ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет экономических наук

Департамент математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

Интервальные уравнения в экономике и финансах

по направлению подготовки Экономика

Образовательная программа «Экономика и статистика»

Выполнил: студент группы БСТ184

Коган Яков Владимирович

Руководитель: доктор физ.-мат. наук,

доцент Лепский Александр Евгеньевич

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Решая прикладные задачи в экономике, мы часто сталкиваемся с неопределенностью в исходных данных. Эта неопределенность может быть связана со случайностью, статистическим шумом, систематическими ошибками измерений, неполнотой информации, незнанием и т.д. Для описания неопределенности в данных существует как минимум три области в математике: теория вероятностей, теория нечетких множеств (fuzzy sets) и интервальный анализ. Теория вероятностей и вытекающая из нее математическая статистика на данный момент являются наиболее развитыми инструментами для описания неопределенности и случайности. Вероятностные модели успешно применяются во многих областях экономики и финансов для моделирования риска. Теория нечетких множеств еще сравнительно молода по сравнению с теорией вероятностей, но уже находит применение в экономике, например, она используется для анализа рисков инвестиционных проектов [Фиронова, 2007], применяется в описании динамической модели спроса и предложения [Buckley, 1992]. Однако, недостатком этих моделей является следующее: в вероятностной модели для изучения случайной величины ξ нам нужно знать функцию распределения $F_\xi(x)$, либо, что равносильно, закон распределения случайной величины. Но не всегда понятно, какая именно функция распределения верна для изучаемой случайной величины, какую она имеет форму, какому закону распределения принадлежит случайная величина, и почему именно этому а, не другому. В работе Алимова «Алтернатива методу математической статистики» 1980 года критикуется неоправданное использование математической статистики, а также показаны границы применимости вероятностных моделей. Похожая проблема есть у «нечетких» моделей, где нечеткое множество $A = \{(x, \mu_A(x))|x \in X\}$ описывается характеристической функцией $\mu_A(x)$ – функцией, задающей степень принадлежности множеству X (по смыслу значение функции принадлежности схоже с вероятностью принадлежности к множеству A). Таким образом, для вероятностной или нечеткой модели необходима некая функция $f(x)$, которая задается экспертным путем на основе информации об источниках неопределенности переменной [2]. Это и является одним из главных недостатков этих моделей, так как экспертной оценки о рассматриваемой переменной на момент исследования может пока что и не быть, а источник неопределенности может быть неизвестен.

Интервальная модель позволяет справиться с вышеупомянутыми проблемами. Несмотря на то, что интервальное описание неопределенности является наиболее кратким по сравнению с вышеупомянутыми моделями, математический аппарат для его обработки наиболее развит [8]. В рамках интервальной модели для задания интервальной переменной $\boldsymbol{x}$ нам необходимо знать лишь минимальное и максимальное значения переменной. При этом интервальные переменные могут быть как эндогенными, например, когда мы задаем уровень инфляции $[1, 3]\%$, так и экзогенными, например, когда мы не знаем точного потребления в данной отрасли, но знаем, что он точно лежит в интервале $[1, 3]$ условных денежных единиц. Стоит отметить, что принадлежность переменной x интервалу $[a, b]$ не равносильно тому, что эта переменная распределена по равномерному закону распределения $\mathcal{U}(a, b)$, как можно было бы предположить. В этом и заключается преимущество интервальной модели. Неопределенность данных может быть вызвана чем угодно, главное - знать границы, в которых данные принимают значения. И во многих практических задачах эта информация известна или ее легко выяснить. В тех случаях, когда нам ничего неизвестно о природе исходных данных и информации недостаточно, разумнее всего использовать интервальный анализ. И наоборот, когда нам необходимо внутри модели задать множество допустимых значений какой-то переменной, при этом мы не можем сказать, какие из этих значений более предпочтительны, то имеет смысл использовать интервальные переменные.

Целью данной работы является показать, как методы интервального анализа могут быть использованы в экономике и финансах, применить описанные методы к реальным данным.

Тема является **актуальной** в связи с бурным развитием в последние годы интервального анализа как самостоятельной математической науки, так и прикладного инструмента во многих областях науки. Интервальный анализ применяется в вычислительных методах, но потенциал применения интервальных моделей в экономике только начинает раскрываться.

В **основные задачи** этой работы входит описание интервальной арифметики (от базовых арифметических действий до более сложных теорем, необходимых для дальнейшего моделирования), демонстрация примеров с интервальными числами, описание классической (не интервальной) модели межотраслевого баланса и её расширение на интервальный случай, применение модели на реальных данных Росстата.

Объектом данного исследования является интервальная арифметика, а **предметом** выступают применение интервальной арифметики в экономических моделях.

2 Интервальный анализ

Интервальные методы решения задач применялись еще в древней Греции. Одним из самых ранних примеров является интервальная оценка числа π с помощью нижней и верхней оценки вписанного и описанного многоугольников. До XX века интервальные методы почти нигде не использовались. В 1930-е впервые формализуются правила арифметических действий с интервальными числами. Интервальные методы начали использовать для подсчета ошибок округления. Одной из первых и уже более серьезных работ по интервальной арифметике считается статья японского ученого Теруо Сунаги [16], в которой он, помимо базовых арифметических операций с интервалами, формулирует алгебраические свойства, которым они удовлетворяют, а также методы оценки корней функции. Однако эта статья не привлекла такого внимания к интервальной арифметике, как книга Е.Р. Мура [14], впервые изданная в 1966 году. Эта книга до сих пор пользуется популярностью и является одним из главных трудов, написанных по интервальному анализу. Также эта книга является отправной точкой, после которой ученые из многих стран начали систематическое изучение интервальной арифметики. На данный момент самая подробная книга по интервальному анализу написана российским математиком С.П. Шарым [8]. В ней развернуто описывается как базовая информация об интервальной арифметике, так и результаты новейших исследований, которые будут использоваться в дальнейшем в этой работе.

2.1 Основы интервальной арифметики

В этом разделе мы рассмотрим основы интервальной арифметики. Интервалом вещественной оси $[a, b]$ называется множество всех чисел, расположенных между a и b, включая границы:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}. \tag{1}$$

При этом a и b называются концами интервала. Рассмотрим классическую интервальную арифметику. Множество всех интервалов вида $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}]$ называется $\mathbb{IR}$.Важно отметить, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$ – случай, когда $\underline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}$ и интервал сходится в точку.

