

JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER



**SOUTIÑO
EDITORIA**

JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER

Eötvös Loránd University, Budapest

TRADUCIDO POR

JORGE LOSADA RODRÍGUEZ

RAÚL PINO VELASCO

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

&

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Título original: *Játék a végtelennel: Matematika kívülállóknak*

Primera edición: abril de 2021

Traducción autorizada por el [Profesor Béla Andrásfai](#)

Copyright © Béla Andrasfai como sucesor legal de Rózsa Péter, 1957

Copyright de la traducción © Jorge Losada y Raúl Pino, 2021

[http://: www.webspersoais.usc.es/persoais/jorge.losada](http://www.webspersoais.usc.es/persoais/jorge.losada)

ISBN: 978-84-09-30916-0

Depósito Legal: C 838-2021

Ilustración de portada y contraportada: Fragmentos del cuadro *Cálculo mental en la Escuela Pública de S. A. Rachinsky*, obra de [Nikolay Bogdanov-Belsky](#) (1868-1945).



*Cuando comencé mi educación universitaria
todavía tenía muchas dudas sobre si era
lo suficientemente buena para las matemáticas.*

*Un compañero mío me dijo las palabras decisivas:
“no es que tú te merezcas estudiar matemáticas,
sino que las matemáticas se merecen que tú las estudies”.*

Rózsa Péter

*Dedicado a mi hermano, el Dr. Miklós Politzer,
quien falleció en Colditz (Sajonia) en 1945.*

Prefacio

ESTE libro ha sido redactado para personas con inquietudes intelectuales no matemáticas; esto es, para gentes de letras, artes y humanidades. He recibido tantas cosas buenas de esas disciplinas, que ahora me gustaría compensarles ofreciendo a cambio todo lo que sé de matemáticas. También quisiera convencer a estas personas de que, en realidad, no estamos tan alejados como a veces creemos. Me encantan las matemáticas no sólo por sus aplicaciones técnicas, sino también –y principalmente– por su propia belleza. El ser humano ha infundido en ellas su espíritu juguetón y éstas, como recompensa, nos agasajan a todos con el mejor de los juguetes: tocar y entender el infinito. Las matemáticas nos proporcionan contribuciones e ideas válidas y universales sobre el infinito y otros muchos conceptos, pero también arrastran consigo la naturaleza inconclusa e interminable de toda creación humana.

El carácter popular o divulgativo de este libro no implica en absoluto que se trate el tema de forma vana o superficial. Me he esforzado por presentar todos los conceptos con absoluta claridad y rigor pleno, intentado arrojar así nueva luz también para los ya versados en matemáticas y, por supuesto, para los profesores esta disciplina. Sí he descuidado sin embargo el aspecto sistemático y formalista que resultaría muy pesado aburrido. Es decir, sólo he omitido los tecnicismos (pues el propósito de este libro no es enseñar técnicas matemáticas). Si este libro cae en manos de un estudiante motivado, le proporcionará una imagen bastante completa y nítida del estado actual de las matemáticas. No era mi intención inicial escribir un libro tan extenso,

pero el material fue aumentando a medida que escribía y el número de temas que podrían omitirse menguó rápidamente. Si había fragmentos a los que se habían adherido viejos recuerdos aburridos, me sentí como quien hace brillar de nuevo a una vieja baratija quitándole el polvo con sus manos.

Es posible que el estilo te parezca ingenuo en algunos momentos, pero poco importa eso; un punto de vista ingenuo en relación con hechos simples evoca siempre la emoción de un nuevo descubrimiento.

En la *Introducción* te contaré cómo surgió este libro. El escritor que menciono allí es [Marcell Benedek](#), con quien intercambié numerosa correspondencia sobre cálculo diferencial. Escribir un libro a partir de aquellas cartas fue sugerencia suya.

No citaré ninguna fuente bibliográfica. Evidentemente, he aprendido muchas cosas de otras personas, pero a día de hoy ya no soy capaz de recordar con certeza de dónde saqué cada parte. No tenía libros frente a mí cuando escribí este libro. Sí que es cierto que, de vez en cuando, me venían a la mente algunas comparaciones e ideas cuya fuente sí recordaba perfectamente; mencionaré, por ejemplo, el hermoso libro de [Rademacher](#) y [Toeplitz](#)¹ o la excelente introducción al Análisis Matemático de [Beke](#)².

Una vez concebido un método en mi mente, no podía renunciar a él simplemente por no ser el más original. En este sentido, me refiero especialmente a las ideas que recibí de [László Kalmár](#), compañero de promoción que sería después mi maestro en esto de las matemáticas. Todo lo que escribo en el libro está indisolublemente ligado a su forma de pensar y entender esta ciencia. En particular, quisiera dejar constancia aquí de que el “ejemplo del chocolate” con el que se ilustrará el estudio de las series infinitas se debe completamente a él; la discusión sobre la construcción de las tablas logarítmicas también es obra suya.

Sí citaré a mis pequeñas colaboradoras en el aula por sus nombres de pila; se reconocerán a sí mismas fácilmente. Quiero mencionar aquí a mi alum-

¹ Nota de los traductores: se refiere a la versión original de la obra: H. Rademacher y O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Dover Publications, 1990.

