USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA,
ANÁLISE MATEMÁTICA E OPTIMIZACIÓN

Matemáticas para profesorado de secundaria
[jorge.losada.rodriguez@usc.es]

Matemáticas para Profesorado de Educación Secundaria

Abordaremos en este apartado cierto número de situaciones que giran en torno de un tema central de combinatoria: *el triángulo de Pascal.*

Primera situación

Demos a los niños 5 cajas colocadas una al lado de otra, numeradas del 1 al 5 y 3 bolas idénticas.

Colocan las bolas en las cajas de modo que cada caja contenga *como mucho una bola.*

¿Cuántas disposiciones existen?

He aquí cuatro:

•	•		•	

		•	•	•

•	•			•

•			•	•

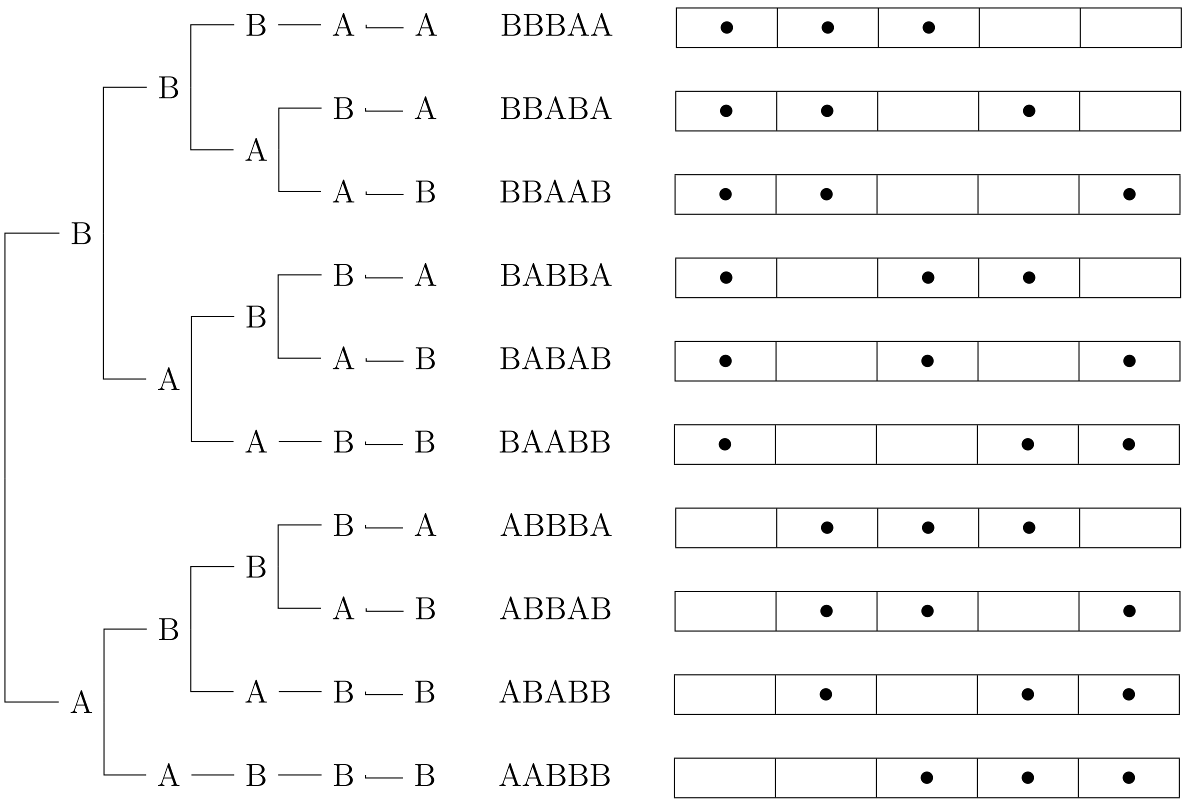
¿Hay más?