Для любой арифметической операции $\oplus \in \{+, -, \cdot, /\}$ результат операции с интервалами определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \{x \oplus y : x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}\}.$$

Дадим подробные формулы для каждого арифметического дейсвтия:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}],$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = [\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}],$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = [\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\}, \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\}],$$

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot [1/\overline{\boldsymbol{y}}, 1/\underline{\boldsymbol{y}}] \qquad \text{для } \boldsymbol{y} \not\ni 0.$$

Пример 2.1.1 *Продемонстрируем каждое арифметическое действие простым примером:*

$$[2,3] + [1,5] = [2+1, 3+5] = [3,6],$$

$$[2,3] - [1,5] = [2-5, 3-1] = [-3,2],$$

$$[0.5,2] \cdot [1,5] = [\min\{0.5, 2.5, 2, 10\}, \max\{0.5, 2.5, 2, 10\}] = [0.5, 10],$$

$$[0.5,2]/[1,5]=[0.5,2]\cdot[1/5,1]=[\min\{0.5,2,0.1,0.4\},\max\{0.5,2,0.1,0.4\}]=[0.1,2].$$

При этом эти формулы остаются справедливыми, даже, когда один из аргументов является числом: $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x=\underline{x}=\overline{x}$. Теперь отметим некоторые нетривиальные свойства интервальной арифметики $\mathbb{IR}$:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}.$$

Продемонстрируем эти свойства на простых примерах. Пусть $\boldsymbol{a}=[2,5]$, $\boldsymbol{b}=[1,3]$:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=([2,5]+[1,3])-[1,3]=[3,8]-[1,3]=[0,7]\neq\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/\boldsymbol{b}=([2,5]\cdot[1,3])/[1,3]=[2,15]/[1,3]=\left[\frac{2}{3},15\right]\neq\boldsymbol{a}.$$

Так как интервалы являются множествами, то для двух интервалов мы можем говорить о включении одного интервала в другой:

$$\boldsymbol{a}\subseteq\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{a}}\geq\underline{\boldsymbol{b}}\wedge\overline{\boldsymbol{a}}\leq\overline{\boldsymbol{b}}.$$

Перейдем к основным характеристикам интервалов, а так же к следствиям и свойствам этих характеристик. Если $x\in\mathbb{IR}$, то:

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{x}:=\frac{1}{2}\cdot(\underline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{x}})\qquad\text{середина интревала }\boldsymbol{x},$$

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{x}:=\frac{1}{2}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\underline{\boldsymbol{x}})\qquad\text{радиус интервала }\boldsymbol{x},$$

$$\operatorname{wid}\boldsymbol{x}:=\overline{\boldsymbol{x}}-\underline{\boldsymbol{x}}\qquad\text{ширина интервала }\boldsymbol{x},$$

$$|\boldsymbol{x}| := \max\{|\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}|\} \qquad \text{абсолютная величина } \boldsymbol{x},$$

Пример 2.1.2 *Характеристики интервала* $[-5,-1]$*:*

$$\mathrm{mid}[-5,-1] = \frac{1}{2}(-5-1) = -3,$$

$$\mathrm{rad}[-5,-1] = \frac{1}{2}(-1+5) = 2,$$

$$\mathrm{wid}[-5,-1] = -1+5 = 4,$$

$$|[-5,-1]| = \max\{1,5\} = 5.$$

В интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ не существует обратного к интервалу $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}]$ элемента, так как по определению $\underline{\boldsymbol{a}} \le \overline{\boldsymbol{a}}$:

$$\nexists \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = 0.$$

2.2 Интервальные векторы и матрицы

Для решения линейных задач и линейных систем уравнений с интервальными числами становится необходимым ввести следующие определения.

Определение 2.2.1 Интервальный вектор — упорядоченный кортеж из интервалов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)^\intercal \in \mathbb{IR}^n$.

При этом обозначают $\underline{\boldsymbol{a}} = (\underline{\boldsymbol{a}}_1, \underline{\boldsymbol{a}}_2, ..., \underline{\boldsymbol{a}}_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{a}} = (\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2, ..., \overline{\boldsymbol{a}}_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}]$.

Определение 2.2.2 Интервальная матрица — прямоугольная таблица, составленная из интервалов $\boldsymbol{a}_{ij}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix} \in \mathbb{IR}^{m\times n}.$$

При этом обозначают $\underline{\boldsymbol{A}} = (\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{\boldsymbol{a}}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$.

Замечание: Операции $\mathrm{mid}, \mathrm{rad}$, wid и отношения «$<$», «$>$» и «$\in$» к интервальным векторам и матрицам применяются покомпонентно и поэлементо.

Определение 2.2.3 Вершины интервального вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^n$:

$$\mathrm{vert}\,\boldsymbol{a} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i\}, i = 1, ..., n\}$$

Определение 2.2.4 Вершины интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$:

$$\mathrm{vert}\,\boldsymbol{A} := \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i\}\}$$

Пример 2.2.1 *Пусть у нас есть интервальный вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^3$:*

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [3,4] \\ [5,6] \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.5 \\ 5.5 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{vert} \boldsymbol{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Определение 2.2.5 Если S — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{m \times n}$, то его интервальной оболочкой $\square S$ называется пересечение всех интервальных векторов (матриц), содержащих S:

$$\square S = \bigcap \{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^n \mid S \subseteq \boldsymbol{a} \} \qquad \text{или} \qquad \square S = \bigcap \{ \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n} \mid S \subseteq \boldsymbol{A} \}.$$

Например, на рисунке 1 изображена интервальная оболочка (черный прямоугольник) для зеленой фигуры в $\mathbb{R}^2$.

Определение 2.2.6 Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется *неособенной* (невырожденной), если неособенны все точечные $n \times n$ матрицы $A \in \boldsymbol{A}$. Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется *особенной* (вырожденной), если она содержит хотя бы одну особенную точечную $n \times n$ матрицу $A \in \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n} \text{– неособенная} \iff \forall A \in \boldsymbol{A} : \det A \neq 0,$$

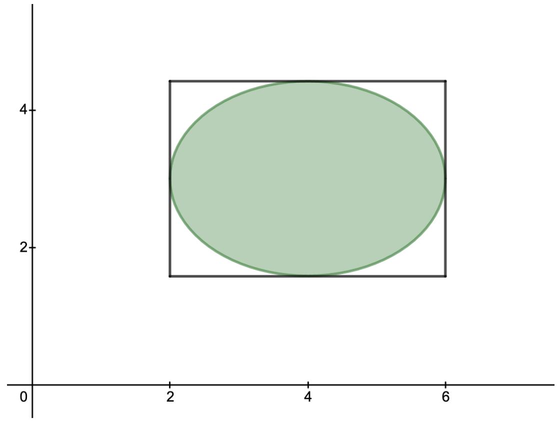


Рис. 1: Интервальная оболочка

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}\text{– особенная} \iff \exists A \in \boldsymbol{A} : \det A = 0.$$

