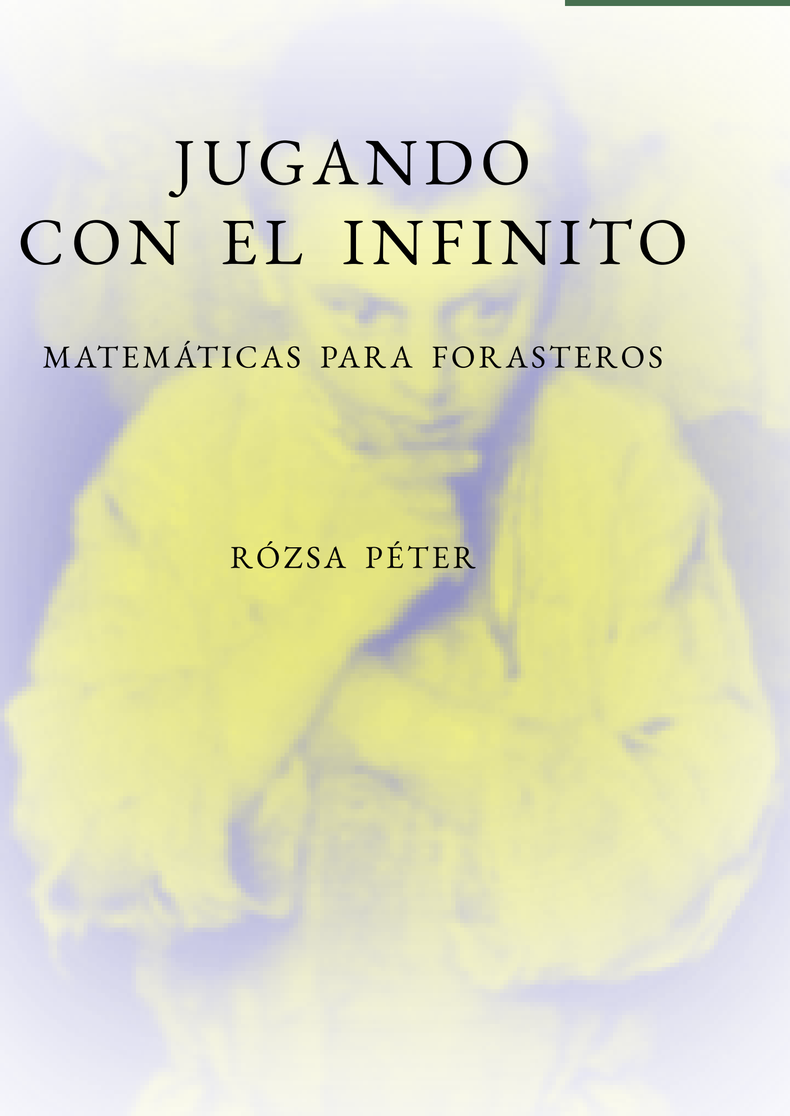


JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER

SOUTIÑO EDITORA

JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER

Eötövos Loránd Universiry, Budapest

TRADUCIDO POR

JORGE LOSADA RODRÍGUEZ

RAÚL PINO VELASCO

UNIVERSIDAD DE LEÓN

&

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Título orignal: *Játék a végtelennel: Matematika kívülállóknak*

Primera edición en Soutiño Editora: abril de 2021

Traducción autorizada por el Profesor Béla Andrásfai

https://j-losada.github.io/divulgacion/

ISBN: 978-84-09-30916-0
Depósito Legal: C 838-2021

Ilustración de portada y contraportada: Fragmentos del cuadro *Cálculo mental en la Escuela Pública de S. A. Rachinsky*, obra de Nikolay Bogdanov-Belsky (1868-1945).

Cuando comencé mi educación universitaria
todavía tenía muchas dudas sobre si era
lo suficientemente buena para las matemáticas.

Un compañero mío me dijo las palabras decisivas:
"no es que tú te merezcas estudiar matemáticas,
sino que las matemáticas se merecen que tú las estudies".

Rózsa Péter

Dedicado a mi hermano, el Dr. Miklós Politzer,
quien falleció en Colditz (Sajonia) en 1945.

Prefacio

ESTE libro ha sido redactado para personas con inquietudes intelectuales no matemáticas; esto es, para gentes de letras, artes y humanidades. He recibido tantas cosas buenas de esas disciplinas, que ahora me gustaría compensarles ofreciendo a cambio todo lo que sé de matemáticas. También quisiera convencer a estas personas de que, en realidad, no estamos tan alejados como a veces creemos. Me encantan las matemáticas no sólo por sus aplicaciones técnicas, sino también –y principalmente– por su propia belleza. El ser humano ha infundido en ellas su espíritu juguetón y éstas, como recompensa, nos agasajan a todos con el mejor de los juguetes: tocar y entender el infinito. Las matemáticas nos proporcionan contribuciones e ideas válidas y universales sobre el infinito y otros muchos conceptos, pero también arrastran consigo la naturaleza inconclusa e interminable de toda creación humana.

El carácter popular o divulgativo de este libro no implica en absoluto que se trate el tema de forma vana o superficial. Me he esforzado por presentar todos los conceptos con absoluta claridad y rigor pleno, intentado arrojar así nueva luz también para los ya versados en matemáticas y, por supuesto, para los profesores esta disciplina. Sí he descuidado sin embargo el aspecto sistemático y formalista que resultaría muy pesado aburrido. Es decir, sólo he omitido los tecnicismos (pues el propósito de este libro no es enseñar técnicas matemáticas). Si este libro cae en manos de un estudiante motivado, le proporcionará una imagen bastante completa y nítida del estado actual de las matemáticas. No era mi intención inicial escribir un libro tan extenso, pero el material fue aumentando a medida que escribía y el número de temas que podrían omitirse menguó rápidamente. Si había fragmentos a los que se habían adherido viejos recuerdos aburridos, me sentí como quien hace brillar de nuevo a una vieja baratija quitándole el polvo con sus manos.

Es posible que el estilo te parezca ingenuo en algunos momentos, pero poco importa eso; un punto de vista ingenuo en relación con hechos simples evoca siempre la emoción de un nuevo descubrimiento.

En la *Introducción* te contaré cómo surgió este libro. El escritor que menciono allí es Marcell Benedek, con quien intercambié numerosa correspondencia sobre cálculo diferencial. Escribir un libro a partir de aquellas cartas fue sugerencia suya.

No citaré ninguna fuente bibliográfica. Evidentemente, he aprendido muchas cosas de otras personas, pero a día de hoy ya no soy capaz de recordar con certeza de dónde saqué cada parte. No tenía libros frente a mí cuando escribí este libro. Sí que es cierto que, de vez en cuando, me venían a la mente algunas comparaciones e ideas cuya fuente sí recordaba perfectamente; mencionaré, por ejemplo, el hermoso libro de Rademacher y Toeplitz [1] o la excelente introducción al Análisis Matemático de Beke [2].

Una vez concebido un método en mi mente, no podía renunciar a él simplemente por no ser el más original. En este sentido, me refiero especialmente a las ideas que recibí de László Kalmár, compañero de promoción que sería después mi maestro en esto de las matemáticas. Todo lo que escribo en el libro está indisolublemente ligado a su forma de pensar y entender esta ciencia. En particular, quisiera dejar constancia aquí de que el "ejemplo del chocolate" con el que se ilustrará el estudio de las series infinitas se debe completamente a él; la discusión sobre la construcción de las tablas logarítmicas también es obra suya.

Sí citaré a mis pequeñas colaboradoras en el aula por sus nombres de pila; se reconocerán a sí mismas fácilmente. Quiero mencionar aquí a mi alum-

[1] Nota de los traductores: se refiere a la versión original de la obra:
H. Rademacher y O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Dover Publications, 1990.

[2] Nota de los traductores: se refiere a la obra (de la que desconocemos si existe alguna traducción):
M. Beke, *Differenciál- és integrálszámítás I–II* , Franklin-Társulat, 1916.

na Kató, quien acaba de terminar recientemente el cuarto año de la escuela primaria y contribuyó notablemente al libro mientras se escribía. Es a ella a quien debo agradecerle el poder ver el material a través de los ojos de una alumna con talento.

Sin embargo, la ayuda más importante que recibí a la hora de redactar este libro fue la de la "persona no matemática": Béla Lay, mi querida amiga y directora de teatro que hasta no hace mucho afirmaba *no tener oído para las matemáticas*. Fue ella quien siguió de cerca la elaboración y exposición de cada uno de los capítulos; yo sólo escribía el punto final cuando ella quedaba plenamente convencida. Sin su ayuda, este libro nunca hubiera sido escrito.

Pál Csillag examinó el manuscrito desde un punto de vista matemático; aunque en el último momento, László Kalmár también encontró tiempo para una revisión rápida. Agradezco a ambos la seguridad que siento de que todo lo escrito en el libro es correcto.

Rózsa Péter
Budapest, otoño de 1943.

Prefacio
(a la edición de 1957)

Desde 1943 han pasado ya diecisiete años plagados de tristes acontecimientos. Durante este tiempo, mi amigo (el matemático) Pál Csillag y mi alumna Kató (Kató Fuchs) han sido víctimas del fascismo. El padre de mi alumna Anna, que fue encarcelado durante más de diecisiete años por actividades sindicalistas, ha sido finalmente liberado. De esta manera, es posible que en la imaginación de Anna las líneas rectas que siempre se acercan entre sí acaben encontrándose (véase la página 224). Durante la ocupación alemana no pudo publicarse ningún libro y muchas de las copias existentes fueron destruidas por los bombardeos, las pocas que resistieron aparecieron el *Día del libro* de 1945.

Este libro refleja mi modo de pensar en 1943, que apenas he cambiado desde entonces. Desde entonces, László Kalmár y yo hemos probado que la existencia de los conocidos como "problemas absolutamente indecidibles" se sigue del Teorema de Gödel sobre problemas relativamente indecidibles, pero una consecuencia nunca será más importante que el teorema del cual se deriva.

Rózsa Péter
Budapest, primavera de 1957.

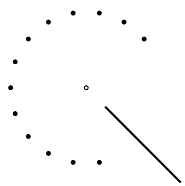
Índice general

Introducción

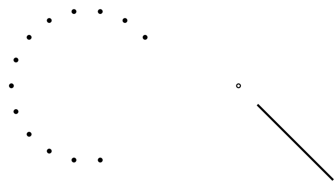
Me viene a la mente una conversación que tuve hace ya bastante tiempo. Uno de nuestros escritores y querido amigo mío se quejaba amargamente ante mí de que un importante aspecto de su educación había sido completamente descuidado: no sabía nada de matemáticas. Sentía esta carencia en su propio oficio a la hora de ponerse a escribir. Todavía recordaba el sistema de coordenadas de las matemáticas escolares y ya lo había empleado en comparaciones y metáforas, pero sentía que debían existir muchos más conceptos y herramientas matemáticas que también podría utilizar si los conociera. Según decía él mismo, su expresividad era mucho más pobre al no poder acceder a esa rica fuente. Era un gemido desesperado, pues aquel pobre hombre estaba convencido de que jamás sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas.

