ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет экономических наук

Школа финансов

КУРСОВАЯ РАБОТА

Робастная оптимизация портфеля финансовых активов

по направлению подготовки Экономика

Образовательная программа «Экономика и статистика»

Выполнил: студент группы БСТ184

Коган Яков Владимирович

Руководитель: младший научный сотрудник, Андреев Николай Анатольевич

Москва 2021

Содержание

1 Введение

На сегодняшний день при принятии финансовых решений важнейшую роль играют математические модели, особенно когда речь идет о сложных финансовых инструментах. Однако, все модели обычно построены на каких-то предпосылках о входных данных. В частности, в модели диверсификации портфеля финансовых активов по Марковитцу в качестве предпосылок принимается нормальное распределение доходностей актиов. Или, например, более простой вариант, в модели CAPM изначально задаются какие-то экзогенные параметры, такие, как рыночная доходность. При этом, результат модели может оказаться слишком чувствителен к входным данным, либо же входные параметры модели могут оказаться неверными. В таком случае имеет место модельный риск.

Целью данной работы является попытка решить проблему возникновения модельного риска в одной из популярных финансовых задач, а именно в задаче оптимизации портфеля ценных бумаг частного инвестора. Тема является **актуальной** как никогда, особенно на российском рынке частного инвестирования. За 2020 год на российский фондовый рынок пришло рекордное количество новых частных игроков, для которых важнейшим остается вопрос о правильной диверсификации своего портфеля. В **основные задачи** этой работы входит описание классических методов диверсификации портфеля, и его расширение с учетом модельного риска, а также применение обоих методов на реальных данных Московской биржи.

2 Робастность

2.1 Измерение риска

На сегодняшний день ключевое понятие в финансовой математике – это понятие **риска**. Что представляет собой риск? Точное определение дать довольно сложно, лучше передать смысл риска через примеры. Риск просадки того или иного финансового актива (например, акции нефтянной комании) обозначает насколько часто цена этого актива принимает значения ниже определенного уровня. Существует множество метрик, измеряющих в том или ином смысле риск. Перечислим самые популярные из них. Допустим, у нас есть значения доходности актива $X_1, X_2, \dots, X_T$ за условный временной период $1, 2, \dots, T$:

- Дисперсия доходности (Var) характеризует разброс значений доходности относительно среднего значения доходности:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2 \tag{1}$$

  где $\overline{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$.

- Абсолютное отклонение (MAD):

$$\mathrm{MAD}(X) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|X_t - \overline{X}| \tag{2}$$

- Стоимость под риском (Value at Risk, VaR) – мера риска, характеризующая денежную величину, которую с заданной вероятностью не превысят потери, связанные с риском:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\inf_{t\in(1,T)}\{X_t \in \mathbb{R} : F_X(X_t) > \alpha\} \tag{3}$$

где α – уровень значимости (обычно 0.05).

- Условная стоимость под риском (Conditional Value at Risk, CVaR):

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{\alpha T}\sum_{t=1}^{T}\max(-X_t - \mathrm{VaR}_\alpha(X), 0) \tag{4}$$

Так или иначе, перечисленные метрики риска (и большинство других) связанны с конкретным распределением доходностей, которое мы эмпирическим путем получаем из выборки $X_1, X_2, \ldots, X_T$. Отсюда можно сделать вывод, что риск мы можем посчитать, если мы знаем, или с определенной долей вероятности предполагаем, что распределение доходности распределено по конкретному закону Q (будь то нормальное нормальное, распределение Стьюдента и т.д.). Естественно возникает вопрос: что если наше предположение о распределении неверное? Если инвестор не уверен в распределении доходности, то возникает **неопределенность** финансового актива.

Для того, чтобы отчетливо понимать разницу между риском и неопределенностью, продемонстрируем классический пример из теории принятия решений.

2.2 Парадокс Эллсберга

Парадокс Эллсберга, описанный в [5], назван в честь открывшего его американским военным аналитиком Даниэлем Эллсбергом в 1961 году. Суть парадокса заключается в следующем.

Пусть имеются две урны, в каждой из которых находится 100 шаров. В первой урне — 50 красных и 50 черных шаров. Во второй урне пропорция красных и черных шаров неизвестна. Схематично урны показаны на рисунке 1.

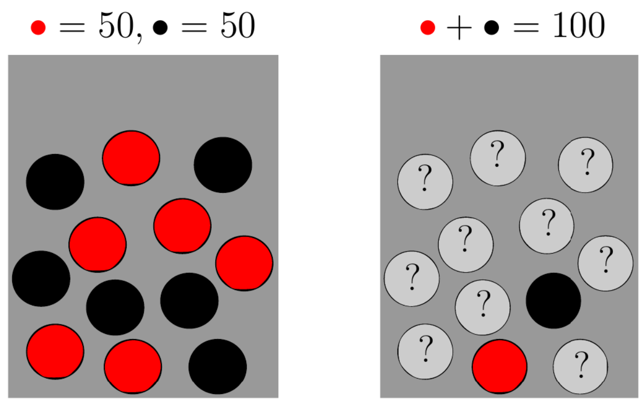


Рис. 1: Парадокс Эллсберга

Участникам эксперимента предлагается выбрать урну. Затем, если они вытаскивают шар красного цвета, то получают 100$, и 0$, если шар черного цвета. В ходе эксперимента выяснилось, что подавляющее большинство участников выбирают первую урну, там, где известна пропорция красных и черных шаров. Однако, если не менять пропорции шаров (ни в первой, ни во второй урне), и провести те же самые действия, только теперь поменять выигрыш с красного шара на черный, участники эксперимента все равно выберут первую урну, а не вторую. В этом и заключается парадокс. В первом эксперименте участники, зная пропорцию 50/50 в первой урне, и не зная пропорцию во второй, «предположили» наихудший вариант, который может быть для них во второй урне, то есть 1 красный шар и 99 черных (с такой пропорцией вероятность выигрыша 100$ минимальна). И именно поэтому решили вытаскивать шар из первой урны. Когда организаторы эксперимента поменяли выигрышный цвет, то участникам было бы логичней делать выбор в пользу второй урны, так как до этого они уже сделали предположение о том, что вероятность вытащить черный шар из второй урны – максимальна. Но этого не происходит, и участники все равно выбирают первую урну.

Формально мы можем записать этот выбор следующим образом. Пусть ξ_1 и ξ_2 – случайные величины, обозначающие цвет шара (1 - красный, 0 - черный), который участник эксперимента вытащил из 1-й или 2-й урны соответственно. В таблице 1 представленно как с помощью известных распределений можно описать эксперимент.

Таблица 1

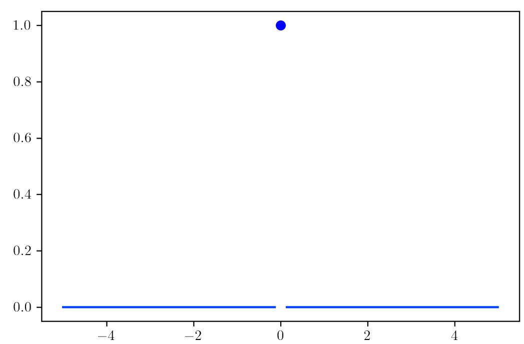
1-я урна	$\xi_1 \sim \text{Bernoulli}(p = 0.5)$	**риск**
2-я урна	$\xi_2 \sim \text{Bernoulli}(p = ?)$	**неопределенность**

Во втором p случае может принимать любые значения от 0 до 1 невключительно. Эксперимент явно дал понять следующее: люди опасаются не только риска как такового, но и незнания того, какой именно риск они берут на себя, то есть – неопределенности.

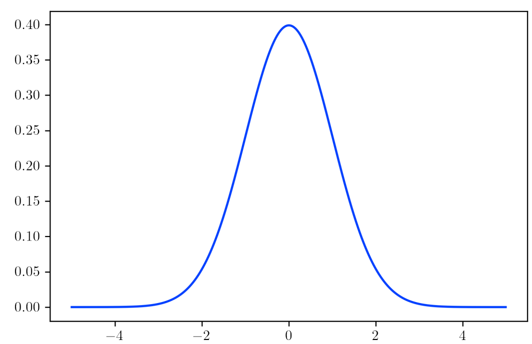
2.3 Модельный риск

Из описанного выше эксперимента можно сделать вывод о том, что нам важно разделять понятие риска и понятие неопределенности. Наличие риска означает, что мы знаем вероятностное распределение, и можем «оценить риск», то есть посчитать ту или иную метрику, которая будет зависеть от распределения. Наличие неопределенности означает, что мы не знаем точно, какое распределение у изучаемой переменной. Причем наше незнание может быть разным. Например, это может быть набор одного и того же распределения с разными параметрами ($\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3^2), \ldots$), либо и вовсе набор разных распределений ($\mathcal{N}, t_\nu, \text{Log}\mathcal{N}, \ldots$). В обоих случаях мы будем иметь дело с неопределенностью.

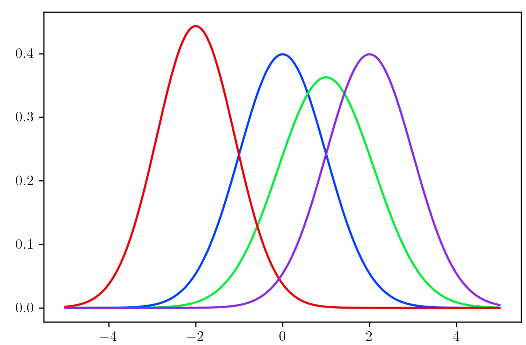
В статье [4] авторы наглядно демонстрируют разницу между определенностью,



(a) Определенность



(b) Риск



(c) Неопределенность

Рис. 2

риском и неопределенностью. На рисунке 2 показаны эти три случая. В случае определенности исследуемая переменная – детерменирована, и ее плотность распределения будет изображаться просто точкой (2a). В случае наличия риска мы знаем точное распределение (2b), и в случае неопределенности изучаемая переменная может иметь несколько потенциальных распределени (2c).

Так как же учесть при расчетах модельный риск / неопределенность? Рама Конт в своей статье 2004 года [7] рассматривает два основных подхода, которые так или иначе при решении задачи учитывают неопределенность распределений.

1. Усреднение моделей (Bayesian model averaging)
2. Метод наихудшего сценария (Worst case approaches)
3. Использование когерентной меры риска (Coherent risk measure)

У всех трех есть свои преимущества и недостатки. Далее постараемся кратко описать каждый из методов.

Байесовское усреднение моделей, как следует из названия, это подход, который борется с неопределенностью путем усреднения нескольких известных моделей, при наличии известных вероятностей правдивости каждой из модели. Пусть у нас есть множество потенциальных моделе $M_1, M_2, \ldots, M_J$. Параметры соответствующих моделей и их множество значений обозначим следующим образом: $\theta_1 \in E_1, \theta_2 \in E_2, \ldots, \theta_J \in E_J$. Далее введем следующие понятия вероятности:

- $p(\theta_j \mid M_j)$ – априорная функция плотности (на множестве E_j) параметров θ_j, при условии выполнения модели M_j,
- $\mathbf{P}(M_j)$ – априорная вероятность того, что M_j является «правдивой» моделью.

