Matemáticas para profesorado de educación secundaria

El diálogo tiene lugar en un aula imaginaria. La clase se interesa por un PROBLEMA: ¿existe una relación entre el número de vértices, V, el número de aristas, A, y el número de caras, C, de los poliedros, especialmente de los *poliedros regulares*, análoga a la relación trivial que hay entre el número de vértices y aristas de los *polígonos*, a saber, que hay tantos vértices como aristas: $V = A$? Esta última relación nos permite clasificar los *polígonos* de acuerdo con el número de aristas (o vértices): triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Una relación similar permitiría clasificar los *poliedros*.

Tras muchos ensayos y errores, constatan que para todos los poliedros regulares $V - A + C = 2$. Alguien *aventura* que eso se puede aplicar a cualquier poliedro. Otros intentan falsar esta *conjetura*, tratan de contrastarla de muchos modos distintos, pero se mantiene en pie. Los resultados *corroboran* la conjetura, sugiriendo que se podría *probar*. En este punto, tras los estadios de *problema y conjetura*, entramos en el aula. El maestro está a punto de ofrecer una *prueba*.

Una prueba

MAESTRO: En nuestra última lección hemos llegado a una conjetura relativa a los poliedros; a saber, que para todo poliedro $V - A + C = 2$, donde V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras. La hemos contrastado de diversas maneras, pero aún no la hemos probado. ¿Ha hallado alguien una prueba?

ALUMNO SIGMA: Por lo que a mí respecta, he de admitir que aún no he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema... Sin embargo, puesto que su verdad se ha establecido en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así, la proposición parece estar satisfactoriamente demostrada». Pero si usted tiene una prueba, preséntela, por favor.

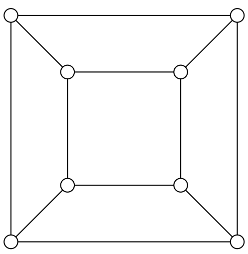


Figura 1.

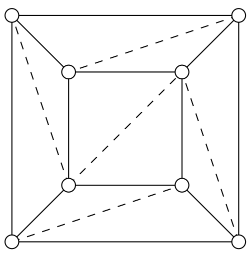


Figura 2.

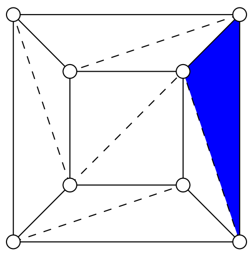


Figura 3 (a).

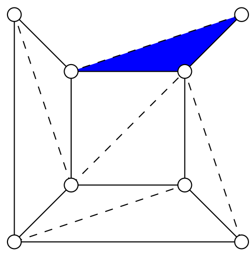


Figura 3 (b).

MAESTRO: En realidad, tengo una que consta del siguiente experimento mental. *Paso 1*: imaginemos que el poliedro está hueco, con una superficie hecha de goma fina. Si recortamos una de las caras, podemos estirar la superficie restante, poniéndola plana sobre el encerado sin romperla. Las caras y aristas se deformarán, las aristas pueden hacerse curvas, pero V y A no se alterarán, de modo que si $V - A + C = 2$ en el poliedro original, en esta red plana tendremos que $V - A + C = 1$ (recuérdese que hemos eliminado una cara). (La Figura 1 muestra la red plana en el caso de un cubo.) *Paso 2*: Triangulemos ahora nuestro mapa, pues en realidad se asemeja a un mapa geográfico. Trazamos diagonales (tal vez curvilíneas) en esos polígonos (quizá curvilíneos) que no son ya triángulos (posiblemente curvilíneos). Al dibujar cada una de las diagonales, aumentamos tanto A como C en uno, de modo que el total de $V-A+C$ no variará (Figura 2). *Paso 3*: Eliminamos ahora los triángulos, uno a uno, de la red triangulada. Para eliminar un triángulo o eliminamos una arista, con lo que desaparece una cara y una arista (Figura 3 (a)), o eliminamos dos aristas y un vértice, con lo que desaparece una cara, dos aristas y un vértice (Figura 3 (b)). Así pues, si antes de la eliminación de un triángulo teníamos que $V-A+C=1$, después de eliminarlo seguirá siendo así. Al final de este proceso obtenemos un solo triángulo, en cuyo caso $V-A+C=1$ es verdad. Por tanto, hemos probado nuestra conjetura.

ALUMNO DELTA: En ese caso, debería usted llamarla *teorema*, puesto que ya no hay en ella nada conjetural.

ALUMNO ALFA: Me extraña. Veo que este experimento puede realizarse con un cubo o un tetraedro, mas ¿cómo voy a saber que también se puede realizar con *cualquier* poliedro? Por ejemplo, ¿está usted seguro, Señor, de que *cualquier poliedro se puede estirar poniéndolo plano sobre el encerado, tras haberle quitado una car*a? Tengo mis dudas acerca de su primer paso.

