DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA,
ANÁLISE MATEMÁTICA E OPTIMIZACIÓN

Matemáticas para profesorado de secundaria
[jorge.losada.rodriguez@usc.es]

Matemáticas para Profesorado de Educación Secundaria

1. Generalidades

La combinatoria es indiscutiblemente un dominio privilegiado de la matemática. Un problema combinatorio consiste por lo general, en una primera etapa, en poner de manifiesto la *existencia* o *no existencia* de elementos de conjuntos finitos que poseen determinadas propiedades. En el caso de que tal conjunto exista, la segunda etapa conduce a la *clasificación* y *recuento* de todos los elementos que responden al problema. El niño puede comenzar siempre este estudio con experiencias y manipulaciones considerando solamente pequeños valores de n. La experimentación se detiene en cuanto n se hace demasiado grande; para poder continuar el alumno se ve estimulado a *razonar* y en ocasiones a poner en práctica un *método deductivo*.

Así, progresivamente y a través de múltiples experiencias personales el niño llegará a **descubrir un gran número de conceptos** que en su mayor parte no presuponen ningún conocimiento previo.

Para la experimentación echaremos mano de objetos del mundo del niño: los mismos niños, sus juegos, etc.

El hecho de que sea posible enseñar combinatoria a niños de pocos años no es una razón suficiente para emprender tal iniciación. La verdadera razón reside en el hecho de que tal aprendizaje conduce al niño al corazón mismo de la matemática.

2. Los modelos en combinatoria

Construcción de modelos

En combinatoria es cómodo introducir el concepto general de *modelo* para designar diferentes tipos de *combinaciones* o de *variaciones con o sin repetición*. Los elementos de estos modelos, algunos de los cuales pueden ser idénticos, forman sucesiones o ciclos, que a menudo obedecen a determinadas reglas.

Existen multitud de realizaciones concretas de tales modelos: cuentas de collar de formas y de colores diferentes que se pueden disponer en sartas o en filas; se pueden colocar también en cajas intercambiables o no; letras del alfabeto o sílabas como *tic*, *tac*, *toc*, con las que se pueden formar palabras respetando ciertas reglas: En fin, incluso el canto y el dibujo también pueden contribuir.

Simbolización de los modelos

En una segunda etapa, podemos simbolizar las cuentas mediante puntos de color marcados en el papel o mediante las iniciales de los colores, o en forma más abstracta por letras o números.

Búsqueda sistemática de modelos

Esta etapa comienza con la clasificación de los modelos que posean una característica común. Supongamos que hemos dibujado todas las diferentes filas de tres puntos que se pueden dibujar con tres colores: rojo, amarillo, verde. Nos quedamos con las filas en las que figuran los tres colores. Las que tienen un solo color o tienen dos colores pertenecen a otros dos conjuntos. A continuación, podemos clasificar el conjunto de las filas agrupando las que comienzan por el mismo color y dentro de cada conjunto, agrupando de nuevo las que tienen el mismo color en segundo lugar. Este método de agrupamientos permite crear un orden en el conjunto de las filas, fijando antes un orden para los colores. Tal actividad puede servir de punto de partida para descubrir la noción de *relación de orden.*

Búsqueda sistemática de todos los modelos que obedecen a las mismas reglas

Esta búsqueda se puede simplificar empleando representaciones semiabstractas, por ejemplo *árboles.* En algunos casos basta con comenzar la secuencia e imaginar como sigue. Muy pronto se hace sentir la necesidad del recuento de los posibles modelos y ésta se convierte en un problema más importante que la determinación efectiva de los mismos modelos.

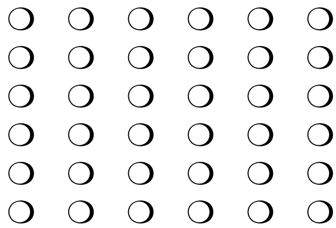
Variación de parámetros y de situaciones

En el ejemplo anterior teníamos dos *parámetros*: el número de colores (tres: rojo, amarillo y verde) y el número de puntos por fila (tres igualmente). Es interesante variar los parámetros; los niños se ven así impulsados a construir una tabla de doble entrada colocando en cada casilla el número correspondiente de modelos. Examinan los resultados y tratan de secar generalizaciones; en muchos casos podrán explicar la tabla con ayuda de fórmulas.