Пример 2.2.2 *Найдем определители матриц из* $\mathbb{IR}^{2\times 2}$ *(в этом случае можно использовать обычное определение определителя матрицы):*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [3,8] & [0,9] \\ [4,5] & [2,6] \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} [0,1] & [2,3] \\ [4,5] & [6,7] \end{pmatrix},$$

$$\det \boldsymbol{A} = [3,8]\cdot[2,6] - [0,9]\cdot[4,5] = [-39,48] \ni 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \text{ – \textit{особенная}},$$

$$\det \boldsymbol{B} = [0,1]\cdot[6,7] - [2,3]\cdot[4,5] = [-15,-1] \not\ni 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} \text{ – \textit{неособенная}}.$$

Теорема 2.2.1 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ является неособенной тогда и только тогда, когда для любых матриц $A', A'' \in \operatorname{vert}\boldsymbol{A}$ их определители одного знака:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}\text{– неособенная} \iff \forall A', A'' \in \operatorname{vert}\boldsymbol{A} : (\det A')\cdot(\det A'') > 0.$$

Определение 2.2.7 Обратной интервальной матрицей к неособенной матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называют интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} := \square\{A^{-1} \mid A \in \boldsymbol{A}\}.$$

Определение 2.2.8 Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является М-матрицей, если внедиагональные элементы A неположительны и $A^{-1} \geq 0$.

Определение 2.2.9 Матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется интервальной М-матрицей, если каждая вещественная матрица $A \in \boldsymbol{A}$ является М-матрицей.

Пример 2.2.3 *Приведем пример М-матрицы:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ -4 & 25 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -17 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4, -18 \leq 0 \\ A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} & 6 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff A_1 \text{ – } \textit{М-матрица}$$

$$\begin{cases} -3, -17 \leq 0 \\ A_2^{-1} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 26 & 17 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff A_2 \text{ – } \textit{М-матрица}$$

Стоит отметить важное свойство, вытекающее из определения M-матрицы: Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ является M-матрицей, то любая интервальная матрица $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ также является M-матрицей. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема:

Теорема 2.2.2 Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ является М-матрицей тогда и только тогда, когда $\underline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$ — М-матрицы. Любая М-матрица – неособена (невырождена) и $\boldsymbol{A}^{-1} = [\underline{\boldsymbol{A}}^{-1}, \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}]$.

Пример 2.2.4 *Так как матрицы A_1 и A_2 из примера 2.2.3 являются М-матрицами, а также каждый элемент матрицы A_1 меньше соответствующего элемента матрицы A_2, то по теореме 2.2.2 мы можем утверждать, что матрица $\boldsymbol{A}$ (см. ниже) является интервальной М-матрицей:*

$$\boldsymbol{A} = [A_1, A_2] = \begin{pmatrix} [3,4] & [-18,-17] \\ [-4,-3] & [25,26] \end{pmatrix}.$$

2.3 Множество решений ИСЛАУ

Пусть имеется интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 + \boldsymbol{a}_{m2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{mn}x_n = \boldsymbol{b}_m \end{cases}$$

Ее можно периписать в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \ldots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \ldots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$. Дадим определение для решения данной системы.

Определение 2.3.1 Объединенное множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ для x:

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}.$$

Примечание: Все последующие рисунки (2.а, 2.б, 3, 4, 5) получены с помощью пакета ntLinInc2D реализованного на языке MATLAB. Источник: `http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinInc2D.pdf`.

Пример 2.3.1

a) Рассмотрим следующую систему интервальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

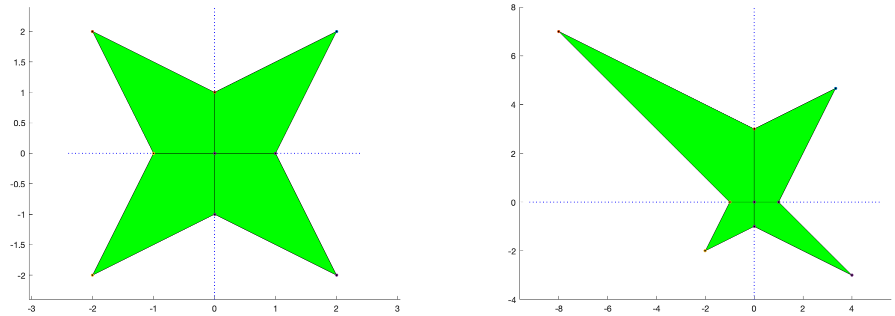
Тогда множество решений данной системы для вектора $x \in \mathbb{R}^2$ будет иметь следующий вид (рис. 2.a):

b) Немного изменим значения в нашей системе:

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-0.5, 1] \\ [-0.5, 0.5] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 3] \end{pmatrix}.$$

Тогда множество решений системы поменяет вид (рис. 2.b).

На практике, используя методы интервального анализа, нам хотелось, чтобы и ответом ИСЛАУ было множество, которое также можно представить в виде интервального вектора. Однако, как видно из примера 2.3.1, даже у простешего случая ИСЛАУ объединенное множество решений чаще всего будет весьма сложной фигурой в $\mathbb{R}^n$, которую уж точно нельзя однозначно описать в виде интервального век-



(a) (b)

Рис. 2: $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

тора. Поэтому вводится такое понятие, как *внешняя оценка объединенного множества решений*: это такой интервальный вектор, который содержит в себе объединенное множество, то есть $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})^\mathsf{T} \in \mathbb{IR}^n$: $\boldsymbol{x} \supset \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. В примере 2.3.1 а) таким внешним оцениванием являлся бы вектор $\boldsymbol{x} = \Big([\underline{\boldsymbol{x_1}}, \overline{\boldsymbol{x_1}}] \;\; [\underline{\boldsymbol{x_2}}, \overline{\boldsymbol{x_2}}]\Big)^\mathsf{T}$, где $\underline{x_1} \leq -2$, $\overline{x_1} \geq 2$, $\underline{x_2} \leq -2$, $\overline{x_2} \geq 2$ (то есть любой прямоугольник, нарисованный вокруг объединенного множества).