He recordado esta conversación muy a menudo, pues alentaba en mí nuevos planes e ideas. Entendí de inmediato que debía hacer algo. Para mí, en matemáticas, el estado de ánimo siempre ha sido el factor decisivo y, por otra parte, era cierto aquello que decía mi querido amigo: las matemáticas son, sin duda alguna, una fuente común de la que tanto escritores como artistas pueden y deben beber. Recuerdo todavía un ejemplo de mi infancia escolar. Estábamos leyendo una de las obras de Shaw y llegamos al momento en el que el protagonista pregunta a la protagonista cuál es su secreto para dominar y contener incluso a los hombres más rebeldes. La protagonista pensó por un instante y sugirió luego que tal vez eso podría explicarse por mantenerse siempre alejada de todos ellos. Al escuchar esto, mi compañera de pupitre (Ica

Benkő) exclamó de repente: "¡¡el teorema que aprendimos hoy en la clase de matemáticas, anda ya!!". La pregunta matemática era la siguiente: ¿es posible acercarse a un conjunto de puntos desde un punto exterior de modo que nos acerquemos a todos los puntos del conjunto simultáneamente? La respuesta es afirmativa siempre y cuando el punto exterior se encuentre suficientemente alejado del conjunto:



Desde aquí no es posible:
si te acercas a unos puntos
te alejas de otros.



Desde aquí sí es posible:

La otra afirmación de mi amigo: aquello de que "nunca sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas" y que, por ejemplo, nunca lograría entender el concepto de derivada, no quise ni creerla. Intenté descomponer ese concepto en los pasos más claros, simples y evidentes que pude. El resultado fue muy sorprendente: un matemático no puede ni imaginarse las dificultades que la fórmula más simple podría causar al profano; ocurre como cuando el maestro novel no comprende como un niño es capaz de silabear hasta veinte veces la palabra ca…ra…col sin percatarse de que es un caracol.

Esta fue una experiencia que me hizo pensar nuevamente. Siempre había creído hasta entonces que la razón por la que el público estaba tan mal informado sobre las matemáticas era, simplemente, que nadie había escrito un buen libro popular para el público general sobre, por ejemplo, cálculo diferencial. No es interés lo que falta, pues es bien sabido que el público se apropia de todo lo que cae en sus manos sobre este género, pero ningún matemático profesional ha escrito un libro así hasta el momento. Cunado digo esto, estoy pensando en el verdadero profesional que sabe exactamente hasta qué punto se pueden simplificar las cosas sin falsificarlas y que entiende que no se trata de dar la vieja medicina amarga en una fuente de plata (pues también es cierto que la matemática escolar es un amargo recuerdo para la gran mayoría); hablo de alguien capaz de iluminar los puntos esenciales, que conozca el gozo de la creación matemática y que sepa dar ese ímpetu cautivador a su escritura como para entusiasmar al lector. Me doy cuenta de que el libro más popular y divulgativo del mercado tampoco es comprensible para la mayoría de lectores.

Quizás sea éste el atributo característico del matemático: asumir y aceptar la amargura inherente al camino que recorre. “Me veo forzado a decirle, alteza, que el camino Real a la Geometría aún no ha sido inventado” dijo Euclides con enfado al rey Ptolomeo al ver que se éste había quedado dormido durante una de sus lecciones. No es posible leer matemáticas de manera superficial, la ineludible abstracción implica siempre cierto grado de auto-tortura y el matemático no es más que aquél para quien esa auto-tortura trae alegrías. El libro popular y divulgativo más simple tan sólo será entendido por aquellas personas que se comprometan de verdad y emprendan una amarga silabización de cada uno los detalles de una fórmula hasta entender por completo su significado.

No tengo intención alguna de escribir para esta gente; escribiré matemáticas sin fórmulas. Me gustaría transmitir la esencia y el espíritu de las matemáticas, pero desconozco si un intento como este será exitoso. Dejando de lado las fórmulas, renuncio a uno de los rasgos esenciales de las matemáticas. Tanto el escritor como el matemático son plenamente conscientes de la importancia de las fórmulas. Si no me crees, intenta imaginarte por un momento como expresarías la esencia de un soneto sin mencionar su estructura y forma tan características. Sin embargo, allá voy. Puede que, aun así, quede algo del verdadero espíritu y esencia de las matemáticas.

Hay algo que en ningún caso puedo permitir: no pospongas la lectura de ningún capítulo y no te conformes nunca con una simple ojeada. Las matemáticas sólo pueden construirse ladrillo a ladrillo, ningún paso es prescindible y no hay pasajes superfluos. Aunque no será tan evidente como lo sería en un aburrido libro sistemático, cada detalle posterior se basa en el anterior y es por tanto necesario que sigas algunas instrucciones: analiza con detalle y cautela todas las figuras y realiza los cálculos y dibujos que te vaya aconsejando. Prometo que no te aburrirás.

No haré uso de las nociones escolares más habituales. Empezaré contando y terminaré hablando de la rama más reciente de las matemáticas: la lógica matemática.

PARTE I

EL APRENDIZ DE BRUJO

1. *Jugando con los dedos*

EMPECEMOS por el principio. No describiré la historia de las matemáticas; eso sólo podría hacerse partiendo de la evidencia escrita ¡y cuán posterior al principio es la primera evidencia escrita! Debemos imaginarnos al hombre prehistórico en su entorno primitivo mientras empieza a contar. En esta obra, ese pequeño hombre que se convertirá poco a poco en un ser humano adulto y educado ante nuestros ojos siempre vendrá en nuestra ayuda; me refiero al bebé que empieza a conocer su propio cuerpo y el mundo que le rodea mientras juega con sus diez deditos. Es muy probable que para él las palabras "uno", "dos", "tres", "cuatro" y "cinco" sólo sean meras abreviaturas de "este es el chiquito", "este el del anillo", "este el de la mano", "este el escribano" y "este el matapulgas". No es ninguna broma lo que acabo de decir; una vez escuché a un doctor que hay personas a quienes cierta lesión cerebral les impide distinguir un dedo de otro y pierden así, irremediablemente, toda capacidad de contar. Esta conexión subconsciente sigue en el interior de muchas personas educadas y bien formadas, de lo que deduzco que uno de los orígenes de las matemáticas se encuentra en la naturaleza lúdica del ser humano y es por ello que las matemáticas no son sólo una ciencia, sino también un arte.

Se cree que contar fue una actividad práctica desde el principio; es posible que el hombre primitivo quisiese vigilar sus pertenencias contando cuantas pieles de animales tenía. No obstante, también es concebible que contar fuese una especie de ceremonia ritual; todavía hoy los neuróticos compulsivos cuentan como invocando cierta prescripción mágica que aísle ciertos pensamientos nocivos o prohibidos. Por ejemplo, si yo ahora te pido que cuentes de uno hasta veinte, ya tienes otra cosa en que pensar y no podrás seguir leyendo este libro. Sea como sea, ya se tratara de pieles de animales o de intervalos de tiempo sucesivos, contar siempre significa ir más allá de donde originalmente estábamos de uno en uno. Por supuesto, podemos avanzar más allá de nuestros diez dedos y aparece así la primera gran creación del ser humano: una sucesión infinita de números

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\dots$$

la sucesión de los números naturales. Es infinita porque después de cada número, por muy grande que éste sea, siempre podemos contar uno más. Este invento necesitó de una gran dosis de abstracción, pues estos números sólo son sombras de la realidad visible. Por ejemplo, el 3 ya no significa tres dedos, 3 manzanas, 3 latidos, etc, sino aquello que es común a todos ellos, algo que abstraemos de ellos, es decir, su número o cantidad. Por otra parte, las cantidades muy grandes ni tan siquiera han sido abstraídas de la realidad, pues nadie ha visto nunca mil millones de manzanas y nadie ha contado nunca mil millones de latidos; simplemente, imaginamos estos números por analogía con los más pequeños que sí tienen una base en la realidad, pero en la imaginación uno podría seguir contando indefinidamente más allá de cualquier número conocido.

Nunca nos cansamos de contar. La simple alegría de la repetición es el motor. Los poetas lo tienen claro: el retorno al mismo ritmo, al mismo sonido o a la misma rima no son más que expresiones de cierta actividad vital. Del mismo modo, los niños tampoco se aburren jugando siempre al mismo juego; pero, sin embargo, el anciano reumático pronto se cansa de patear o lanzar el balón una y otra vez.

¿Hemos llegado hasta 4? ¡Contemos uno más, después uno más, después uno más! ¿Adónde hemos llegado? Pues llegamos al 7, el mismo número al que hubiéramos llegado si sumásemos tres de un solo golpe. Descubrimos así la suma:

$$4+1+1+1=4+3=7.$$

Sigamos jugando con esta operación. Sumemos 3 a 3, después otros 3, luego otros 3 y finalmente otros 3. En tal caso caso, habremos sumado 3 cuatro veces, hecho que podríamos enunciar brevemente diciendo que cuatro treses son 12, o simbólicamente:

$$3+3+3+3=4\times 3=12$$

y esto es la multiplicación.

Una vez que conocemos la alegría de la repetición, es difícil parar. Podemos continuar jugando con la multiplicación de la siguiente forma: multipliquemos 4 por 4 y otra vez por 4, obtendremos así:

$$4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Esta repetición o "iteración" de la multiplicación se llama exponenciación. Se dice que 4 es la "base" e indicamos con un pequeño número escrito en la parte superior derecha del 4 el "exponente", que es el número de cuatros que tenemos que multiplicar. Es decir, la notación es la siguiente:

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Como ves, los resultados que obtenemos son números cada vez más grandes: 4×3 es más grande que $4 + 3$ y 4^3 es mucho más grande que 4×3. La divertida repetición nos eleva a números cada vez más grandes. Iteremos pues la exponenciación elevando 4 al exponente que es la cuarta potencia de cuatro, que es

$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256,$$

por lo que

$$4^{4^4} = 4^{256} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times \ldots$$

En total deberían aparecer ahí 256 cuatros, pero no tengo paciencia para seguir escribiendo y, por favor, ¡ni hablemos del cálculo efectivo de todas esas multiplicaciones! El resultado sería un número inimaginablemente grande, por lo que preferimos emplear el sentido común y aun sabiendo lo divertido que sería continuar iterando y repitiendo, no incluiremos la iteración de la exponenciación entre nuestras operaciones aceptables.

