13. *Las curvas de fiebre se suavizan*

MIENTRAS saldaba las deudas y promesas de capítulos anteriores, me acordé del pobre y solitario 1 de la cúspide del Triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Hemos probado que de la segunda fila en adelante, la suma de los términos de cada fila es:

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3, \ldots$$

Si queremos casar el 1 de la cúspide con todo esto, ése debería ser el valor de 2^0. Pero hasta este momento, no hemos dado ningún tipo de significado a 2^0; multiplicar algo por sí mismo 0 veces no tiene sentido y nunca antes nos habíamos encontrado con la necesidad de dar significado a este tipo de expresiones.

Estudiemos un poco más la exponenciación. Recuerda cuán fácil era multiplicar dos potencias de un mismo número; bastaba sumar los exponentes. Por ejemplo:

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{3 \times 3}_{} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{} = 3^6 \quad \text{y} \quad 6 = 2 + 4.$$

Si sólo aparecen potencias de un mismo número, también podemos efectuar otras operaciones de forma muy sencilla. Por ejemplo:

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3}$$

y simplificando entre 3×3, obtenemos que

$$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{1} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

por lo que

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^4 \quad \text{y} \quad 6 - 2 = 4.$$

Es decir, la división se efectúa restando ambos exponentes. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left(3^2\right)^4 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\ &= \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \\ &= 3^8 \quad \text{y} \quad 8 = 2 \times 4,\end{aligned}$$

por lo que para elevar una potencia a otra potencia, basta con multiplicar ambos exponentes.

Por tanto, merece la pena hacer una tabla con las distintas potencias de una base concreta. Escojamos a 2 como base; es relativamente fácil calcular sus potencias:

2^1	$=$	2
2^2	$=$	4
2^3	$=$	8
2^4	$=$	16
2^5	$=$	32
2^6	$=$	64
2^7	$=$	128
2^8	$=$	256
2^0	$=$	512
2^{10}	$=$	$1\,024$
2^{11}	$=$	$2\,048$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Si tenemos que multiplicar dos números, con suerte podremos obtener el resultado final a partir de esta tabla sin demasiado esfuerzo. Si, por ejemplo, nos pidieran calcular

$$64 \times 32,$$

entonces estaríamos de suerte, pues están ambos números en la tabla. Los exponentes correspondientes son 6 y 5, y es muy fácil sumarlos, dando 11. Una vistazo rápido a la undécima fila nos da el resultado:

$$2048.$$

Y si nos piden elevar 32 al cuadrado, dado que el exponente correspondiente a 32 es 5, al multiplicado por 2 obtenemos 10, y mirando para la décima fila leemos el resultado:

$$32^2 = 1024.$$

Es un juego infantil; pero es una pena que no aparezcan todos los números en la tabla. Quizás valga la pena extender el significado de la exponenciación con el objetivo de que todo número (como por ejemplo, 3 mismamente) se pueda expresar como potencia de 2.

De este modo, obtenemos una nueva inversión de la exponenciación: ahora buscamos el exponente al que debemos elevar 2 para obtener 3. Esta operación (y su resultado, si es que existe) se llama logaritmo.

Los números más incómodos y molestos a la hora de realizar cálculos son las fracciones y tampoco aparecen en la tabla; la potencia más pequeña de 2, 2^1, ya es igual a 2. Por tanto, el aspecto principal de la nueva interpretación de la exponenciación será que, como antes, un número mayor que 2 se pueda escribir como una potencia de 2 con exponente mayor que 1; de este modo, evitaremos tener que andar buscando a nuestro número de un lado a otro por toda la tabla. Es decir, si también queremos obtener fracciones, entonces tenemos que interpretar la potencias de 2 con exponente menor que 1.

Si retrocedemos a pasos enteros, las potencias

$$2^0,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ldots$$

todavía esperan pacientemente alguna interpretación.

A la hora de extender esta operación, es especialmente importante asegurarnos de que las antiguas reglas de cálculo sigan vigentes, porque no debemos perder de vista nuestro objetivo: queremos que el cálculo con las nuevas potencias sean tan cómodo y práctico como anteriormente.

Entre otras cosas, debemos asegurarnos de que multiplicar una potencia de 2 por 2^0 debe equivaler a sumar 0 al exponente. Pero sumar 0 no altera nada en absoluto; por tanto, multiplicar por 2^0 debe interpretarse como multiplicar por un factor que provoca que el valor del producto final sea igual al otro factor. El factor que no cambia el valor de un número es, por supuesto, el 1; por lo que debemos definir 2^0 (y de manera similar la potencia 0-ésima de cualquier otra base) como:

$$2^0 = 1.$$

Con esta definición, el Triángulo de Pascal adquiere una estructura uniforme.

