195

Таблица 2:

$$x = \begin{pmatrix} 140 \\ 185 \\ 195 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 20/140 & 30/185 & 40/195 \\ 25/140 & 0/185 & 60/195 \\ 35/140 & 10/185 & 30/195 \end{pmatrix}$$

Интервальная модель

Попытки применить интервальный анализ к межотраслевому балансу были предприняты в работе А.П. Вощинина «Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность?» [4], в работе Д. Рона «Input-output model with interval data» [12] и в работе М.Е. Джеррела «Interval Arithmetic for Input-Output Models with Inexact Data» [13].

Интервальная модель

- В реальной жизни чаще всего мы не знаем точного значения технологического коэффициента a_{ij} для i-го и j-го секторов.
- Зато мы можем знать границы значений, в которые входит этот коэффициент $a_{ij} \in \boldsymbol{a_{ij}}$.
- То же самое относится к рыночному потреблению. Чаще всего известно не точное значение объема рыночного потребления, а границы интервала, в который это значение входит: $d_i \in \boldsymbol{d_i}$.
- Можно моделировать как экзогенные переменные, так и эндогенные.

Интервальная модель

Таким образом, мы можем составить интервальную матрицу $\boldsymbol{A} \ni A$ и интервальный вектор $\boldsymbol{d} \ni d$, в которые будут входить всевозможные комбинации технологических коэффициентов и рыночного потребления соответственно. Наша задача сводится к решению ИСЛАУ для x:

$$(I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}.$$

$\boldsymbol{L} = (I_n - \boldsymbol{A})$ – *интервальная матрица Леонтьева*

Интервальная модель

$\underline{\boldsymbol{L}}$ и $\overline{\boldsymbol{L}}$ обладают одинаковыми свойствами, а именно – обе эти точечные матрицы являются M-матрицами

$$\Longrightarrow$$

$\boldsymbol{L}$ – интервальная M-матрица

$$\Longrightarrow$$

для нахождения оптимальной внешней оценки множества решений системы $\boldsymbol{L}x = \boldsymbol{d}$ применим интервальный метод Гаусса.

Интервальная модель

Пример: Пусть дана матрица технологических коэффициентов и вектор рыночного спроса:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.10 \\ 0.1 & 0.0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.4 & 0.50 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что данные неточные, и что истинные значения лежат в диапазоне $\pm\varepsilon\%$ от значения в таблице.

Интервальная модель

Для $\varepsilon = 0.05$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.1899, 0.2101] & [0.5699, 0.6301] & [0.0949, 0.1051] \\ [0.0949, 0.1051] & 0 & [0.2374, 0.2626] \\ [0.2849, 0.3151] & [0.3799, 0.4201] & [0.4749, 0.5251] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} [0.0009, 0.0011] \\ [0.9500, 1.0500] \\ [2.8500, 3.1500] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} [0.7899, 0.8101] & [-0.6301, -0.5699] & [-0.1051, -0.0949] \\ [-0.1051, -0.0949] & 1 & [-0.2626, -0.2374] \\ [-0.3151, -0.2849] & [-0.4201, -0.3799] & [0.4749, 0.5251] \end{pmatrix}$$

Интервальная модель

Решая ИСЛАУ $\boldsymbol{L}x = \boldsymbol{d}$ интервальным методом Гаусса, получаем внешнюю оценку множества решений конечного спроса x:

$$x \in \boldsymbol{x_g} \approx \begin{pmatrix} [3831, 7264] \\ [3740, 6275] \\ [10215, 16997] \end{pmatrix}$$

Вывод: истинные значения отраслевого выпуска лежат в диапазоне $\boldsymbol{x_g}$.

Проверка модели на реальных данных

В качестве реальных данных будем использовать таблицу «затраты - выпуск» по $n = 15$ отраслям экономики, составленную Росстатом по данным за 2016 год [18].

$$A = \begin{pmatrix} 0.1502 & 0.0018 & \dots & 8.7 \times 10^{-7} \\ 3.8 \times 10^{-5} & 0.0265 & \dots & 3.8 \times 10^{-5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3.7 \times 10^{-4} & 2.9 \times 10^{-4} & \dots & 0.0178 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2\ 079\ 077 \\ 149\ 901 \\ \vdots \\ 1\ 791\ 743 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽} \qquad x = \begin{pmatrix} 5\ 477\ 771 \\ 255\ 127 \\ \vdots \\ 506\ 279 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽}$$

Учет ошибок округления

$$\underline{\boldsymbol{d}} = d - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽} \qquad \overline{\boldsymbol{d}} = d + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽}$$

$$\boldsymbol{A} = [A \cdot (1 - \varepsilon), A \cdot (1 + \varepsilon)]$$

$$(I_n - A)x = d \qquad \longrightarrow \qquad (I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}$$

Для $\varepsilon = 0.02$:

Отрасль	$\underline{\boldsymbol{x}_g}$	$\overline{\boldsymbol{x}_g}$	$\mathrm{rad}\, \boldsymbol{x}_g$
A	5 348 893	5 611 315	131 211
B	251 415	258 960	3 773
C	11 153 791	11 621 531	233 870
D	37,784 906	39 123 347	669 221
E	7 514 752	8 075 763	280 506
F	10 663 803	10 800 216	68 207
G	18 390 439	18 867 046	238 303
H	1 535 394	1 552 990	8 798
I	13 699 793	14 384 723	342 465
J	4 694 111	4 917 191	111 540
K	20 543 791	21 311 246	383 727
L	9 348 176	9 366 828	9 326
M	2 471 605	2 479 178	3 786
N	4 531 219	4 540 263	4 522
O	2 490 066	2 536 577	23 255
$\sum$	**150 422 153**	**155 447 175**	**2 512 511**

Таблица 3: млн. ₽.