² Nota de los traductores: se refiere a la obra (de la que desconocemos si existe alguna traducción): M. Beke, *Differenciál- és integrálszámítás I–II*, Franklin-Társulat, 1916.

na Kató, quien acaba de terminar recientemente el cuarto año de la escuela primaria y contribuyó notablemente al libro mientras se escribía. Es a ella a quien debo agradecerle el poder ver el material a través de los ojos de una alumna con talento.

Sin embargo, la ayuda más importante que recibí a la hora de redactar este libro fue la de la “persona no matemática”: Béla Lay, mi querida amiga y directora de teatro que hasta no hace mucho afirmaba *no tener oído para las matemáticas*. Fue ella quien siguió de cerca la elaboración y exposición de cada uno de los capítulos; yo sólo escribía el punto final cuando ella quedaba plenamente convencida. Sin su ayuda, este libro nunca hubiera sido escrito.

Pál Csillag examinó el manuscrito desde un punto de vista matemático; aunque en el último momento, László Kalmár también encontró tiempo para una revisión rápida. Agradezco a ambos la seguridad que siento de que todo lo escrito en el libro es correcto.

Rózsa Péter
Budapest, otoño de 1943.

Prefacio
(a la edición de 1957)

DESDE 1943 han pasado ya diecisiete años plagados de tristes acontecimientos. Durante este tiempo, mi amigo (el matemático) Pál Csillag y mi alumna Kató (Kató Fuchs) han sido víctimas del fascismo. El padre de mi alumna Anna, que fue encarcelado durante más de diecisiete años por actividades sindicalistas, ha sido finalmente liberado. De esta manera, es posible que en la imaginación de Anna las líneas rectas que siempre se acercan entre sí acaben encontrándose (véase la página 224). Durante la ocupación alemana no pudo publicarse ningún libro y muchas de las copias existentes fueron destruidas por los bombardeos, las pocas que resistieron aparecieron el *Día del libro* de 1945.

Este libro refleja mi modo de pensar en 1943, que apenas he cambiado desde entonces. Desde entonces, László Kalmár y yo hemos probado que la existencia de los conocidos como “problemas absolutamente indecidibles” se sigue del Teorema de Gödel sobre problemas relativamente indecidibles, pero una consecuencia nunca será más importante que el teorema del cual se deriva.

Rózsa Péter
Budapest, primavera de 1957.

Índice general

<i>Introducción</i>	I
 <i>I El aprendiz de brujo</i>	
1 <i>Jugando con los dedos</i>	4
2 <i>Las curvas de fiebre de las operaciones</i>	9
3 <i>Parcelando la sucesión infinita</i>	17
4 <i>El aprendiz de brujo</i>	24
5 <i>Variaciones sobre un tema fundamental</i>	32
<i>Posdata sobre geometría sin mediciones</i>	37
6 <i>Pasamos por todas las posibilidades</i>	46
7 <i>Coloreando la sucesión infinita</i>	59
8 <i>“He pensado un número”</i>	68
 <i>II La función creativa de las fórmulas</i>	
9 <i>Números con dirección</i>	78
10 <i>Densidad sin límite</i>	89
11 <i>Captamos el infinito de nuevo</i>	100
12 <i>La línea está llena</i>	114
13 <i>Las curvas de fiebre se suavizan</i>	128
14 <i>Matemáticas sólo hay una</i>	142
<i>Posdata sobre ondas y sombras</i>	154
15 <i>Elementos “Írja”</i>	164
16 <i>Algunos secretos del taller</i>	181
17 <i>Mucho poco vale mucho</i>	200

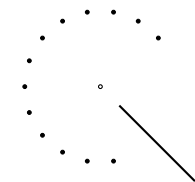
	<i>III Autocrítica de la razón pura</i>	217
18	<i>Y, sin embargo, existe una amplia gama de matemáticas</i>	217
	<i>Posdata sobre la cuarta dimensión</i>	228
19	<i>El edificio se tambalea</i>	231
20	<i>Las fórmulas se liberan</i>	239
21	<i>Ante el Tribunal de Súper-Matemáticas</i>	249
	<i>Posdata sobre la aproximación al infinito</i>	257
22	<i>¿Qué no saben las matemáticas?</i>	260
	<i>Después de usar</i>	271

Introducción

ME viene a la mente una conversación que tuve hace ya bastante tiempo. Uno de nuestros escritores y querido amigo mío se quejaba amargamente ante mí de que un importante aspecto de su educación había sido completamente descuidado: no sabía nada de matemáticas. Sentía esta carencia en su propio oficio a la hora de ponerse a escribir. Todavía recordaba el sistema de coordenadas de las matemáticas escolares y ya lo había empleado en comparaciones y metáforas, pero sentía que debían existir muchos más conceptos y herramientas matemáticas que también podría utilizar si los conociera. Según decía él mismo, su expresividad era mucho más pobre al no poder acceder a esa rica fuente. Era un gemido desesperado, pues aquel pobre hombre estaba convencido de que jamás sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas.