El proceso que hemos introducido debería llevar a la formación del concepto de *variaciones con repetición* y al descubrimiento de *clases de equivalencia* de situaciones. De hecho no cubre más que una parte de las situaciones combinatorias posibles, pero engloba sin embargo algunos casos no clásicos.

3. Juegos con el geoplano

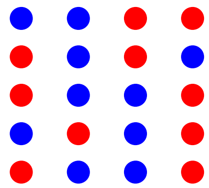
Un grupo de niños (de tres a seis) está sentado alrededor de un geoplano (placa con agujeros, de 16×24 agujeros, por ejemplo).



Se distribuyen fichas de colores diferentes. En general, basta con tres colores. Se propone una regla de juego a los niños; por ejemplo: *construir una fila de cuatro fichas formada por dos fichas azules y dos rojas.*

Los niños van construyendo una fila cada uno por turno. Cuando un niño construye una fila el niño siguiente tiene que comprobar que está conforme con la regla antes de construir la suya propia. Si detecta un error, por ejemplo, si hay repetición, debe modificar la fila. Si la fila es correcta, el niño construye una nueva fila, distinta de las anteriores.

La figura siguiente ilustra el juego en el instante en que se acaba de descubrir una repetición.



Si el número de filas posibles distintas no es muy elevado (seis en nuestro ejemplo) es probable que los niños acaben hallándolas todas. A continuación proponemos otras situaciones del mismo tipo:

con una ficha roja y una azul, se hallan *dos* filas;

con una ficha roja y dos azules, se hallan *tres* filas;

con una ficha roja y tres azules, se hallan *cuatro* filas;

con dos fichas rojas y dos azules, se hallan *seis* filas;

con dos fichas rojas y tres azules, se hallan *diez* filas.

¿Cuántas filas pueden formarse con:

una ficha roja, una azul y dos verdes?;

una ficha roja, una azul y tres verdes?

una ficha roja, una azul, una verde y una amarilla?

...

A este nivel **no** puede esperarse que los niños emprendan por su cuenta una investigación sistemática de todos los casos posibles.

En cambio se puede esperar que el niño:

(*a*) *comprenda un conjunto de reglas y sepa decidir si una fila dada es conforme a dichas reglas*;

(*b*) *sepa reconocer si una fila es realmente nueva o es la repetición de otra*;

(*c*) *vaya hallando sucesivamente filas distintas conformes a las reglas*;

(*d*) *las descubra todas en los casos sencillos*;

(*e*) *trate de hallar por qué no es posible a partir de cierto punto encontrar nuevas filas*.

Podemos proponer a los alumnos que comprueben estas reglas; así, por ejemplo, tomamos fichas de tres colores y construimos filas con dos fichas, con o sin repetición de color. Esto lleva a la noción de *variación* o de *combinación (con o sin repetición)* según que el orden se tenga en cuenta o no se tenga en cuenta.

Tomando los tres colores rojo (r), amarillo (a) y azul (a), obtenemos:

(1) con repetición y teniendo en cuenta el orden:

rr, ra, ar, aa, az, zr, za, zz.

(2) sin repetición y teniendo en cuenta el orden:

$$ra,\ rz,\ ar,\ az,\ zr,\ za.$$

(3) con repetición y sin tener en cuenta el orden:

$$rr,\ ra,\ rz,\ aa,\ az,\ zz.$$

(4) sin repetición y sin tener en cuenta el orden:

$$ra,\ rz,\ az.$$

Ahora se podrían ya comparar los diversos resultados obtenidos. Dadas ciertas condiciones hay más filas o menos. ¿Por qué?

Algunos niños se plantearán pronto cuestiones como éstas y el profesor debe estar preparado para dar la respuesta. Tales situaciones gustan a la mayoría de los niños; su objeto es descubrir la mayor cantidad de filas posibles, pero durante algún tiempo su interés no pasa de aquí. Más adelante harán observaciones y a veces incluso generalizaciones. Naturalmente hay que animarlos por este camino. Desde el punto de vista pedagógico esta actitud es ciertamente mejor que la que consiste en fijar una correspondencia entre un nivel de edad y un nivel de tema de estudio.