La dificultad que los niños hallan cuando utilizan cajas y bolas es recordar las disposiciones que ya han salido. Podemos sugerirles que vayan dibujando las disposiciones a medida que las vayan hallando, o que inventen un *código* para describirlas: la presencia de una bola en una caja puede anotarse por ejemplo con la letra B y la ausencia por la letra A.

Así, según este código, las cuatro disposiciones anteriores se escriben respectivamente como

B	B	A	B	A
A	A	B	B	B
B	B	A	A	B
B	A	A	B	B

El problema se reduce así al de hallar *todas* las palabras de cinco letras que se pueden escribir con tres B y dos A. Si los niños están ya acostumbrados a usar árboles, en seguida se sentirán motivados a analizar la situación de la siguiente manera:



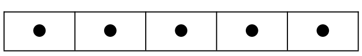
Hay diez maneras de colocar tres bolas en cinco cajas (colocando como mucho una bola en cada caja).

En este momento, es interesante que los alumnos descubran que cambiando en este árbol las A por B y las B por A, determinan el número de maneras de colocar 2 bolas en 5 cajas, Por tanto, también hay *diez* maneras de colocar 2 bolas en 5 cajas (colocando como mucho una bola en cada caja).

De un modo natural los niños se plantean el problema de colocar una bola (o cuatro bolas) en las 5 cajas. En ambos casos el estudio de la situación es muy sencillo y descubren que hay *cinco* casos posibles:

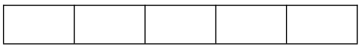
Al contrario, son pocos los niños que se plantean la cuestión de colocar 5 bolas en las 5 cajas y menos aún los que se proponen repartir *cero* bolas en las cajas; en realidad el último problema no parece natural.

Con 5 bolas y 5 cajas hay *una* sola posibilidad



Esta disposición corresponde a la palabra BBBBB.

Si cambiamos B por A, obtenemos la palabra AAAAAA, que corresponde a la disposición



que es la disposición que se obtiene al colocar cero bolas en las cajas.

Tal estudio conduce a la siguiente tabla:

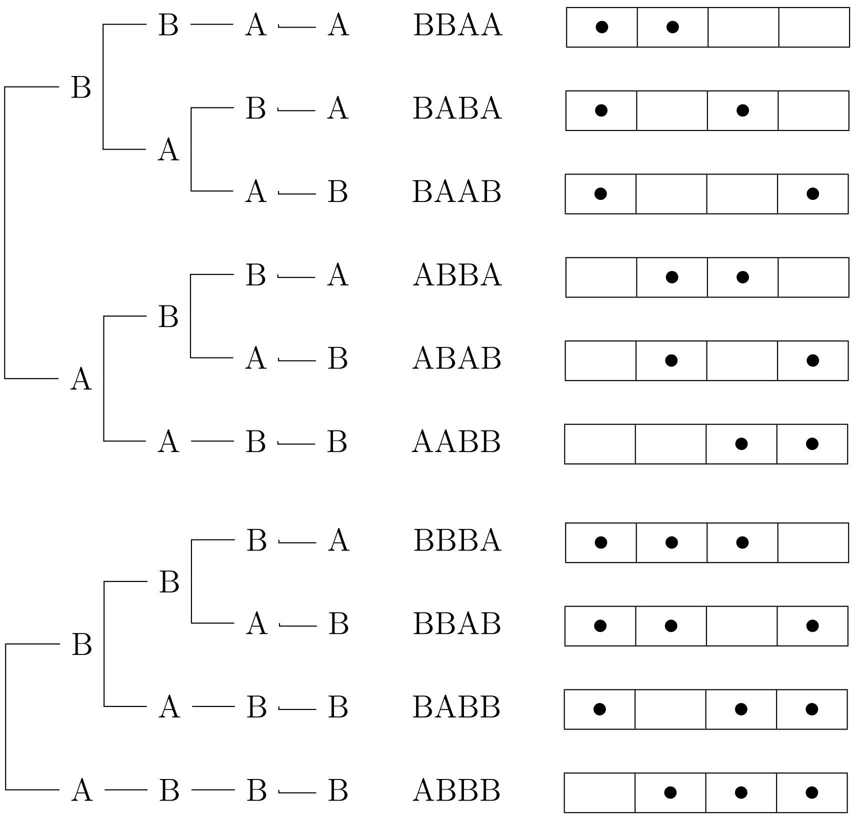
5 cajas

número de bolas	0	1	2	3	4	5
número de disposiciones	1	5	10	10	5	1

Propongamos ahora a los niños que vuelvan al caso de distribuir 3 bolas en 5 cajas.