Для заданного набора наблюдений y апостериорная вероятность «правдивости» модели M_j будет вычисляться следующим образом:

$$\mathbf{P}(M_j \mid y) = \frac{p(y \mid M_j)\mathbf{P}(M_j)}{\sum_{k=1}^{J} p(y \mid M_k)\mathbf{P}(M_k)}, \tag{5}$$

где $p(y \mid M_j) = \int_{E_k} \mathbf{P}(y \mid \theta_j, M_j) p(\theta_j \mid M_j) d\theta_j$. Предположим, что в рамках решения какой-то финансовой задачи нам необходимо посчитать математическое ожидание случайной величины X при имеющихся данных y. Тогда, используя байесовский подход:

$$\hat{\mathbf{E}}(X \mid y) = \sum_{j=1}^{J} \mathbf{E}(X \mid y, M_j)\mathbf{P}(M_j \mid y) \tag{6}$$

Данный подход дает довольно стабильные оценки, однако, Рама Конт отмечает несколько недостатков использования усреднения моделей. Во-первых, функции плотности $p(\theta_j \mid M_)$ являются экзогенными. То есть нам надо самим определять вероятности того, что параметры у j-й модели будут именно такими, а не другими, а это в свою очередь является другой полноценной задачей. Во-вторых, априорные вероятности $\mathbf{P}(M_j)$ также являются экзогенными. В каких-то случаях, когда, например, модели соответствуют разным состояниям рынка, эту величину можно вычислить, взяв отношение длительность этого состояния к длительности всего рассматриваемого периода. Но такие упрощения могут быть некорректными, либо и вовсе нельзя построить простую аналогию между моделями и вероятностью их возникновения. В-третьих, используя этот подход можно столкнуться с вычислительной сложностью при подсчете апостериорных вероятностей $\mathbf{P}(M_j \mid y)$.

Второй способ учесть все модели сразу – это **метод наихудшего сценария**. Допустим, у нас есть целевая функция полезности $U(X)$, математическое ожидание которой мы хотим максимизировать по X из множества допустимых значений A. Если при этом существует несколько возможных моделей (или более формально – вероятностных мер) $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots \in \mathcal{P}$, в рамках которых мы вычисляем математическое ожидание, то робастный вариант оптимизации будет выглядеть следующим образом:

$$\max_{X \in A} \quad \min_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[U(X) \right] \tag{7}$$

Таким образом, мы максимизируем наихудший из всех вариантов. Главное преимущество этого способа состоит в том, что нам не нужны значения априорных вероятностей моделей, которые на практике в любом случае редко бывают известными. Также, как отмечает Рама Конт, в данной модели учтены и неприязнь к риску, и неприязнь к неопределенности. Неприязнь к риску выражается через функцию полезности $U(X)$, а неприязнь к неопределенности выражается через взятие минимума по всем моделям из множества $\mathcal{P}$.

Третий и последний способ учета неопределенности – это использование **когерентной меры риска** (coherent risk measure). Если мера риска $\rho(X)$ удовлетворяет четырем определенным свойствам (см. [7]), то она являтся когерентной и может быть представима в виде:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[-X] \tag{8}$$

3 Диверсификация Марковитца

Перед тем как строить робастную модель, опишем обычный способ диверсификации по Марковитцу, описанный в оригинальной статье [11], а в следующем разделе опишем необходимые изменения для более робастной оптимизации.

3.1 Описание

Пусть у инвестора есть n активов и сумма I, которую он инвестировал в эти активы. Доля средств вложенных в i-й актив (вес) обозначается w_i, в дальнейшем будет удобнее оперировать с вектором весов $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}^\intercal$. Сумма весов должна равнятся единице: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. При этом веса могут быть как положительными, так и отрицательными. Положительные веса соответствуют долгосрочному инвестированию в актив, в то время как отрицательные веса означают, что у нас открыта короткая позиция по этому активу. Для упрощения экономического смысла в этой работе будут рассматриваться только длинные позиции по активам. Помимо своего веса в портфеле у каждого актива есть своя доходность r_i – случайная величина, распределенная по определенному закону. В оригинальной статье Марковитца предполагалось, что доходности каждого актива распределены по нормальному закону, а в совокупности случайный вектор $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}^\intercal$ распределен по многомерному нормальному закону. Доходность портфеля активов также является случайной величиной и определяется следующей формулой:

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{r} \tag{9}$$

Инвестора интересует два показателя у портфеля: средняя доходность за определенный период и риск, связанный с данным портфелем. В качестве средней доходности принимается математическое ожидание R, а в качестве меры риска в модели Марковитца берется дисперсия R:

$$\mu = \mathbf{E}(R) = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m}, \tag{10}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}(R) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathbf{Cov}(r_i, r_j) = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}, \tag{11}$$

где

$$\boldsymbol{m} = \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(r_1) \\ \mathbf{E}(r_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(r_n) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{Var}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Var}(r_1) & \mathbf{Cov}(r_1, r_2) & \dots & \mathbf{Cov}(r_1, r_n) \\ \mathbf{Cov}(r_2, r_1) & \mathbf{Var}(r_2) & \dots & \mathbf{Cov}(r_2, r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov}(r_n, r_1) & \mathbf{Cov}(r_n, r_2) & \dots & \mathbf{Var}(r_n) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Если инвестор уже выбрал определенный набор n активов, то ему остается лишь подобрать веса так, чтобы как можно ближе подобраться к своей цели. При этом постановка цели может быть разной. Ниже приведены два основных вида постановки задачи оптимизации портфеля:

- минимизировать риск портфеля σ^2 при заданном минимальном значении доходности

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{w}} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} && \text{(14a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} \geq \mu^* && \text{(14b)} \\ & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} = 1 && \text{(14c)} \end{aligned}$$

где μ^* – целевой уровень доходности портфеля, а $\boldsymbol{1_n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^n$;

- максимизировать доходность портфеля μ при заданном максимальном значении риска:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{w}} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} && \text{(15a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} \leq \sigma^* && \text{(15b)} \\ & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} = 1 && \text{(15c)} \end{aligned}$$

где σ^* – целевой уровень риска.

- максимизировать функцию полезности, задающую trade-off между доходностью и риском портфеля:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{w}} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} - l \cdot \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} && \text{(16a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} = 1 && \text{(16b)} \end{aligned}$$

где l – уровень неприязни к риску.

Задачи решаются аналогично, поэтому покажем только алгоритм решения при минимизации риска 14:

$$\min_{\boldsymbol{w},\lambda,\gamma} L = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} - \mu^*) - \gamma(\boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\Sigma w} - \lambda \boldsymbol{m} - \gamma \boldsymbol{1_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} - \mu^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\lambda \boldsymbol{m} + \gamma \boldsymbol{1_n}) \\ \boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\lambda \boldsymbol{m} + \gamma \boldsymbol{1_n}) = \mu^* \\ \boldsymbol{1}_n^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\lambda \boldsymbol{m} + \gamma \boldsymbol{1_n}) = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{(\boldsymbol{1}_n^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n \mu^* - \boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n)\boldsymbol{m} + (\boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n \mu^*)}{\boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{m} \boldsymbol{1}_n^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n - (\boldsymbol{m}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n)^2}$$

Очень часто при такой целевой функции многие веса зануляются, а остальные веса непосредственно слишком большие. Для избежания этой проблемы можно немного поменять постановку задачи:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{w}} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma w} + \gamma \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{w} && \text{(17a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} \geq \mu^* && \text{(17b)} \\ & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} = 1 && \text{(17c)} \end{aligned}$$

где $\gamma \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{w} = \gamma(w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2)$ – сумма квадратов весов. Чем больше будет нулевых весов, тем ближе к единице будет какой-то один вес. И наоборот, чем меньше эта сумма, тем больше будет нулевых весов. Коэффициент γ регулирует то, насколько сильно мы не хотим зануленные веса. Чем больше γ, тем больше мы штрафуем целевую функцию за веса, близкие к нулю.

3.2 Выборочные статистики

Обозначим за $r_j(t)$ - доходность j-го актива за период t (в дальнейшем за один период будем считать один торговый день на Московской бирже). Рассматриваемое количество дней обозначим за T. Итого, полный массив данных будет выглядеть следующим образом (таблица 2):

Таблица 2

День	**Актив №1**	**Актив №2**	$\ldots$	**Актив №$\boldsymbol{j}$**	$\ldots$	**Актив №$\boldsymbol{n}$**
1	$r_1(1)$	$r_2(1)$	$\ldots$	$r_j(1)$	$\ldots$	$r_n(1)$
2	$r_1(2)$	$r_2(2)$	$\ldots$	$r_j(2)$	$\ldots$	$r_n(2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
t	$r_1(t)$	$r_2(t)$	$\ldots$	$r_j(t)$	$\ldots$	$r_n(t)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
T	$r_1(T)$	$r_2(T)$	$\ldots$	$r_j(T)$	$\ldots$	$r_n(T)$

Естественно, мы не знаем реального распределения доходностей активов. Обычно предполагается, что набор доходностей активов распределен по определенному многомерному закону, и на основании этой предпосылки считаются нужные выборочные статистики. В случае предпослыки о нормальном распределении доходностей всех активов, то есть при $\boldsymbol{r} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$, оценки вектора средних $\hat{\boldsymbol{m}}$ и ковариационной матрицы $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ вычисляются следующим образом.

$$\hat{m}_j = \hat{\mathbf{E}}(r_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_j(t) \tag{18}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\mathbf{Cov}}(r_i, r_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} \left(r_i(t) - \hat{m}_i\right)\left(r_j(t) - \hat{m}_j\right) \tag{19}$$

где $\hat{m}_j$ – выборочная средняя доходность j-го актива, $\hat{\sigma}_{ij}$ – выборочная ковариация j-го и i-го активов, и соответственно,

$$\hat{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_n \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \dots & \hat{\sigma}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{n1} & \dots & \hat{\sigma}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

После того, как мы посчитали выбочные средние и ковариации, мы можем использовать эти статистики для моделирования доходностей.

Стоит отметить, что нам будет интересны не сами средние доходности акций и их ковариации друг между другом 20, а эти же характеристики, но за год. Чтобы перевести доходности ковариации в годовой формат, необходимо умножить их на количесвто торговых дней в году $t_{tr} = 252$: $t_{tr} \cdot \hat{\boldsymbol{m}}$, $t_{tr} \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$.

Примечание: на практике мы изначально загружаем не сами доходности, цены активов, и получаем из них доходности с помощью следующей формулы: $r_j(t) = \frac{p_j(t) - p_j(t-1)}{p_j(t-1)}$, где $p_j(t)$ – стоимость j-го актива в момент t.