La fuerza motivadora de estos juegos depende esencialmente de su presentación. Así, por ejemplo, si un niño dice que la fila que ha formado es correcta y tiene razón, gana un punto; si dice que una fila formada por otro niño no es correcta y prueba lo que dice, gana dos puntos; finalmente, si demuestra que la fila que acaba de formar es la última posible gana cinco puntos. Esta motivación proporciona también motivo para mejorar el afán de sistematización.

La búsqueda de filas que verifican determinadas reglas anima a los niños a encontrar un orden sistemático; este hallazgo abre el camino a la determinación del número de filas posibles.ºmedskip
Como actividades análogas y complementarias citemos la de enhebrar cuentas, dibujar las filas con lápices de colores, escribir símbolos, etc.

Es interesante la construcción de filas sacando las fichas a suertes: un niño saca al azar las fichas de una caja y los demás han de decidir si las fichas sacadas sucesivamente forman o no una nueva fila.

4. Una situación abierta

He aquí un buen ejemplo, deliberadamente ambiguo: Tomemos un puñado de fichas de diferentes colores. *«¿De cuántas maneras puede elegirse un par de fichas entre las que hemos tomado?»*

Seamos más precisos: supongamos que hayamos tomado una ficha azul, dos amarillas y tres blancas. En estas condiciones, cada uno de los números siguientes puede ser una respuesta correcta:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 15,\ 22\,,26.$$

De hecho todo depende de las hipótesis o condiciones impuestas. No conviene analizar todas las interpretaciones posibles, sino dejar la situación abierta, lo que permite a los alumnos proponer sus propios problemas.

5. Cuatro alrededor de una mesa... Dos principios fundamentales

¿De cuántos modos se pueden colocar cuatro personas alrededor de una mesa?

Antes de responder a esta pregunta, es necesario precisar algunos puntos:

1.– Naturalmente, dos disposiciones son distintas si nadie tiene los mismos vecinos. Pero, *¿es necesario distinguir entre el vecino de la derecha y el de la izquierda?*

2.– *¿Es necesario distinguir los asientos?* (en particular, ¿hay un asiente de honor?)

Según que se responda *sí* o *no* a cada una de estas dos preguntas se tendrán que considerar *cuatro* problemas diferentes. Es interesante analizar cada uno de ellos y compararlos.

Pensemos en el caso *«sí-sí»* y razonemos de la siguiente manera:

> Hay *cuatro* maneras de ocupar el lugar de honor.
>
> En cada caso, hay *tres* maneras de ocupar el lugar de enfrente.
>
> Así, tenemos 4×3, es decir, 12 maneras de ocupar uno de estos dos asientos.
>
> En cada uno de estos casos, hay *dos* maneras de ocupar el asiento de la derecha del lugar de honor, Hay, pues, $4 \times 3 \times 2$, es decir, 24 maneras de ocupar estos tres asientos.
>
> En estas condiciones no queda más que una persona que deberá ocupar el asiento de la izquierda del lugar de honor.
>
> Hay, pues, $4 \times 3 \times 2 \times 1$ maneras de ocupar los cuatro asientos.

Para estudiar este problema, los niños pueden utilizar un **árbol** —véase Figura **??**—. De esta representación se pueden deducir ideas muy fructíferas para el estudio de la combinatoria y de las probabilidades.

La idea directriz en la búsqueda de la solución de este problema (y de muchos otros problemas de combinatoria) es el *principio de la multiplicación*, que permite enumerar las ramas finales de un árbol *«regular»*: si cada rama principal del árbol se ramifica en el mismo número de ramas y si cada una de éstas a su vez se ramifica en el mismo número de ramas, etc., entonces el número de ramas finales es igual al *producto* de estos números.

En el caso de las *variaciones sin repetición*, el número de ramificaciones de cada etapa es *inferior en una unidad* al número de ramificaciones de la etapa anterior. El problema precedente es un ejemplo de ello.