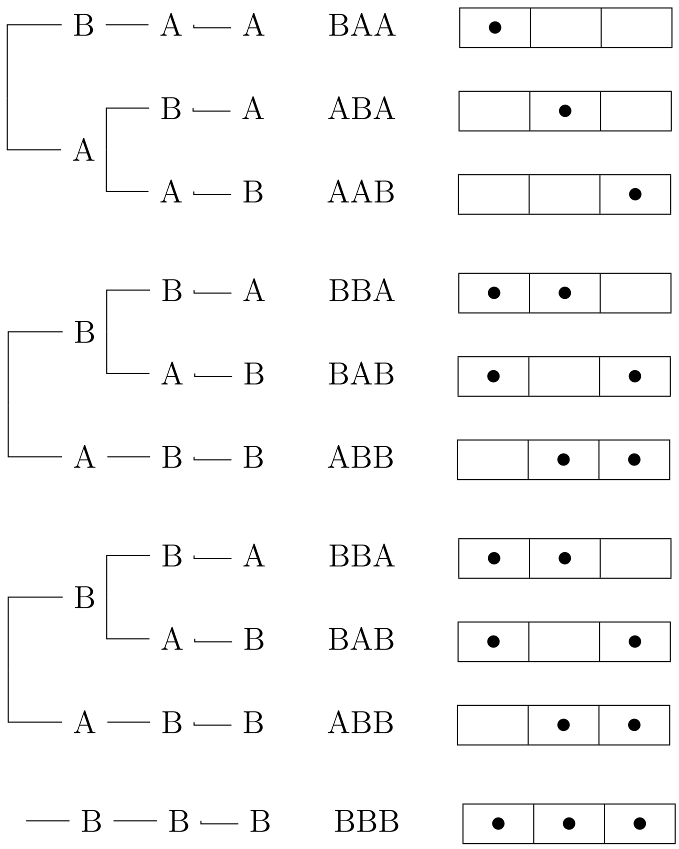
¿Qué sucede si suprimimos la primera caja?

El árbol se descompone en dos ramas; la primera corresponde a las disposiciones de 2 bolasten 4 cajas y la segunda a las disposiciones de 3 bolas en 4 cajas (véase gráfica pág. 32).



¿Qué sucede si suprimimos ahora la segunda caja?

Las dos ramas se descomponen en otras dos cada una; obtenemos 4 ramas de las que dos son idénticas; la primera corresponde a las disposiciones de una bola en 3 cajas; la segunda y la tercera, a las disposiciones de 2 bolas en 3 cajas, y la última, a la disposición de 3 bolas en 3 cajas.



Es útil ahora introducir una notación: si tenemos p bolas y las disponemos en n cajas, de modo que $p < n$, designamos por

$$\binom{n}{p}$$

el *número* de disposiciones.

Así, por ejemplo, con 3 bolas y 5 cajas

$$\binom{5}{3} = 10.$$

Hemos visto que

$$\binom{4}{2} = 6 \quad \text{y} \quad \binom{4}{3} = 4$$

y hemos hallado el siguiente resultado:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}.$$

Ahora podemos proponer a los niños que hallen, bien *experimentalmente* con ayuda de las bolas y las cajas, bien por *cualquier método*, los números de la siguiente tabla:

		número de bolas						
		0	1	2	3	4	5	6
número de cajas	1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
	2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
	3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
	4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
	5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
	6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

He aquí los primeros valores:

con *una* caja:

0 bolas $\quad \boxed{} \quad \binom{1}{0} = 1$

1 bola $\quad \boxed{\bullet} \quad \binom{1}{1} = 1$

con *dos* cajas:

0 bolas $\quad \boxed{}\boxed{} \quad \binom{2}{0} = 1$

1 bola $\quad \boxed{\bullet}\boxed{}$

$\boxed{}\boxed{\bullet} \quad \binom{2}{1} = 2$

2 bolas $\quad \boxed{\bullet}\boxed{\bullet} \quad \binom{2}{2} = 1$

con *tres* cajas:

0 bolas $\quad \boxed{}\boxed{}\boxed{} \quad \binom{3}{0} = 1$

1 bola $\quad \boxed{\bullet}\boxed{}\boxed{}$

$\boxed{}\boxed{\bullet}\boxed{} \quad \binom{3}{1} = 3$

$\boxed{}\boxed{}\boxed{\bullet}$

2 bolas

	•	•
•		•
•	•	

$$\binom{3}{2} = 3$$

3 bolas

•	•	•

$$\binom{3}{3} = 1$$

De donde obtenemos la tabla:

		número de bolas						
		0	1	2	3	4	5	6
número de cajas	1	1	1					
	2	1	2	1				
	3	1	3	3	1			
	4	1	4	6	4	1		
	5	1	5	10	10	5	1	
	6	1	6	15	20	15	6	1

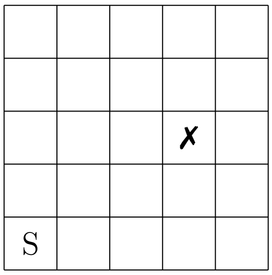
Ántes de presentar a los niños la siguiente situación es interesante e instructivo proponerles el siguiente problema:

¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar dos bolas *idénticas y* un cubito *en* cuatro *cajas numeradas del l al 4? (En cada caja como mucho un objeto.)*

¿Qué relación hay entre este problema y el de colocar tres bolas en cuatro cajas?

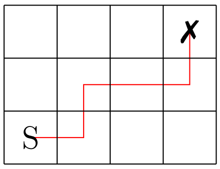
Segunda situación

He aquí una cuadrícula:



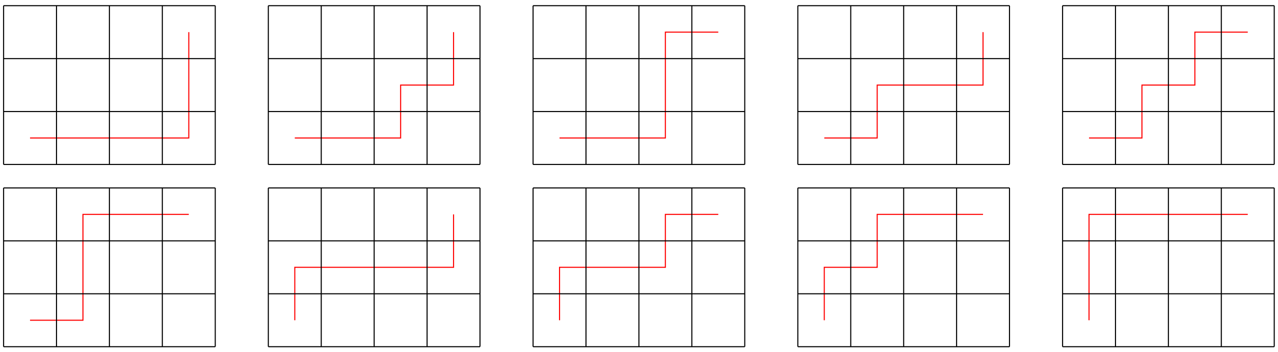
Colocamos una ficha en la casilla de partida y queremos llegar a la casilla ✗. Los únicos caminos que podemos seguir son *a la casilla de la derecha y a la casilla de arriba.*

He aquí un camino:



¿Cuántos caminos hay de la casilla de partida a la casilla X?

En general los niños proceden de modo empírico y descubren los diez caminos siguientes:



¿Habrá más caminos? ¿Cómo podríamos estar seguros de haber obtenido todos los caminos?