He recordado esta conversación muy a menudo, pues alentaba en mí nuevos planes e ideas. Entendí de inmediato que debía hacer algo. Para mí, en matemáticas, el estado de ánimo siempre ha sido el factor decisivo y, por otra parte, era cierto aquello que decía mi querido amigo: las matemáticas son, sin duda alguna, una fuente común de la que tanto escritores como artistas pueden y deben beber. Recuerdo todavía un ejemplo de mi infancia escolar. Estábamos leyendo una de las obras de [Shaw](#) y llegamos al momento en el que el protagonista pregunta a la protagonista cuál es su secreto para dominar y contener incluso a los hombres más rebeldes. La protagonista pensó por un instante y sugirió luego que tal vez eso podría explicarse por mantenerse siempre alejada de todos ellos. Al escuchar esto, mi compañera de pupitre (Ica

Benkő) exclamó de repente: “¡¡el teorema que aprendimos hoy en la clase de matemáticas, anda ya!!”. La pregunta matemática era la siguiente: ¿es posible acercarse a un conjunto de puntos desde un punto exterior de modo que nos acerquemos a todos los puntos del conjunto simultáneamente? La respuesta es afirmativa siempre y cuando el punto exterior se encuentre suficientemente alejado del conjunto:



Desde aquí no es posible:
si te acercas a unos puntos
te alejas de otros.



Desde aquí sí es posible:

La otra afirmación de mi amigo: aquello de que “nunca sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas” y que, por ejemplo, nunca lograría entender el concepto de derivada, no quise ni creerla. Intenté descomponer ese concepto en los pasos más claros, simples y evidentes que pude. El resultado fue muy sorprendente: un matemático no puede ni imaginarse las dificultades que la fórmula más simple podría causar al profano; ocurre como cuando el maestro novel no comprende como un niño es capaz de silabear hasta veinte veces la palabra ca...ra...col sin percatarse de que es un caracol.

Esta fue una experiencia que me hizo pensar nuevamente. Siempre había creído hasta entonces que la razón por la que el público estaba tan mal informado sobre las matemáticas era, simplemente, que nadie había escrito un buen libro popular para el público general sobre, por ejemplo, cálculo diferencial. No es interés lo que falta, pues es bien sabido que el público se apropia de todo lo que cae en sus manos sobre este género, pero ningún matemático profesional ha escrito un libro así hasta el momento. Cuando digo esto, estoy pensando en el verdadero profesional que sabe exactamente hasta qué punto se pueden simplificar las cosas sin falsificarlas y que entiende que no se trata de dar la vieja medicina amarga en una fuente de plata (pues también es cierto que la matemática escolar es un amargo recuerdo para la gran mayoría); hablo de alguien capaz de iluminar los puntos esenciales, que conozca el gozo de

la creación matemática y que sepa dar ese ímpetu cautivador a su escritura como para entusiasmar al lector. Me doy cuenta de que el libro más popular y divulgativo del mercado tampoco es comprensible para la mayoría de lectores.

Quizás sea éste el atributo característico del matemático: asumir y aceptar la amargura inherente al camino que recorre. “Me veo forzado a decirle, alteza, que el camino Real a la Geometría aún no ha sido inventado” dijo [Euclides](#) con enfado al [rey Ptolomeo](#) al ver que se éste había quedado dormido durante una de sus lecciones. No es posible leer matemáticas de manera superficial, la ineludible abstracción implica siempre cierto grado de auto-tortura y el matemático no es más que aquél para quien esa auto-tortura trae alegrías. El libro popular y divulgativo más simple tan sólo será entendido por aquellas personas que se comprometan de verdad y emprendan una amarga silabización de cada uno los detalles de una fórmula hasta entender por completo su significado.

No tengo intención alguna de escribir para esta gente; escribiré matemáticas sin fórmulas. Me gustaría transmitir la esencia y el espíritu de las matemáticas, pero desconozco si un intento como este será exitoso. Dejando de lado las fórmulas, renuncio a uno de los rasgos esenciales de las matemáticas. Tanto el escritor como el matemático son plenamente conscientes de la importancia de las fórmulas. Si no me crees, intenta imaginarte por un momento como expresarías la esencia de un soneto sin mencionar su estructura y forma tan características. Sin embargo, allá voy. Puede que, aun así, quede algo del verdadero espíritu y esencia de las matemáticas.

Hay algo que en ningún caso puedo permitir: no pospongas la lectura de ningún capítulo y no te conformes nunca con una simple ojeada. Las matemáticas sólo pueden construirse ladrillo a ladrillo, ningún paso es prescindible y no hay pasajes superfluos. Aunque no será tan evidente como lo sería en un aburrido libro sistemático, cada detalle posterior se basa en el anterior y es por tanto necesario que sigas algunas instrucciones: analiza con detalle y cautela todas las figuras y realiza los cálculos y dibujos que te vaya aconsejando. Prometo que no te aburrirás.

No haré uso de las nociones escolares más habituales. Empezaré contando y terminaré hablando de la rama más reciente de las matemáticas: la lógica matemática.

PARTE I

EL APRENDIZ DE BRUJO

1. Jugando con los dedos

EMPECEMOS por el principio. No describiré la historia de las matemáticas; eso sólo podría hacerse partiendo de la evidencia escrita ¡y cuán posterior al principio es la primera evidencia escrita! Debemos imaginarnos al hombre prehistórico en su entorno primitivo mientras empieza a contar. En esta obra, ese pequeño hombre que se convertirá poco a poco en un ser humano adulto y educado ante nuestros ojos siempre vendrá en nuestra ayuda; me refiero al bebé que empieza a conocer su propio cuerpo y el mundo que le rodea mientras juega con sus diez deditos. Es muy probable que para él las palabras “uno”, “dos”, “tres”, “cuatro” y “cinco” sólo sean meras abreviaturas de “este es el chiquito”, “este el del anillo”, “este el de la mano”, “este el escribano” y “este el matapulgas”. No es ninguna broma lo que acabo de decir; una vez escuché a un doctor que hay personas a quienes cierta lesión cerebral les impide distinguir un dedo de otro y pierden así, irremediablemente, toda capacidad de contar. Esta conexión subconsciente sigue en el interior de muchas personas educadas y bien formadas, de lo que deduzco que uno de los orígenes de las matemáticas se encuentra en la naturaleza lúdica del ser humano y es por ello que las matemáticas no son sólo una ciencia, sino también un arte.