3.3 Простая оптимизация на реальных данных

Осуществим обычную оптимизацию на реальных данных. Рассмотрим доходности акций 10 российских компаний за период с `2017-01-01` по `2020-01-01` (окончание `.ME` обозначает, что речь идет об акциях компаний, торгующихся на Московской бирже в рублях):

1. Аэрофлот (`AFLT.ME`)
2. Газпром (`GAZP.ME`)
3. Лукойл (`LKOH.ME`)
4. Полиметал (`POLY.ME`)
5. Северсталь (`CHMF.ME`)

6. Сбербанк (SBER.ME)

7. Сбербанк привилегированные акции (SBERP.ME)

8. Татнефть (TATN.ME)

9. Яндекс (YNDX.ME)

Динамика цен выглядит следующим образом (рис. 3):

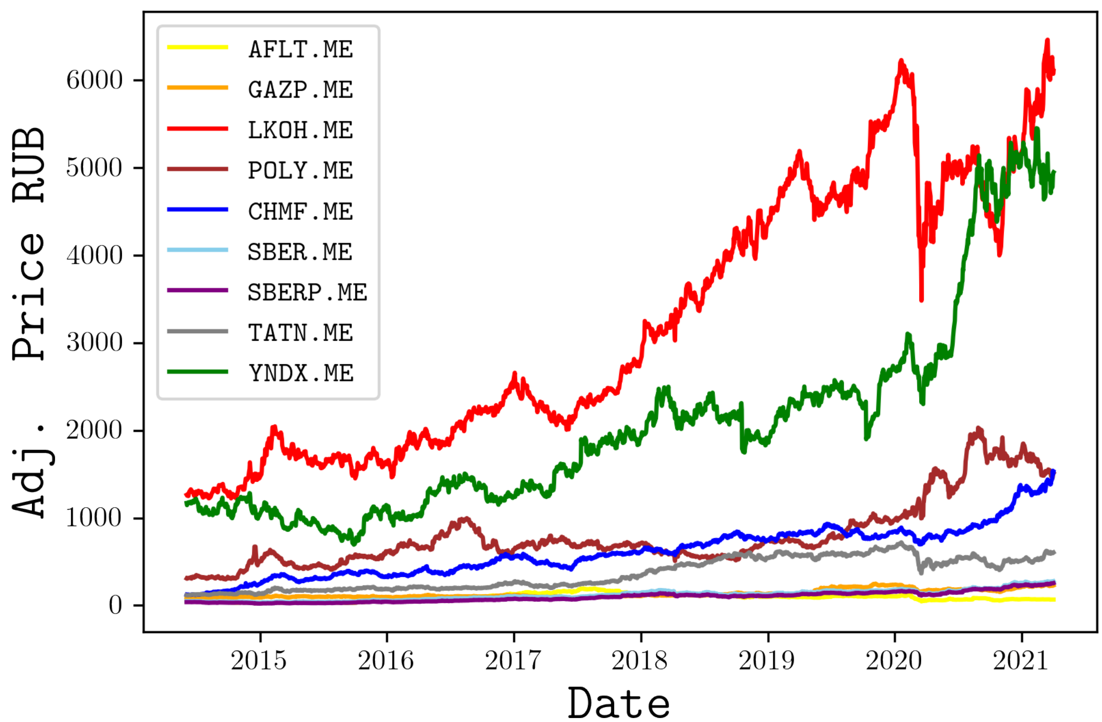


Рис. 3: Динамика цен российских компаний

Будем решать задачу минимизации риска с заданным уровнем доходности и только с длинными позициями:

$$\min_{\boldsymbol{w}} \quad \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} \tag{21a}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{m} \geq \mu^* \tag{21b}$$

$$\boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{1_n} = 1 \tag{21c}$$

$$\forall i : w_i \geq 0 \tag{21d}$$

Сначала выгрузим необходимые нам данные с помощью библиотеки `yfinance` [20], реализованную на языке Python

Python Загрузка данных

```
import yfinance as yf
assets = ['AFLT.ME', 'GAZP.ME', 'LKOH.ME', 'POLY.ME', 'CHMF.ME',
'SBER.ME', 'SBERP.ME', 'TATN.ME', 'YNDX.ME']
data = yf.download(assets, start = 2017-01-01, end = 2020-01-01)
data = data.loc[:,('Adj Close', slice(None))]
data.columns = assets
```

В результате в переменной `data` у нас будет храниться таблица типа 2 (только не с доходностями, а с ценами) с соответствующими активами и датами. Теперь перейдем непосредственно к самой оптимизации, то есть поиску оптимальных весов с точки зрения нашей задачи. Для этого будем пользоваться пакетом `PyPortfolioOpt` [12], в котором реализована функция минимизации риска для заданной средней доходности μ^*.

В качестве заданной минимальной средней доходности будем использовать рыночную доходность на российском рынке (market rate of return). Из исследования [19] известно, что средний показатель годовой рыночной премии за риск в 2020 году в России составляет $r_{premium} = 7.8\%$ (risk premium). В качестве безрисковой годовой доходности можно взять годовую доходность десятилетних облигаций федерального займа. По данным московской биржи [17], в январе 2021 года эта доходность состовляля $r_f = 6\%$ (risk free rate of return). В таком случае, по определению премии за риск ($r_{premium} = r_m - r_f$) мы можем посчитать рыночную доходность: $\mu^* = r_m = r_{premium} + r_f = 7.8\% + 6\% = 13.8\%$.

Теперь у нас есть все необходимые вводные данные, и мы можем приступать к оптимизации.

Python Поиск весов портфеля с минимальной дисперсией

```
import pyfolio as pf
mu = pf.expected_returns.mean_historical_return(data) # вектор $\hat{\boldsymbol{m}}$
S = pf.risk_models.sample_cov(data) # матрица $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$
ef = EfficientFrontier(mu, S)
weights = ef.efficient_return(0.138) # веса $\boldsymbol{w}$
```

В итоге переменная `weights` будет являться решением задачи (21). В таблице 3 представлены значения весов активов (w_i), их среднегодовые доходности ($t_{tr} \cdot \hat{m}_j$) и дисперсии ($t_{tr} \cdot \hat{\sigma}_{ii}$), а также доходность ($\boldsymbol{w}^\intercal \hat{\boldsymbol{m}}$) и волатильность ($\boldsymbol{w}^\intercal \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{w}$) всего портфеля. Для наглядности на рисунке 4 представлена диаграмма весов портфеля.

Таблица 3

i	**Компания**	w_i	$t_{tr} \cdot \hat{m}_j$	$t_{tr} \cdot \hat{\sigma}_{ii}$
1	AFLT.ME	14.739%	-3.510%	0.076
2	GAZP.ME	11.734%	25.608%	0.057
3	LKOH.ME	19.421%	27.990%	0.047
4	POLY.ME	19.359%	17.608%	0.075
5	CHMF.ME	19.048%	16.097%	0.046
6	SBER.ME	0.0%	20.863%	0.074
7	SBERP.ME	6.739%	26.707%	0.062
8	TATN.ME	2.926%	32.926%	0.076
9	YNDX.ME	6.035%	32.163%	0.121
Σ	Портфель	100%	19.102%	0.140%

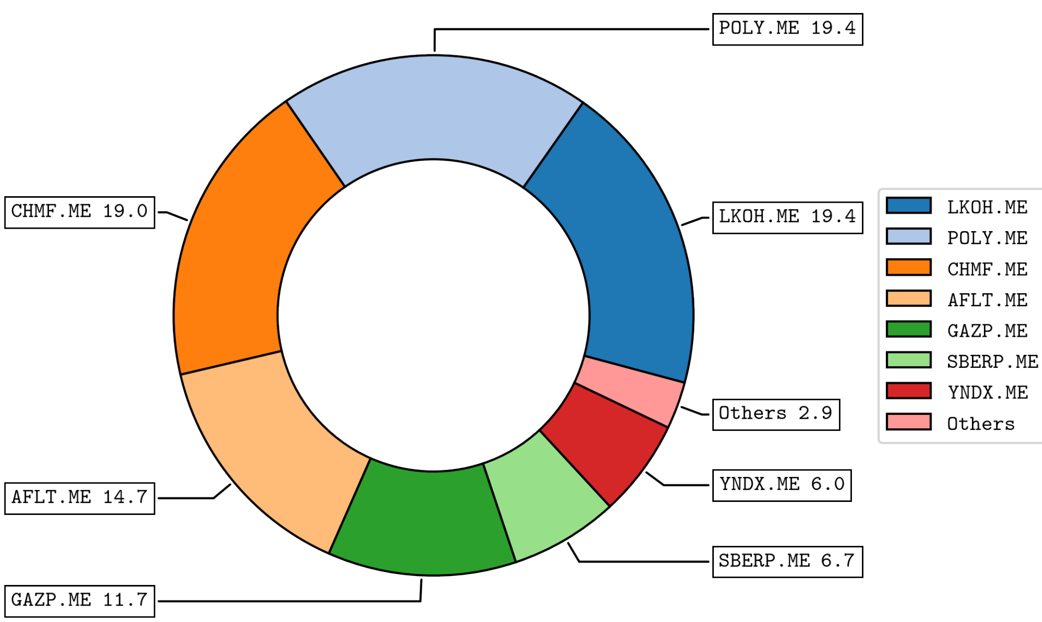


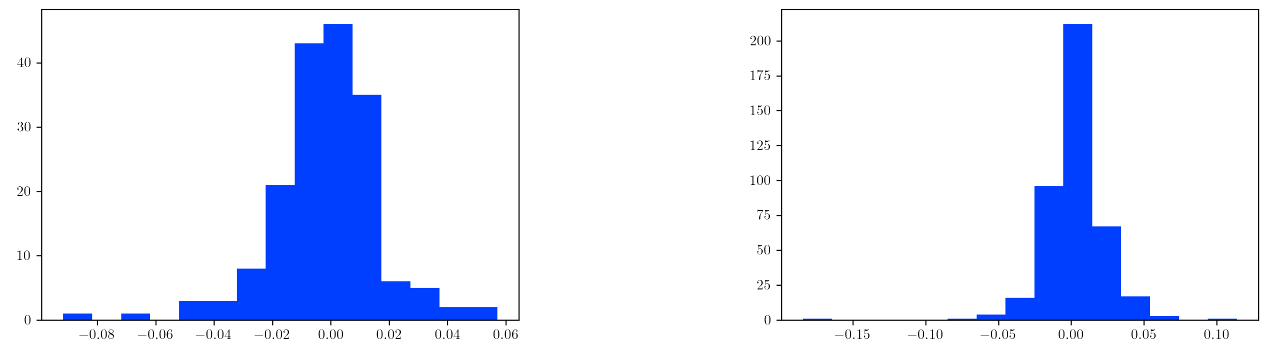
Рис. 4: Веса портфеля с минимальным риском и заданной доходностью

3.4 Критика

Одним из главных недостатков оригинального подхода Макровица – это использование дисперисии в качестве меры риска [10]. Нельзя сказать, что эта мера риска полностью интерпретируется как неприязнь к риску, так как она является симметричной. При минимизации дисперсии портфеля очень высокая доходность будет считаться столь же рискованной, что и очень низкая доходность. Но на практике инвесторы ни чуть не опасаются аномально высокого дохода, и их предпочтения являются ассиметричными.

Еще один недостаток, связанный с предыдущем, это то, что в качестве предпосылок модели заложено нормальное распределение доходностей. Это влечет за собой два последствия. Во-первых, мы не сможем учитывать относительно более частое появление слишком больших и слишком маленьких доходностей. Во второй половине 20-го века Бенуа Мандельброт и Евгений Фама [9] показали, что распределение доходностей имеет более «тяжелые» хвосты, нежели чем у нормального распределения, и в каких-то случах больше подходит, например, распределение Стьюдента. Во-вторых, нормальное распределение не позволяет учесть асимметрию доходностей, которая может появляться во время кризисов. На рисунке 5 приведено несколько таких примеров. Помимо этого, нет гарантии того, что наши оценочные статистики (вектор средних и ковариационная матрица) будут релевантны в будущем, так как на рынке могут случиться структурные изменения, и средняя годовая доходность и ковариация с другими ценными бумагами могут после этого измениться на долгий период.