Quizás sea ésta la verdad: el espíritu humano juega con todo aquello que se le ofrece, pero sólo guarda y valora aquello que el sentido común le dicta como apropiado.

La suma, la multiplicación y la exponenciación han demostrado ser muy útiles y convenientes en multitud de actividades ordinarias del ser humano y es por ello que han adquirido derechos civiles plenos y perpetuos en matemáticas. Así pues, conocemos todas sus propiedades que simplifican y facilitan notablemente el cálculo. Por ejemplo, es un gran alivio saber que 28×7, además de ser calculado sumando 28 siete veces, también se puede calcular en tres pasos: primero efectuamos los productos 7×20 y 7×8 y luego sumamos $140 + 56$. Por otra parte, cuando sumamos una larga fila de números, es completamente indiferente el orden en que lo hagamos. Por ejemplo, para calcular $8+7+2$, podemos hacer primero $8+2 = 10$ y ahora a 10 ya es muy fácil sumarle 7, evitando así la incómoda suma de $8 + 7$. Tan sólo hay que entender que sumar significa contar tantas veces como números queremos sumar y entonces será evidente que cambiar el orden no altera en absoluto el resultado. Convencerse de que ocurre lo mismo con la multiplicación es un poco más complicado, pues 4×3 significa $3 + 3 + 3 + 3$ y 3×4 significa $4 + 4 + 4$, por lo que ya no es tan evidente que

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4.$$

Pero es evidente si dibujamos. Prueba y dibuja cuatro veces, una debajo de otra, tres puntos en posición horizontal como estos

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

obtendrás algo como esto:

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}$$

Todos vemos ahora que es exactamente lo mismo que dibujar tres veces, una al lado de la anterior, cuatro puntos en posición vertical

$$\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}$$

Este es el motivo por el que los matemáticos llaman a multiplicando y multiplicador con el mismo nombre: factores.

Fijémonos ahora en las reglas de la exponenciación:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5.$$

Si me canso de tanta multiplicar, puedo tomarme un descanso; el producto de los tres primeros cuatros es 4^3 y todavía tengo que multiplicar por 4^2; por tanto,

$$4^3 \times 4^2 = 4^5$$

y el exponente del resultado es 5, que es igual a $3+2$. Así pues, para multiplicar dos potencias de 4, sumamos los exponentes. De hecho, es una regla general.

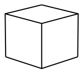
Por ejemplo,
$$5^4 \times 5^2 \times 5^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5} \times \underbrace{5 \times 5} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5} = 5^9,$$
donde nuevamente $9 = 4 + 2 + 3$.

Revisemos el camino recorrido: fue contando como llegamos a cada operación. Por supuesto, cualquiera podría objetar ¿y dónde está la resta? ¿y la división? Pero estas operaciones no son más que inversiones de las operaciones ya comentadas (así como la extracción de raíces y los logaritmos). Porque, por ejemplo, $20 \div 5$ significa que ya conozco el resultado de una multiplicación cuyo resultado es igual a 20 y que estoy buscando el número que multiplicado por 5 da 20. En este caso, es muy fácil, pues todos sabemos que $5 \times 4 = 20$, pero no será siempre tan sencillo encontrar ese número y, de hecho, no existe siempre. Por ejemplo, 23 no coge entre 5 sin un resto, pues $4 \times 5 = 20$ es demasiado pequeño y $5 \times 5 = 25$ demasiado grande. Es por esto que nos vemos obligados a conformarnos con el más pequeño y decimos que 23 coge a 5 cuatro veces pero todavía faltan 3. Este tipo de situaciones provocan más dolores de cabeza que nuestras hilarantes iteraciones; las operaciones inversas suelen ser más amargas. Son el punto de ataque favorito de las investigaciones matemáticas, pues –como ya es bien sabido– a los matemáticos les encantan las dificultades. Hablaremos de las operaciones inversas más adelante.

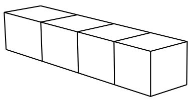
2. *Las curvas de fiebre de las operaciones*

En el capítulo anterior hemos constatado que la iteración de las operaciones más elementales nos eleva hacia números cada vez más y más grandes. Merece entonces la pena que nos paremos a reflexionar por un instante en las alturas alcanzadas.

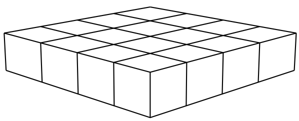
Las potencias, por ejemplo, se emplean en el cálculo del volumen de un cubo. Dado un pequeño cubo como unidad, se trata de saber cuántos de esos cubos serán necesarios para rellenar un cubo más grande cuyo volumen pretendemos medir. Consideremos pues, por ejemplo, un cubo de 1 cm; esto es, un cubo cuya altura, anchura y longitud miden exactamente 1 cm.



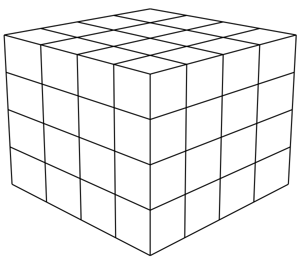
Coloquemos ahora cuatro de estos pequeños cubos pegados entre sí para formar una fila de cubos como esta:



y juntemos después cuatro de estas filas para formar una placa como esta:



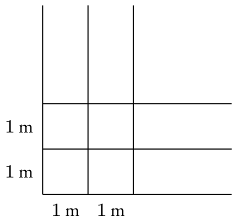
en la que hay exactamente $4 \times 4 = 4^2$ cubos. Finalmente, apilando cuatro de estas placas, obtenemos un cubo tan grande como este:



que consta de un total de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ cubos pequeños.

Recíprocamente, partiendo ahora del cubo grande cuya longitud, anchura y altura es de 4 cm, vemos que éste puede formarse empleando 4^3 cubos de 1 cm de longitud, anchura y altura. En general, obtenemos el volumen de un cubo elevando una de sus aristas a la tercera potencia. Es por esto que llamamos "cubicar" o "elevar al cubo" a la operación consistente en elevar a la tercera potencia[1].

Una consecuencia de lo anterior es que un cubo cuya arista sea relativamente pequeña tendrá un gran volumen. Por ejemplo, 1 kilómetro tampoco es una distancia excesivamente grande; la calle Nagymezö de Budapest mide aproximadamente 1 kilómetro de largo y, sin embargo, si construyeran un cubo tan grande como para que una de sus aristas fuese la calle Nagymezö, ese cubo tendría un volumen suficiente como para contener a toda la humanidad. Si no me crees, echemos cuentas: supongamos que nadie mide más de 2 metros de altura, hagamos entonces una planta cada 2 metros –dado que nuestro cubo mide 1 kilómetro de alto, tendrá 500 pisos de altura– y dividamos longitudinalmente cada una de estas plantas en franjas de 1 metro de ancho tal y como se indica en este dibujo:

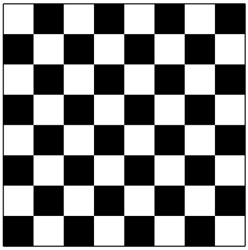


Cada franja se divide a su vez en 1 000 cuadrados y dado que teníamos 1 000 franjas, tendremos un total de $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ cuadrados en cada planta. La dimensión de cada cuadrado es de 1 metro de ancho por 1 metro de largo, por lo que podemos meter tranquilamente a cuatro personas en cada cuadrado; además, dos de esas personas llevarán a un niño pequeño

[1] Conozco las objeciones de algunos profesores: debería haber dicho que obtengo la *medida* del volumen del cubo elevando la *medida* de la longitud de su arista al cubo. Intentaré no aburrirte con estas simplezas, pero hay un asunto más importante; la pregunta es la siguiente, ¿es posible expresar la longitud de la arista de cualquier cubo en centímetros? Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

en brazos. Así pues, en cada planta caben 6 veces 1 000 000 personas, esto es, 6 millones de personas por planta, por lo que en las 500 plantes del cubo entrarían 500 veces 6 millones de personas, es decir, 3 000 000 000 personas, que era la población aproximada de la Tierra cuando me hablaron de dicho cubo.

Y, pese a todo, en el cálculo del volumen de un cubo tan sólo entra en juego la tercera potencia; un exponente mayor todavía nos haría avanzar mucho más rápido. Esto sorprendió al príncipe a quien el inventor del ajedrez “‘sólo” le pedía modestamente unos pocos granos de trigo como recompensa.



Por la primera casilla de su tablero pidió 1 grano de trigo, el doble –esto es, 2 granos– por la segunda casilla, el doble –esto es, $2 \times 2 = 2^2 = 4$ granos– por la tercera y así sucesivamente. Inicialmente, esta petición parece excesivamente modesta, pero a medida que vamos avanzando por las casillas del tablero nos encontramos con potencias de 2 cada vez más grandes, hasta que finalmente estaríamos hablando de un total de

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63}$$

granos de trigo (por favor, imagina que en la suma anterior aparecen todas las potencias intermedias; no tuve paciencia para escribir los 64 sumandos). Si uno se pone a calcular esa cantidad, resulta que es trigo suficiente como para cubrir la superficie de la Tierra con una capa de trigo de 1 cm de altura.

Después de esto, ya no debería sorprenderte la inmensa altura a la que nos elevará la iteración de la exponenciación. Me limitaré a mencionar el siguiente hecho anecdótico: se estima que 9^{9^9} es un número tan tan grande que para escribirlo sería necesario un papel de 18 000 kilómetros de longitud (¡escribiendo un dígito cada medio centímetro!) y además, toda una vida humana sería claramente insuficiente para efectuar dicho cálculo.

Revisando lo que llevaba escrito hasta ahora me he percatado de que empleé expresiones como "nos eleva a" para refirme a avanzar sobre la sucesión de números naturales, pero dicha sucesión de números:

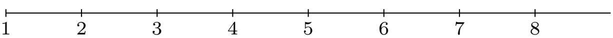
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

es una fila horizontal de números, por lo que debería haber dicho que avanzo hacia la derecha o, como mucho, que voy hacia números cada vez más grandes. No obstante, el término escogido muestra una clara influencia de nuestro estado de ánimo: hacerse cada vez más grande significa crecer y el crecimiento crea en los seres humanos una sensación de conmoción. Los matemáticos concretan este sentimiento sobre el papel acompañando a sus imaginaciones con dibujos y esquemas; el dibujo de un crecimiento muy rápido se identifica con una línea que se eleva de forma muy abrupta.