En el caso de las *variaciones con repetición*, el número de ramificaciones es siempre el mismo. A continuación —véase Figura **??**— damos dos ejemplos (con 2 y con 3 ramas).

El principio de la multiplicación se aplica en muchos casos. Los problemas de este tipo ayudan a los alumnos a descubrir este principio que es muy sencillo y muy general.

Advertimos de paso que en algunos problemas los árboles no se ramifican de forma regular. He aquí un ejemplo: *con las letras* $\{a, b, c\}$ *del alfabeto escribe todas las palabras de tres letras, en las que no haya dos consonantes consecutivas.*

Para determinar el conjunto de estas palabras hemos de construir un árbol como el siguiente:

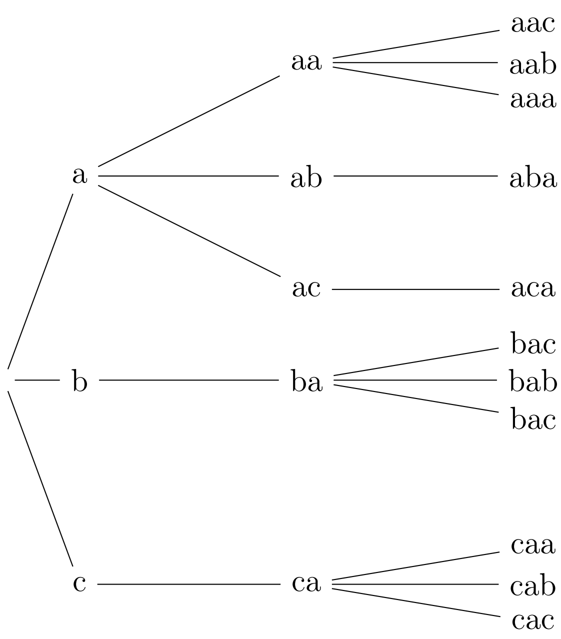


Figura 1: Un árbol que no se ramifica de forma regular.

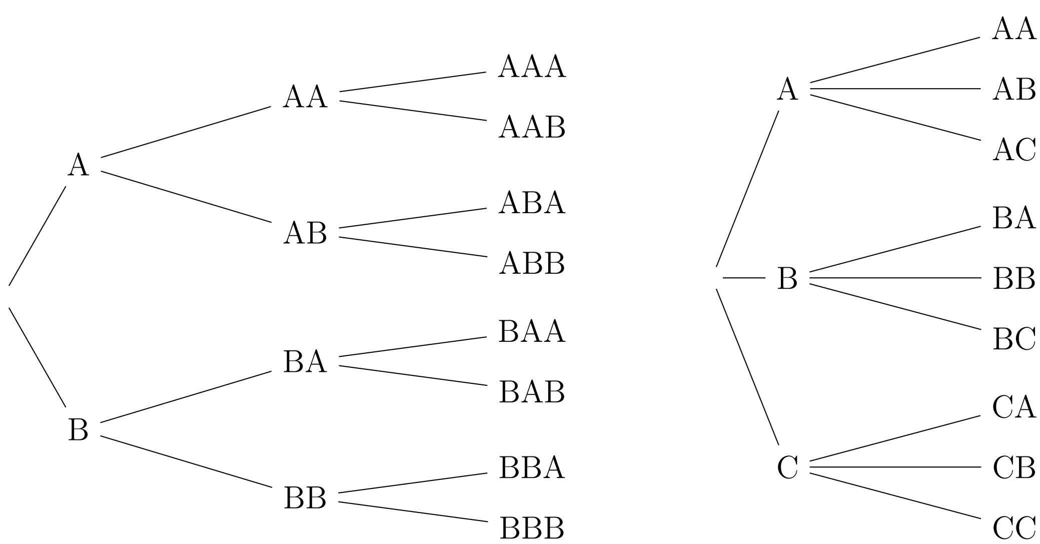


Figura 2: El número de ramificaciones siempre es el mismo (2 y 3 respectivamente).