Se cree que contar fue una actividad práctica desde el principio; es posible que el hombre primitivo quisiese vigilar sus pertenencias contando cuantas pieles de animales tenía. No obstante, también es concebible que contar fuese una especie de ceremonia ritual; todavía hoy los neuróticos compulsivos cuentan como invocando cierta prescripción mágica que aísle ciertos pensamientos nocivos o prohibidos. Por ejemplo, si yo ahora te pido que cuentes de uno hasta veinte, ya tienes otra cosa en que pensar y no podrás seguir leyendo este libro. Sea como sea, ya se tratara de pieles de animales o de intervalos de

tiempo sucesivos, contar siempre significa ir más allá de donde originalmente estábamos de uno en uno. Por supuesto, podemos avanzar más allá de nuestros diez dedos y aparece así la primera gran creación del ser humano: una sucesión infinita de números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

la sucesión de los números naturales. Es infinita porque después de cada número, por muy grande que éste sea, siempre podemos contar uno más. Este invento necesitó de una gran dosis de abstracción, pues estos números sólo son sombras de la realidad visible. Por ejemplo, el 3 ya no significa tres dedos, 3 manzanas, 3 latidos, etc, sino aquello que es común a todos ellos, algo que abstraemos de ellos, es decir, su número o cantidad. Por otra parte, las cantidades muy grandes ni tan siquiera han sido abstraídas de la realidad, pues nadie ha visto nunca mil millones de manzanas y nadie ha contado nunca mil millones de latidos; simplemente, imaginamos estos números por analogía con los más pequeños que sí tienen una base en la realidad, pero en la imaginación uno podría seguir contando indefinidamente más allá de cualquier número conocido.

Nunca nos cansamos de contar. La simple alegría de la repetición es el motor. Los poetas lo tienen claro: el retorno al mismo ritmo, al mismo sonido o a la misma rima no son más que expresiones de cierta actividad vital. Del mismo modo, los niños tampoco se aburren jugando siempre al mismo juego; pero, sin embargo, el anciano reumático pronto se cansa de patear o lanzar el balón una y otra vez.

¿Hemos llegado hasta 4? ¡Contemos uno más, después uno más, después uno más! ¿Adónde hemos llegado? Pues llegamos al 7, el mismo número al que hubiéramos llegado si sumásemos tres de un solo golpe. Descubrimos así la suma:

$$4 + 1 + 1 + 1 = 4 + 3 = 7.$$

Sigamos jugando con esta operación. Sumemos 3 a 3, después otros 3, luego otros 3 y finalmente otros 3. En tal caso caso, habremos sumado 3 cuatro veces, hecho que podríamos enunciar brevemente diciendo que cuatro treses son 12, o simbólicamente:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$$

y esto es la multiplicación.

Una vez que conocemos la alegría de la repetición, es difícil parar. Podemos

continuar jugando con la multiplicación de la siguiente forma: multipliquemos 4 por 4 y otra vez por 4, obtendremos así:

$$4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Esta repetición o “iteración” de la multiplicación se llama exponenciación. Se dice que 4 es la “base” e indicamos con un pequeño número escrito en la parte superior derecha del 4 el “exponente”, que es el número de cuatros que tenemos que multiplicar. Es decir, la notación es la siguiente:

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Como ves, los resultados que obtenemos son números cada vez más grandes: 4×3 es más grande que $4 + 3$ y 4^3 es mucho más grande que 4×3 . La divertida repetición nos eleva a números cada vez más grandes. Iteremos pues la exponenciación elevando 4 al exponente que es la cuarta potencia de cuatro, que es

$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256,$$

por lo que

$$4^{4^4} = 4^{256} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times \dots$$

En total deberían aparecer ahí 256 cuatros, pero no tengo paciencia para seguir escribiendo y, por favor, ¡ni hablemos del cálculo efectivo de todas esas multiplicaciones! El resultado sería un número inimaginablemente grande, por lo que preferimos emplear el sentido común y aun sabiendo lo divertido que sería continuar iterando y repitiendo, no incluiremos la iteración de la exponenciación entre nuestras operaciones aceptables.

Quizás sea ésta la verdad: el espíritu humano juega con todo aquello que se le ofrece, pero sólo guarda y valora aquello que el sentido común le dicta como apropiado.