ALUMNO BETA: ¿Está usted seguro de que *al triangular el mapa se obtendrá siempre una nueva cara por cada nueva arista*? Tengo mis dudas sobre su segundo paso.

ALUMNO GAMMA: ¿Está usted seguro de que *sólo hay dos alternativas (la desaparición de una arista o de dos aristas y un vértice) al eliminar los triángulos uno a uno*? ¿Está usted seguro incluso de que *nos quedamos con un solo triángulo al final del proceso*? Tengo mis dudas sobre su tercer paso

MAESTRO: Por supuesto que no estoy seguro.

ALFA: ¡En ese caso estamos peor que al principio! ¡En lugar de una conjetura tenemos ahora tres como mínimo! ¿A eso llama usted una «prueba»?

MAESTRO: Admito que pueda ser un tanto confuso aplicar a este experimento mental el nombre tradicional de «prueba», pues no considero que establezca la verdad de la conjetura.

DELTA: ¿Qué es lo que hace entonces? ¿Qué cree usted que prueba una prueba matemática?

MAESTRO: He ahí una sutil pregunta que trataremos de responder más tarde. Mientras tanto, propongo que mantengamos el venerable término técnico «prueba» para aplicarlo a *un experimento mental (o «cuasiexperimento») que sugiera una descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas*, incorporándola así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano. Nuestra «prueba», por ejemplo, ha incorporado la conjetura original (relativa a cristales o, digamos, sólidos) a la teoría de las hojas de goma. Descartes o Euler, los padres de la conjetura original, ni siquiera soñaron esto, con toda certeza.

Crítica de la prueba mediante contraejemplos locales pero no globales

MAESTRO: Esta descomposición de la conjetura, sugerida por la prueba, abre nuevas perspectivas para la contrastación. La descomposición despliega la conjetura en un frente más amplio, de modo que nuestra crítica disponga de más blancos. ¡Ahora tenemos al menos tres oportunidades en lugar de una de aplicar contraejemplos!

GAMMA: Ya he expresado el desagrado que me produce su tercer lema (a saber, que sólo tenemos dos posibilidades al ir eliminando los triángulos de la red que resulta del estirado y subsiguiente triangulación: o bien quitamos una arista, o quitamos dos aristas y un vértice). Sospecho que puedan aparecer otros parrones al eliminar un triángulo.

MAESTRO: Una sospecha no es muy crítica.

GAMMA: ¿Entonces, es un *contraejemplo* una crítica?

MAESTRO: Ciertamente. Las conjeturas ignoran desagrados y sospechas pero no pueden ignorar los contraejemplos.

ZETA: [aparte]: Obviamente, las conjeturas son muy distintas de quienes las representan.

GAMMA: Propongo un contraejemplo trivial. Tomemos la red triangular resultante de realizar las dos primeras operaciones en un cubo (Figura 2). Si quito ahora un triángulo del *interior* de la red, como quien quita una pieza de un rompecabezas, lo quito sin retirar ni un sólo vértice o arista. Así, el tercer lema es falso; y no sólo en el caso de un cubo, sino también en el de *cualquier* poliedro, excepción hecha del tetraedro, en cuya red plana todos los triángulos son triángulos en la frontera. Así su prueba demuestra el teorema de Euler para el tetraedro; pero ya sabíamos que en el caso del tetraedro $V-A+C=2$, ¿por qué probarlo, entonces?

MAESTRO: Está usted en lo cierto. Pero dese cuenta de que el cubo, contraejemplo del tercer lema, no es a la vez un contraejemplo de la conjetura principal, puesto que en el cubo $V - A + C = 2$. Ha mostrado usted la pobreza del argumento, de la prueba, pero no la falsedad de nuestra conjetura.

ALFA: ¿Entonces, desechará usted su prueba?

MAESTRO: No; la crítica no es necesariamente destrucción. Mejoraré mi prueba para que se sostenga frente a la crítica.

GAMMA: ¿Cómo?

MAESTRO: Antes de mostrar de qué modo, permítanme introducir la siguiente terminología. Llamaré *«contraejemplo local»* al ejemplo que refute un lema (sin refutar necesariamente la conjetura principal), y llamaré *«contraejemplo global»* al que refute la propia conjetura principal. Así pues, su contraejemplo es local y no global. Un contraejemplo que sea local pero no global critica la prueba y no la conjetura.

GAMMA: Así pues, la conjetura puede ser verdadera, pero su prueba no la demuestra.