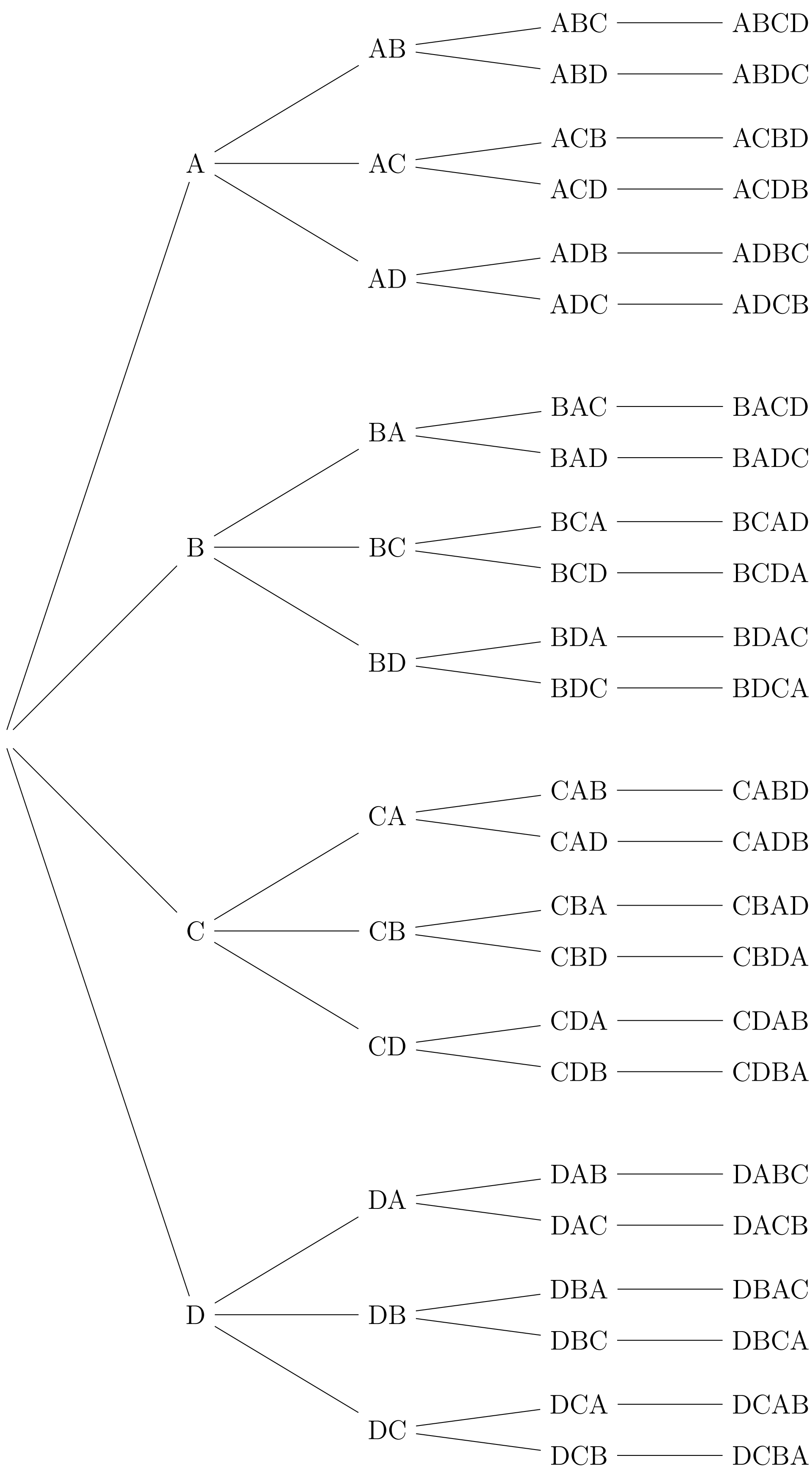


Figura 3: ¿Cómo sentar cuatro personas a una mesa?

Volvamos a los restantes casos de la colocación alrededor de una mesa. Se pueden reducir al primer caso aplicando una idea general: el *principio del pastor*, que se puede ilustrar con la siguiente anécdota: un pastor contaba sus ovejas con gran rapidez. Cierto día, un labrador le pregunta cómo lo hace. El pastor responde: «Cuento las patas y divido por cuatro».