На практике не раз бывали случаи, когда из-за использования неправильной модели фонды и другие участники рынка терпели огромные убытки. Рама Конт приводит пример в своей статье [7]. В начале 1996 года Нью-Йоркское подразделения банка Токио понесло убытки в размере 86 миллионов долларов по причине



(a) `GAZP.ME, 2020-02-18 - 2020-10-30, skew = -0.669`

(b) `YNDX.ME, 2019-01-03 - 2020-09-03, skew = -1.469`

Рис. 5: Асимметричные (скошенные) распределения доходностей.

того, что их собственная модель ценообразования переоценила портфель опционов на процентные ставки США. Через несколько недель аналогичная ситуация произошла в Германии и Великобритании из-за использования неправильной модели ценообразования. После этих событий помимо основного понятия риска стали выделять термин «модельный риск».

4 Робастная оптимизация

В предыдущем разделе мы описали классический подход к оптимизации портфеля ценных бумаг и также указали на его недостатки. Теперь перейдем непосредственно к построению робастной модели оптимизации, которая будет учитыват недостатки предыдущей модели и будет учитывать модельный риск.

4.1 Общая идея

Перед тем как описывать общую идею робастной оптимизации, отметим, что в качестве меры риска теперь будем использовать не дисперсию портфеля, а условную стоимость под риском (формула 4). Это целесообразно по двум причинам. Во-первых, как уже отмечалось в предыдущем разделе, дисперсия является симметричной мерой риска, в отличие от метрики CVaR, которая учитывает только отрицательные доходности ниже заданного уровня. Во-вторых, метрика CVaR сможет учесть более тяжелые хвосты у распределения доходности, ведь у нормального распределения и распределения Стьюдента может быть соразмерная дисперсия, но хвосты у распределения Стьюдента будут больше. CVaR сможет это учесть.

Перейдем к описанию идеи. Наша цель – это преобразовать задачу 21 (или аналогичные ей 14, 15 или 16) таким образом, чтобы мы могли учитывать несколько моделей сразу. Этого можно добиться, немного преобразуя формулу 7. В качестве функции полезности можно взять trade-off между доходностью портфеля и его суммой под риском. Примером может послужить функция полезности из статьи [3]. Взяв вместо дисперсии величину условной стоимости под риском в качестве меры рискка, получим слудеющую формулу:

$$U(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^{\intercal}\boldsymbol{m} - l \cdot \mathrm{CVaR}_{\alpha}(\boldsymbol{w}) \tag{22}$$

где l – уровень неприязни к риску. Теперь необходимо определить, каким образом мы будем считать показатели доходности и риска портфеля. Для определенного временного периода будем считать вектор обычных выоборчных средних и выборочную ковариационную матрицу. Затем, используя эти параметры, будем генерировать 4 разных распределени: нормальное, Стьюдента, скошенное нормальное и смесь гауссовских распределений. Все четыре распределения можно условно отнести к четырем возможным сценариям на рынке. Нормальное распределение соответствует стабильности на рынке. Распределение Стьюдента – ситуации волатильности на рынке, когда чаще чем обычно доходность принимает экстремальные значения. Скошенное нормальное распределение соответствует кризису на фондовом рынке, когда отрицательных доходностей больше, чем положительных. И смесь гауссовских распределений – для случаев на рынке, когда распределение доходностей ценной бумаги является бимодальным, как это происходило, например, с акциями Аэрофлота в 2018 году (см. рисунок 6). Теоретические плотности каждого из описанных распределения представлены на рисунке 7.

Таким образом, у нас есть четыре разных распределения, с помощью которых мы можем моделировать доходности акций девяти компаний. Запишем теперь полностью задачу, которую будем решать:

$$\max_{\boldsymbol{w} \in W} \quad \min_{Q \in \mathcal{Q}} U(\boldsymbol{w} \mid Q) \tag{23}$$

$$U(\boldsymbol{w} \mid Q) = \boldsymbol{w}^{\intercal}\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{r} \mid Q) - l \cdot \mathrm{CVaR}_{\alpha}(\boldsymbol{w} \mid Q) \tag{24}$$

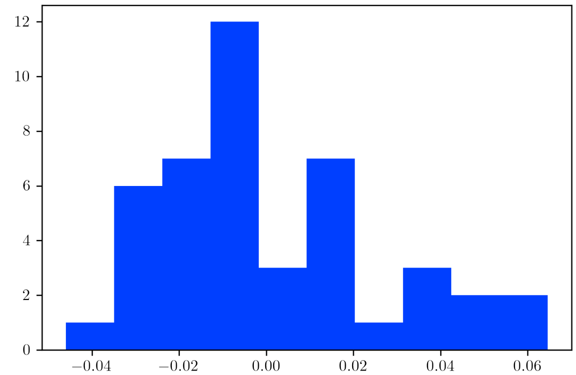


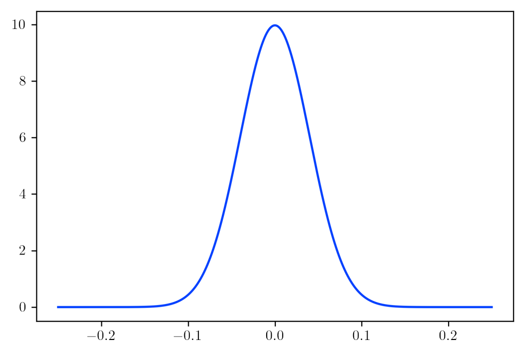
Рис. 6: `AFLT.ME, 2018-10-10 - 2018-12-12`

где

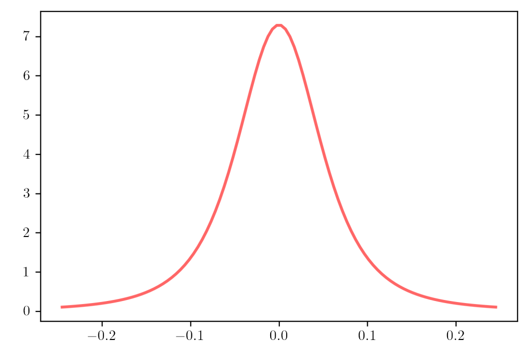
- $W = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{w}^\intercal \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} = 1 \cap w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$ – множество допустимых значений весов активов,
- $\mathcal{Q} = \{\mathcal{N}, \mathbf{t}, \mathrm{Skew}\mathcal{N}, \mathrm{Mix}\mathcal{N}\}$ – множество используемых многомерных распределений: многомерное нормальное, Стьюдента, скошенное и смесь Гауссовских распределений,
- $\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{r} \mid Q)$ – математическое ожидание вектора доходностей акций при условии, что доходности акции распределены по многомерному закону Q, то есть $\boldsymbol{r} \sim Q$,
- $\mathrm{CVaR}_\alpha(\boldsymbol{w} \mid Q)$ – сумма портфеля под риском для заданных весов $\boldsymbol{w}$ при условии, что $\boldsymbol{r} \sim Q$.

Таким образом, мы решаем минимаксную задачу: находим наихудший случай ($\Leftrightarrow$ минимальное значение функции полезности) в зависимости от распределения, и максимизируем этот случай по весам активов.

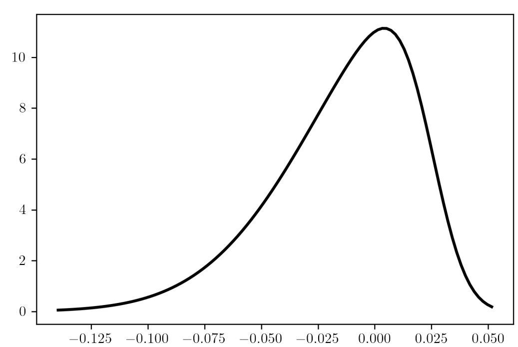
Перейдем непосредственно к описанию робастной оптимизации на языке Python. Будем пользоваться уже загруженными данными о стоимостях акций, хранящи-



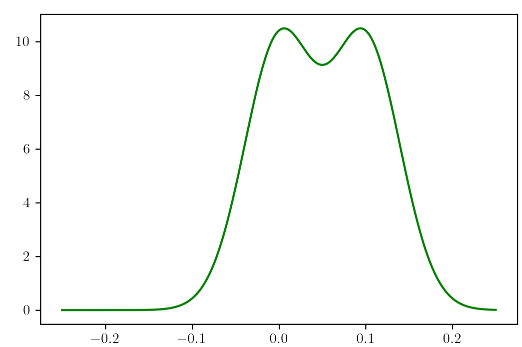
(a) Нормальное распределение



(b) Распределение Стьюдента



(c) Нормальное скошенное распределение



(d) Смесь Гауссовских распределений

Рис. 7: Используемые распределения.

мися в переменной `data`. Вместо библиотеки `PyPortfolioOpt` будем использовать библиотеку `Riskfolio` [18], ввиду того, что в последней библиотеке реализована функция оптимизации метрики CVaR.

В библиотеке `Riskfolio` принято работать не с массивом стоимостей акций, а с их доходностями, поэтому создадим новую переменную `Y`, в которой будут храниться доходности девяти акций с `2017-01-01` по `2020-01-01`:

Python Создание массива доходностей акций

```
Y = data[assets].pct_change().dropna() # таблица вида 2
n = len(assets) # количество акций n
T = Y.shape[0] # длина временного промежутка T
tr_days = 252 # количество торговых дней в году t_tr
l = 0.01 # уровень неприязни к риску l
```

Теперь сгенерируем массив из многомерного нормального распределения, воспользовавшись функцией `multivariate_normal` из библиотеку `Numpy`, а в кечестве параметров будем использовать выборочные статистики, посчитанные по выборке `Y` по формулам выборочных статистик 18 и 19:

Python Выборочные статистики и генерация нормального распределения

```
import numpy as np
import pandas as pd
mu = Y.mean()
S = Y.cov()
Y_norm = pd.DataFrame(np.random.multivariate_normal(mu, S, 10000))
```

Далее воспользуемся встроенными функциями в библиотеке `Riskfolio` для поиска оптимального портфеля с точки зрения максимизации $U(\boldsymbol{w} \mid \mathcal{N})$. Веса оптимального портфеля будем хранить в переменной `w_norm_uti`. Также помимо решения максимизации функции полезности будем одновременно решать задачу минимизации метрики риска (веса будем хранить в `w_norm_min`).

