Matemáticas para profesorado de educación secundaria

Tercera situación

A continuación, veremos un problema clásico de combinatoria:

Presentemos a los niños *cuatro* bolas de colores *distintos*: una roja, una azul, una amarilla y una verde (o si se quiere, cuatro objetos distintos).

¿De cuántas maneras se pueden elegir 0,1,2,3 o 4 bolas?[1]

He aquí una elección:

V R A

Al tomar este subconjunto hemos definido una partición en el conjunto formado por las cuatro bolas: por una parte está la clase de las bolas que hemos escogido y por otra parte tenemos la clase de las bolas que hemos dejado:

bolas tomadas: R A A

bolas dejadas: Z

Podemos sugerir a los alumnos que simbolicen esta situación de la siguiente manera:

R	Z	A	V
1	0	1	1

donde:

- 1 significa*tomamos la bola*
- 0 significa *dejamos la bola*

Así, el *código* 1011 se corresponde con la parte

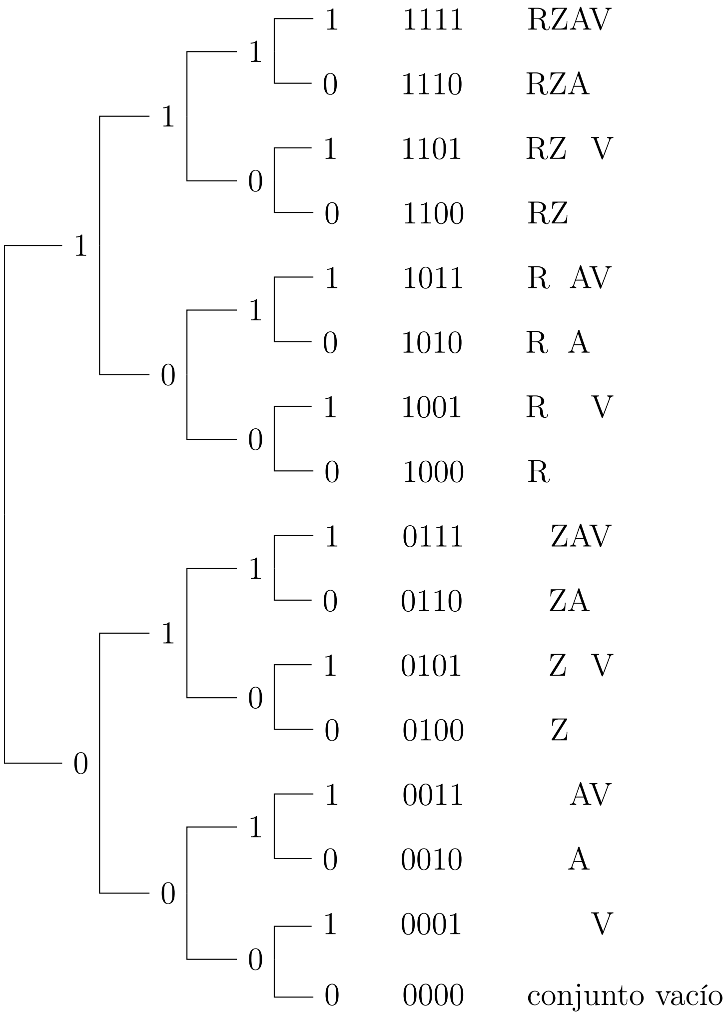
V R A

Si cambiamos los 1 por 0 y los 0 por 1, el *código* 0100 se corresponde con la parte

V

[1]Se trata del mismo problema que el de la determinación de las partes de un conjunto de cuatro elementos y se podrá plantear el problema más general de la determinación de las partes de un conjunto de n elementos.

Gracias a estos códigos, los niños pasan de modo natural a analizar la situación mediante el siguiente árbol:



Este árbol pone de manifiesto que un conjunto de cuatro bolas tiene $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ subconjuntos o partes. Además, se ve que el número de partes formadas por tres elementos es el mismo que el de códigos de cuatro cifras formados con tres 1 y un 0. Hay, por tanto,

$$\binom{4}{3} = 4 \quad \text{partes de tres elementos:}$$

códigos	partes
1110	RZA
1101	RZV
1011	RAV
0111	ZAV

Del mismo modo hay

$$\binom{4}{1} = 4 \quad \text{partes de un elemento:}$$

códigos	partes
0001	V
0010	A
0100	Z
1000	R

Obtener las partes de dos elementos equivale a escribir los códigos de cuatro cifras formados con dos 1 y dos 0. Por tanto, hay

$$\binom{4}{2} = 6 \quad \text{partes de dos elementos:}$$

códigos	partes
1100	RZ
1010	RA
1001	RV
0110	ZA
0101	ZV
0011	AV

Finalmente, es evidente que no hay más que una parte de cuatro elementos, que se corresponde con el código 1111 y que es la parte RZAV. Por otro lado, sólo existe una parte de cero elementos, y se corresponde con el código 0000; es la *parte vacía o conjunto vacío.* Así:

$$\binom{4}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{4}{0} = 1.$$

Los niños descubren mediante este análisis el siguiente resultado:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4.$$

Debemos indicarles ahora que vuelvan al triángulo de Pascal y calculen la suma de los números de cada fila:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
4 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
8 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
16 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
32 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Obtenemos así las potencias sucesivas de 2:

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \ldots$$

Según su nivel, los niños se darán por satisfechos con haber comprobado el resultado o desearán por el contrario demostrar que para todo número natural n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

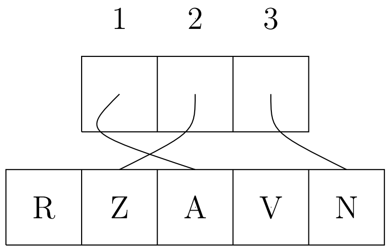
es el número de las partes de un conjunto de n elementos.