A la hora de definir 2^{-1}, debemos asegurarnos de que

$$2^1 \times 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^0 = 1.$$

Si pasamos el 2^1 al otro lado de la ecuación dividiendo, la ecuación

$$2^1 \times 2^{-1} = 1$$

se convierte en

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}.$$

Del mismo modo, de la condición

$$2^2 \times 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1,$$

deducimos que

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

y de la condición

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1,$$

se sigue que

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

y así sucesivamente. Por tanto, si queremos respetar las antiguas reglas de cálculo, debemos interpretar las potencias con un exponente negativo como el cociente de 1 entre la potencia con el exponente positivo correspondiente.

Entonces la tabla también se expande hacia atrás e incluye así a ciertas fracciones:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
2^{-3} & = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = & 1 \div 8 = 0.125 \\
 & & 10 \\
 & & \ \ 20 \\
 & & \ \ \ \ 40 \\
2^{-2} & = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = & 1 \div 4 = 0.25 \\
 & & 10 \\
 & & \ \ 20 \\
2^{-1} & = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = & 1 \div 2 = 0.5 \\
 & & 10 \\
2^0 & = & \qquad\quad 1 \\
2^1 & = & \qquad\quad 2 \\
2^2 & = & \qquad\quad 4 \\
\vdots & &
\end{array}$$

Esto ya es una buena herramienta para hacer cuentas con las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, … es decir, con los números decimales 0.5, 0.25, 0.125, …

Pero todavía hay huecos muy grandes entre los números de la tabla. Por ejemplo, $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$. Si queremos escribir un número entre 2 y 4 (por ejemplo, 3 o 2.7) como potencia de 2, necesitaremos cierto exponente entre 1 y 2. El número $1\frac{1}{2}$, por ejemplo, se encuentra entre todos esos números y dado que $\frac{2}{2} = 1$, es igual a $\frac{3}{2}$; hecho que también debemos tener en cuenta a la hora de interpretar la potencia de 2 con exponente $\frac{3}{2}$, o en general, con cualquier exponente fraccionario.

La interpretación exacta quedará determinada si recordamos que también queremos respetar la regla de la potencia de una potencia. En efecto, pues si queremos que dicha regla siga siendo válida, entonces

$$\left(2^{\frac{3}{3}}\right)^2 = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3,$$

de modo que $2^{\frac{3}{2}}$ debe ser el número cuyo cuadrado es igual a 2^3, pero ese es el número que denotamos por $\sqrt{2^3}$ y entonces:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}.$$

Calculando $\sqrt{8}$ hasta la posición de las décimas, obtenemos que sería aproximadamente igual a 2.8. Por tanto, dado que

$$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5,$$
$$10$$

y puesto que es más fácil operar con exponentes en forma decimal, podemos insertar una nueva fila en nuestra tabla entre 2^1 y 2^2:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &2^1 &&= 2 \\ &2^{1.5} &&= 2.8\ldots \\ &2^2 &&= 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aunque 2.8 ya se acerca bastante, aún no hemos alcanzado nuestro sueño que consistía en escribir 3 como cierta potencia de 2. Se puede probar que no es posible escribir 3 como una de potencia de 2 cuyo exponente sea una fracción, pero sin embargo, sí que podemos obtener aproximaciones tan exactas como deseemos empleando potencias fraccionarias. Definimos una potencia con exponente irracional mediante dichas aproximaciones.

Esa es la idea básica para elaborar las tablas de logaritmos. Las viejas tablas de logaritmos se hicieron de este modo. La tabla que se estudia en la escuela tiene a 10 como base (por lo que sólo se indican los exponentes). Y aquí, se hace un gran sacrificio por seguir jugando con los dedos; pues entre las potencias de 10, (esto es, entre 10, 100, 100, . . .) los huecos todavía son más grandes que entre las potencias de 2 y es necesario un esfuerzo mucho mayor para rellenarlos.

En otras tablas de logaritmos aparecen los logaritmos en base "e" o logaritmos naturales. Este "e" es un número irracional cuya expansión decimal comienza así: $2.71\ldots$ ¿Cuál es la idea que justifica considerar a ese número como la base natural? Hay muchas maneras de responder a esta cuestión; creo que la siguientes es la más habilidosa.

Ya sabemos que 10 no es la base más adecuada para una tabla de logaritmos. De hecho, sería buena idea escoger como base a un número menor que 2, pues en ese caso, los huecos entre potencias sucesivas con exponente entero se menguarían su tamaño. Por supuesto, es evidente que no podemos pasarnos y escoger a 1 como base, pues cualquier potencia de 1 es igual 1, y tampoco debemos escoger una base menor que 1, ya que elevando una fracción propia a una potencia entera, reducimos su valor; basta observar que, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Probemos entonces con 1.1; será fácil hacer las cuentas porque ya conocemos las potencias de 11 del Triángulo de Pascal; bastará con fijarse en el punto decimal y tener en cuenta que cada vez que multiplicamos por una décima, en realidad, estamos dividiendo entre 10, por lo que el punto decimal se desplazará una posición hacia la izquierda. No olvidemos tampoco que la potencia 0-ésima de cualquier base es igual a 1.

$$1.1^0 = 1$$

$$1.1^1 = 1.1$$

$$1.1^2 = 1.21$$

$$1.1^3 = 1.331$$

$$1.1^4 = 1.4641$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estas potencias crecen muy lentamente e incluso antes de abordar el laborioso llenado de los huecos vacíos, ya disponemos de una gran cantidad de números entre 1 y 2.