En combinatoria, una respuesta así no es necesariamente una broma. Precisamente esta idea nos va a permitir resolver nuestro problema.

Así, por ejemplo, si no distinguimos los asientos, sino solamente la posición relativa de las personas, las situaciones siguientes son idénticas:

	A				A	
B		D		D		B
	C				C	

Esto reduce el número 24 de casos a $24 \div 4$, es decir, a 6.

Si distinguimos un lugar de honor, pero no distinguimos entre el vecino de la derecha y el de la izquierda, entonces las situaciones siguientes son idénticas:

	A				D				C				B	
B		D		A		C		D		B		C		A
	C				B				A				D	

Podemos así identificar las situaciones por parejas; el número de casos se reduce a $24 \div 2$, o sea 12.

Finalmente, si no hacemos ninguna distinción, hay que dividir el número 24, primero por 4 y luego entre 2, obteniendo 3 posibilidades en la hipótesis de que no haya lugar de honor, ni distinción entre derecha e izquierda.

Está claro que podemos hallar también directamente a este resultado: en el lugar opuesto de A se hallará B, o C, o D y los dos asientos restantes no influyen sobre el número de casos posibles. En este caso es más fácil contar las ovejas que las patas. ¿Pero sería lo mismo si en lugar de cuatro tuviéramos que colocar seis o siete personas alrededor de la mesa?

En la Figura **??** podemos ver un árbol que ilustra el principio del pastor en el caso de que no se distingan los asientos, sino únicamente la posición relativa de las personas sentadas. En dicho árbol se ve fácilmente por qué y cómo el número de combinaciones sin repetición se obtiene a partir de las variaciones sin repetición mediante una simple división.

Es interesante mostrar con un contraejemplo por qué el número de combinaciones con repetición no queda determinado por una división partiendo del número de variaciones con repetición.

En este sentido, en la Figura **??** se ve que hay 9 variaciones con repetición eligiendo dos objetos entre tres, mientras que hay 6 combinaciones con repetición al elegir dos objetos entre tres. La dificultad proviene de las repeticiones.

Hay muchos medios para enseñar la combinatoria; puede encontrarse más interesante explorar las situaciones combinatorias y luego pasar a las variaciones sin repetición utilizando el principio de la multiplicación o el del pastor:

De hecho estos dos principios gobiernan casi la totalidad de los problemas-tipo de la combinatoria. Sin embargo, hay multitud de problemas no clásicos que interesan a los niños, pero cuyo estudio general está fuera de su alcance.