MAESTRO: Pero puedo elaborar y *mejorar* fácilmente la prueba, sustituyendo el lema falso por otro ligeramente modificado que no refute su contraejemplo. Ya no pretendo que la *eliminación de cualquier triángulo siga uno de los dos patrones mencionados, sino tan sólo que, en cada estadio de la operación eliminadora, la eliminación de un triángulo de la frontera sigue uno de esos patrones*. Volviendo sobre mi experimento mental, lo único que tengo que hacer es insertar una simple palabra en mi tercera etapa; a saber, que «de la red triangulada, eliminamos ahora los triángulos *fronterizos* uno a uno». Estará usted de acuerdo en que sólo era necesaria una observación banal para poner bien la prueba.

GAMMA: No considero que su observación haya sido tan banal; de hecho, resultó bastante ingeniosa. Para poner en claro esto, mostraré que es falsa. Tomemos de nuevo la red plana del cubo y eliminemos ocho de los diez triángulos, en el orden dado en la Figura 4. Al eliminar el octavo triángulo, que a estas alturas es ya un triángulo de la frontera, eliminamos dos aristas y ningún vértice, lo que hace cambiar $V - A + C$ en 1, y nos quedamos con los dos triángulos disconexos 9 y 10.

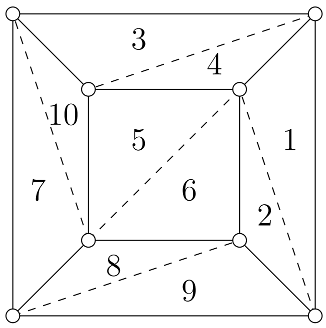


Figura 4.

Maestro: Bueno, podría salvar la cara diciendo que por un triángulo fronterizo entendía uno cuya eliminación no desconectase la red. Sin embargo, la honestidad intelectual me impide hacer cambios subrepticios en mi posición mediante enunciados que empiecen con «yo quería decir... » Por tanto, admito que tengo que *sustituir* ahora la segunda versión de la operación de eliminación de triángulos por una tercera, versión: eliminemos los triángulos de modo que no se altere $V - A + C$.

Kapa: Concedo generosamente que el lema correspondiente a esta operación es verdadero; a saber, que si eliminamos los triángulos uno a uno de manera que $V - A + C$ no se altere, entonces $V - A + C$ no se altera.

Maestro: No. El lema dice que *los triángulos de nuestra red se pueden numerar de tal modo que, al eliminarlos en el orden correcto, $V-A+C$ no variará hasta llegar al último triángulo.*

Kapa: Pero, ¿cómo se habrá de construir este orden correcto, si es que existe después de todo? Su experimento mental primitivo suministraba la instrucción: elimínense los triángulos en un orden cualquiera. Su experimento mental modificado daba la instrucción: elimínense los triángulos de la frontera en cualquier orden. Ahora dice usted que debiéramos seguir un orden definido, pero no nos dice de qué orden se trata ni si existe, después de todo. Así pues, el experimento mental se desmorona. Usted mejoró el análisis de la prueba, es decir, la lista de lemas; pero ha desaparecido el experimento mental que usted denominaba «la prueba».

Ro: Sólo ha desaparecido el tercer paso.

Kapa: Además, ¿acaso *mejoró* usted el lema? Sus dos primeras versiones simples al menos parecían trivialmente verdaderas antes de ser refutadas; su extensa versión parcheada ni siquiera ofrece un aspecto plausible. ¿Puede usted creer realmente que escapará a la refutación?

Maestro: Muchas proposiciones-«plausibles» o incluso «trivialmente verdaderas» usualmente resultan pronto refutadas; las conjeturas sofisticadas e implausibles, maduradas en la crítica, podrían dar en el blanco de la verdad.

Omega: ¿Y qué ocurre si incluso sus «conjeturas sofisticadas» resultan falsadas y ahora ya no puede usted sustituirlas por otras sin falsar? ¿O si no consigue mejorar aún más el argumento mediante parches locales? Ha conseguido usted superar un contraejemplo local, que no global, sustituyendo el lema refutado, pero ¿qué pasa si no tiene usted éxito la próxima vez?

Profesor: Buena pregunta; tomaremos nota de ella para mañana.

Crítica de la conjetura mediante contraejemplos globales

ALFA: Tengo un contraejemplo que falsa su lema primero, aunque también resulta ser un contraejemplo de la conjetura principal; es decir, es así mismo un contraejemplo global.

MAESTRO: ¿De veras? Veámoslo.

ALFA: Imaginemos un sólido limitado por un par de cubos encajado uno dentro del otro; un par de cubos, uno de los cuales está dentro, aunque sin tocar al otro. Este cubo hueco falsa su lema primero, ya que al eliminar una cara del cubo interno, el poliedro no será estirable en un plano, si bien la situación no mejora al eliminar una de las caras del cubo externo. Además, para cada cubo tenemos que $V - A + C = 2$, de modo que para el cubo hueco $V - A + C = 4$.

