Matemáticas para profesorado de educación secundaria

Abordaremos a continuación cierto número de situaciones que giran en torno de un tema central de combinatoria: *el triángulo de Pascal.*

Primera situación

Demos a los niños 5 cajas colocadas una al lado de otra y numeradas del 1 al 5 y 3 bolas idénticas.

Se pide que coloquen las bolas en las cajas de modo que cada caja contenga *como mucho una bola.*

¿Cuántas disposiciones existen?

He aquí cuatro:

•	•		•	

		•	•	•

•	•			•

•			•	•

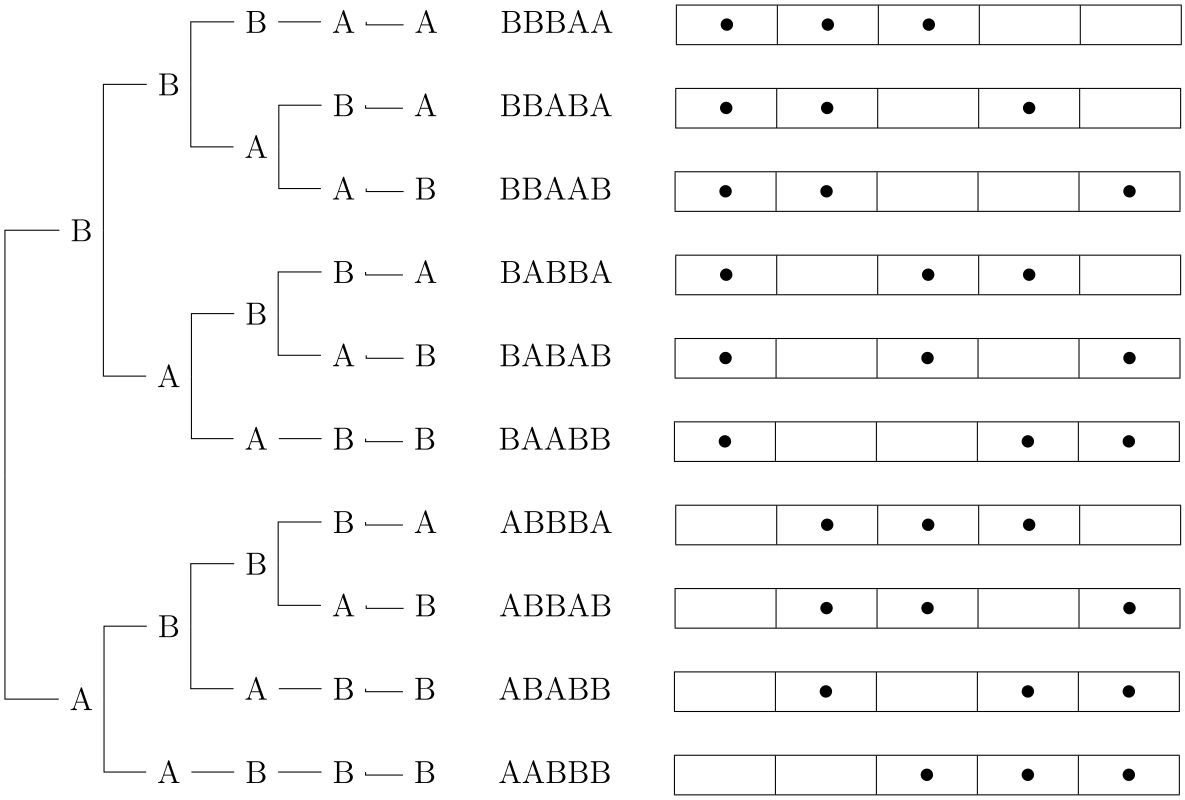
¿Hay más?

Inicialmente, la dificultad que hallan los niños cuando emplean cajas y bolas es recordar las disposiciones que ya han salido. Podemos sugerirles entonces que vayan dibujando las disposiciones a medida que las hallan o que inventen un *código* para describirlas: la presencia de una bola en una caja puede anotarse por ejemplo con la letra B y la ausencia por la letra A.