Los pacientes están más que familiarizados con estos dibujos; tan sólo necesitan echar un vistazo a su curva de la temperatura corporal para conocer el curso de su enfermedad. Supongamos que los siguientes números indican la temperatura corporal de un paciente medida a intervalos regulares de tiempo:

$$38°,\ 38.5°,\ 39°,\ 39°,\ 38°,\ 38.5°,\ 37°,\ 36.5°\,.$$

Estos datos se representan gráficamente del siguiente modo: dibujamos primero una línea recta horizontal e indicamos sobre ella los intervalos regulares de tiempo mediante marcas verticales separadas entre sí cierta distancia constante

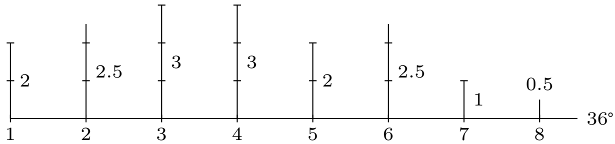


escogemos después otra distancia para representar a un grado de temperatura y, desde cada una de las marcas que representan a un instante de tiempo, trazamos hacia arriba [2] esa distancia tantas veces como indica la fiebre del paciente en dicho instante. No es necesario dibujar líneas tan largas, pues la temperatura corporal del paciente jamás caerá por debajo de 36° por lo que podemos imaginarnos que la línea horizontal se corresponde con esos 36°. Es decir, basta dibujar por encima de la línea horizontal los números:

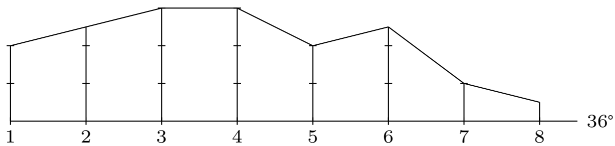
$$2,\ 2.5,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2.5,\ 1,\ 0.5,$$

[2] Decir "hacia arriba" es un discurso figurativo, ya que en una hoja de papel plana sólo podemos dibujar líneas horizontales. Sin embargo, percibimos que una línea como esa apunta, efectivamente, hacia arriba.

que representan a los correspondientes grados de temperatura corporal. Obtenemos así la siguiente gráfica:



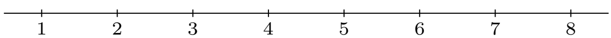
y conectando los extremos de los segmentos verticales:



La curva de fiebre así obtenida lo dice todo: mientras que los segmentos ascendentes indican una subida de la temperatura corporal, los segmentos descendentes representan una bajada de la fiebre del paciente y los segmentos horizontales muestran un periodo de estancamiento. El ascenso fue pues uniforme en un principio, esto lo atestigua que los dos primeros segmentos son igual de empinados y forman así una línea recta. Excepto una leve recaída en la sexta medición, el paciente se recuperó rápidamente: la inclinación del segmento que une la sexta y séptima medición es muy abrupta, más abrupta que la de cualquier incremento.

Nada ni nadie nos impide trazar las curvas febriles de nuestras operaciones.

Los números se suelen representar a lo largo de una línea recta escogiendo un punto de partida –al que llamaremos punto 0– y acumulando distancias de igual magnitud a partir de dicho punto; es decir, contamos empleando esas distancias:



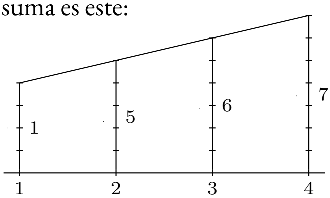
Si ya eres hábil contando, ahora puedes realizar las operaciones sobre dicha recta automáticamente. Por ejemplo, si $2 + 3$ fuese la operación considerada, tan sólo tendríamos que dar tres pasos hacia la derecha desde el 2 y leer después el resultado que allí aparece: 5. Si quisiésemos calcular $5 - 3$, tendríamos que desplazarnos tres pasos hacia la izquierda desde 5. Esto tan sólo es otra versión de aquella calculadora de la escuela primaria que nos permitía efectuar ciertas cuentas deslizando esferas por varillas metálicas.

Abandonemos la línea horizontal y miremos hacia arriba. Comencemos con un número fijo, como por ejemplo 3, y veamos como aumenta si le sumamos $1, 2, 3, \ldots$, si lo multiplicamos por $1, 2, 3\ldots$ o si lo elevamos a $1, 2, 3, \ldots$ ("elevar a cierta potencia", otra expresión en la que aparece la idea de apuntar hacia arriba).

Empecemos por la suma. Dado que uno de los sumandos siempre es 3, representaremos el otro sumando en la línea horizontal y la suma correspondiente hacia arriba:

$$3 + 1 = 4$$
$$3 + 2 = 5$$
$$3 + 3 = 6$$
$$3 + 4 = 7$$

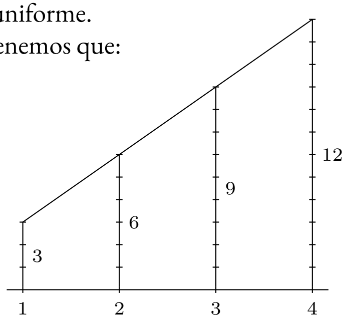
Así pues, si representamos horizontalmente a 1 mediante una distancia como esta y verticalmente mediante una distancia como esta otra, el "diagrama febril" de la suma es este:



Aquí, cada segmento de unión cae sobre una misma recta; deducimos entonces que la suma crece de manera uniforme.

En el caso da multiplicación, tenemos que:

$$3 \times 1 = 3$$
$$3 \times 2 = 6$$
$$3 \times 3 = 9$$
$$3 \times 4 = 12$$



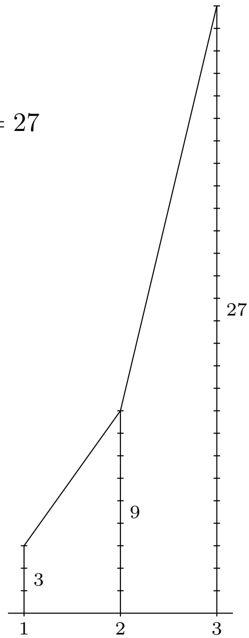
Se observa entonces que el producto también crece de forma uniforme a medida que aumentamos uno de sus factores, pero mucho más rápidamente que la suma: la pendiente de la recta es ahora mucho más pronunciada.

Finalmente, para las potencias tenemos que:

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$



Por tanto, observamos que las potencias ya no crecen de forma uniforme, sino que lo hacen a un ritmo cada vez mayor; 3^4 ya no cabría en esta hoja de papel. He ahí el origen de la expresión "crecimiento exponencial".

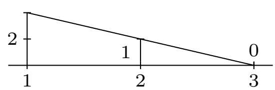
También podemos construir la curva febril de las operaciones inversas. Por ejemplo, para la resta tenemos que:

$$3 - 1 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - 3 = 0$$

$$3 - 4 = -1$$



Luego la diferencia también disminuye uniformemente a medida que aumenta el sustraendo.

La división es una operación delicada; no hablaré de su curva febril hasta más adelante.

Tan sólo añadiré el siguiente comentario: lo que acabamos de hacer es lo que los matemáticos denominan "representación gráfica de una función". Dado que el resultado final de la suma depende del valor escogido para el segundo sumando, se dice que el valor de la suma es función del segundo sumando, que sería la variable independiente. Lo que hicimos anteriormente no fue más que representar gráficamente el crecimiento de dicha función. Del mismo modo, el valor del producto es función de su factor variable y la exponenciación es función del exponente. Como ves, ya nos hemos encontrado con las funciones sin más que mencionar y jugar un poco con las operaciones más elementales. Continuaremos examinando estas relaciones funcionales más adelante, pues el concepto de función es la columna vertebral de toda la estructura matemática.

21. *Ante el Tribunal de Súper–Matemáticas*

Ahora es el momento de escoger una rama bien definida de las Matemáticas y examinar si puede haber contradicciones en ella.

Ya sabemos cómo se lleva a cabo la delimitación de cierta área de conocimiento: hay que identificar las hipótesis fundamentales de los teoremas más relevantes –esto es, los axiomas– y luego podremos decir que tal rama consiste en todo aquello que se pueda probar a partir de esos axiomas.

Por su parte, los axiomas se pueden escribir empleando el lenguaje de la Lógica simbólica, por lo que consistirán en una cadena de signos matemáticos y lógicos, evitando así el uso de cualquier palabra ambigua o imprecisa.

Queda por investigar qué significa que algo se pueda deducir a partir de los axiomas. Es decir, todavía tenemos que formular de forma clara y precisa cada uno de los pasos del proceso deductivo.

Cuando deducimos la exactitud de un enunciado a partir de la exactitud de otro y percibimos esta conclusión mediante nuestra notación simbólica, lo único que hacemos es pasar de una cadena de signos a otra. Recordemos por un momento la resolución de ecuaciones, pues allí también procedíamos de forma similar. Por ejemplo, es conveniente pasar de la cadena de signos

$$\frac{5x}{2} + 3 = 18$$

a esta nueva cadena:

$$\frac{5x}{2} = 15.$$

Primero pensamos esto en términos del contenido de cada uno de los enunciados: dijimos que si un número se convierte en 18 después de sumarle 3, es porque ese número es igual a 15. Más tarde, sin embargo, nos dimos cuenta de que *formalmente* ambas cadenas sólo se diferencian en que en el izquierdo de la primera cadena hay un 3 sumando que falta en la segunda, mientras que el número de la derecha de esta segunda cadena es 3 unidades más pequeño que el de la primera. Dedujimos entonces una regla puramente *formal*: se puede pasar un sumando de un lado de la ecuación al otro lado como sustraendo. Posteriormente, aplicamos esta regla de manera automática: es decir, ignorando totalmente el contenido. Por tanto, aquella conclusión basada inicialmente en el contenido terminó convirtiéndose en no más que una simple "regla del juego" mecánica: "puedes cambiar ciertos signos de aquí para allá de cierta manera". Ocurre entonces como con el ajedrez: puedes mover el rey una casilla en cualquier dirección.

En general, esto es lo que también podremos hacer cuando obtengamos nuevas deducciones a partir de los axiomas: observaremos en nuestras cadenas de signos qué cambio formal se corresponde con la deducción en cuestión y después aplicaremos ese cambio ignorando totalmente todo aquello relacionado con los contenidos.

A la vista de lo anterior, podríamos olvidar por completo de qué trata nuestra rama de conocimiento particular y decir simplemente que tenemos unas cuantas cadenas de signos sin contenido alguno (a las que llamaremos axiomas) y unas reglas de juego que nos indican qué cadenas se pueden obtener a partir de una cadena dada. De este modo, en manos del matemático, el sistema de proposiciones y demostraciones se vuelve tan dócil y flexible como los propios números, por lo que es posible aplicar sobre él todos los procedimientos matemáticos ya conocidos.

Sin embargo, estos procedimientos no deben aplicarse mecánicamente o siguiendo simplemente las reglas del juego. Cada paso debe ser analizado concienzudamente: ¿estamos ante una deducción legítima y segura o se ha colado algún peligroso elemento por la puerta trasera? No conviene perder nunca de vista nuestro objetivo: queremos demostrar que el uso de elementos transfinitos está plenamente justificado esa área de conocimiento, pero tal justificación tendrá nulo valor si se ha llevado a cabo empleando elementos igual de peligrosos. Nuestras herramientas y medios deben mantenerse tan puros y precisos como para que ni tan siquiera el intuicionista más intransigente tenga nada que objetar.

