Matemáticas para profesorado de educación secundaria

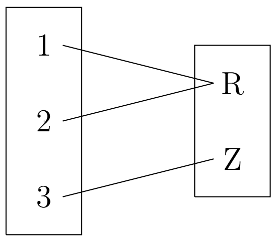
Cuarta situación

Esta situación es más difícil que las anteriores; su objetivo es introducir algunas nociones de álgebra.

Tomemos *tres* bolas rojas numeradas: 1, 2, 3 y *tres* bolas azules numeradas: 1, 2, 3.

¿De cuántos modos se pueden escoger tres bolas de modo que no haya dos que lleven el mismo número?

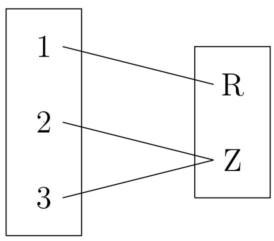
Una posible elección sería: R_1, R_2, Z_3. Tal elección corresponde a la aplicación del conjunto $\{1, 2, 3\}$ en el conjunto $\{R, Z\}$ dada por:



que se puede representar del siguiente modo, con ayuda de dos casillas:

R	Z
1 2	3

Análogamente, la elección R_1, Z_2, Z_3 está asociada a la aplicación

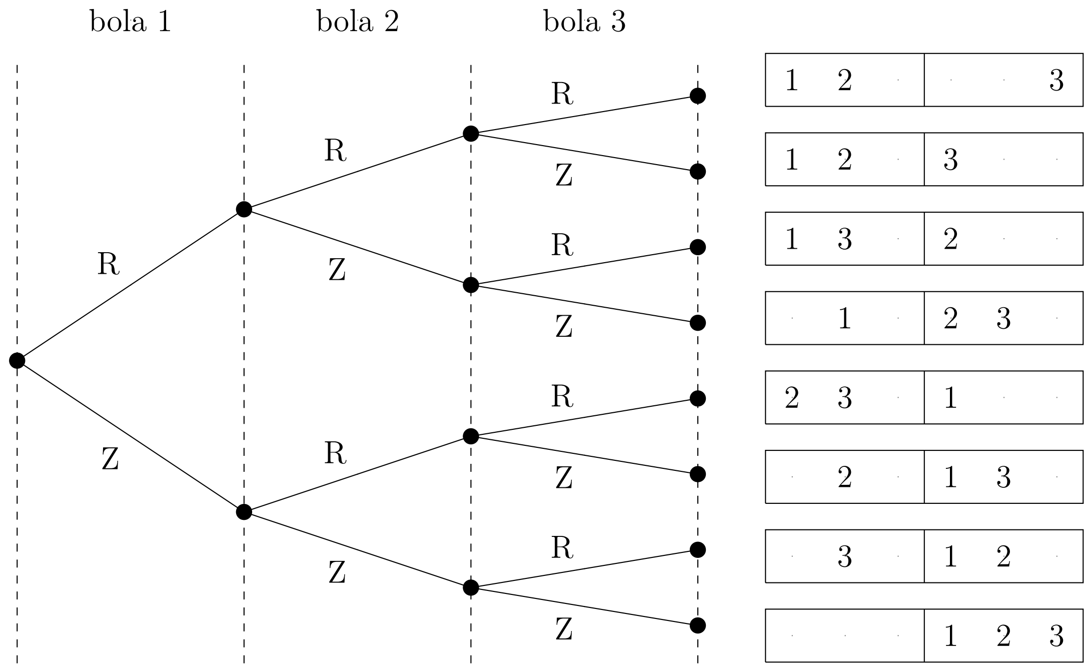


que vendría representada por

R	Z
1	2 3

La bola que lleva el número 1 puede ser roja o azul y sucede lo mismo con las bolas que llevan el número 2 y el número 3.

El siguiente árbol sirve para analizar la situación:



Hay, por tanto, $2 \times 2 \times 2 = 8$ elecciones.

Este árbol permite, además, calcular el número de elecciones formadas con

3 bolas rojas y O bolas azules, que es el número de partes de *tres* elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir,

$$\binom{3}{3} = 1;$$

2 bolas rojas y 1 bola azules, que es el número de partes de *dos* elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir,

$$\binom{3}{2} = 3;$$

1 bola rojas y 2 bolas azules, que es el número de partes de *un* elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir,

$$\binom{3}{1} = 3;$$

0 bolas rojas y 3 bolas azules, que es el número de partes de *cero* elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir,

$$\binom{3}{0} = 1.$$

Este estudio proporciona a los alumnos una justificación del siguiente resultado:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3,$$

que también puede escribirse como

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Luego, mediante el triángulo de Pascal pueden generalizar este resultado: ,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

... etc ...