Así pues, según este código, las cuatro disposiciones anteriores se escriben respectivamente como:

B	B	A	B	A
A	A	B	B	B
B	B	A	A	B
B	A	A	B	B

El problema se reduce ahora al de hallar *todas* las palabras de cinco letras que se pueden escribir con tres B y dos A. Si los niños están acostumbrados a usar árboles, en seguida se sentirán motivados a analizar la situación de la siguiente manera:



Por tanto, hay diez maneras distintas de colocar tres bolas en cinco cajas (colocando como mucho una bola en cada caja).

En este momento, es interesante que los niños descubran que cambiando las A por B y las B por A, determinan el número de maneras de colocar 2 bolas en 5 cajas, Por tanto, también hay *diez* maneras de colocar 2 bolas en 5 cajas (colocando como mucho una bola en cada caja).

De modo natural, los niños se plantean ahora el problema de colocar una bola (o cuatro bolas) en las 5 cajas. En ambos casos el estudio de la situación es muy sencillo y descubren rápidamente que hay *cinco* opciones posibles:

•					BAAAA		•	•	•	•	ABBBB
	•				ABAAA	•		•	•	•	BABBB
		•			AABAA	•	•		•	•	BBABB
			•		AAABA	•	•	•		•	BBBAB
				•	AAAAB	•	•	•	•		BBBBA

Sin embargo, son pocos —o ninguno— los niños que se plantean la cuestión de colocar 5 bolas en las 5 cajas y menos aún los que se proponen repartir *cero* bolas en las cajas; en realidad el último problema no parece en absoluto natural.

Con 5 bolas y 5 cajas hay *un*a sola posibilidad

•	•	•	•	•

Esta disposición se corresponde con la palabra BBBBB.

Si cambiamos B por A, obtenemos la palabra AAAAAA, que se corresponde con la disposición

que es la disposición que se obtiene al colocar cero bolas en las cajas.

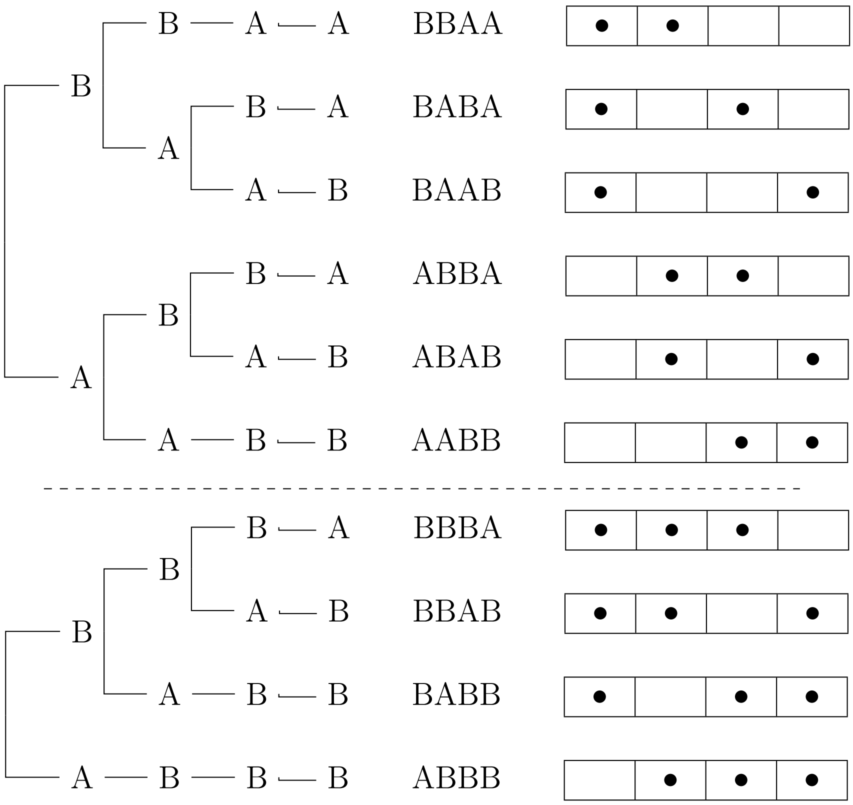
Tal estudio conduce a la siguiente tabla:

	5 cajas					
número de bolas	0	1	2	3	4	5
número de disposiciones	1	5	10	10	5	1

Propongamos ahora a los niños que vuelvan al caso de distribuir 3 bolas en 5 cajas.