Прогнозирование

$q, w, s, r \in [-1, 1]$

$$\boldsymbol{A} = [(1+q) \times A, (1+w) \times A]$$

$$\boldsymbol{d} = [(1+s) \times d, (1+r) \times d]$$

$$(I_n - A)x = d \qquad \longrightarrow \qquad (I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}$$

Для $q = 0.01$, $w = 0.02$, $s = 0.1$ и $r = 0.15$:

Отрасль	$\underline{\boldsymbol{x}_g}$	$\overline{\boldsymbol{x}_g}$	$\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_g$
A	6 098 338	6 453 011	177 336
B	282 730	297 803	7 536
C	12 651 251	13 364 758	356 754
D	42 658 421	44 991 845	1 166 712
E	8 723 816	9 287 124	281 654
F	11 841 944	12 420 247	289 152
G	20 619 135	21 697 100	538 982
H	1 703 355	1 785 937	41 291
I	15 629 887	16 542 428	456 271
J	5 345 945	5 654 768	154 411
K	23 225 917	24 507 930	641 007
L	10 298 247	10 771 851	236 802
M	2 724 976	2 851 054	63 039
N	4 991 758	5 221 301	114 772
O	2 777 174	2 917 062	69 944
$\sum$	**169 572 894**	**178 764 220**	**4 595 663**

Таблица 4: млн. ₽.

Спасибо за внимание!

Литература

- Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2020
- Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. Москва: МИР, 2020
- Леонтьев В. Исследования структуры Американской экономики. Москва.: Государственное статистическое издательство, 1958
- Вощинин А.П. Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность? // Рабочее совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений ИМРО'04, Новосибирск, 21–22 июня 2004 г. Тр. Междунар. конф. по вычисл. математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Под ред. Ю.И. Шокина, А.М. Федотова, С.П. Ковалева, Ю.И. Молородова, А.Л. Семёнова, С.П. Шарого. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 147–158.

Литература

- Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 1992. Том 10. №5. С.103-119.
- Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычислительные технологии. 2007. Том 12. №1. С.103-115.
- Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание ножеств решений интервальных систем уравнений // Вычислительные технологии. 2002. Том 7. №6. С.90-113.
- Воронцова Е.А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // Вычислительные технологии. 2017. Том 22. №2. С.67-84.
- Фиронова Е. Применение нечеткой логики для анализа рисков инвестиционных проектов. Москва. 2007.
- Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. Москва: Знание, 1980

Литература

- Buckley J.J. Solving fuzzy equations in economics and finance // Fuzzy sets and Systems. 1992. No.48. pp.289-296.
- Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. 1992. Vol.48. No.3. pp.767-769.
- Jerrel M.E. Interval Arithmetic for Input-output Models with Inexact Data // Computational Economics. 1992. Vol.10. No.89. pp.89-100.
- Jerrel M.E. Application of Interval Computation to Regional Economic Input-Output Models // Applications of Interval Computations. 1996. Kluwer Academic Publishers
- Moore E.R., Kearfott R.B., Cloud M.J. Intoduction to interval analysis. Philadelphia.: SIAM, 2009

Литература

Zhihui Huey Hu Reliable Optimal Production Control with Cobb-Douglas Model // Reliable Computing. 1998. Vol.4. No.63.

Teruo Sunaga Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numerical Analysis // Research Association of Applied Geometry Memoirs. 1958. Vol.2. pp. 29–46

Базовые таблицы «затраты - выпуск» за 2016 год (раздел: Таблицы «затраты-выпуск»). URL: `http://rosstat.gov.ru/accounts` (дата обращения: 25.04.2020)

(1) Интервальный метод Гаусса, для получения внешней оценки множества решений ИСЛАУ вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, реализованный на языке MATLAB.

```
function x = intgauss(A,b)
n = length(A);
for i = 1:n-1;
    [maxmig,index] = max(mig(A(i:n,i)));
    if maxmig <= 0
        error("All possible pivots contain zero.")
    end
    k = index+i-1;
    if k  = i
        A([i k],i:n) = A([k i],i:n);
        b([i k]) = b([k i]);
    end
    for j = i+1:n;
        mult = A(j,i)/A(i,i);
        A(j,i+1:n) = A(j,i+1:n)-mult*A(i,i+1:n);
        b(j) = b(j)-mult*b(i);
    end
end
x(n) = b(n)/A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    k = 0
    for j=i+1:n
        k = k + A(i, j) * x(j)
    end
    x(i) = (b(i) - k)/A(i, i)

end
```

(2)

Код	Расшифровка
A	Сельское хозяйство, охота и лесоводство
B	Рыболовство
C	Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров
D	Обрабатывающая промышленность
E	Электроэнергия, газ и водоснабжение
F	Строительство
G	Оптовая и розничная торговля; ремонт бытовых приборов и предметов личного пользования
H	Гостиницы и рестораны
I	Транспорт, складское хозяйство и связь
J	Финансовое посредничество
K	Деятельность по операциям с недвижимым имуществом и арендой; деятельность исследовательская и коммерческая
L	Государственное управление и оборона; обязательное социальное страхование
M	Образование
N	Здравоохранение и социальные услуги
O	Деятельность по предоставлению коммунальных, социальных и персональных услуг прочих