Podemos ahora proponer a los niños una nueva situación, parecida a la anterior y que conducirá a resultados nuevos.

Presentemos a los niños cinco bolas de colores distintos: una bola roja, una azul, una amarilla, una verde y una negra, y coloquemos —una al lado de otra— tres cajas numeradas: 1, 2 y 3.

¿De cuántas maneras se pueden colocar tres de esas cinco bolas, cada una de ellas en una de las tres cajas?

Ésta sería una posible disposición:



Es fácil determinar el número de disposiciones: los niños pueden colocar en la primera caja una cualquiera de las cinco bolas —A por ejemplo—; colocada ésta, pueden poner en la segunda caja una cualquiera de las cuatro restantes —Z por ejemplo— y en la tercera caja, pueden colocar una de las tres restantes —N por ejemplo—.

Hay, pues,

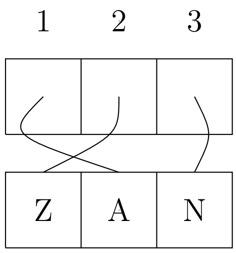
$$5 \times 4 \times 3 \quad \text{disposiciones distintas.}$$

Podemos sugerir ahora a los niños otro método para hacer el recuento.

Elijamos para empezar tres bolas entre las cinco: Z, A y N, por ejemplo. Aunque hay

$$\binom{5}{3} \quad \text{partes de tres elementos.}$$

Elegida una de estas partes, *¿cuántos modos distintos hay de colocar las tres bolas en las tres cajas, una en cada caja?* He aquí la disposición anterior:



En la primera caja podemos colocar una cualquiera de las tres bolas —A por ejemplo—, luego se puede colocar en la segunda una cualquiera de las otras dos —Z por ejemplo—, la tercera caja deberá forzosamente contener la bola que queda —N en este caso N—.

Así, dada una parte formada por tres elementos, hay

$$3 \times 2 \times 1 \quad \text{disposiciones distintas.}$$

y entonces, para las $\binom{5}{3}$ partes, habrá

$$3 \times 2 \times 1 \times \binom{5}{3} \quad \text{disposiciones distintas.}$$

Comparando los resultados, los niños pueden escribir la siguiente igualdad:

$$3 \times 2 \times 1 \times \binom{5}{3} = 5 \times 4 \times 3$$

y deducir que

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10.$$

Utilizando la notación factorial se tiene que

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10 \qquad \text{o} \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}.$$

En general, los niños se sorprenden de este resultado.

Tienen razón al preguntarse si esto es verdad solamente para $\binom{5}{3}$ o si lo es para todos los números naturales n y p con $p \leq n$ de modo que se pueda escribir

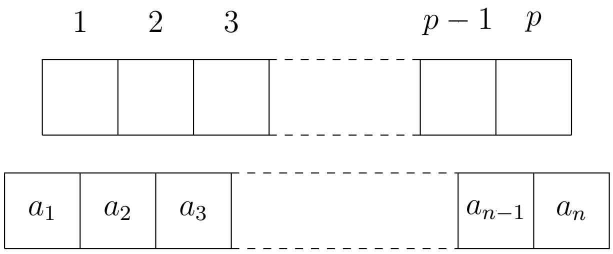
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{1}$$

Algunos niños se contentan con volver al triángulo de Pascal y hacer comprobaciones numéricas; otros intentan demostrar esta igualdad.

Ampliación para el profesor

Es fácil demostrar la igualdad (1) anterior si generalizamos el análisis anterior.

Elijamos n objetos: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y busquemos el número de posibles disposiciones de p cualesquiera de estos objetos en p casillas numeradas:



En la primera casilla podemos colocar cualquiera de los n objetos iniciales; en la segunda casilla cualquiera de los $n-1$ objetos restantes; en la tercera casilla cualquiera de los $n-2$ restantes, etcétera. En la $p-1$–ésima casilla podemos colocar cualquiera de los $n-p+2$ objetos restantes y en la p-ésima casilla, cualquiera de los $n-p+1$ objetos restantes.

Por tanto, tenemos un total de

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)(n-p+1) \qquad \text{disposiciones.}$$

Este número también puede escribirse como

$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Utilicemos ahora el segundo modo de hacer el recuento:

Elijamos p objetos entre los n objetos. Hay, en total,

$$\binom{n}{p} \quad \text{partes formadas por } p \text{ objetos.}$$

Para cada una de estas partes, *¿cuántas maneras hay de colocar cada uno de los objetos en cada una de las casillas?*

Pues tantas como biyecciones en un conjunto de p elementos, es decir, $p!$.

Tenemos por consiguiente

$$p! \times \binom{n}{p} \quad \text{posibles disposiciones.}$$

Por tanto,

$$p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!},$$

de donde deducimos que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

La identidad (1) nos permite obtener inmediatamente dos resultados ya conocidos. En efecto, pues:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p};$$

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1)} \\ &= (n-1)!\frac{(n-p)+p}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.\end{aligned}$$