La suma, la multiplicación y la exponenciación han demostrado ser muy útiles y convenientes en multitud de actividades ordinarias del ser humano y es por ello que han adquirido derechos civiles plenos y perpetuos en matemáticas. Así pues, conocemos todas sus propiedades que simplifican y facilitan notablemente el cálculo. Por ejemplo, es un gran alivio saber que 28×7 , además de ser calculado sumando 28 siete veces, también se puede calcular en tres pasos: primero efectuamos los productos 7×20 y 7×8 y luego sumamos $140 + 56$. Por otra parte, cuando sumamos una larga fila de números, es completamente indiferente el orden en que lo hagamos. Por ejemplo, para

calcular $8 + 7 + 2$, podemos hacer primero $8 + 2 = 10$ y ahora a 10 ya es muy fácil sumarle 7, evitando así la incómoda suma de $8 + 7$. Tan sólo hay que entender que sumar significa contar tantas veces como números queremos sumar y entonces será evidente que cambiar el orden no altera en absoluto el resultado. Convencerse de que ocurre lo mismo con la multiplicación es un poco más complicado, pues 4×3 significa $3 + 3 + 3 + 3$ y 3×4 significa $4 + 4 + 4$, por lo que ya no es tan evidente que

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4.$$

Pero es evidente si dibujamos. Prueba y dibuja cuatro veces, una debajo de otra, tres puntos en posición horizontal como estos

• • •

obtendrás algo como esto:

• • •
• • •
• • •
• • •

Todos vemos ahora que es exactamente lo mismo que dibujar tres veces, una al lado de la anterior, cuatro puntos en posición vertical

•
•
•
•

Este es el motivo por el que los matemáticos llaman a multiplicando y multiplicador con el mismo nombre: factores.

Fijémonos ahora en las reglas de la exponenciación:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5.$$

Si me canso de tanta multiplicar, puedo tomarme un descanso; el producto de los tres primeros cuatros es 4^3 y todavía tengo que multiplicar por 4^2 ; por tanto,

$$4^3 \times 4^2 = 4^5$$

y el exponente del resultado es 5, que es igual a $3 + 2$. Así pues, para multiplicar dos potencias de 4, sumamos los exponentes. De hecho, es una regla general.

Por ejemplo,

$$5^4 \times 5^2 \times 5^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{5^4} \times \underbrace{5 \times 5}_{5^2} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{5^3} = 5^9,$$

donde nuevamente $9 = 4 + 2 + 3$.

Revisemos el camino recorrido: fue contando como llegamos a cada operación. Por supuesto, cualquiera podría objetar ¿y dónde está la resta? ¿y la división? Pero estas operaciones no son más que inversiones de las operaciones ya comentadas (así como la extracción de raíces y los logaritmos). Porque, por ejemplo, $20 \div 5$ significa que ya conozco el resultado de una multiplicación cuyo resultado es igual a 20 y que estoy buscando el número que multiplicado por 5 da 20. En este caso, es muy fácil, pues todos sabemos que $5 \times 4 = 20$, pero no será siempre tan sencillo encontrar ese número y, de hecho, no existe siempre. Por ejemplo, 23 no coge entre 5 sin un resto, pues $4 \times 5 = 20$ es demasiado pequeño y $5 \times 5 = 25$ demasiado grande. Es por esto que nos vemos obligados a conformarnos con el más pequeño y decimos que 23 coge a 5 cuatro veces pero todavía faltan 3. Este tipo de situaciones provocan más dolores de cabeza que nuestras hilarantes iteraciones; las operaciones inversas suelen ser más amargas. Son el punto de ataque favorito de las investigaciones matemáticas, pues –como ya es bien sabido– a los matemáticos les encantan las dificultades. Hablaremos de las operaciones inversas más adelante.

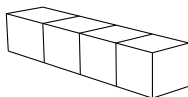
2. Las curvas de fiebre de las operaciones

EN el capítulo anterior hemos constatado que la iteración de las operaciones más elementales nos eleva hacia números cada vez más y más grandes. Merece entonces la pena que nos paremos a reflexionar por un instante en las alturas alcanzadas.

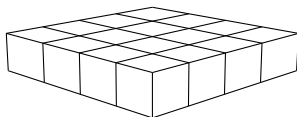
Las potencias, por ejemplo, se emplean en el cálculo del volumen de un cubo. Dado un pequeño cubo como unidad, se trata de saber cuántos de esos cubos serán necesarios para rellenar un cubo más grande cuyo volumen pretendemos medir. Consideremos pues, por ejemplo, un cubo de 1 cm; esto es, un cubo cuya altura, anchura y longitud miden exactamente 1 cm.



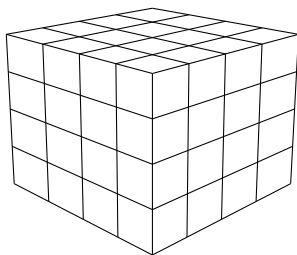
Coloquemos ahora cuatro de estos pequeños cubos pegados entre sí para formar una fila de cubos como esta:



y juntemos después cuatro de estas filas para formar una placa como esta:



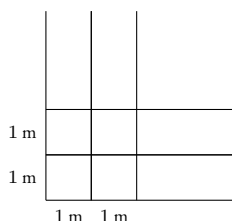
en la que hay exactamente $4 \times 4 = 4^2$ cubos. Finalmente, apilando cuatro de estas placas, obtenemos un cubo tan grande como este:



que consta de un total de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ cubos pequeños.

Recíprocamente, partiendo ahora del cubo grande cuya longitud, anchura y altura es de 4 cm, vemos que éste puede formarse empleando 4^3 cubos de 1 cm de longitud, anchura y altura. En general, obtenemos el volumen de un cubo elevando una de sus aristas a la tercera potencia. Es por esto que llamamos “cubicar” o “elear al cubo” a la operación consistente en elevar a la tercera potencia ¹.