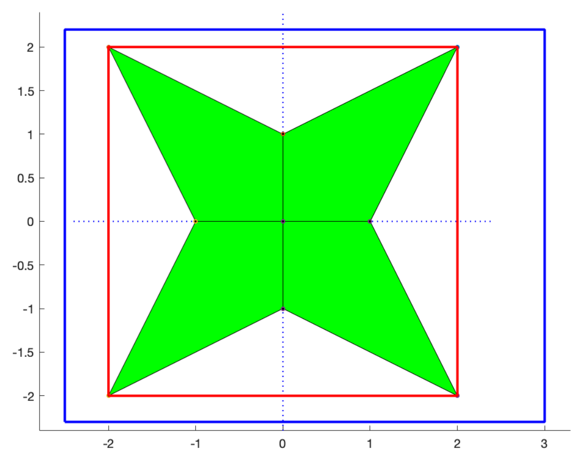


Рис. 3: Внешние оценки $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Естественно, оценка будет иметь какую-то ценность, если она наименьшая. В нашем случае наилучшей внешней оценкой объединенного множества решений был бы вектор $\boldsymbol{x} = \Big([-2, 2] \;\; [-2, 2]\Big)^\mathsf{T}$ (красный прямоугольник на рисунке 3).

Формально:

$$\boldsymbol{x} \text{ – оптимальная оценка} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \square\Xi.$$

К системам интервальных уравнений вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, так же как и к обычным линейным уравнениям, применим метод Гаусса, который дает какой-то вектор, который будет пересекаться с $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Для того, чтобы метод Гаусса давал нам интервальный вектор, который будет полностью содержать объединенное множество решений и будет являться его оптимальной внешней оценкой, необходимо наложить на матрицу $\boldsymbol{A}$ дополнительные ограничения (сам алгоритм интервального метода Гаусса см. в приложении (1), или, например, в [8], с. 342).

Теорема 2.3.1 Если в ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ является интервальной M-матрицей и справедливо одно из условий $\boldsymbol{b} < 0$, $\boldsymbol{b} \ni 0$ или $\boldsymbol{b} > 0$, то тогда результатом метода Гаусса (интервальный вектор $\boldsymbol{x_g}$) в применении к этой системе будет являться оптимальная внешняя оценка множества решений $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Пример 2.3.2 *Продемонстрируем, что при выполнении условий теоремы 2.3.1 метод Гаусса даст нам оптимальную внешнюю оценку множества решений. Пусть у нас есть ИСЛАУ вида* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, *где*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,-0.5] \\ [-2,-1] & [2,4] \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [2,3] \\ [2,3] \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, $\boldsymbol{A}$ *является M-матрицей, а вектор* $\boldsymbol{b}$ *строго больше нуля. Следовательно, выполняется условия теоремы 2.3.1.*

С помощью интервального метода Гаусса мы получим ограничивающий интервальный вектор $\boldsymbol{x_g} = \Big([0.5806, 4.5] \;\; [0.6451, 6]\Big)^{\mathsf{T}}$, *координаты которого*

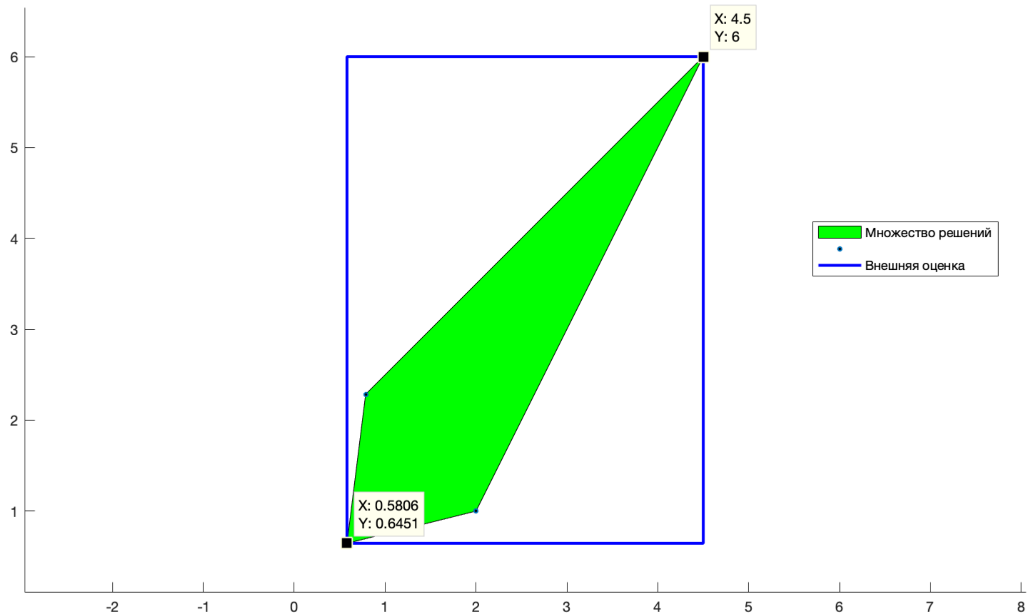


Рис. 4: Оптимальная внешняя оценка множества решений

в точности совпадают с двумя крайними точками множества решений (рис. 4). То есть $\boldsymbol{x_g}$ *действительно является оптимальной внешней оценкой, и мы можем сказать, что любой вектор, удовлетворяющий данной системе линейных уравнений, находится в этой ограничивающей области:*

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b}) : Ax = b \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \boldsymbol{x_g}.$$

Пример 2.3.3 *Покажем, что при невыполнении условий теоремы 2.3.1, оценка* $\boldsymbol{x_g}$*, полученная с помощью интервального метода Гаусса не будет являться оптимальной. Пусть не выполняется второе условие теоремы:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-1,-0.5] \\ [-2,-1] & [2,4] \end{pmatrix} \qquad \textit{и} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [2,3] \\ [-3,-2] \end{pmatrix}.$$

С помощью метода Гаусса получим внешнюю оценку

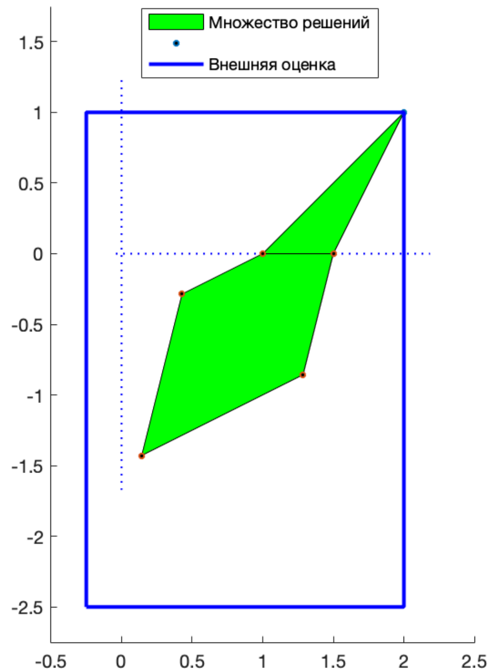


Рис. 5: Неоптимальная внешняя оценка множества решений

$\boldsymbol{x_g} = \Big([-0.25, 2] \ \ [-2.5, 1]\Big)^{\mathsf{T}}$. *На рисунке 5 видно, что полученный результат не является оптимальным.*

Таким образом, на простых примерах в двумерном случае мы показали, что интервальный метода Гаусса действительно дает оптимальную внешнюю оценку множества решений ИСЛАУ при выполнении условий теоремы 2.3.1.