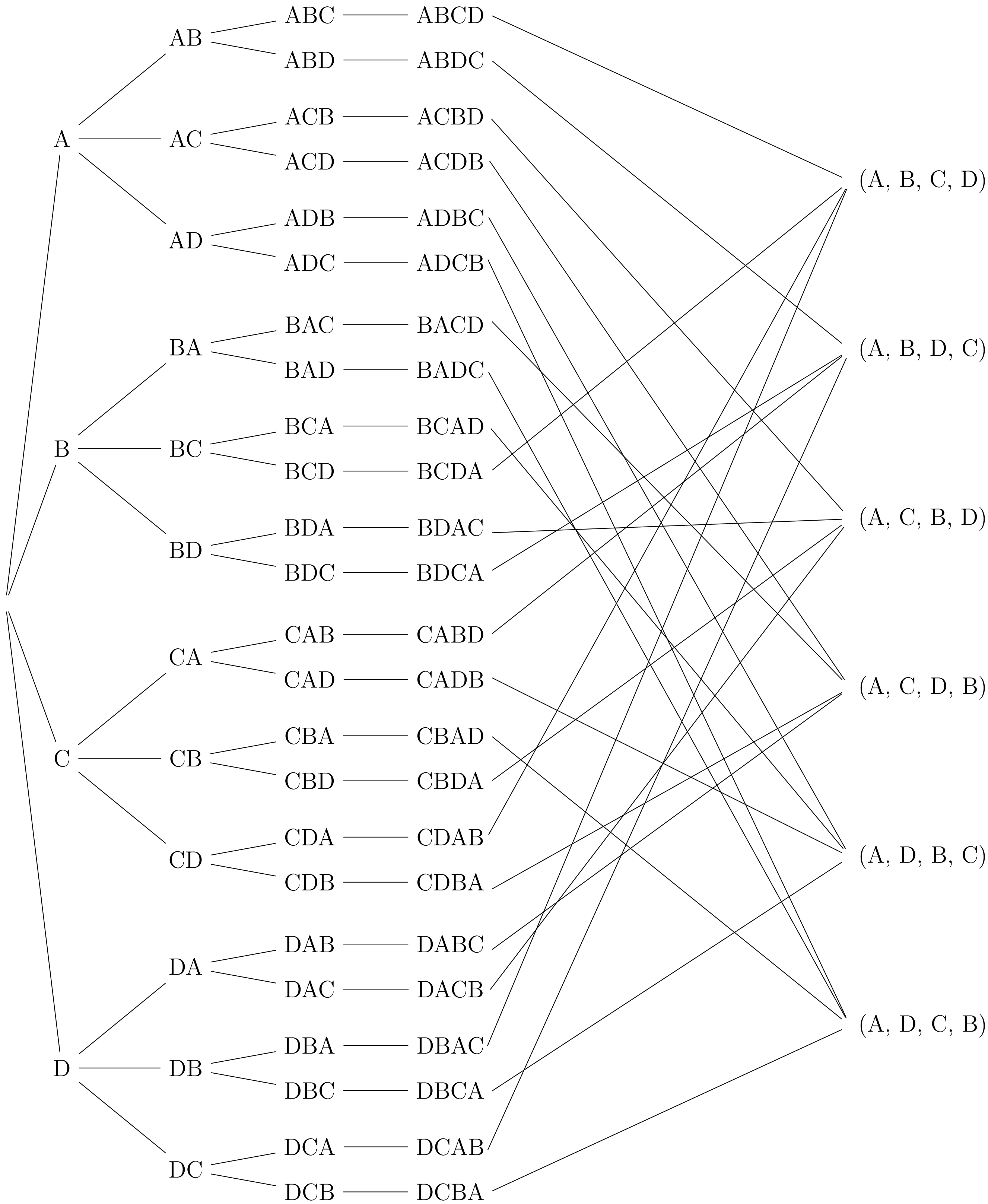

A
B
C
D
AB
AC
AD
BA
BC
BD
CA
CB
CD
DA
DB
DC
ABC
ABD
ACB
ACD
ADB
ADC
BAC
BAD
BCA
BCD
BDA
BDC
CAB
CAD
CBA
CBD
CDA
CDB
DAB
DAC
DBA
DBC
DCA
DCB
ABCD
ABDC
ACBD
ACDB
ADBC
ADCB
BACD
BADC
BCAD
BCDA
BDAC
BDCA
CABD
CADB
CBAD
CBDA
CDAB
CDBA
DABC
DACB
DBAC
DBCA
DCAB
DCBA
(A, B, C, D)
(A, B, D, C)
(A, C, B, D)
(A, C, D, B)
(A, D, B, C)
(A, D, C, B)

Figura 4:

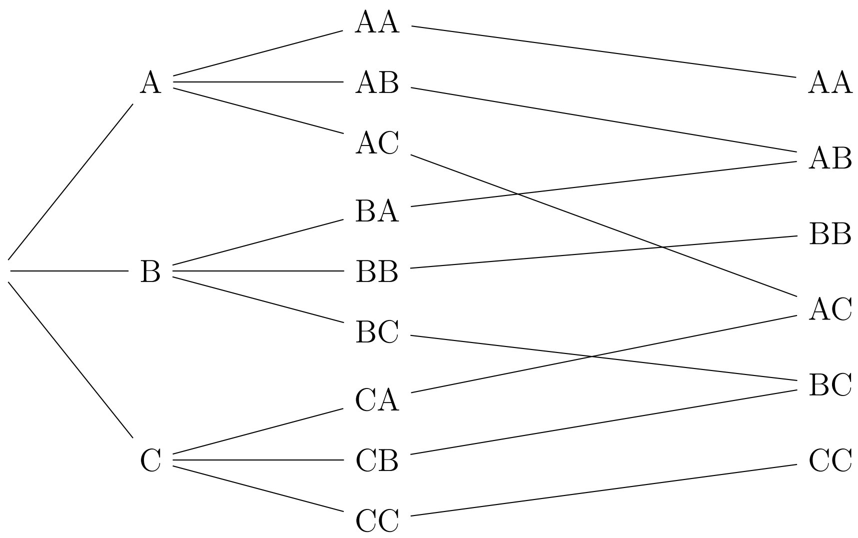


Figura 5:

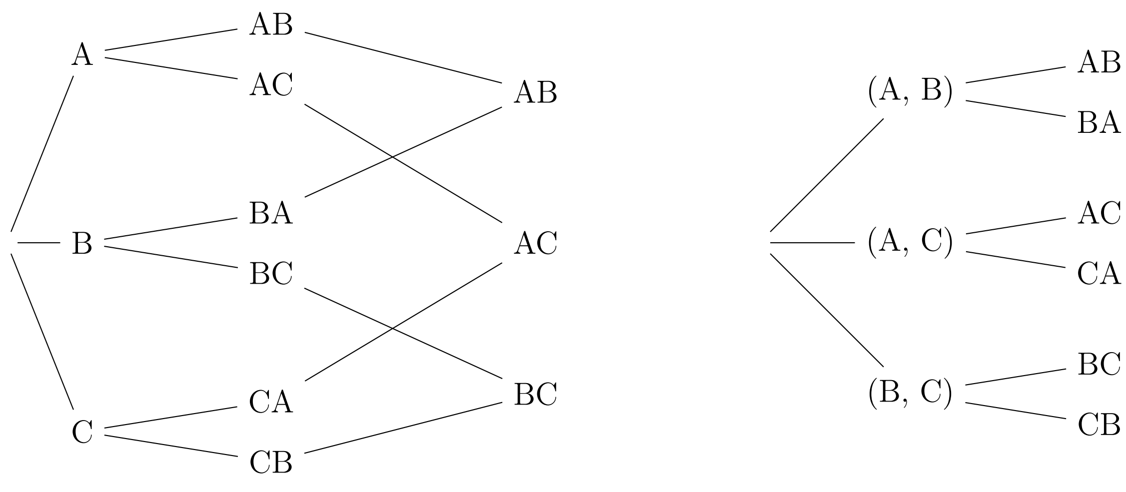


Figura 6:

Ampliación para el profesor

Volvamos al caso de las variaciones sin repetición. Hemos visto que en un conjunto de 4 elementos existen $4 \times 3 \times 2 \times 1$ es decir 24 maneras de ordenar dichos elementos. El caso particular de variaciones en que se toman todos los elementos se acostumbra llamar permutaciones en lugar de variaciones, tal como sucede en este ejemplo. Fácilmente se generaliza este estudio al caso de un conjunto de n elementos y se obtienen

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \ \text{ permutaciones.}$$

El número se escribe $n!$ y se lee «n factorial» o «factorial de n».

Es fácil calcular los primeros valores de $n!$ mediante multiplicaciones sucesivas. Por el contrario, cuando n crece, los cálculos se hacen muy prolijos. Existe una fórmula debida a Stirling que da un valor aproximado de $n!$:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

en la que e es la base de logaritmos neperianos:

$$e = 2,718281\ldots$$

A continuación ponemos en una tabla los primeros valores de n?! calculados exactamente y aproximados por la *fórmula de Stirling*:

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$
1	1	1
2	2	2
3	6	6
4	24	24
5	120	118
6	720	710
7	5040	4980
8	40320	39902

He aquí algunos resultados obtenidos mediante la citada fórmula:

n	valor aproximado de $n!$
30	$2,645170959 \cdot 10^{12}$
40	$8,142172645 \cdot 10^{47}$
50	$3,036344594 \cdot 10^{64}$
60	$8,309438316 \cdot 10^{81}$