Según el nivel adquirido los niños se contentarán con estos resultados particulares o por el contrario intentarán *demostrar*, para todo número n natural, la fórmula de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Aquí es conveniente pedir a los niños que calculen las sucesivas potencias de 11:

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = 121$$

$$11^3 = 1331$$

$$11^4 = 14641$$

Así comprueban que estas potencias se pueden escribir con ayuda del triángulo de Pascal.

¿Qué sucede con la quinta potencia? ¿Cómo pueden explicarse estos resultados?

Basta, naturalmente, utilizar la fórmula del binomio de Newton con $a = 10$ y $b = 1$.

Otro caso particular interesante para tener en cuenta es $a = b = 1$, pues se obtiene que:

$$2^n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Volvamos ahora al tablero de Galton para plantear el siguiente problema: si introducimos en el tablero 64 bolas, deberíamos obtener *teóricamente* la distribución siguiente:

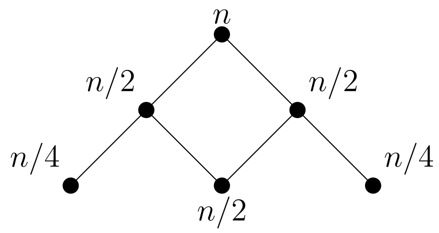
casillas	A	B	C	D	E	F	G
número de bolas	1	6	15	20	15	6	1

Ahora bien, la experiencia no siempre da este resultado teórico, sino que da también otros resultados más o menos parecidos a éste.

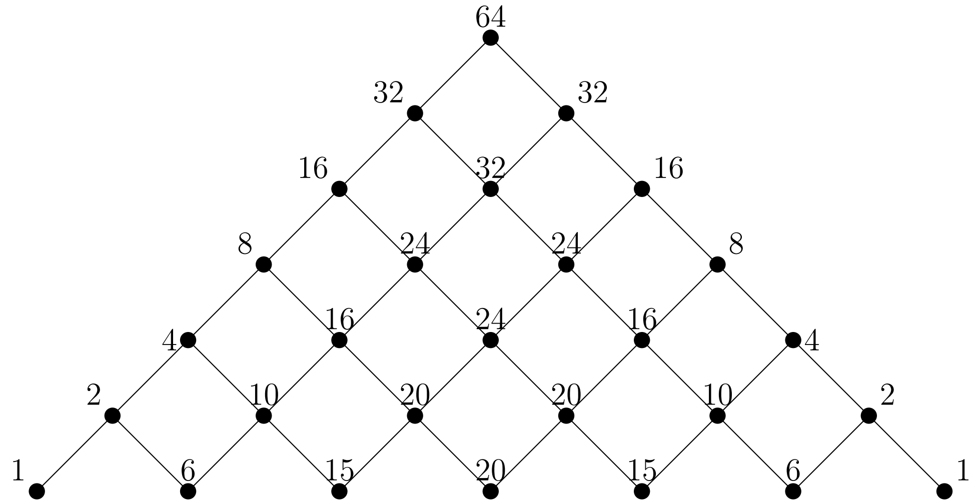
¿Qué hipótesis habría que hacer para obtener estos resultados teóricos?

Es importante dejar que los niños discutan; la pregunta es muy delicada, pero no está fuera de su alcance. La dificultad está en el hecho de que hay que tener en cuenta globalmente las 64 bolas. Si queremos obtener exactamente la distribución teórica bastará que la mitad de las bolas pasen por la derecha del primer clavo y la otra mitad por la izquierda, y lo mismo para el resto de clavos que van encontrando.

Con n bolas y tres filas de clavos se obtendría:



Con 64 bolas, los niños obtienen la distribución siguiente:

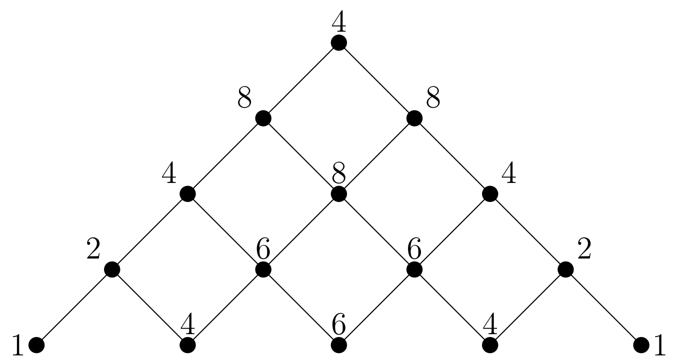


Tal procedimiento permite descomponer cualquier potencia de 2 en una *suma* de números de Pascal. En particular:

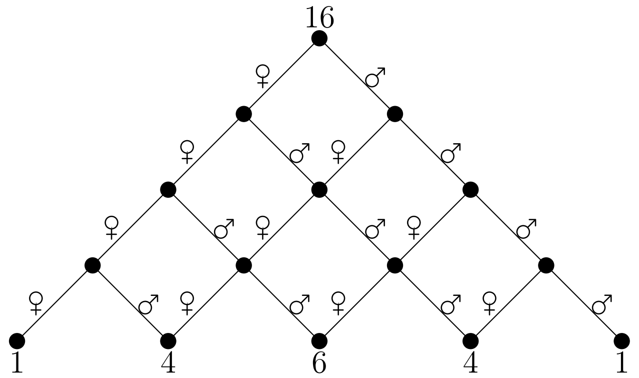
$$64 = 1 + 6 + 154 + 204 + 154 + 6 + 1$$

También permite estudiar otro interesante problema: contar (suponiendo que haya las mismas posibilidades de tener un hijo que una hembra) cuántas familias hay de n hijos que tengan p niños y n¯p niñas.

Tomemos, por ejemplo, las familias de 4 hijos. Descomponiendo $2^4 = 16$:



obtenemos el siguiente esquema:



Así, de 16 familias de 4 hijos hay:

1 familia con 4 niños

4 familias con 3 niños y 1 niña

6 familias con 2 niños y 2 niñas

4 familias con 1 niño y 3 niñas

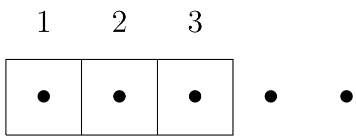
1 familia con 4 niñas

Otras situaciones

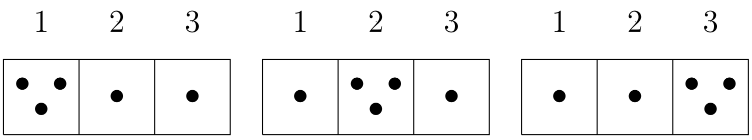
Tendremos ocasión de utilizar el triángulo de Pascal a la hora de trabajar probabilidades con nuestros estudiantes. Ahora pondremos el broche final a la combinatoria presentando otras tres situaciones interesantes:

1.– *¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 bolas idénticas en 3 cajas numeradas 1, 2 y 3 de modo que no quede ninguna caja vacía?*

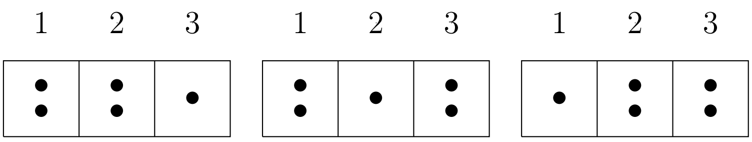
Para que no quede ninguna caja vacía, los niños comienzan poniendo una bola en cada caja, dejando así dos bolas por colocar:



que pueden luego colocar en una misma caja:



o en dos cajas distintas:



Por tanto, hay 6 maneras distintas de colocar 5 bolas en 3 cajas numeradas.

Este problema viene a ser el de descomponer el número 5 en suma de tres números naturales, siendo importante el orden de los sumandos:

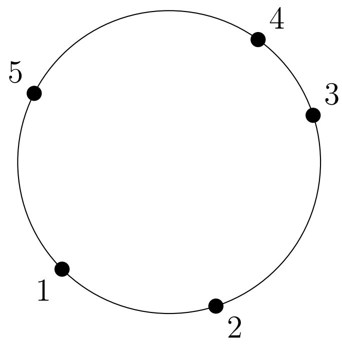
$$\begin{array}{ll} 5 = 3 + 1 + 1 & \qquad 5 = 2 + 2 + 1 \\ 5 = 1 + 3 + 1 & \qquad 5 = 2 + 1 + 2 \\ 5 = 1 + 1 + 3 & \qquad 5 = 1 + 2 + 2 \end{array}$$

*¿De cuántos modos posibles se puede descomponer el número natural 5 en suma de **dos** (o **cuatro**) números naturales?*

*¿De cuántos modos posibles se puede descomponer el número natural n en suma de **dos** (o **cuatro**) números naturales?*

¿Cuál es la relación de este problema con el triángulo de Pascal?

2.– Pidamos a los niños que señalen 5 puntos en una circunferencia (de este modo tres nunca estarán en línea recta).



¿Cuántos segmentos se pueden trazar que unan dos cualesquiera de estos puntos?

¿Cuántos triángulos hay cuyos vértices sean tres de estos puntos?

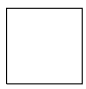
¿Cuántos cuadriláteros? ¿Cuántos pentágonos?

Proponer el mismo problema pero con más puntos: 6, 7, etcétera

¿Cuál es la relación de este problema con el triángulo de Pascal?