3 Применение в экономике

Прежде чем объяснять, как можно применить интервальный анализ в экономике, рассмотрим не интервальную экономическую модель, которую потом обобщим с точечного случая на интервальный.

3.1 Межотраслевой баланс

Модель «затраты - выпуск» (input - output model), или межотраслевой баланс, была впервые предложена в 1930-е годы В.В. Леонтьевым (см. [5], [4]). Модель заключается в следующем: пусть есть экономика с n секторами. Каждый сектор производит x_i гомогенных товаров ($i = 1, ..., n$). Для того, чтобы j-й отрасли произвести 1 товар, ей необходимо a_{ij} товаров i-й отрасли. На рынок i-ая отрасль поставляет d_i своего товара. Таким образом, выпуск каждого сектора x_i составляется из межотраслевого потребления и рыночного потребления:

$$\text{потребление} - x_i = \underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n}_{\text{межотраслевое}} + \underbrace{d_i}_{\text{рыночное}}$$

Аналогичные уравнения можно составить для каждой отрасли $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + d_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n \end{cases}$$

Данную систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \qquad x = Ax + d \qquad \iff \qquad \boxed{(I_n - A)x = d},$$

где

— $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ – матрица технологических коэффициентов,

— $a_{ij} \in [0, 1]$ – объем поставок из i-го сектора в j-й,

— $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор выпусков отраслей,

— $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор рыночного спроса (для потребления на рынке),

— $L = (I_n - A)$ – матрица Леонтьева (Leontief matrix).

В соответствии с методологией Росстата, матрицу A называют матрицей коэффициентов прямых затрат, а матрицу L^{-1} – матрицей коэффициентов полных затрат.

Важно отметить, что матрицы Леонтьева L будут являтся M-матрицами (см. доказательство в [12]). Когда мы работаем с обычными данными, этот факт нам мало что дает, но в случае с интервальными данными это утверждение окажется ключевым для оценки множества решений.

Пример 3.1.1 *Пусть есть простая экономика с двумя секторами ($n = 2$): нефть и уголь. Обозначим за x_1 и x_2 - конечные выпуски угольной и неф-*

тянной промышленности, соответственно. Для простоты будем все измерять в условных денежных еденицах. Предположим, чтобы произвести x_1 *угля нам необходимо* $0.2x_1$ *и* $0.6x_2$ *угля. Для удобства занесем все наши исходные данные в таблицу 1.*

Таблица 1

	Уголь	Нефть	Рыночный спрос
Уголь	0.2	0.6	2000
Нефть	0.1	0	1000

Перепишем таблицу в другой вид:

Таблица 2

Сектор	Конечный выпуск	Промежуточное потребление	Рыночный спрос
Уголь	$x_1 =$	$0.2x_1 + 0.6x_2$	$+2000$
Нефть	$x_2 =$	$0.1x_1 + 0.0x_2$	$+1000$

Таким образом, получаем матрицу технологических коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$, *вектор рыночного спроса* $d = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$. *Наша задача состоит в том, чтобы найти вектор конечного выпуска* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. *Из описанной выше модели Леонтьева мы знаем:*

$$(I_n - A)x = d \Leftrightarrow$$

$$x = (I_2 - A)^{-1}d = \begin{pmatrix} 1-0.2 & 0-0.6 \\ 0-0.1 & 1-0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.6 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.35 & 0.81 \\ 0.14 & 1.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3513.51 \\ 1351.35 \end{pmatrix}$$

Получаем, что для данной экономики при заданных технологических коэффициентах и при заданном рыночном спросе необходимо будет произвести примерно $x_1 \approx 3513.51$ *единиц угля и примерно* $x_2 \approx 1351.35$ *единиц нефти.*

Пример 3.1.2 *Расширим пример 3.1.1 до трех секторов ($n = 3$):*

Таблица 3

	Уголь	Нефть	Сталь	Рыночный спрос
Уголь	0.2	0.6	0.1	0
Нефть	0.1	0	0.25	1000
Сталь	0.3	0.4	0.5	3000

Перепишем эту таблицу в другой вид:

Таблица 4

Сектор	Конечный выпуск	Промежуточное потребление	Рыночный спрос
Уголь	$x_1 =$	$0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.10x_3$	$+0$
Нефть	$x_2 =$	$0.1x_1 + 0.0x_2 + 0.25x_3$	$+1000$
Сталь	$x_3 =$	$0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.50x_3$	$+3000$

Итого, имеем $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.10 \\ 0.1 & 0.0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.4 & 0.50 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 3000 \end{pmatrix}$:

$$x = (I_3 - A)^{-1} d \approx \begin{pmatrix} 5166 \\ 4739 \\ 12891 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1.3 *Чтобы еще лучше понять природу и происхождение технологических коэффициентов, рассмотрим другой пример, в котором все данные изначально известны.*

Таблица 5

Кто производит	Для кого производит				Сумма
	Уголь	Нефть	Сталь	Рынок	
Уголь	20	30	40	50	140
Нефть	25	0	60	100	185
Сталь	35	10	30	120	195

Из этой таблицы мы сразу можем найти вектор конечного выпуска $x = \begin{pmatrix} 140 & 185 & 195 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ *(колонка «Сумма») и вектор рыночного спроса* $d = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 120 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$*(колонка «Рынок»), а матрицу технологических коэффициентов мы получаем следующим образом:*

$$A = \begin{pmatrix} 20/140 & 30/185 & 40/195 \\ 25/140 & 0/185 & 60/195 \\ 35/140 & 10/185 & 30/195 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.14 & 0.16 & 0.21 \\ 0.18 & 0.00 & 0.31 \\ 0.25 & 0.05 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем матрицу технологических коэффициентов конкретно для какого-то периода. В дальнейшем можно будет использовать эту матрицу как предварительную оценку экономики страны.

3.2 Интервальная модель

Теперь, имея представление о классической модели межотраслевого баланса, мы можем расширить ее на интервальный случай. Попытки применить интервальный анализ к межотраслевому балансу были предприняты в работе А.П. Вощинина «Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность?» [3], в работе Д. Рона «Input-output model with interval data» [15] и в работе М.Е. Джеррела «Interval Arithmetic for Input-Output Models with Inexact Data» [13].