Python Поиск оптимального портфеля в случае нормального распределения

```
port_norm = pf.Portfolio(returns=Y_norm)
port_norm.assets_stats(method_mu='hist', method_cov='hist', d=0.94)

w_norm_min = port_norm.optimization(rm='CVaR', obj='MinRisk')
w_norm_uti = port_norm.optimization(rm='CVaR', obj='Utility',
l=0.01)
```

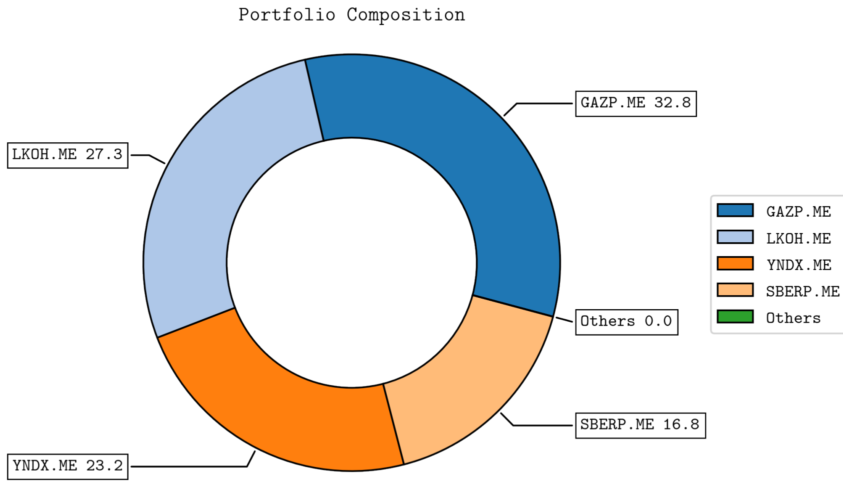
Получим следующие результаты (таблица 4 и рисунок 8a).

Таблица 4

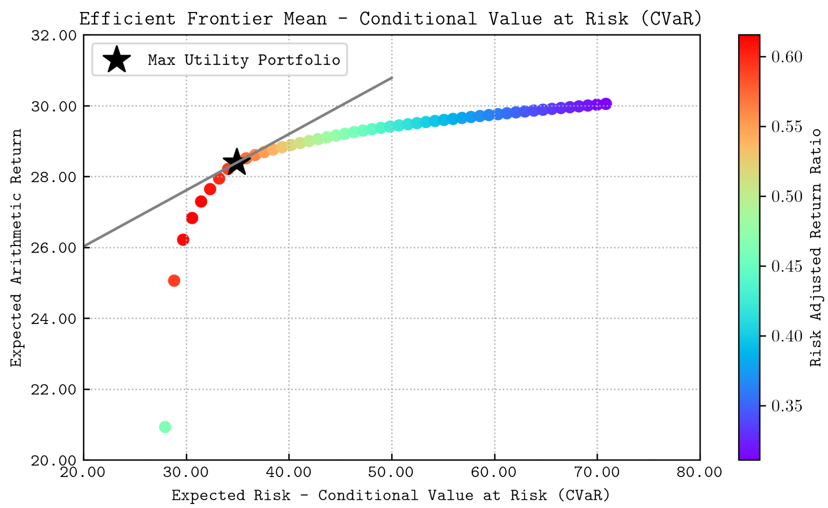
i	**Компания**	w_i	Доходность	CVaR
2	`GAZP.ME`	32.8%	26.2549%	
3	`LKOH.ME`	27.3%	29.174%	
7	`SBERP.ME`	16.8%	28.433%	
9	`YNDX.ME`	23.2%	31.947%	
Σ	Портфель	100%	**28.393%**	**34.943%**

Помимо струтктуры оптимального портфеля также будем сохранять данные о всей границе эффективных портфелей (efficient frontier) при нормальном распределении доходностей. На рисунке 8b представлена граница эффективных портфелей в плоскости риск - доходность (CVaR - R). На рисунке 8c представлена более подробно структура границы эффективных портфелей, а именно структура весов.

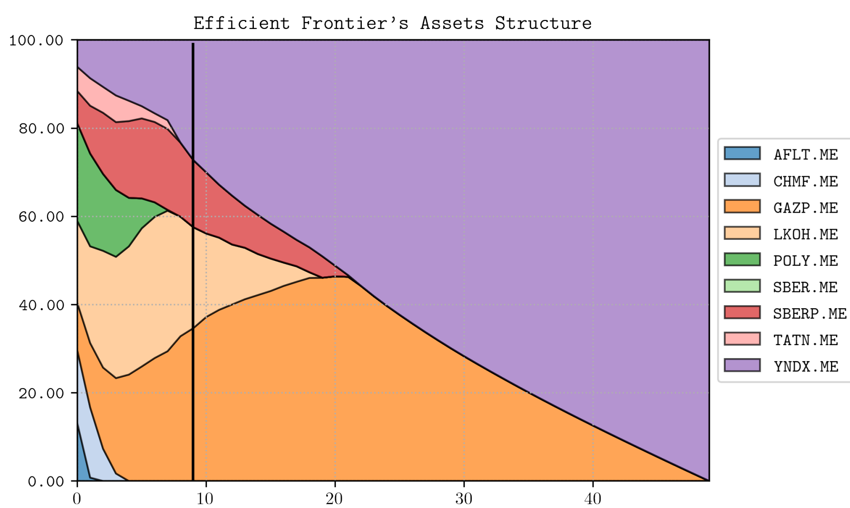
Перед тем как переходить к построению портфелей по другим распределениям, необходимо пояснить вышепредставленные графики, а именно последний график 8c, и что он из себя представляет. На вертикальной оси этого графика представлены доли соответствующих активов (помечены определенными цветами). По го-



(a)



(b)



(c)

Рис. 8: Граница эффективных портфелей при нормальном распределении ($\mathcal{N}$).

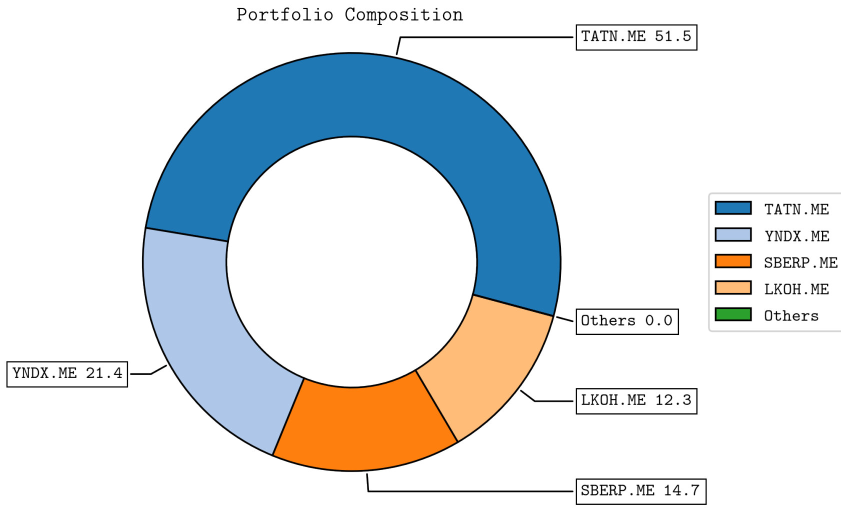
ризонтальной оси – 50 разных портфелей, к каждому из которых соответствует определлая доходность и риск. Если посмотреть на рисунок 8b, то можно заметить, что мы находим не полностью всю теоретическую эффективную границу, а всего лишь 50 точек на плоскости (CVaR, μ), аппроксимирующих эту кривую. Эти же 50 точек, но в другом формате, изображены на 8c, то есть каждая вертикаль (с определенным шагом) на рисунке 8c соответствует одной из 50-ти точек на рисунке 8b. Более того, так как точки образуют эффективную границу, то движение вертикали на рисунке 8c слева направо соответствует увеличению доходности и риска всего портфеля.

Перейдем теперь к постраению остальных портфелей с другими распределениями. Алгоритм поиска эффективного портфеля и границы эффективных портфелей в случае распределения Стьюдента (и других последующих распределений) аналогична нормальному распределению, отличается только генерация самих данных (т.е. будет созданы новые переменные `Y_stud`, `Y_skew` и `Y_mixg`). Поэтому покажем только сами результаты для остальных распределений, а код самой генерации этих переменных оставим в приложении 1, 2 и 3 соответственно.

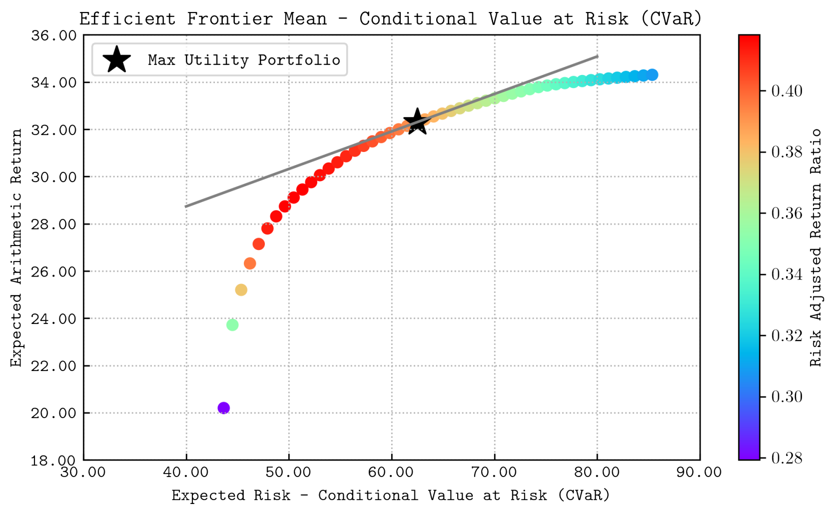
Далее представлены результаты оптимизации в случае распределения Стьюдента (рис. 9), скошенного нормального (рис. 10) и смеси нормальных распределений (рис. 11).

Также можно отдельно на графике изобразим смоделированные распределения доходностей всего портфеля с соответствующими весами вместе с уровнем условных значений под риском (CVaR) (рис. 12).