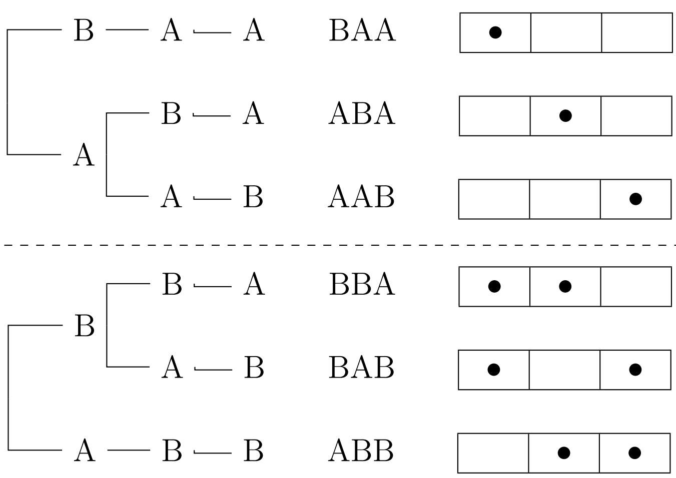
¿Qué sucede si suprimimos la primera caja?

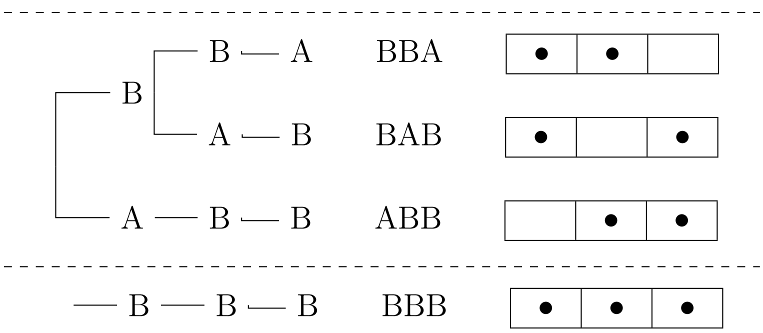
En tal caso, el árbol se descompone en dos ramas; la primera corresponde a las disposiciones de 2 bolas en 4 cajas y la segunda a las opciones para 3 bolas en 4 cajas:



¿Qué sucede si suprimimos la segunda caja?

Las dos ramas se descomponen en otras dos cada una; obtenemos así 4 ramas de las que dos son idénticas: la primera corresponde a las disposiciones de una bola en 3 cajas, la segunda y la tercera a las disposiciones de 2 bolas en 3 cajas y la última a la disposición de 3 bolas en 3 cajas:





Ahora es el momento idóneo para introducir una notación: si tenemos p bolas y las disponemos en n cajas, de modo que $p < n$, designamos por

$$\binom{n}{p} \quad \text{el } \textit{número} \text{ de disposiciones.}$$

Así, por ejemplo, con 3 bolas y 5 cajas tenemos un total de

$$\binom{5}{3} = 10 \quad \text{disposiciones.}$$

Hemos visto que

$$\binom{4}{2} = 6 \quad \text{y} \quad \binom{4}{3} = 4$$

y hemos hallado el siguiente resultado:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}.$$

Ahora podemos proponer a los niños que hallen, bien *experimentalmente* —con ayuda de las bolas y las cajas— bien por *cualquier método*, los números de la siguiente tabla:

		número de bolas						
		0	1	2	3	4	5	6
número de cajas	1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
	2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
	3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
	4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
	5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
	6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

He aquí los primeros valores:

con *una* caja:

0 bolas	$\boxed{}$	$\binom{1}{0} = 1$
1 bola	$\boxed{\bullet}$	$\binom{1}{1} = 1$

con *dos* cajas:

0 bolas	$\boxed{}\boxed{}$	$\binom{2}{0} = 1$
1 bola	$\boxed{\bullet}\boxed{}$	$\binom{2}{1} = 2$
	$\boxed{}\boxed{\bullet}$	
2 bolas	$\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}$	$\binom{2}{2} = 1$

con *tres* cajas:

0 bolas	$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$	$\binom{3}{0} = 1$
1 bola	$\boxed{\bullet}\boxed{}\boxed{}$	
	$\boxed{}\boxed{\bullet}\boxed{}$	$\binom{3}{1} = 3$
	$\boxed{}\boxed{}\boxed{\bullet}$	
2 bolas	$\boxed{}\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}$	
	$\boxed{\bullet}\boxed{}\boxed{\bullet}$	$\binom{3}{2} = 3$
	$\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}\boxed{}$	
3 bolas	$\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}$	$\binom{3}{3} = 1$

De donde obtenemos la tabla:

		número de bolas						
		0	1	2	3	4	5	6
número de cajas	1	1	1					
	2	1	2	1				
	3	1	3	3	1			
	4	1	4	6	4	1		
	5	1	5	10	10	5	1	
	6	1	6	15	20	15	6	1

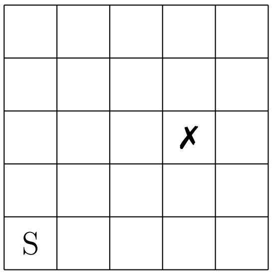
Antes de presentar a los niños la siguiente situación es interesante e instructivo proponerles el siguiente problema:

¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar dos bolas *idénticas y* un cubito *en* cuatro *cajas numeradas del 1 al 4? (En cada caja como mucho un objeto.)*

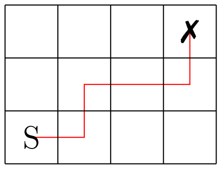
¿Qué relación hay entre este problema y el de colocar tres bolas en cuatro cajas?

Segunda situación

He aquí una cuadrícula:

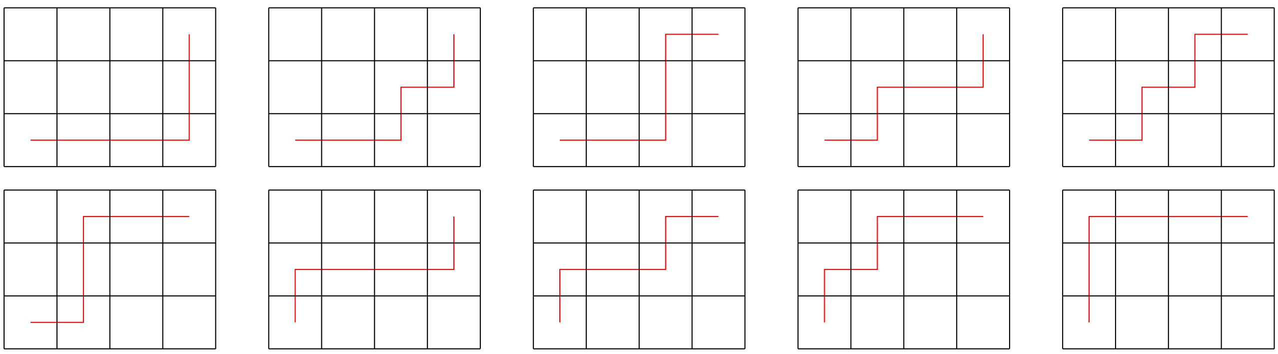


Colocamos una ficha en la casilla de partida y queremos llegar a la casilla ✗. Los únicos caminos que podemos seguir son *a la casilla de la derecha y a la casilla de arriba.* He aquí un camino:



¿Cuántos caminos hay de la casilla de partida a la casilla X?

En general, los niños proceden inicialmente de modo empírico y descubren estos diez caminos:



¿Habrá más caminos? ¿Cómo podríamos estar seguros de haber obtenido todos los caminos?