Aquí es donde se dividen las matemáticas por la mitad: por un lado, en sistemas completamente formales con no más que reglas en lugar de conclusiones y por otro, en una especie de Supermatemáticas –también llamadas Metamatemáticas– que estudian cuidadosamente el contenido de cada uno de los pasos que da utilizando sólo deducciones libres de toda duda. En cierto modo, la Metamatemática examina los sistemas formales desde arriba y su propósito es estudiar la consistencia de la rama de conocimiento bajo consideración.

Pero si estamos investigando si podemos llegar a una contradicción en base a nuestras reglas, ¿no sería necesario examinar también el contenido de cada uno de los axiomas? Parece natural pensar que es el contenido de las oraciones, y no tanto su forma, quien nos conduciría a una contradicción.

Esta preocupación puede remediarse observando que basta con limitarse a una sola contradicción. Por ejemplo, si suponemos que los números naturales pertenecen al sistema, la siguiente:

$$1 = 2.$$

Esta simple cadena de símbolos se puede entender como una mera sucesión de signos: observamos que la sucesión formada por un 1, el símbolo $=$ y un 2 indica una contradicción. No necesitamos más: todos conocemos pruebas jocosas de que $1 = 2$ y ya mencioné en algún momento que una vez colada una declaración contradictoria, entonces podemos probar cualquier cosa, y en particular que $1 = 2$. Por tanto, para estar completamente seguros de que en nuestro sistema no se esconde contradicción alguna, basta probar que la fórmula $1 = 2$ no es deducible.

Formulada con precisión, la tarea de la Metamatemática consiste, por tanto, en mostrar que partiendo de los axiomas del sistema y empleando las reglas de juego dadas, no es posible llegar a la cadena de signos $1 = 2$.

En unos cuantos casos simples, fue el mismo Hilbert quien dio un ejemplo de tales pruebas de consistencia y, posteriormente, sus discípulos generalizarían tal procedimiento para otros sistemas. Sin embargo, el pionero en este campo, por delante incluso del mismísimo Hilbert, fue Gyula König, quien introdujo en Hungría casi todas las ramas de las matemáticas modernas.

Ahora estaba todo listo para poner una amplia y extensa rama del conocimiento al alcance de esta investigación. Por supuesto, tal y como era previsible, la primera en ofrecerse fue la rama de los números naturales. Todo parecía indicar que sólo habría que juntar un poco de fuerzas para extender las ideas de Hilbert a toda la Teoría de números, incluyendo por supuesto, a todos los peligrosos conceptos que ésta contenía.

Pero entonces sucedió algo más: la "Teoría de la demostración" de Hilbert, esta nueva área del conocimiento que crecía lenta y cuidadosamente, fue sacudida por una tormenta.

Un joven matemático vienés, Kurt Gödel, demostró –empleando exclusivamente métodos de la Teoría de la demostración (hablaremos sobre cómo los utilizó en el último capítulo)– que no es posible probar la ausencia de contradicción en la Teoría de números si sólo empleamos herramientas que se pueden describir formalmente dentro del propio sistema.

Por supuesto, la Metamatemática no utiliza ningún medio formal: siempre tiene que saber lo que hace conscientemente, nunca mecánicamente. Pero de esto, en principio, tampoco se sigue que no se puedan establecer reglas de juego mecánicas y formales a partir de sus *conclusiones*. De hecho, esto sí es posible para cualquier persona que, ajena a los verdaderos propósitos de la Metamatemática, sólo desee jugar un poco con esas ideas. Y para hacerlo, no es necesario ser János von Neumann, de quien se hizo famoso el siguiente dicho: "la mayoría de los matemáticos prueban cosas que ya saben, von Neumann lo que se le antoja" (también es conocido por, supuestamente, haber afirmado durante un congreso en Bolonia que la formalización de la Metamatemática carecía de interés, pero que la haría él mismo en cualquier momento por una caja de bombones). *Si* formalizásemos la Metamatemática, parecería entonces evidente que sus cuidadosas conclusiones, que evitan en todo momento cualquier elemento peligroso, podrían formalizarse en un marco mucho más pequeño y limitado que la rama del conocimiento considerada junto con sus elementos transfinitos. Pero ése no es el caso: el resultado de Gödel nos dice que la consistencia de un sistema sólo puede probarse empleando métodos que van más allá de los límites del sistema en cuestión. Pero, ¿a quién le convencerá una justificación de los elementos peligrosos que ha sido obtenida mediante métodos de un ámbito aún más amplio que el sistema a estudiar? Parecía que este descubrimiento era la sentencia de la Teoría de la demostración; ya podíamos soltar el bolígrafo y rendirnos.

El propio Hilbert no lo creyó ni por un momento. Estaba convencido de que había una salida: tenía que haber algún método deductivo que aun escapándose de los límites del sistema sometido a estudio, se basase, sin embargo, en alguna facultad concreta de nuestro entendimiento finito para que así también pueda ser aceptada por los intuicionistas.

La búsqueda se inició de inmediato y tuvo éxito: Gerhard Gentzen, un estudiante de Hilbert, encontró los medios apropiados para la Metamatemática: la "inducción transfinita". Y de hecho, con ayuda de esta novedosa herramienta, logró probar la consistencia de la Teoría de números. Así pues, la manada de los números naturales ya podía crecer y vivir en paz; no aparecerá ningún lobo entre ellos.

"Inducción transfinita" suena como muy serio y peligroso, pero tan sólo se trata del inofensivo argumento que comentamos a continuación.

Comenzando en cualquier término de la sucesión de los números naturales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

y caminando ahora hacia atrás a pasos de cualquier longitud, es evidente que sólo podemos dar un número finito de pasos. Incluso comenzando en 1 millón y retrocediendo a pasos de longitud 1 unidad, llegaríamos a 1 después de un millón de pasos.

Ahora colocamos la sucesión de los números naturales de modo que, por ejemplo, aparezcan primero los números impares y luego los números pares:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots$$

Si retrocedemos desde cualquier número en este orden, es decir, si eligiendo números cada vez más próximos al principio, después de un número finito de pasos este camino también termina. En efecto, pues si comenzamos con un número impar, es tan evidente como en la sucesión original. Y si partimos de un número par, también vemos que, yendo hacia atrás, más tarde o más temprano, se acabarán los números pares, por lo que tendremos que saltar a un número impar y a partir de ese momento, por muy grande que sea el número impar al que saltemos, ya nos estaremos moviendo en una única sucesión y estamos, por tanto, en una situación análoga a la original.

Es evidentemente que podemos reordenar la sucesión de los números naturales de forma mucho más complicada. Por ejemplo, podríamos separarlos en tres grupos del siguiente modo: primero se escriben los números divisibles entre 3, luego aquéllos que son 1 unidad mayores que ésos y finalmente los que son 2 unidades mayores (también incluiremos a 0 por aquello de ser más ordenados):

$$0,\ 3,\ 6,\ 9,\ldots\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ldots\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ldots$$

Si comenzamos a retroceder desde un número del tercer grupo, caeremos en el segundo grupo después de un número finito de pasos y desde ese instante, nos encontraremos en la misma situación que en el caso que acabamos de comentar.

Pero también podemos considerar un número infinito de grupos. Basta colocar, por ejemplo, primero los números impares, luego los que sólo son divisibles entre la primera potencia de 2 (que es $2^1 = 2$), después los divisibles entre la segunda potencia de 2 (que es $2^2 = 4$), luego los divisibles entre la tercera potencia de 2 (que es $2^3 = 8$) y así sucesivamente:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ldots\ 4,\ 12,\ 20,\ 28,\ldots$$
$$8,\ 24,\ 40,\ 56,\ldots$$

No debemos alarmarnos por tener un número infinito de grupos; en cuanto escojamos un número, éste pertenecerá a uno de los grupos y, evidentemente, tal grupo sólo estará precedido de un número finito de grupos.

En todos estos casos, caminar hacia atrás equivale a pasar de una disposición más compleja a otra más simple. Y además, resulta que si partimos de una disposición complicada de la sucesión de los números naturales y avanzamos en cada ocasión hacia disposiciones cada vez más simples, entonces llegaremos a una disposición simple y sin ningún tipo de complicación en un número finito de pasos.

Lo que utiliza Gentzen en su prueba es que aun partiendo de determinada disposición –que es, en realidad, mucho más compleja que cualquiera de las que acabamos de mencionar– tan sólo es posible caminar hacia atrás un número finito de pasos. Y esta es una afirmación fácilmente concebible por nuestro pensamiento finito que, sin embargo, se escapa de los límites del sistema en consideración.

Pero, ¿cómo se emplea este resultado en una prueba de consistencia?

El argumento de una demostración de consistencia siempre es el siguiente: supongamos que alguien afirma haber llegado hasta una contradicción partiendo de los axiomas del sistema. Entrega una deducción que empezando con los axiomas, avanza mediante la aplicación de, supuestamente, sólo las reglas de juego permitidas y termina finalmente afirmando que $1 = 2$. Nuestro trabajo consiste en demostrar que la demostración es falaz o defectuosa; es decir, tenemos que encontrar el fallo que hay en ella.

Si no ha aparecido ningún elemento peligroso en la deducción presentada, es evidente que podremos identificar el error del argumento. Si el punto de partida es correcto y los métodos de deducción aplicados son indiscutibles, sólo es posible llegar a $1 = 2$ cometiendo algún error.

Sin embargo, si en la prueba aparece algún elemento transfinito, lo que acabamos de decir ya no es cierto: la contradicción podría haber sido causada por un elemento transfinito.

Pero la conclusión de la demostración es que $1 = 2$. Y en esto no hay ni rastro de ningún concepto o idea transfinita. Por tanto, si algún elemento ideal ha jugado cierto papel en la prueba, lo único que podría haber sucedido es que, manteniendo sus viejas costumbres, apareciera, surtiera cierto efecto y terminara por esfumarse. ¿Y no podría obtenerse la demostración sin su ayuda del mismo modo que obtenemos ciertas fórmulas trigonométricas con y sin la ayuda de "i"?

Si sólo aparece un elemento peligroso o incluso si sólo aparecen algunos de ellos pero de forma completamente independiente unos de otros, entonces sí. Hilbert demostró que tal tipo de pruebas se pueden transformar en demostraciones completamente inofensivas en las que encontraríamos el error de inmediato.