Смысл расширения межотраслевого баланса на интервальный случай заключается в следующем: в реальной жизни чаще всего мы не знаем точного значения технологического коэффициента a_{ij} для i-го и j-го секторов. Зато мы можем знать границы значений, в которые входит этот коэффициент $a_{ij} \in \boldsymbol{a_{ij}}$. То же самое относится к рыночному потреблению. Чаще всего известно не точное значение объема рыночного потребления, а границы интервала, в который это значение входит: $d_i \in \boldsymbol{d_i}$. Важно отметить, что точно так же мы можем моделировать не только экзогенные переменные, но и эндогенные, когда нам надо задать интервал значений, в котором мы хотим чтобы лежала определенная переменная.

Таким образом, мы можем составить интервальную матрицу $\boldsymbol{A} \ni A$ и интервальный вектор $\boldsymbol{d} \ni d$, в которые будут входить всевозможные комбинации технологических коэффициентов и рыночного потребления соответственно. Наша задача сводится к решению ИСЛАУ для x:

$$(I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}. \tag{2}$$

То есть, мы должны найти множество объемов производства x, для которых при любых значений a_{ij} находящихся в интервале $\boldsymbol{a_{ij}}$ мы получим значение конечного потребления d, находящееся в границах $\boldsymbol{d}$. В данном случае $\boldsymbol{L} = (I_n - \boldsymbol{A})$ – *интервальная матрица Леонтьева.* Так как $\underline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$ обладают одинаковыми свойствами (см. 3.1), следовательно, $\underline{\boldsymbol{L}}$ и $\overline{\boldsymbol{L}}$ обладают одинаковыми свойствами, а именно: обе эти точечные матрицы являются M-матрицами. Следовательно, $\boldsymbol{L}$ –

интервальная M-матрица, и для нахождения оптимальной внешней оценки множества решений системы $\boldsymbol{L}x = \boldsymbol{d}$ применим интервальный метод Гаусса.

Пример 3.2.1 Рассмотрим экономику, в которой технологические коэффициенты и спрос представлены в таблице 3.2.1 ($n = 3$). Добавим условие, что данные не совсем точные, и что по оценкам экспертов, каждый элемент таблицы лежит на самом деле в диапазоне $\pm\varepsilon\%$ от значения в таблице.

Таблица 6

	Уголь	Нефть	Сталь	Рыночный спрос
Уголь	0.2	0.6	0.1	1
Нефть	0.1	0.0	0.25	1000
Сталь	0.3	0.4	0.5	3000

Пусть $\varepsilon = 0.05$. Тогда получим следующие значения для нашей модели:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.1899, 0.2101] & [0.5699, 0.6301] & [0.0949, 0.1051] \\ [0.0949, 0.1051] & 0 & [0.2374, 0.2626] \\ [0.2849, 0.3151] & [0.3799, 0.4201] & [0.4749, 0.5251] \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} [0.0009, 0.0011] \\ [0.9500, 1.0500] \\ [2.8500, 3.1500] \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} [0.7899, 0.8101] & [-0.6301, -0.5699] & [-0.1051, -0.0949] \\ [-0.1051, -0.0949] & 1 & [-0.2626, -0.2374] \\ [-0.3151, -0.2849] & [-0.4201, -0.3799] & [0.4749, 0.5251] \end{pmatrix}.$$

Решая ИСЛАУ $\boldsymbol{L}x = \boldsymbol{d}$ интервальным методом Гаусса, получаем внешнюю оценку множества решений конечного спроса x:

$$x \in \boldsymbol{x_g} \approx \begin{pmatrix} [3831, 7264] \\ [3740, 6275] \\ [10215, 16997] \end{pmatrix}.$$

4 Проверка модели на реальных данных

В качестве реальных данных будем использовать таблицу «затраты - выпуск» по отраслям экономики, составленную Росстатом по данным за 2016 год. В этой таблице представлены данные технологических коэффициентов по 16 видам экономической деятельности (A - P). Однако, последняя отрасль P – «Деятельность по ведению частных домашних хозяйств» – не взаимодействовала ни с какими другими отраслями (все технологические коэффициенты этой отрасли равны нулю), поэтому далее в работе будет рассматриваться модель с $n = 15$ отраслями экономики. В приложении (2) представлена таблица коэффициентов прямых затрат (матрица A), а в приложении (3) и (4) – таблица конечного использования (вектор d) и таблица отраслевого выпуса (вектор x), соответственно. Вся информация взята с оффициального сайта Росстата [18]. Расшифровки кодов видов экономический дейтельности можно посмотреть в приложении (5).

Итак, у нас есть матрица технологических коэффициентов 15 отраслей

$$A = \begin{pmatrix} 0.1502 & 0.0018 & \dots & 8.7 \times 10^{-7} \\ 3.8 \times 10^{-5} & 0.0265 & \dots & 3.8 \times 10^{-5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3.7 \times 10^{-4} & 2.9 \times 10^{-4} & \dots & 0.0178 \end{pmatrix},$$

вектор конечного (рыночного) потребления и вектор выпуска отраслей:

$$d = \begin{pmatrix} 2\ 079\ 077 \\ 149\ 901 \\ \vdots \\ 1\ 791\ 743 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽}, \qquad x = \begin{pmatrix} 5\ 477\ 771 \\ 255\ 127 \\ \vdots \\ 506\ 279 \end{pmatrix} \times \text{млн. ₽}.$$

Постановка задачи: рассмотрим две принципиально разные задачи, которые мы можем решить с помощью интервальной арифметики.

4.1 Учет ошибок округления

Первая задача, которую мы рассмотрим, исходит из изначального применения интервальной арифметики, а именно – из оценки ошибок округления. Одна из самых распространенных проблем, которая встречается в составлении бухгалтерского баланса, это проблема округления. Округление некоторых переменных в промежуточных вычислениях может привести к тому, что конечные данные будут отличаться от истинных на какое-то небольшое значение. Так как конечное потребление отраслей считается с точностью до одного миллиона рублей, становится разумным вместо данного вектора d использовать интервальный вектор $\boldsymbol{d}$, в котором радиус каждого значения будет равен миллиону рублей:

$$\underline{\boldsymbol{d}} = d - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{d}} = d + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Также помимо неточности отраслевого выпуска, необходимо учесть неточность технологических коэффициентов a_{ij}. Финансовые показатели некоторых предприятий по той или иной причине не учитываются при подсчете технологических коэффициентов Росстатом, и, следовательно, коэффициенты a_{ij} не являются совсем точными. Например, они могут быть с определенной степенью точности $(1-\varepsilon)$, и тогда диапозон значений технологических коэффициентов будет следующим:

$$\boldsymbol{A} = [A \cdot (1-\varepsilon), A \cdot (1+\varepsilon)].$$

Теперь у нас есть интервальная оценка рыночного спроса и интервальная оценка технологических коэффициентов, и мы можем перейти от обычной системы $(I_n - A)x = d$ к интервальной системе $(I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}$. Решая эту систему с помощью интервального метода Гаусса, получим следующие значения (для $\varepsilon = 0.02$):