Esta pregunta motiva a los niños a analizar la situación. Comprueban que para cualquier camino hallado experimentalmente, la ficha realiza 3 desplazamientos a la derecha y 2 desplazamientos hacia arriba. Al llegar aquí les podemos sugerir —si no lo hacen ellos mismos— que codifiquen los distintos caminos hallados:

– un desplazamiento de una casilla hacia la *derecha* se designará por D;

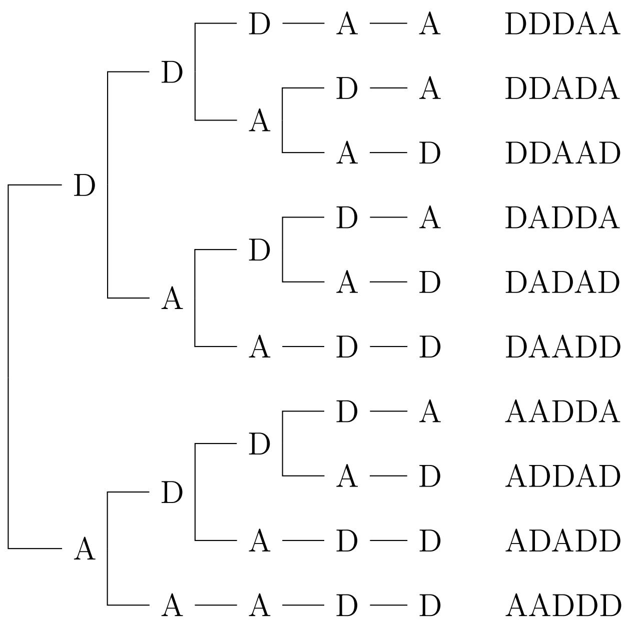
– un desplazamiento de una casilla hacia *arriba* se designará por A.

Con este código, los cuatro primeros caminos son respectivamente:

DDDAA, DDADA, DDAAD, DADDA

Y volvemos de nuevo al problema de hallar todas las palabras de cinco letras que se pueden escribir con tres D y dos A.

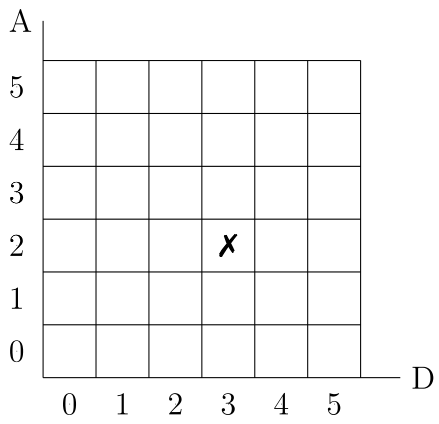
Cuando llegan a este punto algunos niños descubren la *analogía* con el problema de repartir 3 bolas en 5 cajas y dicen que están seguros de que no hay más que diez caminos. Sin embargo, los no convencidos por este argumento continúan su búsqueda haciendo un estudio sistemático mediante un árbol:



Una vez terminado el árbol todos quedan convencidos de que los dos problemas son *análogos*.

Propongamos ahora a los niños que *señalen* las casillas de la cuadrícula. La casilla X puede señalarse con (3D,2A), o más simplemente, con $(3, 2)$.

¿Cuántos caminos hay que vayan de la casilla (0, 0) a la casilla (3,2)?



Basta escribir todas las palabras de 5 letras con tres D y dos A. Es el mismo problema que el de colocar 3 bolas en 5 cajas. Hay, por tanto, diez caminos para ir de la casilla $(0, 0)$ a la casilla $(3, 2)$.

¿Cuántos caminos hay para ir de la casilla (0, 0) a una casilla cualquiera de la cuadrícula?

He aquí los primeros valores:

A							
5	1						
4	1	5					
3	1	4	10				
2	1	3	6	10			
1	1	2	3	4	5		
0	1	1	1	1	1	1	D
	0	1	2	3	4	5	

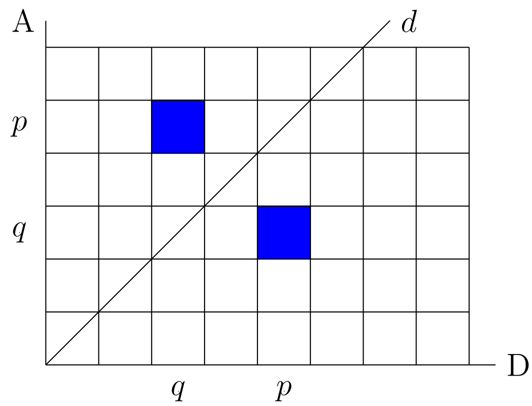
Si estamos en (0, 0) solamente hay un modo de ir allí: *quedarse donde uno está.*

Ampliación para el profesor

Estos primeros valores suscitan un par de observaciones muy interesantes:

1.– Los números situados en dos casillas *simétricas* respecto de la diagonal de la cuadrícula son iguales.