3.– Finalizamos un juego muy instructivo: propongamos a los niños que construyan, mediante las siguientes*reglas*, un conjunto $\mathcal{A}$ de figuras formadas por cuadrados. Reglas:

Regla O: la siguiente figura es un elemento de $\mathcal{A}$;

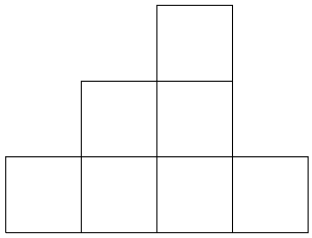


Regla D: si F es un elemento de $\mathcal{A}$, se obtiene un nuevo elemento de $\mathcal{A}$ juntando a F un cuadrado abajo a la derecha;

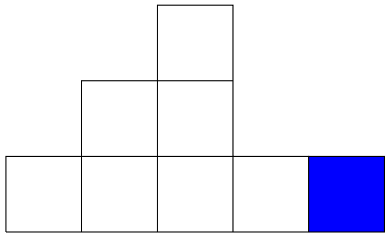
Regla H: si F es elemento de $\mathcal{A}$, se obtiene un nuevo elemento de $\mathcal{A}$ juntando a F un cuadrado sobre el vértice de la columna que está más a la derecha;

Regla Z: no hay más figuras que las construidas de este modo que sean elementos de $\mathcal{A}$.

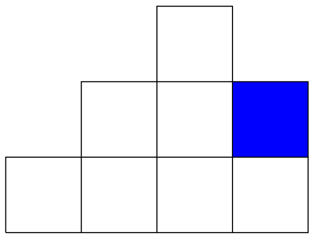
Por ejemplo, si



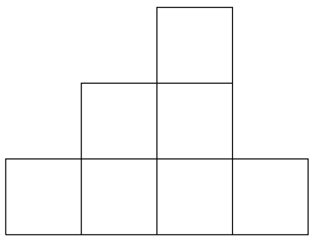
es elemento de $\mathcal{A}$, entonces la **Regla D** conduce a



y la **Regla H** a

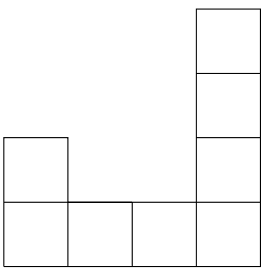
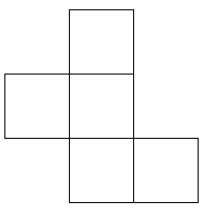
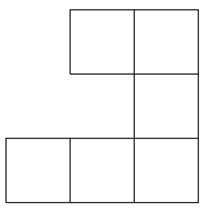
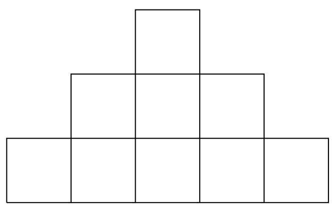


¿Cómo *demostrar* que la figura

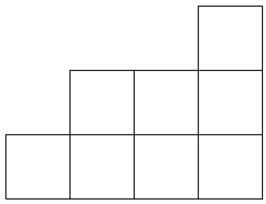


es elemento de $\mathcal{A}$?

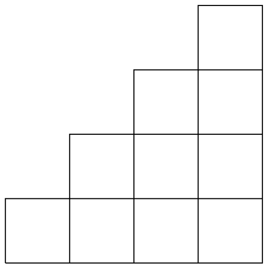
Entre las siguientes figuras, *determínese* cuáles son elementos de $\mathcal{A}$:

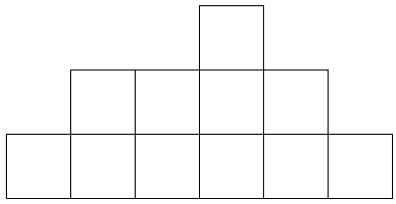
   

Aplicando las reglas **Regla D** y **Regla H**, ¿se puede pasar de la figura



a las figuras



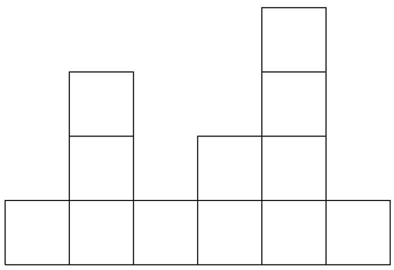


¿Son elementos de $\mathcal{A}$ estas tres figuras?

Veamos ahora algunos problemas algo más difíciles.

Determínense todas las figuras de $\mathcal{A}$ formadas por cinco cuadrados.

A la figura



que es un elemento de $\mathcal{A}$, podemos asociarle un *par* de números naturales: $(12, 6)$. El primer elemento de este par es el número total de cuadrados de la figura y el segundo es el número de cuadrados de la base.

Determínense todas las figuras de A asociadas al par $(12, 6)$*. ¿Por qué tiene esto que ver con el triángulo de Pascal?*