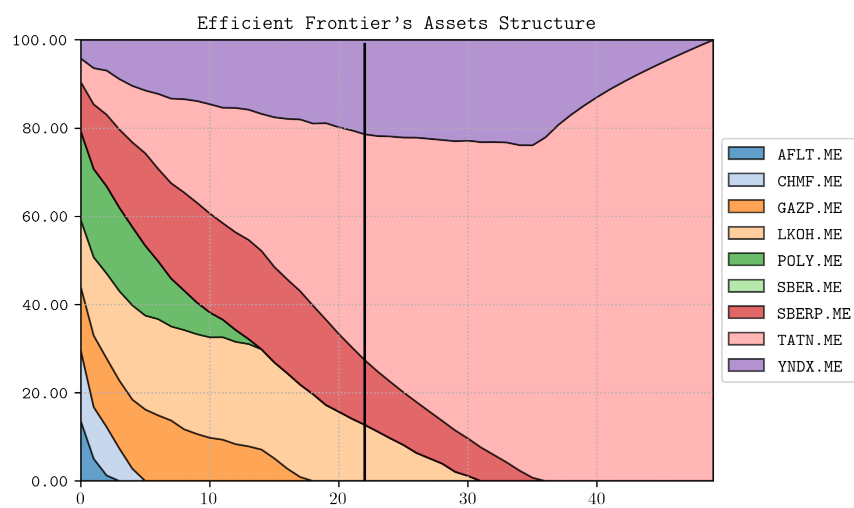
Если рассматривать ситуацию, когда веса у каждого из распределений оптимальные и постоянные, то в этом случае можно упорядочить распределения от худшего (в смысле результативности портфеля) к худшему. На рисунке 12 видно, что наилучший сценарий – это нормальное распределение. Далее – смесь гауссов-



(a)

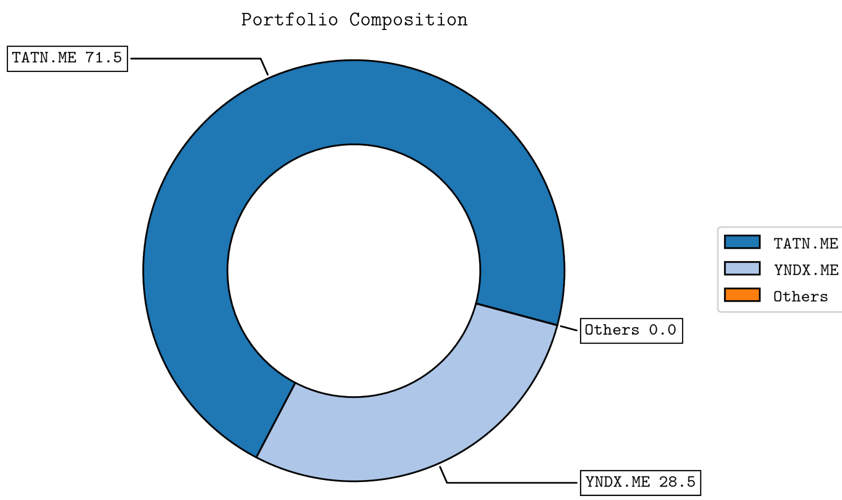


(b)

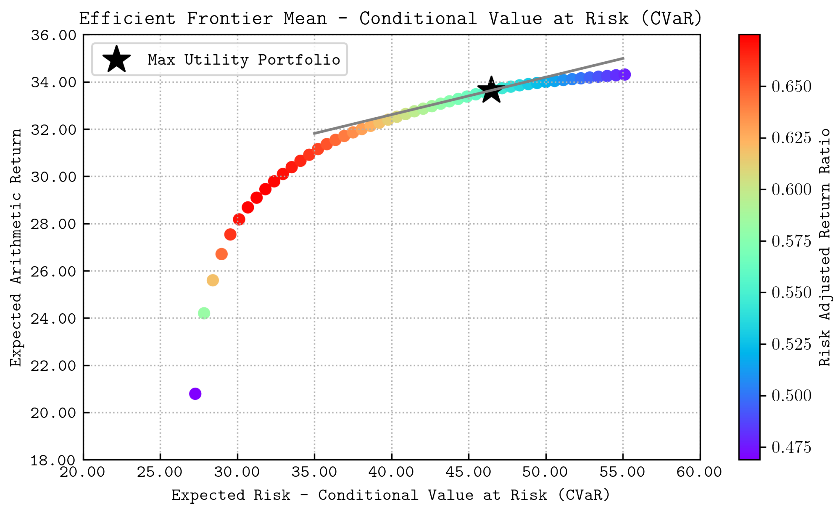


(c)

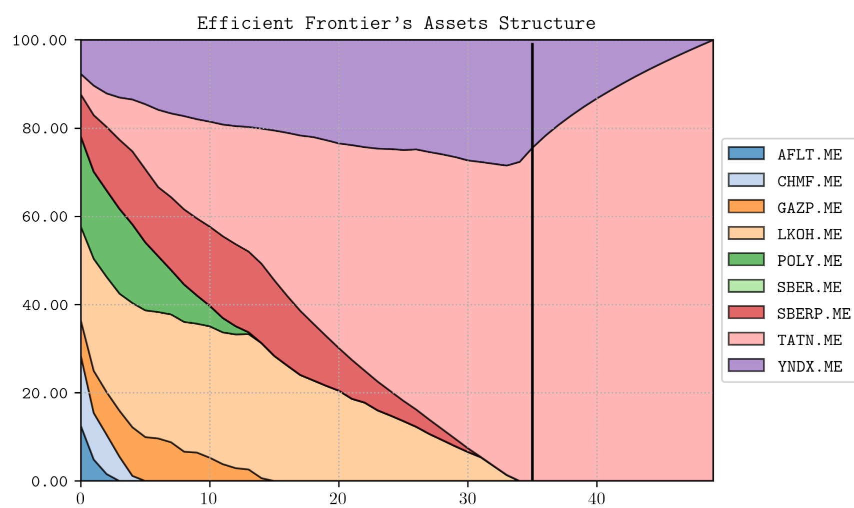
Рис. 9: Граница эффективных портфелей при распределении Стьюдента (**t**).



(a)

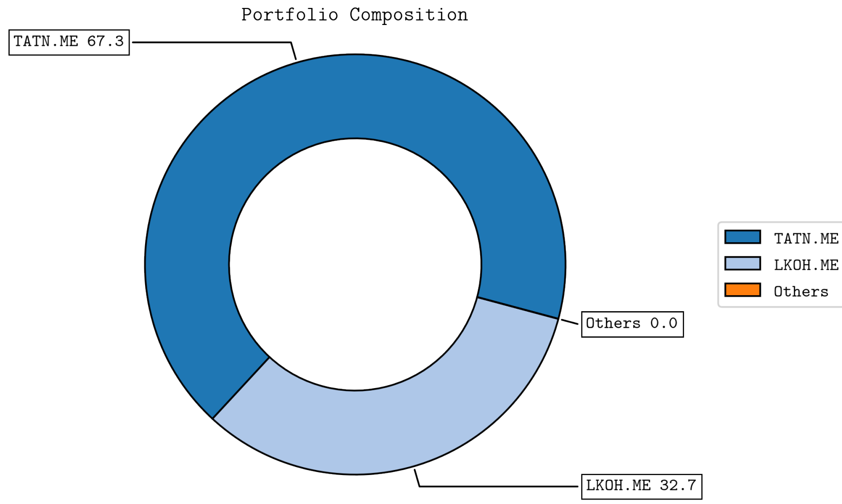


(b)

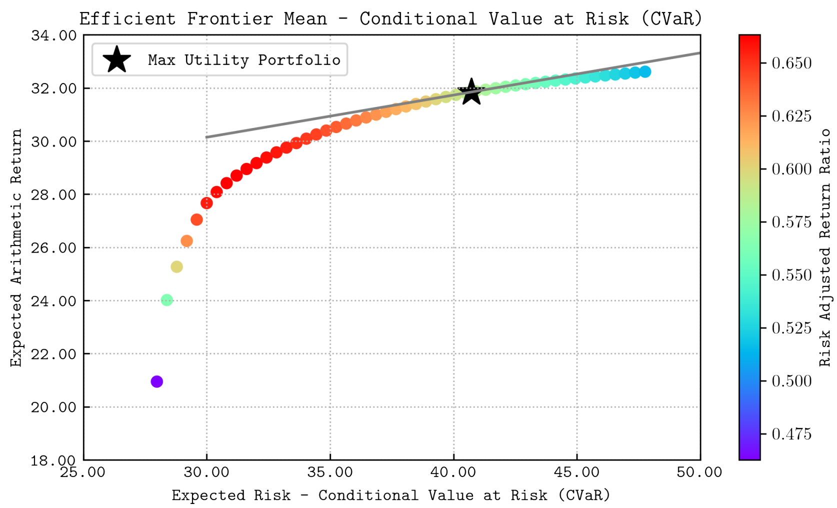


(c)

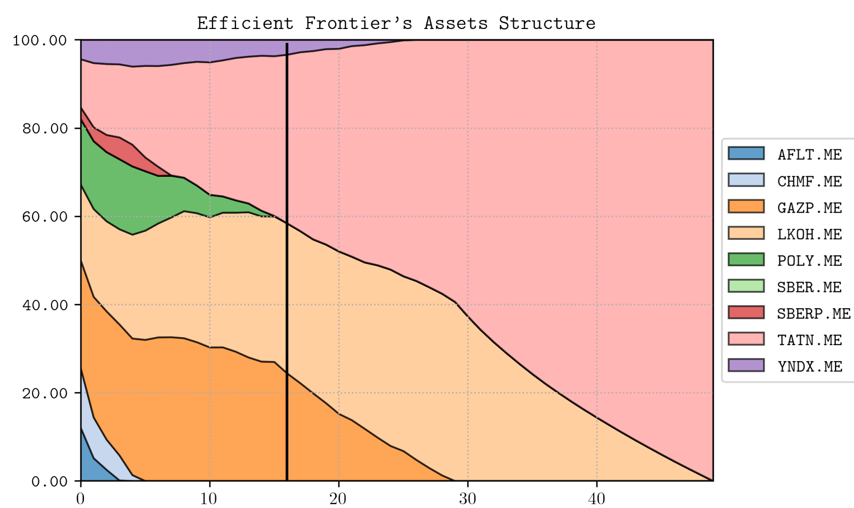
Рис. 10: Граница эффективных портфелей при скошенном нормальном распределении (Skew$\mathcal{N}$).



(a)



(b)



(c)

Рис. 11: Граница эффективных портфелей при смеси Гауссовских распределений (Mix$\mathcal{N}$).

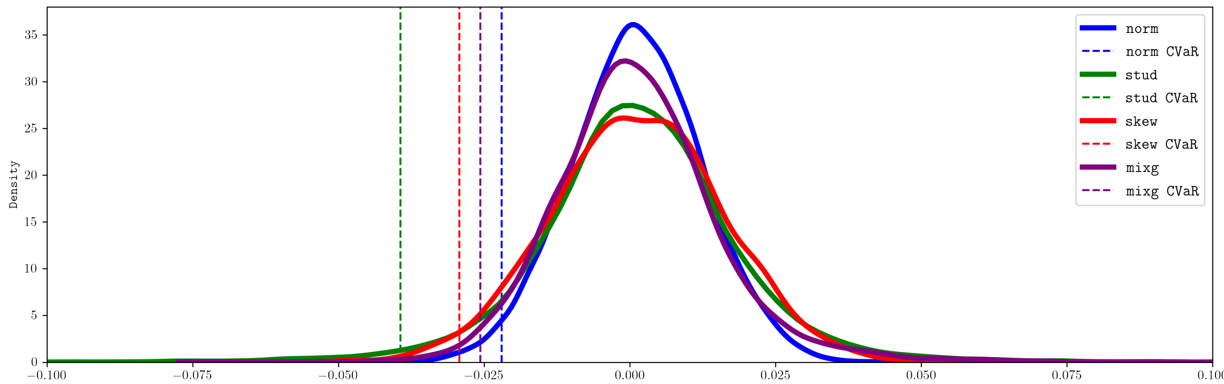


Рис. 12: Сравнение уровней CVaR

ских распределений, скошенное нормальное распределение, и наихудший вариант – распределение Стьюдента.

Необходимо сделать замечание, что 12 – это статичная картина с определенными наборами весов в портфеле, и само сравнение четырех уровней риска друг с другом по смыслу ничего нам не дает. Чтобы в полной мере сравнить эти четыре распределения, необходимо провести их совсметный анализ на плоскости (CVaR, μ), чтобы при изменяющихся весах найти самый оптимальный вариант.

4.2 Наихудший вариант

Перейдем к анализу наихудшего варианта. Для начала просто посмотрим на все границы эффективных портфелей в одной плоскости (рис. 13).