Una consecuencia de lo anterior es que un cubo cuya arista sea relativamente pequeña tendrá un gran volumen. Por ejemplo, 1 kilómetro tampoco es una distancia excesivamente grande; la [calle Nagymező](#) de Budapest mide aproximadamente 1 kilómetro de largo y, sin embargo, si construyeran un cubo tan grande como para que una de sus aristas fuese la calle Nagymező, ese cubo tendría un volumen suficiente como para contener a toda la humanidad. Si no me crees, echemos cuentas: supongamos que nadie mide más de 2 metros de altura, hagamos entonces una planta cada 2 metros –dado que nuestro cubo mide 1 kilómetro de alto, tendrá 500 pisos de altura– y dividamos longitudinalmente cada una de estas plantas en franjas de 1 metro de ancho tal y como se indica en este dibujo:

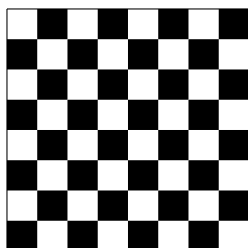


Cada franja se divide a su vez en 1 000 cuadrados y dado que teníamos 1 000 franjas, tendremos un total de $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ cuadrados en cada planta. La dimensión de cada cuadrado es de 1 metro de ancho por 1 metro de largo, por lo que podemos meter tranquilamente a cuatro personas en cada cuadrado; además, dos de esas personas llevarán a un niño pequeño

¹ Conozco las objeciones de algunos profesores: debería haber dicho que obtengo la *medida* del volumen del cubo elevando la *medida* de la longitud de su arista al cubo. Intentaré no aburrirte con estas simplezas, pero hay un asunto más importante; la pregunta es la siguiente, ¿es posible expresar la longitud de la arista de cualquier cubo en centímetros? Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

en brazos. Así pues, en cada planta caben 6 veces 1 000 000 personas, esto es, 6 millones de personas por planta, por lo que en las 500 plantas del cubo entrarían 500 veces 6 millones de personas, es decir, 3 000 000 000 personas, que era la población aproximada de la Tierra cuando me hablaron de dicho cubo.

Y, pese a todo, en el cálculo del volumen de un cubo tan sólo entra en juego la tercera potencia; un exponente mayor todavía nos haría avanzar mucho más rápido. Esto sorprendió al príncipe a quien el inventor del ajedrez “sólo” le pedía modestamente unos pocos granos de trigo como recompensa.



Por la primera casilla de su tablero pidió 1 grano de trigo, el doble –esto es, 2 granos– por la segunda casilla, el doble –esto es, $2 \times 2 = 2^2 = 4$ granos– por la tercera y así sucesivamente. Inicialmente, esta petición parece excesivamente modesta, pero a medida que vamos avanzando por las casillas del tablero nos encontramos con potencias de 2 cada vez más grandes, hasta que finalmente estaríamos hablando de un total de

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}$$

granos de trigo (por favor, imagina que en la suma anterior aparecen todas las potencias intermedias; no tuve paciencia para escribir los 64 sumandos). Si uno se pone a calcular esa cantidad, resulta que es trigo suficiente como para cubrir la superficie de la Tierra con una capa de trigo de 1 cm de altura.

Después de esto, ya no debería sorprenderte la inmensa altura a la que nos elevará la iteración de la exponenciación. Me limitaré a mencionar el siguiente hecho anecdótico: se estima que 9^{9^9} es un número tan tan grande que para escribirlo sería necesario un papel de 18 000 kilómetros de longitud (¡escribiendo un dígito cada medio centímetro!) y además, toda una vida humana sería claramente insuficiente para efectuar dicho cálculo.

Revisando lo que llevaba escrito hasta ahora me he percatado de que empleé expresiones como “nos eleva a” para refirme a avanzar sobre la sucesión de números naturales, pero dicha sucesión de números:

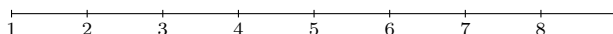
1, 2, 3, 4, 5, ...

es una fila horizontal de números, por lo que debería haber dicho que avanzo hacia la derecha o, como mucho, que voy hacia números cada vez más grandes. No obstante, el término escogido muestra una clara influencia de nuestro estado de ánimo: hacerse cada vez más grande significa crecer y el crecimiento crea en los seres humanos una sensación de conmoción. Los matemáticos concretan este sentimiento sobre el papel acompañando a sus imaginaciones con dibujos y esquemas; el dibujo de un crecimiento muy rápido se identifica con una línea que se eleva de forma muy abrupta.

Los pacientes están más que familiarizados con estos dibujos; tan sólo necesitan echar un vistazo a su curva de la temperatura corporal para conocer el curso de su enfermedad. Supongamos que los siguientes números indican la temperatura corporal de un paciente medida a intervalos regulares de tiempo:

38° , 38.5° , 39° , 39° , 38° , 38.5° , 37° , 36.5° .