Desafortunadamente, al igual que ocurre con los seres incorpóreos de nuestra imaginación, los elementos ideales también pueden solaparse formando complejas e intrincadas estructuras. Y en una prueba así de enredada, los elementos transfinitos ya no se pueden eliminar tan fácilmente.

Gentzen se percató de que los enredos de las demostraciones estaban en analogía con las complicadas maneras en que podemos presentar la sucesión de los números naturales. Si se aplica el método de Hilbert a una demostración compleja e intrincada, los elementos transfinitos no desaparecen, pero la demostración se convertirá en una deducción cuyo hilo argumental se corresponde ahora con una disposición más simple de la sucesión de los números naturales. Y sucede exactamente lo mismo si se aplica de nuevo el procedimiento de Hilbert a esta otra demostración ya de inicio más simple. No obstante, avanzando hacia disposiciones cada vez más simples, después de cierto número finito de pasos, habremos llegado a una sucesión sin ningún tipo de complicación. Por tanto, aplicando las ideas de Hilbert cierta cantidad finita de veces, habremos llegado a una prueba sin complicación alguna, esto es, a una prueba libre de todo elemento transfinito y en la que ya se puede encontrar el error sin ninguna dificultad.

Se trata de un hermoso razonamiento puramente matemático y el resultado que afirma es de gran importancia, pues restaura nuestra confianza en los antiguos métodos de la Teoría de números. Sin embargo, la mayoría de los matemáticos, aquéllos que ni tan siquiera quieren oír hablar de estos peligros, sienten cierta repulsión hacia la Teoría de la demostración; la ven como algo que les es completamente ajeno y más propio de la Filosofía que de las Matemáticas. Pues sólo reconocen la legitimidad de una nueva rama de las

Matemáticas si ésta también se puede aplicar de forma creativa y fructífera en otras áreas de las Matemáticas. Hilbert intentó convencerles de las bondades y utilidades de la Teoría de la demostración sometiendo a la Hipótesis del continuo de la Teoría de conjuntos –que era por aquel entonces el problema más conocido y grandioso— a los métodos de la Teoría de la demostración.

A continuación explicaré en qué consiste tal problema. Si ordenamos los números naturales fijándonos en su magnitud, obtenemos un orden completo; esto es, cada número natural tiene un sucesor inmediato. Por ejemplo, al 3 le sigue el 4 y al 12 el 13. Pero ya no ocurre lo mismo si hablamos de las fracciones: dada una fracción, no existe su sucesor, pues siempre podemos escoger una fracción tan próxima a la dada como deseemos. Y esto todavía es más evidente cuando consideramos la totalidad de los números reales, que se extienden de forma completamente enmarañada y continua a lo largo de la línea recta numérica. Ésta la razón por la que empleamos la palabra "continuo" para referirnos a la totalidad o cardinalidad del conjunto de los números reales.

Y ahora, en el ámbito de los cardinales introducidos por Cantor, también se puede plantear la cuestión de si todo cardinal tiene un sucesor inmediato. La respuesta es que sí; por lo que, desde este punto de vista, los cardinales infinitos se comportan como los números naturales. El cardinal infinito más pequeño es el de los números naturales, pero ¿cuál es su sucesor? Sabemos que el continuo –esto es, el cardinal de los números reales– es mayor. Pero, ¿es el sucesor inmediato o hay algún cardinal entremedias? Se han realizado multitud de investigaciones en relación con esta pregunta y entre los matemáticos se ha ido desarrollando, poco a poco, la conjetura de que el continuo es el número transfinito que viene justo después del cardinal de los números naturales. Es la conocida como "Hipótesis del continuo" o también, tal y como dicen aquéllos que creen creen fervientemente en ella, el "Teorema del continuo". No obstante, nadie ha llegado a una conclusión clara todavía.

Recientemente, Gödel (basándose en las ideas previas de Hilbert) ha empleado la Teoría de la demostración para probar que asumir la Hipótesis del continuo como algo verdadero no conduce a ninguna contradicción en la Teoría de conjuntos. Por tanto, la Hipótesis del continuo es, o bien independiente de los axiomas de la Teoría de conjuntos, o bien deducible a partir de esos axiomas; por lo que, en cualquier caso, podemos invocarla con cierta tranquilidad en nuestras pruebas: sabemos que no dará lugar a contradicciones. La demostración de este hecho es similar a la de la consistencia de la Geometría de Bolyai: Gödel construyó un "modelo" en la Teoría de conjuntos en el que son compatibles los axiomas de la propia Teoría de conjuntos y el Teorema de continuo [1].

Hilbert podía dirigirse ahora a los escépticos de la Teoría de la demostración para decirles, con razón, que "por sus frutos se reconoce al árbol".

Posdata sobre la aproximación al infinito

La consistencia de la Teoría de números naturales está ahora asegurada y la prueba que así lo justifica puede convertirse fácilmente en la prueba de consistencia de otros conjuntos numerables como, por ejemplo, el conjunto de los números enteros o el conjunto de los números racionales.

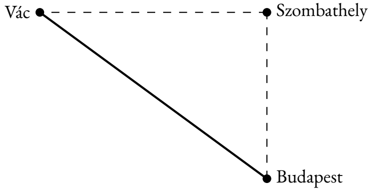
Pero aún queda pendiente el conjunto de los números reales, donde nos encontraremos con nuevas dificultades.

Los números irracionales fueron capturados mediante aproximaciones cada vez más precisas, encerrándolos así en intervalos cada vez más pequeños y estrechos. Por lo tanto, esto ya no es algo de Teoría de números, sino de Análisis. Aquí los procesos infinitos aparecen permanentemente y esto trae consigo un nuevo tipo de elementos peligrosos.

Cuando mencioné por primera vez este tipo de ideas, tuve la precaución de enunciar con honestidad la peligrosa frase de la que depende por completo el éxito o el fracaso del Análisis. Tal frase decía así: "*nuestra intuición nos dice* que incluso continuando con la construcción de intervalos encajados y cada vez más estrechos indefinidamente, ese algo en que acaban encogiéndose es la parte común a todos ellos". Pero, ¿cómo se atreve nuestra intuición a afirmar algo sobre un proceso infinito? ¿Acaso ya hemos olvidado de nuevo que no tenemos derecho a transferir nuestras experiencias de lo finito a lo infinito? Veamos un ejemplo más que también nos hará reflexionar sobre este asunto.

No es necesario ser matemático para darse cuenta de que la distancia más corta entre dos puntos es la del camino recto. Si alguien viaja directamente de Budapest a Vác, llegará mucho antes que si lo hace pasando por Szombathely:

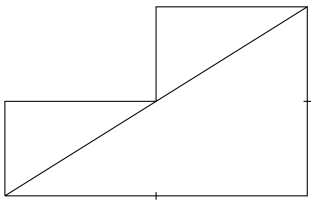
[1] Nota de los traductores: El matemático estadounidense de origen polaco Paul Cohen demostró en 1962 que la Hipótesis del continuo es *independiente* de los axiomas de la Teoría de conjuntos.



Y de esto se deduce inmediatamente que la suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el tercer lado.

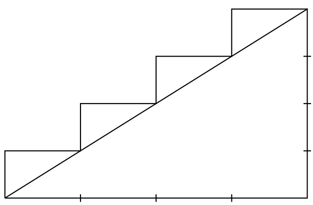
Bien, pues a continuación probaré que la suma de los dos catetos de un triángulo rectángulo es exactamente igual a la hipotenusa. Obviamente, esto es una tontería; pero es del tipo de cosas que uno puede hacer si aplica la intuición a los procesos infinitos.

Dibujemos una escalera sobre la hipotenusa de modo que las aristas de sus peldaños sean paralelas a los catetos del triángulo:



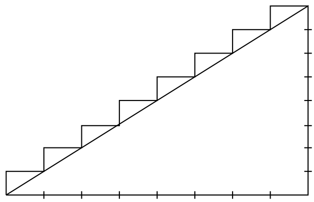
Es evidente que los dos trozos verticales juntos son tan largos como el cateto vertical y que el cateto horizontal es tan largo como los dos trozos horizontales juntos. Por tanto, la longitud total de los segmentos que forman la escalera es igual a la suma de los catetos.

Ocurre exactamente lo mismo para una escalera de cuatro escalones:



Los trozos horizontales suman la longitud del cateto horizontal y los verticales la del cateto vertical.

Y si continuamos dividiendo la hipotenusa en más escalones,



sigue siendo cierto que la longitud total de las aristas de la escalera es igual a la suma de los catetos. Por otra parte, a medida que hacemos cada vez más escalones, se hace cada vez más difícil distinguir la escalera de la propia hipotenusa, por lo que "nuestra percepción nos dice" que si continuamos con la subdivisión indefinidamente, la escalera se fusionará con la hipotenusa y en consecuencia, la hipotenusa debe ser igual a la suma de los dos catetos.

Después de esto, deberíamos reflexionar muy seriamente sobre la fiabilidad de nuestra intuición cuando se proyecta hacia el infinito.

Sin embargo, el ser o no ser del Análisis depende de esa frase tan peliaguda. O nos la creemos sin ningún fundamento, simplemente porque queremos creerla, o no nos queda más remedio que recurrir a los métodos de la Teoría de la demostración para investigar si tal afirmación no conduce a contradicciones.

Estos nuevos elementos transfinitos también entran a formar parte del sistema de axiomas del Análisis. Y admitiéndolos, el área de conocimiento delimitada por éstos ya será tan extensa que no sólo incluirá la inducción transfinita empleada por Gentzen, sino también otros casos mucho más complejos. Sin embargo, el Teorema de Gödel sigue siendo cierto: no se puede probar la consistencia del sistema mediante métodos que pueden formalizarse dentro del propio sistema. Por tanto, ya no es de esperar que las herramientas empleadas hasta este momento sean suficientes para probar la coherencia del Análisis; hay que buscar nuevos métodos más precisos y refinados que todos los anteriores. Esta cuestión sigue siendo un área de investigación abierta hasta el día de hoy.

22. ¿Qué no saben las matemáticas?

La demostración de la ausencia de contradicciones en la Teoría de números puso de manifiesto una de las imperfecciones de la axiomatización. La inducción transfinita allí empleada puede formularse en el lenguaje de los números naturales y es un procedimiento fácilmente concebible por una mente finita. Sin embargo, transciende al sistema delimitado por los axiomas de la Teoría de números naturales.

Éste no es un fenómeno aislado: no existe ningún sistema axiomático capaz de caracterizar exactamente aquello que pretende delimitar; siempre habrá algo que se le escape y, por otro lado, siempre incluye algo inesperado. Un sistema axiomático capta una serie de cosas, pero en realidad sólo contiene una parte de ellas.

Que un sistema axiomático abarca mucho fue probado por el matemático noruego Thoralf Skolem.