MAESTRO: Buena exhibición. Llamémoslo *Contraejemplo 1*. ¿Y ahora qué?

(a) Rechazo de la conjetura. El método de la rendición

GAMMA: Señor, su tranquilidad me sorprende. Un solo contraejemplo refuta una conjetura con la misma efectividad que diez de ellos. La conjetura y su prueba han errado completamente el tiro, así que ¡manos arriba! Tiene usted que rendirse. Tache la conjetura falsa, olvídese de ella e intente enfocar la cuestión de manera radicalmente nueva.

MAESTRO: Coincido con usted en que la *conjetura* ha recibido una severa crítica mediante el contraejemplo de Alfa, pero no es cierto que la prueba haya «errado completamente el tiro». Si, por el momento, está usted de acuerdo con mi anterior propuesta de usar la palabra «prueba» para referirnos a un «experimento mental que conduce a la descomposición de la conjetura original en subconjeturas», en vez de usarla en el sentido de una «garantía de determinada verdad», no hay por qué sacar esa conclusión. Mi prueba demostró ciertamente la conjetura de Euler en el primer sentido, aunque no necesariamente en el segundo. Usted está tan sólo interesado en pruebas que «demuestren» aquello que se han propuesto probar. Yo, por mi parte, estoy interesado en las pruebas aun cuando no cumplan su pretendido fin. Colón no descubrió la India, pero descubrió algo bastante interesante.

ALFA: Así, según su filosofía, mientras que un contraejemplo local (si no es al mismo tiempo global) constituye una crítica de la prueba, aunque no de la conjetura, un contraejemplo global constituye una crítica de la conjetura, aunque no necesariamente de la prueba. Accede usted a rendirse por lo que respecta a la conjetura, pero defiende la prueba. Mas, si la conjetura es falsa, ¿qué diablos demuestra la prueba?

GAMMA: Su analogía con el caso de Colon se viene abajo. La aceptación de un contraejemplo global ha de significar la rendición total.

(b) Rechazo del contraejemplo. El método de exclusión de monstruos

DELTA: ¿Pero, por qué aceptar el contraejemplo? Hemos probado nuestra conjetura y ahora ya es un teorema. Admito que choque con el llamado «contraejemplo». Uno de ellos sobra. Pero, ¿porqué ha de ceder el teorema, cuando ha sido probado? Es la «crítica» la que debe retirarse. Se trata de una falsa crítica. Ese par de cubos encajados uno en otro no constituye en absoluto un poliedro. Se trata de un *monstruo*, un caso patológico y no un contraejemplo.

GAMMA: ¿Por qué no? *Un poliedro es un sólido cuya superficie consta de caras poligonales*, y mi contraejemplo es un sólido limitado por caras poligonales.

MAESTRO: Llamemos a esta definición *Definición 1*.

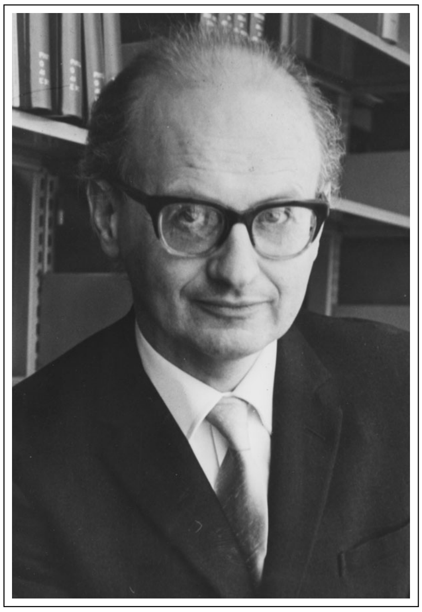
DELTA: Su definición es incorrecta. Un poliedro debe ser una *superficie*: posee caras, vértices, aristas, se puede deformar, estirar sobre un encerado y nada tiene que ver con la idea de «sólido». *Un poliedro es una superficie que consta de un sistema de polígonos*.

MAESTRO: Llamémosla *Definición* 2.

DELTA: Así, realmente lo que se nos mostró fueron *dos* poliedros, dos superficies, una completamente dentro de la otra. Una mujer con un niño en su vientre no constituye un contraejemplo de la tesis de que los seres humanos poseen sólo una cabeza.

ALFA: Así que mi contraejemplo ha engendrado un nuevo concepto de poliedro; ¿o, acaso osa usted afirmar que por poliedro *siempre* entendía usted una superficie?

MESTRO: Por el momento, aceptamos la *Definición* 2 de Delta. ¿Puede usted refutar ahora nuestra conjetura, si por poliedro entendemos una superficie?



Así empiezan las *Pruebas y refutaciones*
de Imre Lakatos