Estos datos se representan gráficamente del siguiente modo: dibujamos primero una línea recta horizontal e indicamos sobre ella los intervalos regulares de tiempo mediante marcas verticales separadas entre sí cierta distancia constante

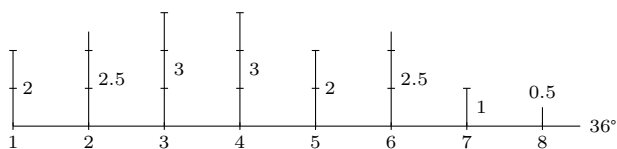


escogemos después otra distancia para representar a un grado de temperatura y, desde cada una de las marcas que representan a un instante de tiempo, trazamos hacia arriba ² esa distancia tantas veces como indica la fiebre del paciente en dicho instante. No es necesario dibujar líneas tan largas, pues la temperatura corporal del paciente jamás caerá por debajo de 36° por lo que podemos imaginarnos que la línea horizontal se corresponde con esos 36° . Es decir, basta dibujar por encima de la línea horizontal los números:

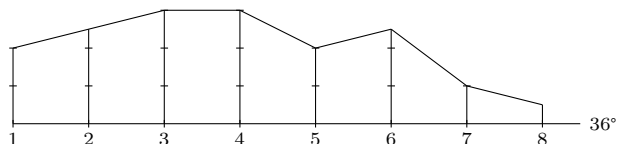
2, 2.5, 3, 3, 2, 2.5, 1, 0.5,

² Decir “hacia arriba” es un discurso figurativo, ya que en una hoja de papel plana sólo podemos dibujar líneas horizontales. Sin embargo, percibimos que una línea como esa apunta, efectivamente, hacia arriba.

que representan a los correspondientes grados de temperatura corporal. Obtenemos así la siguiente gráfica:



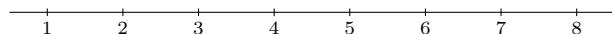
y conectando los extremos de los segmentos verticales:



La curva de fiebre así obtenida lo dice todo: mientras que los segmentos ascendentes indican una subida de la temperatura corporal, los segmentos descendentes representan una bajada de la fiebre del paciente y los segmentos horizontales muestran un periodo de estancamiento. El ascenso fue pues uniforme en un principio, esto lo atestigua que los dos primeros segmentos son igual de empujados y forman así una línea recta. Excepto una leve recaída en la sexta medición, el paciente se recuperó rápidamente: la inclinación del segmento que une la sexta y séptima medición es muy abrupta, más abrupta que la de cualquier incremento.

Nada ni nadie nos impide trazar las curvas febriles de nuestras operaciones.

Los números se suelen representar a lo largo de una línea recta escogiendo un punto de partida –al que llamaremos punto 0– y acumulando distancias de igual magnitud a partir de dicho punto; es decir, contamos empleando esas distancias:



Si ya eres hábil contando, ahora puedes realizar las operaciones sobre dicha recta automáticamente. Por ejemplo, si $2 + 3$ fuese la operación considerada, tan sólo tendríamos que dar tres pasos hacia la derecha desde el 2 y leer después el resultado que allí aparece: 5. Si quisiésemos calcular $5 - 3$, tendríamos que desplazarnos tres pasos hacia la izquierda desde 5. Esto tan sólo es otra versión

de aquella calculadora de la escuela primaria que nos permitía efectuar ciertas cuentas deslizando esferas por varillas metálicas.

Abandonemos la línea horizontal y miremos hacia arriba. Comencemos con un número fijo, como por ejemplo 3, y veamos como aumenta si le sumamos 1, 2, 3, ..., si lo multiplicamos por 1, 2, 3... o si lo elevamos a 1, 2, 3, ... ("elevar a cierta potencia", otra expresión en la que aparece la idea de apuntar hacia arriba).



Empecemos por la suma. Dado que uno de los sumandos siempre es 3, representaremos el otro sumando en la línea horizontal y la suma correspondiente hacia arriba:

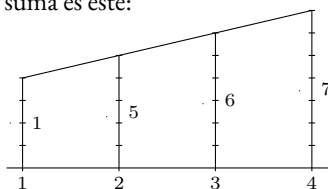
$$3 + 1 = 4$$

$$3 + 2 = 5$$

$$3 + 3 = 6$$

$$3 + 4 = 7$$

Así pues, si representamos horizontalmente a 1 mediante una distancia como esta  y verticalmente mediante una distancia como esta , el "diagrama febril" de la suma es este:



Aquí, cada segmento de unión cae sobre una misma recta; deducimos entonces que la suma crece de manera uniforme.

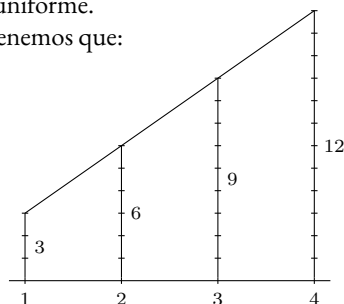
En el caso da multiplicación, tenemos que:

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 12$$



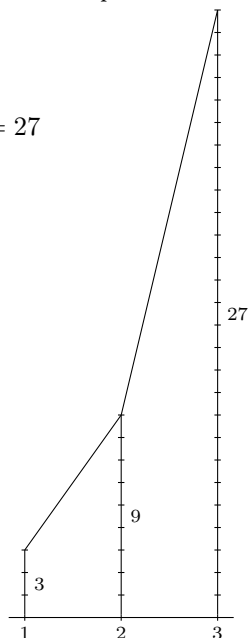
Se observa entonces que el producto también crece de forma uniforme a medida que aumentamos uno de sus factores, pero mucho más rápidamente que la suma: la pendiente de la recta es ahora mucho más pronunciada.

Finalmente, para las potencias tenemos que:

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$



Por tanto, observamos que las potencias ya no crecen de forma uniforme, sino que lo hacen a un ritmo cada vez mayor; 3^4 ya no cabría en esta hoja de papel. He ahí el origen de la expresión “crecimiento exponencial”.