Таблица 7

Отрасль	$\underline{\boldsymbol{x_g}}$	$\overline{\boldsymbol{x_g}}$	rad $\boldsymbol{x_g}$
A	5 348 893	5 611 315	131 211
B	251 415	258 960	3 773
C	11 153 791	11 621 531	233 870
D	37,784 906	39 123 347	669 221
E	7 514 752	8 075 763	280 506
F	10 663 803	10 800 216	68 207
G	18 390 439	18 867 046	238 303
H	1 535 394	1 552 990	8 798
I	13 699 793	14 384 723	342 465
J	4 694 111	4 917 191	111 540
K	20 543 791	21 311 246	383 727
L	9 348 176	9 366 828	9 326
M	2 471 605	2 479 178	3 786
N	4 531 219	4 540 263	4 522
O	2 490 066	2 536 577	23 255
$\sum$	**150 422 153**	**155 447 175**	**2 512 511**

Таким образом, мы можем расширить наши знания об истинных значениях отраслевого выпуска и ответить на вопрос: **в каких интервалах лежат выпуски каждой отрасли, если учесть ошибки округления и неточность технологических коэффициентов и рыночного спроса**. Стоит отметить, что даже при малых погрешностях, а именно при погрешность технологических коэффициентов на 2%, и при неточность рыночного спроса в ± 1 млн. ₽, мы получаем оценочные интервалы с достаточно большим радиусом. Например, у отрасли D – «Обрабатывающая промышленность» – радиус оценочного интервала состявляет около 669 млрд. рублей. В среднем по каждой отрасли радиус оценочного интервала для их выпуска составляет 167 501 млн. рублей, а общий выпуск всех отраслей будет колебаться от 150 до 155 трлн. ₽. То есть максимальная ошибка в значении общего выпуска может составить примерно 2.5 трлн. ₽.

4.2 Прогнозирование

Еще одна задача, которую мы можем решить с помощью интервального анализа, это прогнозирование отраслевого выпуска. В общем виде задача будет звучать так: **в каком диапозоне будет лежать отраслевой выпуск, если технологические коэффициенты увеличатся/уменьшатся на q - w%, рыночный спрос увеличится/уменьшится на s - r%?** То есть, имея данные A и d за год m, и оценку того, как изменятся A и d в год $m+1$, мы можем дать прогноз того, как изменится вектор x в год $m+1$.

Предположим, что рыночный спрос в следующем году увеличится на 10 - 15%, и взаимодейсвтие отраслей друг с другом увеличится на 1 - 2%. Тогда получим:

$$\boldsymbol{d} = [1.1 \times d, 1.15 \times d], \qquad \boldsymbol{A} = [1.01 \times A, 1.02 \times A].$$

Решая систему $(I_n - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{d}$ с помощью интервального метода Гаусса, получим следующие значения:

Таблица 8

Отрасль	$\underline{\boldsymbol{x}_g}$	$\overline{\boldsymbol{x}_g}$	$\operatorname{rad}\boldsymbol{x}_g$
A	6 098 338	6 453 011	177 336
B	282 730	297 803	7 536
C	12 651 251	13 364 758	356 754
D	42 658 421	44 991 845	1 166 712
E	8 723 816	9 287 124	281 654
F	11 841 944	12 420 247	289 152
G	20 619 135	21 697 100	538 982
H	1 703 355	1 785 937	41 291
I	15 629 887	16 542 428	456 271
J	5 345 945	5 654 768	154 411
K	23 225 917	24 507 930	641 007
L	10 298 247	10 771 851	236 802
M	2 724 976	2 851 054	63 039
N	4 991 758	5 221 301	114 772
O	2 777 174	2 917 062	69 944
$\sum$	**169 572 894**	**178 764 220**	**4 595 663**

Таким образом, мы можем утверждать, что при заданных условиях общий выпуск всех отраслей составит 169 - 178 трлн. ₽.

5 Заключение

Прикладные задачи интервального анализа достаточно обширны. Интервальные методы можно применять во многих сферах в силу их простоты. В частности, в экономике и финансах можно применять интервальные методы в любой модели, где мы сталкиваемся с неопределенностью интервального типа. Перспективами дальнейших исследований является изучение межотраслевого баланса по разделам конкретных отраслей экономики, а также расширение модели спроса и предложения на интервальный случай.

В данной курсовой работе были рассмотрены основы интервальной арифметики, необходимые теоремы для работы с интервальными векторами и матрицами, продемонстрированы примеры вычислений с интервальными числами, примеры решений интервальных систем уравнений, была показана реализация интервального метода Гаусса. Также была подробно описана модель межотраслевого баланса, показано, какие необходимы условия для того, чтобы перейти от точечной модели на интервальную. Описанная интервальная модель был проверена на реальных данных о российской экономике 2016 года. Таким образом, цель, поставленная в начале работы была достигнута.

Список литературы

[1] Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. Москва: Знание, 1980.

[2] Воронцова Е.А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // Вычислительные технологии. 2017. Том 22. №2. С.67-84.

[3] Вощинин А.П. Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность? // Рабочее совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений ИМРО'04, Новосибирск, 21–22 июня 2004 г. Тр. Междунар. конф. по вычисл. математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Под ред. Ю.И. Шокина, А.М. Федотова, С.П. Ковалева, Ю.И. Молородова, А.Л. Семёнова, С.П. Шарого. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 147–158.

[4] Леонтьев В. Исследования структуры Американской экономики. Москва.: Государственное статистическое издательство, 1958.

[5] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. Москва: МИР, 2020.

[6] Фиронова Е. Применение нечеткой логики для анализа рисков инвестиционных проектов. Москва. 2007.

[7] Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычислительные технологии. 2007. Том 12. №1. С.103-115.

[8] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2020.

[9] Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание ножеств решений интервальных систем уравнений // Вычислительные технологии. 2002. Том 7. №6. С.90-113.

[10] Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 1992. Том 10. №5. С.103-119.

[11] Buckley J.J. Solving fuzzy equations in economics and finance // Fuzzy sets and Systems. 1992. No.48. pp.289-296.

[12] Jerrel M.E. Application of Interval Computation to Regional Economic Input-Output Models // Applications of Interval Computations. 1996. Kluwer Academic Publishers.