Naturalmente, un número menor y más próximo a 1, todavía será mejor. Probemos con la base 1.001 (ahora nos salen los elementos del Triángulo de Pascal separados por un par de ceros):

$$1.001^0 = 1$$

$$1.001^1 = 1.001$$

$$1.001^2 = 1.002001$$
$$1.001^3 = 1.003003001$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ésta ya es una densidad tremenda; estas potencias crecen tan lentamente que uno ya casi levantan sospechas: ¿llegarán a 2 en algún momento? Pero se puede demostrar que las potencias de cualquier número mayor que 1, por poco mayor que éste sea, tienden a infinito, aunque quizás muy lentamente.

Esta tabla todavía presenta un pequeño defecto estético: es precisamente debido a su lento crecimiento que exponentes desproporcionadamente grandes se corresponden con números relativamente pequeños. Por ejemplo, tenemos que avanzar, aproximadamente, hasta la milésima potencia para llegar a 2. Si los exponentes fuesen mil veces más grandes, tendríamos una tabla más armoniosa y estética. Pero esto es fácil de conseguir: basta elevar la base a la milésima potencia, porque

$$\mathbf{(1.001^{1\,000})^{\frac{1}{1\,000}}} = 1.001^{1\,000\times\frac{1}{1\,000}} = 1.001^{\frac{1\,000}{1\,000}} \mathbf{= 1.001^1}$$
$$\mathbf{(1.001^{1\,000})^{\frac{2}{1\,000}}} = 1.001^{1\,000\times\frac{2}{1\,000}} = 1.001^{\frac{2\,000}{1\,000}} \mathbf{= 1.001^2}$$

y así sucesivamente, por lo que elevando la base $1.001^{1\,000}$ a una milésima parte del exponte de la base 1.001, obtenemos idéntico resultado.

Trabajando con la base $1.001^{1\,000}$, podemos avanzar de milésima en milésima. Dado que en forma decimal

$$\frac{1}{1\,000} = 0.001, \qquad \frac{2}{1\,000} = 0.002, \qquad \frac{3}{1\,000} = 0.003, \dots$$

y empleando las relaciones que acabamos de obtener para las potencias con base 1.001, tenemos que:

$$\begin{aligned}(1.001^{1\,000})^{0} &= 1.001^0 = 1\\ (1.001^{1\,000})^{0.001} &= 1.001^1 = 1.001\\ (1.001^{1\,000})^{0.002} &= 1.001^2 = 1.002001\\ (1.001^{1\,000})^{0.003} &= 1.001^3 = 1.003003001\end{aligned}$$

Por tanto, ahora ya no hay tal desproporción entre el número obtenido y exponente asociado, mientras que la densidad se mantiene intacta.

Es claro que las bases

$$1.0001^{10\,000},\ 1.00001^{100\,000},\ 1.000001^{1\,000\,000}, \ldots$$

son cada vez mejores para nuestro propósito y se puede probar que esta sucesión converge hacia un número irracional cuya expansión decimal comienza así: $2.71\ldots$. Este número juega un papel muy importante en Matemáticas, por lo que se le ha dado un nombre especial: se llama número "e". Y los logaritmos con base e se denominan logaritmos naturales, pues llegas a ellos de manera tan natural cuando buscas bases cada vez más prácticas y útiles.

Por el bien del logaritmo, hemos llenado los huecos vacíos en la definición de las potencias. Y ahora, la exponenciación ya no tiene sentido únicamente para números naturales, sino que también para cualquier número real. Por tanto, también podemos completar con más datos la salteada curva de fiebre de la función de potencia. Ya sabemos trabajar con ecuaciones, por lo que escribiremos esta función en forma de ecuación. Consideremos de nuevo a 2 como base. Variaremos el exponente, a quien me referiré como x por ser éste un número desconocido y denotaremos por y al valor de la potencia; es decir:

$$y = 2^x.$$

Representaré los valores de x a lo largo de una línea recta horizontal empleando unidades como esta (añadimos ahora el punto 0 con los números negativos a su izquierda) y los valores de y hacia arriba empleando unidades como esta . Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = -3 \text{ entonces } y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\\
&\text{si } x = -2 \text{ entonces } y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},\\
&\text{si } x = -1 \text{ entonces } y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},\\
&\text{si } x = 0 \text{ entonces } y = 2^{0} = 1,\\
&\text{si } x = 1 \text{ entonces } y = 2^{1} = 2,\\
&\text{si } x = 2 \text{ entonces } y = 2^{2} = 4,\\
&\text{si } x = 3 \text{ entonces } y = 2^{3} = 8;
\end{aligned}$$