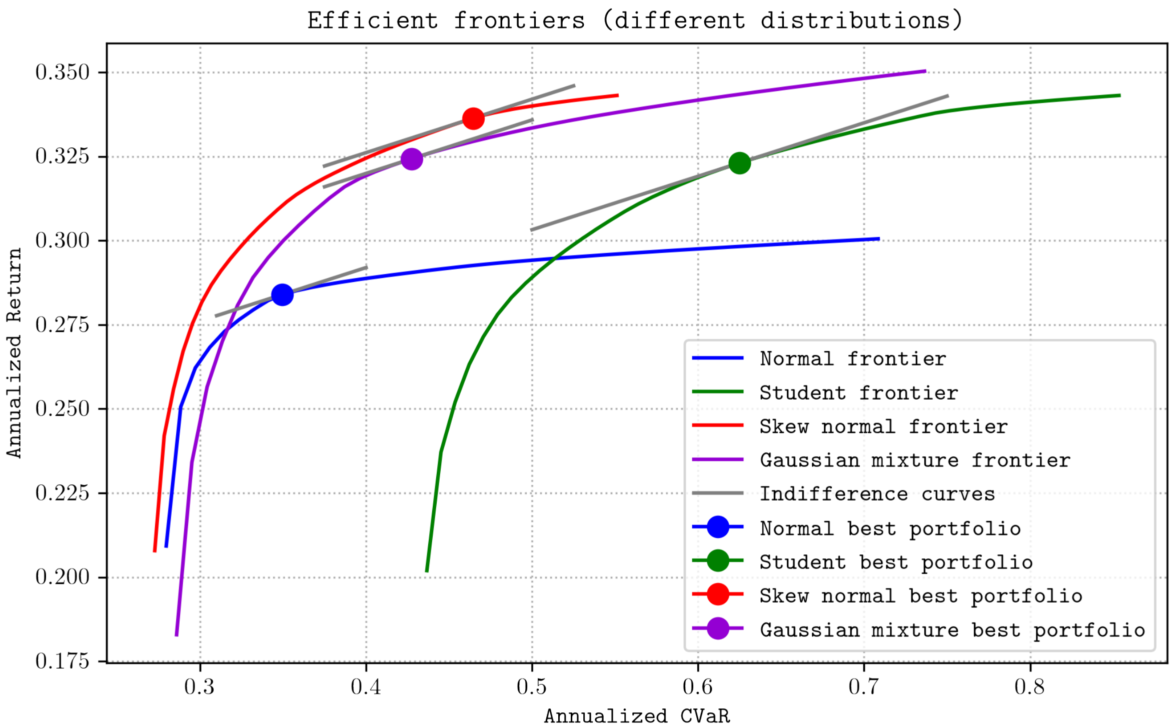


Рис. 13: Сравнение эффективных границ при ранзных распределениях.

Для того, чтобы решить задачу 23, нам нужно сначала выбрать из всех границ самый «плохой вариант», что в нашем случае значит с наибольшим риском. Очевидно, что чем правее кривая лежит на рисункке 13, тем она «хуже». Например, мы однозначно можем сказать, что смесь гауссовских распределений (фиолетовая кривая) хуже, чем скошенное нормальное распределение (красная кривая), так как первое полностью лежит правее второго. И если бы мы рассматривали только эти два распределения, то решением задачи 23 был бы портфель, соответствующий фиолетовой точке – оптимальный вариант при наихудшем распределении.

Однка при нашей структуре данных некоторые эффективные границы пересекаются, и становится неочевидным – что есть наихудший вариант с точки зрения риска. Имеет смысл брать максимальное значение (по CVaR) из всех четырех кривых. Таким образом, мы получаем проранжированные сценарии. На рисунке 14 ярко-зеленым отмечен наилучший исход событий, оранжевым – второй по предпочтительности сценарий, розовым – третий, и черным – наихудший сценарий.

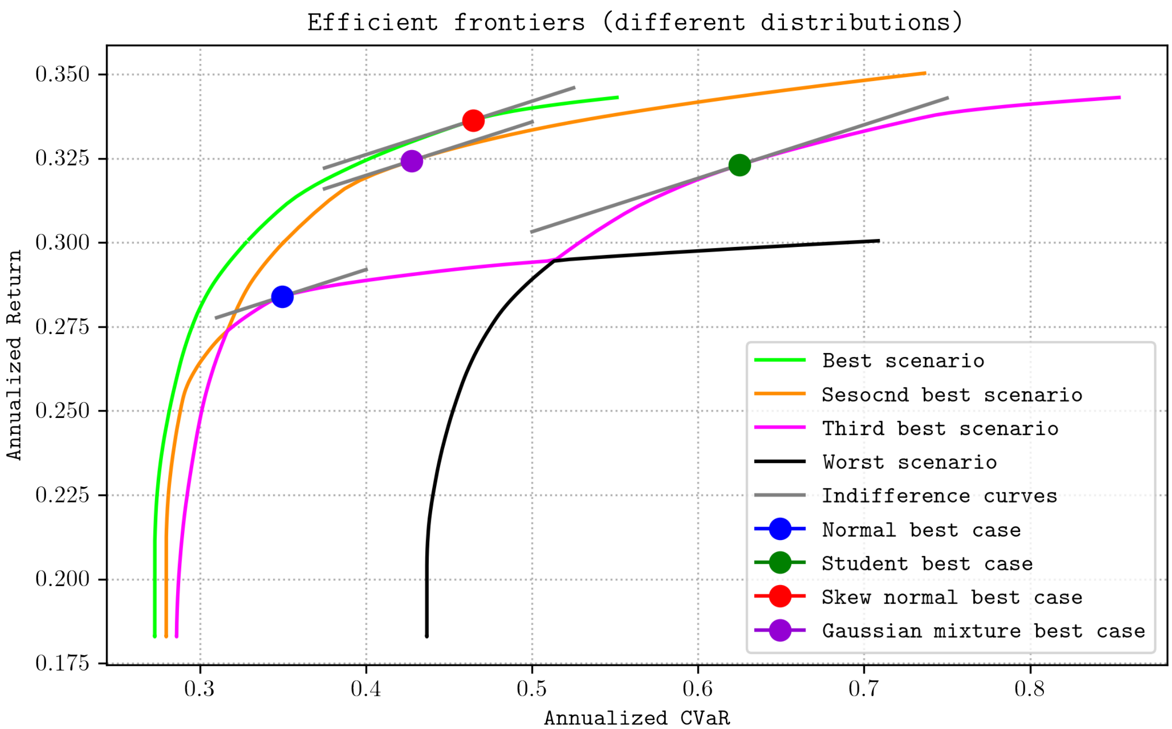


Рис. 14: От лучшего к худшему варианту.

Таким образом, мы получили искомую (черную) границу эффективных портфелей, и теперь уже на ней нам необходимо найти оптимальный портфель с точки зрения нашей функции полезности 24, или, что равносильно, провести касательную с определенным наклоном к черной границе. На рисунке 15 более подробно показано из чего состоит наихудший сценарии (черная кривая).

Можно заметить, что для заданного наклона (напомним, уровень неприязни к риску $l = 0.01$) максимальное значение функции полезности, при допустимых зна-

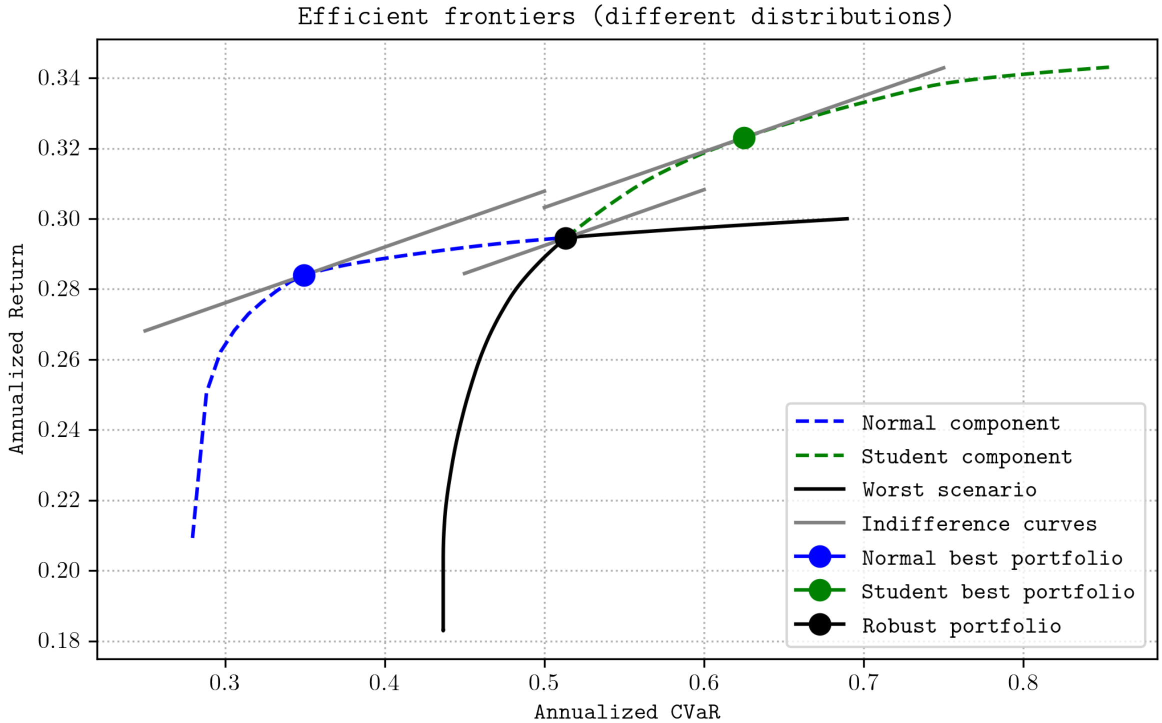


Рис. 15: Структура наихудшего сценария.

чениях только на черной кривой, будет достигаться в точке пересечения – в черной точке. Это и будет искомый «робастный портфель». На рисунке 16 представлена структура весов наихудшего сценария. Данную диаграмму можно получить путем объединения 8c и 9c.