Esta pregunta motiva a los alumnos a analizar la situación. Comprueban que cualquiera que sea el camino hallado experimentalmente, la ficha realiza 3 desplazamientos a la derecha y 2 desplazamientos hacia arriba.

Al llegar aquí les podemos sugerir, si no lo hacen ellos mismos, que codifiquen los distintos caminos hallados.

Un desplazamiento de una casilla hacia la *derecha* se designará por D.

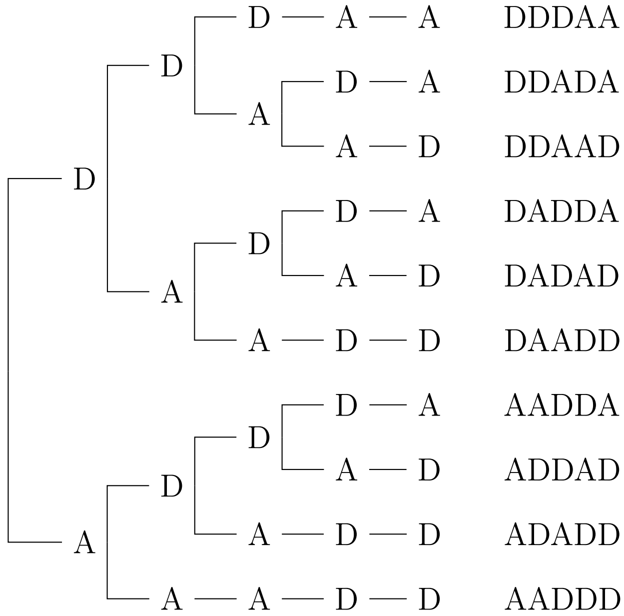
Un desplazamiento de una casilla hacia *arriba* se designará por A.

Con este código, los cuatro primeros caminos son respectivamente:

DDDAA, DDADA, DDAAD, DADDA

De nuevo volvemos al problema de hallar todas las palabras de cinco letras que se pueden escribir con tres D y dos A.

Cuando llegan a este punto algunos alumnos descubren la ana- logía con el problema de repartir 3 bolas en 5 cajas y dicen que están seguros de que no hay más que diez caminos, mientras que otros, no convencidos por este argumento, continúan su búsqueda haciendo un estudio sistemático mediante un árbol:

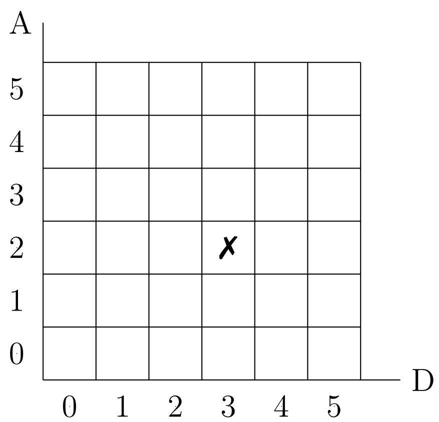


Una vez terminado el árbol todos quedan convencidos de que los dos problemas son *análogos*.

Propongamos ahora a los niños que *señalen* las casillas de la cuadrícula.

La casilla X puede señalarse con (3D, 24), o más simplemente (3, 2).

¿Cuántos caminos hay que vayan de la casilla (0, 0) a la casilla (3,2)?



Basta escribir todas las palabras de 5 letras con 3D y 24. Es el mismo problema que el de colocar 3 bolas en 5 cajas.

Hay, pues, diez caminos para ir de la casilla (0, 0) a la casilla (3, 2).

¿Cuántos caminos hay para ir de la casilla (0, 0) a una casilla cualquiera de la cuadrícula?

He aquí los primeros valores:

A							
5	1						
4	1	5					
3	1	4	10				
2	1	3	6	10			
1	1	2	3	4	5		
0	1	1	1	1	1	1	D
	0	1	2	3	4	5	

Si estamos en (0, 0) solamente hay un modo de ir allí: *quedarse uno donde está.*

Ampliación para el profesor