¿Es siempre cierto?



2.– Cada número es *igual* a la *suma* de los números situados en las dos casillas contiguas —situadas debajo y a la izquierda respectivamente— de la casilla que ocupa.

Ejemplo:

6	10
	4

¿Es general este hecho?

Para obtener *todos* los caminos que van desde la casilla $(0, 0)$ hasta la casilla (p, q) hay que escribir *todas* las palabras de $p + q$ letras formadas con p D y q A.

Dicho de otro modo, hay

$$\binom{p+q}{p}$$

caminos que van de la casilla $(0,0)$ a la casilla (p,q).

Del mismo modo, para obtener *todos* los caminos que van desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla (q,p) habrá que escribir todas las palabras de $p+q$ letras formadas con q D y p A.

Por tanto, hay

$$\binom{p+q}{q}$$

caminos que van desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla (q,p).

Pero cambiando las D por A y las A por D las palabras del primer caso se transforman en las palabras del segundo y viceversa.

Por tanto, hay el *mismo número* de palabras en los dos casos.

Resulta así que si dos casillas son *simétricas* respecto a la diagonal d de la cuadrícula, existe entonces el mismo número de caminos de la casilla $(0,0)$ a cada una de estas dos casillas. Por tanto,

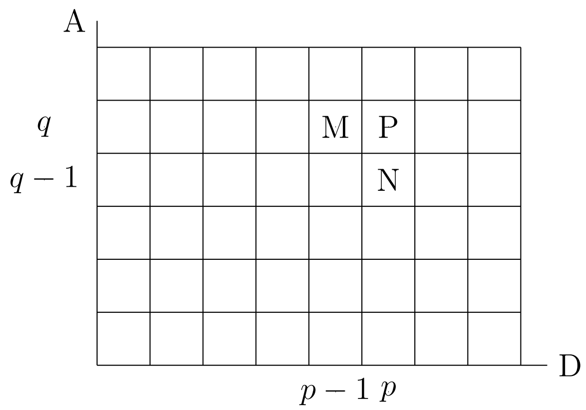
$$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}.$$

Y poniendo $p+q=n$, y consecuentemente $q=n-p$ obtenemos:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Tomemos ahora tres casillas contiguas: M, N y P; señaladas respectivamente por:

$$(p-1,q), \quad (p,q-1), \quad (p,q).$$



En estas condiciones existen:

$\binom{p+q-1}{p-1}$ caminos desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla M,

$\binom{p+q-1}{p}$ caminos desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla N,

y $\binom{p+q}{p}$ caminos desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla P.

Cualquier camino que sale de la casilla $(0,0)$ y llega a la casilla P, pasa necesariamente por la casilla M o por la casilla N y ningún camino pasa a la vez por estas dos casillas.

Por tanto, el número de caminos que van desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla P es la suma del número de caminos que van desde la casilla $(0,0)$ hasta la casilla M y el número de caminos que van de la casilla $(0,0)$ a la casilla N. Es decir:

$$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q-1}{p} + \binom{p+q-1}{p-1}.$$

Escribiendo $p+q=n$, obtenemos la fórmula:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Y en particular, para $n=3$ y $p=3$:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{3},$$

lo cual explica por qué, cuando distribuimos 3 bolas en 5 cajas y retiramos la *primera* caja, el árbol se divide en *dos* ramas que corresponden, respectivamente, a las distribuciones de 3 bolas en 4 cajas y de 2 bolas en 4 cajas.