Остается последний вопрос – какой именно портфель можно считать решением задачи 23? Так как по сути мы получили 2 портфеля: черная точка, будучи пересечением двух границ, соответствует как и нормальному распределению, так и распределению Стьюдента. На рисунке 16 видно, что в точке пересечения у нас происходит резкий переход от одной структуры портфеля к другой. Структуры портфеля с доходностями по Стьюденту и с нормальными доходностями показаны на рисунках 17a и 17b соответственно. Таким образом, мы получили решение поставленной задачи, а именно поиск наиболее оптимального портфеля при наи-

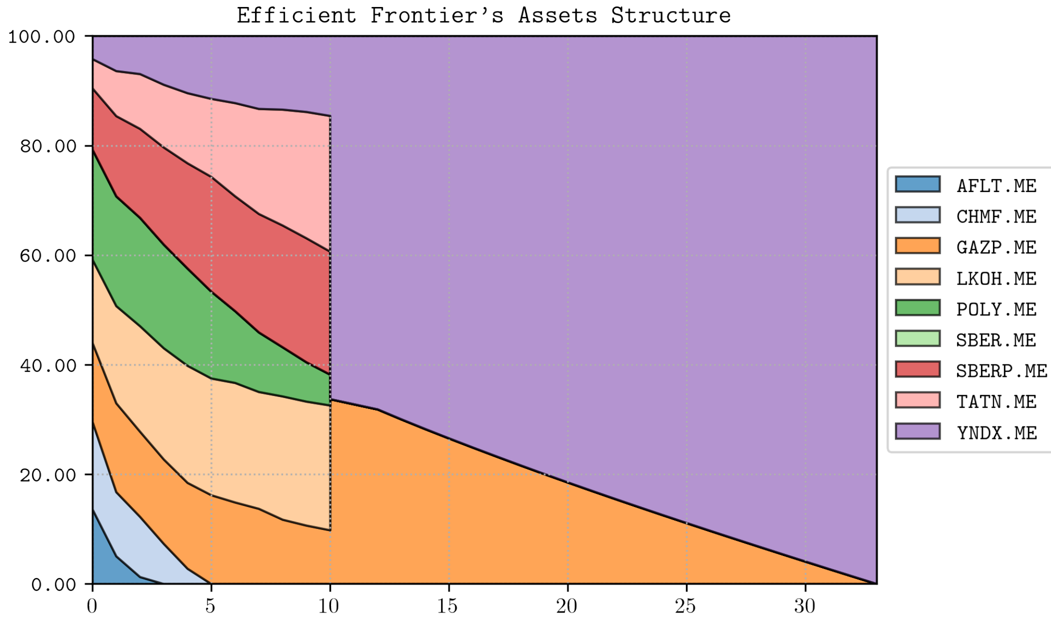
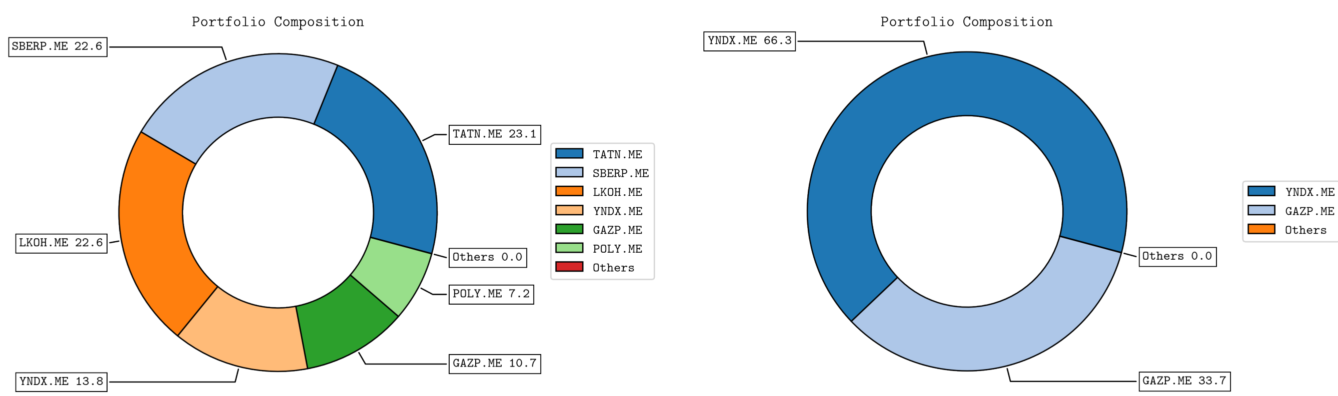


Рис. 16: Структура наихудшего сценария (веса).

худшем сценарии.



(a) Нормальное распределение

(b) Распределение Стьюдента

Рис. 17: Структура «наихудшего» портфеля.

5 Заключение

Управление портфелем ценных бумаг на сегодняшний день является очень популярной задачей, в связи с увеличением количества частных инвесторов не только в России, но и в мире в целом. Написаны многие программы и билоиотеки на разных языках программирования, с помощью которых можно оптимизировать свой портфель именно тем образом, каким инвестор считает нужным. Основные отличия в оптимизации это что именно ты оптимизируешь – риск, доходность, их сочетание, и так далее. В свою очередь в качестве меры риска так же на выбор инвестора можно выбрать подходящую функцию.

В данной курсовой работе были рассмотрен классический способ оптимизации, описаны его ключевые особенности и недостатки. В частности, была показана уязвимость классического подхода к модельному риску. Мной был предложен один из самых простых способов учесть модельный риск при оптимизации, и при желании детали этой задачи можно изменить (например, использовать другую меру риска, или другую меру средней доходности), но общий смысл от этого не измениться и подход к решению данной задачи останется прежним. Несмотря на то, что многие уже существующие библиотеки написаны для классических методов, мы показали как комбинируя разный функционал этих библиотек возможно решить и проверить на реальных данных именно робастный вариант нашей задачи.

Список литературы

[1] Алескеров Ф.Т., Андриевская И.К., Пеникас Г.И., Солодков В.М. Анализ математическиз моделей Базель II. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013.

[2] Магнус Я.Р., Катышев П.К., ПЕРЕСЕЦКИЙ А.А. Эконометрика. Начальный курс. Москва: Дело, 2005.

[3] Almgren R., Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions // Journal of Risk. 1999. pp.5-39.

[4] Camerer C., Weber M. Recent Developments in Modeling Preferences: Uncertainty and Ambiguity // Journal of Risk and Uncertainty. 1992. Vol.5. pp.325–370.

[5] Chen Z., Epstein L. Ambiguity, Risk, and Asset Returns in Continuous Time // Econometrica. 2002. Vol.70. No.4. pp.1403-1443.

[6] Chin E., Weigend A.S., Zimmermann H. Computing portfolio risk using Gaussian mixtures and independent component analysis // Proceedings of the IEEE/IAFE 1999 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFEr) (IEEE Cat. No.99TH8408). 1999. pp.74–117.

[7] Cont R. Model Uncertainty and its Impact on the Pricing of Derivative Instruments // Mathematical Finance. 2006. Vol.16. No.3. pp.519–547.

[8] Epstein L., Wang T. Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty // Econometrica. 1994. Vol.62. No.2. pp.283-322.

[9] Fama E.F. The Behavior of Stock-Market Prices // The Journal of Business. 1965. Vol.38. No.1. pp.34-105.

[10] Kim W.C., Kim J.H., Fabozzi F.J. Robust equity portfolio management. Hoboken: Wiley, 2016.

[11] Markowitz, H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol.7. No.1. pp.77-91.

[12] Martin R.A. PyPortfolioOpt: portfolio optimization in Python // Journal of Open Source Softwar. 2021. Vol.6. No.61. pp.3066. URL: `https://pyportfolioopt.readthedocs.io/en/latest/` (дата обращения: 20.02.2021).

[13] McNeil A.J., Frey R., Embretchts P. Quantitative risk management. Princeton: Princeton university press, 2015.

[14] Merton R.C. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case // The Review of Economics and Statistics. 1969. Vol.51. No.3. pp247–257.

[15] Routledge B.R., Zin S.E. Generalized Disappointment Aversion and Asset Prices // The Journal of Finance. 2010. Vol.65. No.4. pp.1303-1332.

[16] Samuelson P.A. Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming // The Review of Economics and Statistics. 1969. Vol.51. No.3. pp.239–246.

[17] URL: `https://www.moex.com/ru/marketdata/indices/state/g-curve/` (дата обращения: 20.01.2021)

[18] URL: `https://riskfolio-lib.readthedocs.io/en/latest/index.html` (дата обращения: 25.03.2021)

[19] URL: `https://www.statista.com/statistics/664923/average-market-risk-premium-russia/` (дата обращения: 20.01.2021)

[20] URL: https://github.com/ranaroussi/yfinance (дата обращения: 20.01.2021)

Генерация доходностей в случае распределения Стьюдента (`Y_stud`):

```
import numpy as np
np.random.seed(239)
def multivariate_t_rvs(m, S, df=np.inf, n=1):
    m = np.asarray(m)
    d = len(m)
    if df == np.inf:
        x = 1.0
    else:
        x = np.random.chisquare(df, n)/df
    z = np.random.multivariate_normal(np.zeros(d),S,(n,))
    return m + z/np.sqrt(x)[:,None]
dof = 4
np.random.seed(239)
Y_stud = pd.DataFrame(multivariate_t_rvs(Y.mean(), Y.cov() ,df=dof, n=1000
Y_stud.columns = assets
Y_stud = Y_stud - Y_stud.mean() + Y.mean()
```

Генерация доходностей в случае скошенного нормального распределения (`Y_skew`):

```
class multivariate_skewnorm:
    def __init__(self, shape, cov=None):
        self.dim = len(shape)
        self.shape = np.asarray(shape)
        self.mean = np.zeros(self.dim)
        self.cov = np.eye(self.dim) if cov is None else np.asarray(cov)
    def pdf(self, x):
        return np.exp(self.logpdf(x))
    def logpdf(self, x):
        x = mvn._process_quantiles(x, self.dim)
        pdf = mvn(self.mean, self.cov).logpdf(x)
        cdf = norm(0, 1).logcdf(np.dot(x, self.shape))
        return _squeeze_output(np.log(2) + pdf + cdf)
    def rvs_slow(self, size=1):
        std_mvn = mvn(np.zeros(self.dim),
        np.eye(self.dim))
        x = np.empty((size, self.dim))
        n_samples = 0
        while n_samples < size:
            z = std_mvn.rvs(size=1)
            u = np.random.uniform(0, 2*std_mvn.pdf(z))
            if not u > self.pdf(z):
                x[n_samples] = z
                n_samples += 1
        chol = np.linalg.cholesky(self.cov)
        x = (chol @ x.T).T
        return x
    def rvs_fast(self, size=1):
        aCa = self.shape @ self.cov @ self.shape
        delta = (1 / np.sqrt(1 + aCa)) * self.cov @ self.shape
        cov_star = np.block([[np.ones(1), delta],
        [delta[:, None], self.cov]])
        x = mvn(np.zeros(self.dim+1), cov_star).rvs(size)
        x0, x1 = x[:, 0], x[:, 1:]
        inds = x0 <= 0
```

```
        x1[inds] = -1 * x1[inds]
        return x1
from scipy.stats import skew
s = skew(Y)
d = np.sign(s)*np.sqrt((np.pi/2)*np.abs(s)**(2/3) / (np.abs(s)**(2/3)
+ ((4-np.pi)/2)**(2/3)))
a = d / np.sqrt(np.abs(1 - d ** 2))
Corr = pest.covar_matrix(Y) + pest.mean_vector(Y).T @ pest.mean_vector(Y)
# making skew distribution
np.random.seed(1700)
mns = multivariate_skewnorm(a, Corr)
Y_skew = pd.DataFrame(mns.rvs_fast(10000), columns=assets)
Y_skew = Y_skew - Y_skew.mean() + Y.mean()
```

Генерация доходностей в случае смеси Гауссовских распределений (`Y_mixg`):

```
from sklearn.mixture import GaussianMixture
n_samples = 10000
gmm = GaussianMixture(n_components=6, covariance_type='full', n_init=10,
random_state=42)
gmm.fit(Y[assets].values)
return_simulations = gmm.sample(n_samples=n_samples)[0]
return_simulations = pd.DataFrame(return_simulations, columns=assets)
Y_mixg = return_simulations
```