Aunque con nuestros axiomas sólo pretendamos captar la sucesión de los números naturales en su orden habitual, queramos o no, los ordenamientos más complejos de dicha sucesión también se introducirán irremediablemente en el sistema. No es posible separar unos de otros.

Por otra parte, si queremos delimitar axiomáticamente un dominio no numerable –como es el caso, por ejemplo, de los números reales–, siempre habrá un conjunto numerable inmiscuido en él que cumple las condiciones de todos los axiomas.

Que los sistemas axiomáticos siempre se dejan algo fuera fue revelado a partir de un sorprendente descubrimiento de Gödel: existen problemas indecidibles en cualquier sistema axiomático que contenga a la Teoría de números.

Pero, ¿qué se supone que significa esto realmente?

Hay muchos problemas matemáticos que todavía no han sido resueltos. Ya he mencionado alguno. Lo hice, por ejemplo, cuando te hablé de los números primos "gemelos" (como 11 y 13 o 29 y 31): ¿hay infinitos números primos gemelos? La conjetura de Goldbach tampoco ha sido resuelta. Se ha observado que:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Esto es, parece que los números pares, excepto el 2, se pueden escribir como suma de dos números primos, y en ocasiones incluso de más de una forma. De hecho, esto es cierto para todos los números pares que han sido examinados hasta el momento. Sin embargo, a día de hoy, la veracidad de tal hecho para todo número par no es más que una mera conjetura.

La conjetura de Fermat es la más famosa y conocida. Sabemos que

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

o equivalentemente, que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

y además de éste, hay más ejemplos de ternas de números enteros en las que la suma de los cuadrados de los dos primeros números es igual al cuadrado del tercero. Garabateando en el margen de un libro, Fermat anotó que había encontrado una prueba de que una relación análoga a ésta pero con exponentes mayores que 2 ya no es posible, pero lamentaba también no disponer de espacio suficiente en dicho margen para escribir los detalles. En otras palabras, anotó que es imposible encontrar tres números enteros, x, y y z para los que

$$x^3 + y^3 = z^3$$
$$\text{o}\quad x^4 + y^4 = z^4$$
$$\text{o}\quad x^5 + y^5 = z^5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Fermat murió hace ya bastante tiempo. Y aunque han sido muchos los matemáticos que han intentado reconstruir su demostración, ninguno ha tenido éxito hasta el día de hoy [1]. Estos esfuerzos infructuosos por encontrar una prueba, que supuestamente alguien ya tuvo entre sus manos despertaron tal interés por este problema tan poco interesante que incluso hubo quien dejó por testamento una gran fortuna para quien lo resolviera. Y así, no es de extrañar que despertara la imaginación de los ignorantes tanto o más que la cuadratura del círculo. Afortunadamente, el espíritu empresarial ya se ha

[1] Nota de los traductores: La conjetura Fermat, también llamada Último Teorema de Fermat, fue probada en 1995 por el matemático inglés Andrew Wiles.

atenuado notablemente una vez que el dinero prometido ha perdido gran parte de su valor.

No obstante, este problema ha tenido un efecto estimulante en las Matemáticas; pues con la intención de hacerlo más accesible, se introdujeron nuevos elementos ideales –los conocidos como "ideales"– que luego resultaron de gran utilidad en las ramas más importantes del Álgebra. Pero, aun así, la conjetura de Fermat sólo ha sido probada para algunos exponentes particulares; en su generalidad, todavía carece de respuesta. Lo más probable es que Fermat cometiera algún error en su prueba o que encontrara, simplemente, una prueba para cierto caso especial.

Pero también hay problemas en Matemáticas para los que se ha demostrado su irresolubilidad si nos restringimos a ciertos métodos y herramientas concretas. Éstos son, por tanto, problemas ajenos a toda discusión y completamente resueltos, pero en sentido negativo. Problemas de este estilo son, por ejemplo, la solución general de una ecuación de quinto grado y la cuadratura del círculo. La trisección de un ángulo o la duplicación de un cubo también pertenecen a esta categoría de problemas. Se ha probado que ambas tareas son irrealizables empleando únicamente regla y compás. Con estas herramientas podemos dividir cualquier ángulo a la mitad, pero ya no podemos dividirlo en tres ángulos de igual amplitud. La duplicación del cubo es el análogo tridimensional de la duplicación de nuestro estanque de peces. Mientras que en plano pudimos construir el lado del cuadrado grande con regla y compás, en el espacio tridimensional ya no es posible construir la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de uno dado empleando sólo esas herramientas. Esta tarea también es conocida como el problema de Delos, ya que, supuestamente, los dioses exigieron al pueblo de Delos que duplicase el tamaño de su altar en forma de cubo para librarles de una calamitosa pandemia. Toda la buena voluntad de los fieles fue insuficiente. Fue Platón quien consoló a los habitantes de Delos: los dioses se habrían mofado de su negligente educación e ignorancia para indicarles las virtudes del estudio y cuidado de la Geometría.

Sin embargo, el teorema de Gödel no trata sobre problemas que todavía no han sido resueltos o cuya irresolubilidad ya ha sido probada, sino sobre problemas que son indecidibles dentro del sistema axiomático correspondiente.

Ahora quisiera dar un esbozo general del argumento de Gödel.

Supongamos que tenemos un sistema axiomático consistente para los números naturales o, lo que es lo mismo, para la Teoría de números. En esos axiomas habríamos incluido todo lo que pudiera ser necesario en esta área de las Matemáticas y, por supuesto, también nos habríamos cerciorado de que no hubiera ninguna contradicción. Además, habríamos escrito todo en el lenguaje de la lógica simbólica, por lo que cada enunciado no sería más que una cadena de signos.

En tal caso, así como antes asociábamos un par de números a cada punto del plano, ahora podemos asociar un número a cada una de esas cadenas de caracteres. Para ello, procederemos tal y como indicamos a continuación. Dado que tenemos una cantidad finita de signos lógicos y matemáticos, asociaremos a cada uno de éstos uno de los primeros números primos (aquí consideraré a 1 como número primo). Así pues, por ejemplo, el signo 1 se correspondería con el propio número 1 y hecho esto, ya no son necesarios más signos para los demás números, pues podemos escribir a 2 como $1+1$, a 3 como $1+1+1$ y así sucesivamente; al signo "$=$" le asociamos el segundo número primo, que es el 2; al signo de "negación", es decir, a "$\neg$" le asociamos tercer número primo, que es el 3; al signo "$+$" le asociamos el cuarto número primo, que es el 5 y así sucesivamente. Nada importa aquí el orden que escojamos para nuestros signos. Supongamos que 17 es el número primo que se corresponde con nuestro último símbolo. Ahora, a partir del 19, los siguientes números primos se asociarán con las letras x, y, $z, \ldots$ que denotarán a los valores desconocidos que aparecen en los enunciados del sistema. Por ejemplo, x se corresponde con 19, y con 23 y así sucesivamente.

Obtenemos de este modo una especie de "diccionario":

$$\begin{array}{rcl} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\ \neg & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 19 \\ y & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

a partir del cual vemos de inmediato que, por ejemplo, la fórmula $1 = 1$ se corresponden con la terna de números $1, 2, 1$.

Veamos ahora como pasar de la terna $1, 2, 1$ a un único número. Esto es relativamente fácil de hacer e incluso disponemos de varias opciones. Una de ellas podría consistir, por ejemplo, en sumar los tres números; obtendríamos así, en nuestro caso, el número 4. Todo correcto, pero el problema es que este 4 se ha tragado los otros números: sólo a partir de él es imposible saber de qué números se compuso y en qué orden. Por ejemplo, 4 podría provenir tranquilamente de

$$1+3 \;\text{ o }\; 3+1 \;\text{ o }\; 2+2 \;\text{ o }\; 1+1+1+1 \;\text{ o }\; 2+1+1$$

y no sólo de

$$1+2+1.$$

¡Lo que quiero es un número que me permita identificar exactamente cada una de las partes que lo componen! Y por supuesto que hay una forma de obtener tal número: consiste en multiplicar los tres primeros números primos, que son:

$$2, \;\; 3 \;\text{ y }\; 5,$$

elevando previamente cada uno de ellos a la potencia respectiva que es indicada por cada uno de los números que forman nuestra terna:

$$1, \;\; 2 \;\text{ y }\; 1.$$

Es así como se obtiene el siguiente producto:

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90,$$

por lo que de ahora en adelante, asociaremos la fórmula

$$1 = 1$$

con el número

$$90.$$

Partiendo únicamente de un número, es fácil identificar cuál es la fórmula que se le ha asignado; lo único que hay que hacer es descomponer el número en factores primos ordenados:

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \end{aligned}$$

por lo que los números primos

$$1, \;\; 2 \;\text{ y }\; 1$$

aparecen de nuevo como exponentes y, según nuestro "diccionario", a ellos están asociados los signos

$$1, \;\; = \;\; \text{y } 1,$$

por lo que partiendo de 90, identificamos correctamente la fórmula correspondiente; que es, en este caso,

$$1 = 1.$$

Cada enunciado del sistema se corresponde entonces con un número. Y entonces, a cada demostración se le puede asignar un número empleando el mismo procedimiento. Desde un punto de vista puramente formal, una demostración no es más que una cadena de enunciados (en la que cada enunciado es una consecuencia del anterior) y ya hemos asignado un número a cada enunciado, por lo que si una prueba consta de, por ejemplo, tres enunciados, se corresponderá entonces con tres números, pero a su vez, estos tres números se pueden convertir en un único número empleando el método anteriormente mencionado de modo que podremos identificar sus componentes en cualquier momento; todo lo que tenemos que hacer es descomponerlo en factores primos ordenados.