La fórmula que acabamos de hallar permite calcular sucesivamente los números

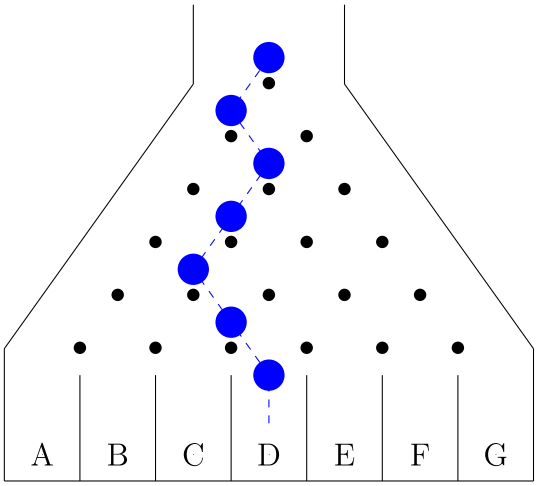
$$\binom{n}{p} \qquad \text{con } p \leq n.$$

En lugar de emplear una cuadrícula, es más cómodo un triángulo; triángulo que se puede prolongar tanto como se desee y que se llama *triángulo de Pascal*:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

A continuación describiremos un sencillo aparato —llamado *tablero de Galton*— que se puede construir en el taller de Tecnología con una tabla en la que van colocados unos clavos y que permite estudiar experimentalmente la situación anterior. La distancia entre dos clavos contiguos es la distancia precisa para que pase por en medio una bola.

Colocando el tablero en posición vertical (o casi vertical) la bola entra por la parte superior. Al chocar con el primer clavo baja hacia la segunda fila de clavos pasando por la derecha o por la izquierda del primer clavo; choca entonces con un clavo de la segunda fila y baja a la tercera fila



pasando por la derecha o por la izquierda del segundo clavo, etc... La bola termina su recorrido en una de las siete casillas: A, B, C, D, E, F o G.

He aquí uno de los recorridos de la bola, que termina en la casilla D:
Podemos codificar el camino mediante la palabra: *idiidd*.

Todas las palabras de 6 letras formadas con 3 i y 3 d corresponden a caminos que llegan a D.

Llegamos así a la siguiente tabla:

caminos que llegan a:	código	número de caminos
A	$(6i, 0d)$	$\binom{6}{0} = 1$
B	$(5i, 1d)$	$\binom{6}{1} = 6$
C	$(4i, 2d)$	$\binom{6}{2} = 15$
D	$(3i, 3d)$	$\binom{6}{3} = 20$
E	$(2i, 4d)$	$\binom{6}{4} = 15$
F	$(1i, 5d)$	$\binom{6}{5} = 6$
G	$(0i, 6d)$	$\binom{6}{6} = 1$
	Total	64

Los niños introducen en el aparato muchas bolas; supongamos que 10 grupos introducen sucesivamente 200 bolas cada grupo, con un total de 2000 bolas, y obtienen la siguiente *estadística*:

A	B	C	D	E	F	G
27	191	462	632	473	185	29

¿Cómo aprovechar estos resultados?

Puede entablarse una interesante discusión entre el profesor y los niños intentando comparar estos resultados experimentales con los valores teóricos anteriores.

He aquí dos métodos:

(a) Se calculan las *frecuencias relativas* teóricas dividiendo entre 64 los números 1, 6, 15, 20, 15, 6 y 1; luego se calculan las *frecuencias relativas experimentales* dividiendo entre 2000 los números de la estadística anterior:

	frecuencias relativas teóricas	frecuencias relativas experimentales
A	0,0156	0,0135
B	0,0938	0,0955
C	0,2344	0,2310
D	0,3125	0,3160
E	0,2344	0,2365
F	0,0938	0,0925
G	0,0156	0,0145
Total	1.0001	0.9995

(b) Se calcula el número medio de *caminos experimentales* multiplicando por 64 las frecuencias relativas experimentales.

	número de caminos teóricos	número de caminos experimentales
A	1	0,864
B	6	6,112
C	15	14,784
D	20	0,224
E	15	15,136
F	6	5,92
G	1	0,928
Total	64	63,968

Las tablas demuestran que los valores *experimentales* están próximos a los valores *teóricos*.