[13] Jerrel M.E. Interval Arithmetic for Input-output Models with Inexact Data // Computational Economics. 1992. Vol.10. No.89. pp.89-100.

[14] Moore E.R., Kearfott R.B., Cloud M.J. Intoduction to interval analysis. Philadelphia.: SIAM, 2009.

[15] Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. 1992. Vol.48. No.3. pp.767-769.

[16] Sunaga T. Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numerical Analysis // Research Association of Applied Geometry Memoirs. 1958. Vol.2. pp. 29–46.

[17] Zhihui Huey Hu Reliable Optimal Production Control with Cobb-Douglas Model // Reliable Computing. 1998. Vol.4. No.63.

[18] Базовые таблицы «затраты - выпуск» за 2016 год (раздел: Таблицы «затраты-выпуск»). URL: http://rosstat.gov.ru/accounts (дата обращения: 25.04.2020).

Интервальный метод Гаусса, для получения внешней оценки множества решений ИСЛАУ вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, реализованный на языке MATLAB.

Вход: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ (`A`), $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{n}$ (`b`)

Выход: $\boldsymbol{x_g} \in \mathbb{IR}^{n}$ (`x`).

```
function x = intgauss(A,b)
n = length(A);
for i = 1:n-1;
    [maxmig,index] = max(mig(A(i:n,i)));
    if maxmig <= 0
        error("All possible pivots contain zero.")
    end
    k = index+i-1;
    if k  = i
        A([i k],i:n) = A([k i],i:n);
        b([i k]) = b([k i]);
    end
    for j = i+1:n;
        mult = A(j,i)/A(i,i);
        A(j,i+1:n) = A(j,i+1:n)-mult*A(i,i+1:n);
        b(j) = b(j)-mult*b(i);
    end
end
x(n) = b(n)/A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    k = 0
    for j=i+1:n
        k = k + A(i, j) * x(j)
    end
    x(i) = (b(i) - k)/A(i, i)
end
```

Примечане: для реализации данного кода необходима установка INTLAB (интервальное расширение для MATLAB).

URL: `http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/index.html`

Таблица коэффициентов прямых затрат (матрица A) в РФ за 2016 год. Составлено по данным из [18].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	0.1502	0.0018	0.0000	0.0636	0.0005	0.0007	0.0006	0.0207	0.0007	0.0000	0.0003	0.0041	0.0012	0.0038	0.0009
B	0.0000	0.0265	0.0000	0.0022	0.0000	0.0000	0.0000	0.0074	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000
C	0.0007	0.0002	0.1074	0.0901	0.1060	0.0152	0.0001	0.0009	0.0046	0.0000	0.0007	0.0004	0.0002	0.0007	0.0025
D	0.1547	0.2261	0.0534	0.2566	0.0431	0.2423	0.0347	0.1738	0.1007	0.0125	0.0450	0.0402	0.0203	0.0662	0.0549
E	0.0209	0.0067	0.0291	0.0340	0.3540	0.0093	0.0131	0.0267	0.0284	0.0045	0.0212	0.0179	0.0341	0.0322	0.0378
F	0.0036	0.0075	0.0135	0.0054	0.0117	0.0336	0.0044	0.0106	0.0084	0.0008	0.0171	0.0509	0.0254	0.0307	0.0296
G	0.0495	0.0430	0.0165	0.0665	0.0950	0.0655	0.0364	0.0449	0.0267	0.0046	0.0158	0.0152	0.0071	0.0413	0.0166
H	0.0002	0.0004	0.0006	0.0007	0.0007	0.0013	0.0009	0.0023	0.0023	0.0027	0.0012	0.0081	0.0059	0.0065	0.0087
I	0.0195	0.0345	0.0683	0.0571	0.0168	0.0287	0.1312	0.0157	0.1635	0.0127	0.0126	0.0477	0.0084	0.0109	0.0280
J	0.0142	0.0177	0.0095	0.0184	0.0159	0.0185	0.0211	0.0316	0.0206	0.1081	0.0116	0.0222	0.0023	0.0046	0.0178
K	0.0094	0.0651	0.0477	0.0329	0.0308	0.0449	0.1378	0.1291	0.1072	0.1051	0.1074	0.0441	0.0344	0.0317	0.1051
L	0.0010	0.0014	0.0011	0.0016	0.0008	0.0013	0.0020	0.0010	0.0034	0.0030	0.0013	0.0017	0.0004	0.0008	0.0011
M	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0003	0.0004	0.0002	0.0009	0.0008	0.0005	0.0024	0.0144	0.0025	0.0017
N	0.0031	0.0004	0.0004	0.0002	0.0003	0.0002	0.0002	0.0008	0.0007	0.0004	0.0003	0.0045	0.0020	0.0095	0.0021
O	0.0003	0.0003	0.0008	0.0010	0.0017	0.0010	0.0007	0.0040	0.0009	0.0014	0.0127	0.0127	0.0056	0.0068	0.0718

Таблица конечного (рыночного) использования в РФ за 2016 год. Источник: данные росстата [18].

Отрасль	Конечное использование (млн. ₽)
A	2 079 077
B	149 901
C	5 605 316
D	19 935 664
E	1 533 063
F	8 566 710
G	12 293 448
H	1 256 406
I	4 834 854
J	1 812 499
K	10 394 320
L	9 106 228
M	2 346 334
N	4 380 083
O	1 791 743

Таблица отраслевого выпуска в РФ за 2016 год. Источник: данные росстата [18].

Отрасль	**Выпуск отрасли (млн. ₽)**
A	5 477 771
B	255 127
C	11 383 093
D	38 443 086
E	7 788 964
F	10 731 073
G	18 624 482
H	1 544 079
I	14 036 310
J	4 803 708
K	20 921 028
L	9 357 341
M	2 475 347
N	4 535 688
O	2 512 998

Расшифровка кодов разделов ОКДП:

Код	**Расшифроквка**
A	Сельское хозяйство, охота и лесоводство
B	Рыболовство
C	Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров
D	Обрабатывающая промышленность
E	Электроэнергия, газ и водоснабжение
F	Строительство
G	Оптовая и розничная торговля; ремонт бытовых приборов и предметов личного пользования
H	Гостиницы и рестораны
I	Транспорт, складское хозяйство и связь
J	Финансовое посредничество
K	Деятельность по операциям с недвижимым имуществом и арендой; деятельность исследовательская и коммерческая
L	Государственное управление и оборона; обязательное социальное страхование
M	Образование
N	Здравоохранение и социальные услуги
O	Деятельность по предоставлению коммунальных, социальных и персональных услуг прочих