Supongamos que ha aparecido un número espantosamente grande en alguna de las asignaciones y supongamos también que hemos tenido la paciencia suficiente como para descomponerlo en factores primos, obteniendo entonces

$$2^{90\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \times 3^{90}$$

Observamos en primer lugar que los exponentes no son números primos. Por lo tanto, el número dado no se corresponde con un simple enunciado, sino con una cadena de enunciados, esto es, con una demostración. Además, sabemos que tal prueba consta de un total de dos declaraciones, que no son más que aquellas que se corresponden con los números

$$90\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \;\text{ y }\; 90.$$

Descomponiendo estos dos números en sus correspondientes factores primos ordenados, recuperaremos los enunciados correspondientes. En el primer número hay diecinueve ceros, por lo que tal número es igual a

$$9 \times 10^{19} = 3^2 \times 10^{19} = 3^2 \times 2^{19} \times 5^{19}$$

al ser $10 = 2 \times 5$. Por tanto, ordenando las bases de menor a mayor, obtendríamos

$$2^{19} \times 3^2 \times 5^{19},$$

por lo que la terna asociada al enunciado es la siguiente:

$$19,\ 2,\ 19.$$

Por otra parte, la descomposición en números primos del segundo número es bien conocida:

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1,$$

por lo que la terna asociada a la segunda declaración es la siguiente:

$$1,\ 2,\ 1.$$

Y recordando de nuevo el "diccionario":

$$\begin{array}{rcl}
1 & \dotfill & 1 \\
= & \dotfill & 2 \\
\neg & \dotfill & 3 \\
+ & \dotfill & 5 \\
 & \dotfill & \\
x & \dotfill & 19 \\
y & \dotfill & 23 \\
 & \dotfill &
\end{array}$$

vemos claramente que la terna

$$19,\ 2,\ 19,$$

se corresponde con la fórmula

$$x = x,$$

mientras que la terna

$$1,\ 2,\ 1$$

se corresponden con la fórmula

$$1 = 1.$$

Por lo tanto, lo que dice esta prueba es que si para cualquier x arbitrario tenemos que

$$x = x,$$

entonces

$$1 = 1.$$

Esta es una demostración muy pobre y, sin embargo, el número que se corresponde con ella ya es de tamaño astronómico, por lo que bien podemos imaginarnos cuán dantesco será el número asociado a una demostración de cierta relevancia. No obstante, lo esencial es que sabemos a ciencia cierta que le corresponderá cierto número perfectamente definido y que se puede reconstruir tal prueba a partir de ese número (aunque quizás no durante una vida humana).

Por tanto, podemos traducir fórmulas y pruebas a números naturales. Pero, ¿para qué sirve todo esto?

La Metamatemática examina el sistema desde el exterior; sus enunciados y afirmaciones se refieren a fórmulas o demostraciones sobre tal o cual fórmula en el sistema. Ahora bien, estas afirmaciones pueden transformarse empleando nuestro “diccionario” de manera que hablen de números naturales cuya descomposición en factores primos es tal o cual.

Por ejemplo, a medida que la Metamatemática examina las fórmulas del sistema que se pueden expresar empleando los signos del sistema, es posible que descubra que las cadenas de signos

$$1 = 1$$

y

$$\neg(1 = 1)$$

deben tratarse con cautela porque una es la negación de la otra. Ya hemos visto que la fórmula

$$1 = 1$$

se corresponde con el número

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90.$$

Por otra parte, según el “diccionario” (obviando que los paréntesis también son signos que, en realidad, deberían haber sido emparejados con ciertos números)

$$\begin{array}{rl}
1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 \\
= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2 \\
\neg & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3 \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 5 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

la fórmula

$$\neg(1 = 1)$$

se corresponden con el cuarteto

$$3,\ 1,\ 2,\ 1$$

y puesto que los cuatro primeros números primos son:

$$2,\ 3,\ 5\ \text{y}\ 7$$

el número natural asignado a dicho enunciado es igual a

$$2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1.$$

Efectuemos los productos:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 10 \times 10 \times 2 \times 3 \times 7 \\ &= 100 \times 42 = 4\,200 \end{aligned}$$

y escribamos ambas descomposiciones en factores primos una junto a la otra:

$$\begin{aligned} 90 &= \qquad 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \\ 4\,200 &= 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1. \end{aligned}$$

Por tanto, la afirmación metamatemática *"las sucesiones de signos de las fórmulas*

$$1 = 1 \ \textit{y} \ \neg(1 = 1)$$

expresan lo contrario la una de la otra" se traduce diciendo que *"*90 *y* $4\,200$ *son dos números tales que la descomposición en números primos de este último comienza con* 2^3 *pero los exponentes de los siguientes números primos coinciden con los exponentes de la descomposición en números primos de* 90*"*.

En esta última frase ya no hay ni rastro de Metamatemáticas, se trata una afirmación puramente teórica sobre números naturales. Pero el sistema axiomático bajo consideración sirve precisamente para formular enunciados sobre números naturales. Por lo tanto, podemos escribir esa frase empleando únicamente los signos del sistema, de modo que no quede en ella ni una sola palabra, convirtiéndose así en una de esas grises y ordinarias cadenas de signos que están libres de toda ambigüedad. Sin embargo, tal cadena sí que es ambigua. En efecto, pues podemos leer en ella dos cosas bien distintas: está, por una parte, el texto sobre Teoría de números que captamos al sustituir cada signo por su significado original, pero también está, por otra parte, aquello que dice la afirmación metamatemática que contiene.

Mientras jugaba con estas cadenas de signos ambiguas, Gödel se encontró con cierto número, supongamos que fue con 8 mil millones. Sabemos como se forma este número a partir de factores primos, pero una vida humana no sería suficiente para hacer todos los cálculos. No obstante, Gödel observó que para este número ocurre lo siguiente: si empleamos los signos del sistema del mismo modo que hicimos en el caso de la oración que acabamos de discutir pero para escribir ahora el enunciado metamatemático:

"la fórmula correspondiente a 8 *mil millones no es demostrable en el sistema"*

y nos preguntamos qué número se asigna a tal fórmula según el diccionario, nos sorprenderemos al saber que ese número es, exactamente, 8 mil millones. Por lo que "la fórmula asignada al número 8 mil millones" es esa misma fórmula. Por lo tanto, en uno de sus dos sentidos el enunciado dice lo siguiente:

"no soy demostrable".

Debe quedar claro que esto no es un juego de palabras ni ningún tipo de sofisma. Tenemos ante nosotros una fórmula gris ordinaria, una cadena de signos como cualquier otra. Pero cuando descubrimos con ayuda de nuestro "diccionario" la connotación metamatemática que se ha colado en tal sucesión de signos, nos percatamos de que tararea inocentemente la siguiente cantinela:

"no soy demostrable".

No es de extrañar que una fórmula como esta sea indecidible en el sistema axiomático; nada importa cuán inocente sea el enunciado sobre Teoría de números que exprese en su otro sentido.

Si fuese demostrable, contradeciría aquello que ella misma afirma en su sentido metamatemático, esto es, que no es demostrable.

Por el contrario, si fuese refutable, tal refutación confirmaría el enunciado metamatemático que contiene, esto es, que no es demostrable. Pero en tal caso, esa refutación sería su prueba.

Por tanto, no se puede probar ni refutar: es indecidible.

Quiero enfatizarlo otra vez: ignorando el "diccionario", esta cadena de signos no es más que una fórmula triste y ordinaria del sistema; podría indicar tranquilamente una inocente afirmación sobre sumas y productos. No obstante, Gödel demostró que existen fórmulas indecidibles en cualquier sistema axiomático. Así pues, podría suceder que, por ejemplo, la conjetura de Goldbach fuese una afirmación de este estilo. Es decir, es posible que todavía no haya sido resuelta porque si establecemos un sistema de axiomas a partir de los medios con los que se ha experimentado hasta ahora, la expresión formal de la propia conjetura podría estar tarareando según el "diccionario" la siguiente cantinela:

"no soy demostrable dentro del sistema".

Ocurre exactamente lo mismo con cualquier problema que todavía no haya sido resuelto; todo matemático debe considerar esta posibilidad.

Todavía podría plantearse la siguiente objeción: todo esto no es más que una deficiencia de los sistemas axiomáticos. Es de suponer que los "problemas de Gödel" podrían resolverse si uno no se limita a un sistema axiomático particular. Pero el matemático estadounidense Alonzo Church construyó en 1931 un problema que no puede resolverse mediante ninguna de las consideraciones matemáticas imaginables a día de hoy, independientemente de si nuestras conclusiones pueden limitarse al marco de algún sistema de axiomas o no.

Aquí es donde debo dejar de escribir: hemos llegado a los límites del pensamiento matemático actual. Esta época es una época de toma de conciencia; y las matemáticas también hacen su pequeña aportación: ella misma ha revelado los límites de sus propias habilidades.

Pero, ¿son éstos los obstáculos definitivos? Hasta ahora, en la historia de las Matemáticas siempre ha habido una salida para cada callejón sin salida. No obstante, hay un punto de la demostración de Church sobre el que convendría reflexionar: y es que tuvo que definir con exactitud qué entendemos por "consideración matemática imaginable a día de hoy" para poder aplicar luego a ese concepto los procedimientos de las Matemáticas. Pero tan pronto como se define algo, se delimita a ese algo y ninguna valla es tan estrecha como para impedir el paso de los problemas indecidibles, que se cuelan nuevamente.

Aunque ahora no entendamos ni veamos cómo, los futuros desarrollos de las Matemáticas ampliarán su horizonte conceptual. La eterna lección consiste entonces en que las Matemáticas no son una disciplina estática y cerrada, sino que están vivas y en constante desarrollo. Por más que queramos forzarlas para que adopten cierta forma, al verse acorraladas, siempre encuentran la salida y se escapan al exterior para renacer nuevamente.

Después de usar

Si quieres consultar de nuevo alguna página, por ejemplo, aquella en donde hablamos de la integral, sólo encontrarás un título en el Índice que dice: "Mucho poco vale mucho". Así que indicaré a continuación los conceptos matemáticos que se encuentran en cada capítulo (¡no permitas que esto te desanime!).

PARTE I

1 Sumas, multiplicación y exponenciación.

2 El volumen del cubo. Representación gráfica de funciones.

3 Sistemas de números. Reglas de divisibilidad.

4 Progresiones aritméticas. Área del rectángulo y el triángulo.

5 Diagonales de polígonos convexos. Combinaciones de dos elementos. La fórmula.
Posdata: Topología. Congruencia y semejanza. Sólidos regulares.

6 Combinatoria. Inducción matemática. Cuadrado de una suma de dos sumandos.

7 Descomposición en números primos. Distribución de los números primos. Teorema de los números primos.

8 Ecuaciones. La irresolubilidad de la ecuación de quinto grado. Teoría de Galois.

PARTE II

9 Números negativos. Vectores. Principio de permanencia.

10 Operaciones con fracciones. Media aritmética. Conjuntos densos en todas partes. El cardinal de los números racionales.

11 Conversión de fracciones a números decimales y viceversa. Series infinitas.

PARTE III

Magyar
Matemática

This is easily the best book on mathematics for everyman that I have ever seen. The author is both a highly creative mathematician and an experienced teacher of young children, and this happy combination, allied to a gift for lucid exposition has produced a delightful book...

Reuben Louis Goodstein, 1962.

This book is a popular account of modern mathematical ideas. The author states that her purpose is to reach that very large section of the population which always wanted to find out what modern mathematics was like, but thought that it was too difficult to understand. She attempts to give a clear picture of as many advanced concepts as possible without sacrificing rigour. The author's humour makes every page enjoyable. The author seems to have found a perfect compromise between rigour and clarity.

John Kemeny, 1948.

This is a delightful book, and the mathematician as well as the layperson could profit from reading it.

Philip Peak, 1977.

Ejemplar gratuito
9 788409 309160
SOUTIÑO
EDITORA