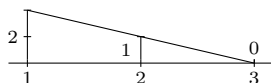
También podemos construir la curva febril de las operaciones inversas. Por ejemplo, para la resta tenemos que:

$$3 - 1 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - 3 = 0$$

$$3 - 4 = -1$$



Luego la diferencia también disminuye uniformemente a medida que aumenta el sustraendo.

La división es una operación delicada; no hablaré de su curva febril hasta más adelante.

Tan sólo añadiré el siguiente comentario: lo que acabamos de hacer es lo que los matemáticos denominan “representación gráfica de una función”. Dado que el resultado final de la suma depende del valor escogido para el segundo sumando, se dice que el valor de la suma es función del segundo sumando, que sería la variable independiente. Lo que hicimos anteriormente no fue más que representar gráficamente el crecimiento de dicha función. Del mismo modo, el valor del producto es función de su factor variable y la exponenciación es función del exponente. Como ves, ya nos hemos encontrado con las funciones sin más que mencionar y jugar un poco con las operaciones más elementales. Continuaremos examinando estas relaciones funcionales más adelante, pues el concepto de función es la columna vertebral de toda la estructura matemática.

3. *Parcelando la sucesión infinita*

¡C UÁN largo camino hemos recorrido desde aquellos juegos iniciales con diez dedos! Si ya has olvidado que tienes diez dedos es porque no quise aburrirte con muchas cuentas. En otro caso, ya te habrías percatado de que por muy grande que sea el número que queremos escribir, tan sólo emplearemos para ello 10 símbolos distintos, a saber:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pero, ¿cómo es posible describir una cantidad infinita de números con tan sólo 10 caracteres? El truco es simple y consiste en parcelar la sucesión de números agrupando oportunamente sus infinitos elementos. Tan pronto como hayamos contado 10 unidades nos decimos a nosotros mismos que todavía podemos captar esta cantidad de un sólo vistazo y juntamos esas diez unidades en un único manajo al que llamaremos decena; por tanto, una decena es el nombre colectivo para 10 unidades. Y, al igual que podemos cambiar 10 monedas de un céntimo por una única moneda de 10 céntimos, ahora también podemos contar a pasos agigantados avanzando de diez en diez. Evidentemente, también podremos atar luego diez decenas en un único manajo con una cinta en la que diga “1 centena”. Continuando de este modo, podremos agrupar después 10 centenas en 1 millar, 10 millares en un diez mil millar, 10 diez mil millares en un cien mil millar y 10 cien mil millares en un millón. De este modo, es posible escribir cualquier número empleando esos diez símbolos. Tan pronto como sobrepasemos 9, escribimos un nuevo 1; indicaremos así 1 decena. El siguiente número consiste en una decena y una unidad, por lo que será descrito empleando dos 1’s. Sin embargo, a la hora de escribir estos números, en principio, también deberíamos utilizar las palabras “decena”, “centena”, “unidades de millar”, etcétera. No obstante, una idea inteligente hace que esto sea completamente innecesario. Fíjate en que el cajero del supermercado: coloca las monedas en diferentes compartimentos. Las monedas de menor valor están colocadas siempre más hacia la derecha porque el cajero necesita de ellas constantemente para dar las vueltas, mientras que reserva los compartimentos más hacia la izquierda para monedas y billetes de mayor valor. El cajero está tan acostumbrado a esta disposición que ya conoce el valor de las monedas mirando sólo para la posición del compartimento. Análogamente, nosotros también podemos ponernos de acuerdo en

22. ¿Qué no saben las matemáticas?

LA demostración de la ausencia de contradicciones en la Teoría de números puso de manifiesto una de las imperfecciones de la axiomatización. La inducción transfinita allí empleada puede formularse en el lenguaje de los números naturales y es un procedimiento fácilmente concebible por una mente finita. Sin embargo, trasciende al sistema delimitado por los axiomas de la Teoría de números naturales.

Éste no es un fenómeno aislado: no existe ningún sistema axiomático capaz de caracterizar exactamente aquello que pretende delimitar; siempre habrá algo que se le escape y, por otro lado, siempre incluye algo inesperado. Un sistema axiomático capta una serie de cosas, pero en realidad sólo contiene una parte de ellas.

Que un sistema axiomático abarca mucho fue probado por el matemático noruego [Thoralf Skolem](#).

Aunque con nuestros axiomas sólo pretendamos captar la sucesión de los números naturales en su orden habitual, queramos o no, los ordenamientos más complejos de dicha sucesión también se introducirán irremediabilmente en el sistema. No es posible separar unos de otros.

Por otra parte, si queremos delimitar axiomáticamente un dominio no numerable –como es el caso, por ejemplo, de los números reales–, siempre habrá un conjunto numerable inmiscuido en él que cumple las condiciones de todos los axiomas.

Que los sistemas axiomáticos siempre se dejan algo fuera fue revelado a partir de un sorprendente descubrimiento de Gödel: existen problemas indecidibles en cualquier sistema axiomático que contenga a la Teoría de números.

Pero, ¿qué se supone que significa esto realmente?

Hay muchos problemas matemáticos que todavía no han sido resueltos. Ya he mencionado alguno. Lo hice, por ejemplo, cuando te hablé de los números primos “gemelos” (como 11 y 13 o 29 y 31): ¿hay infinitos números primos gemelos? La [conjetura de Goldbach](#) tampoco ha sido resuelta. Se ha observado que:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

¿QUÉ NO SABEN LAS MATEMÁTICAS?

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

.....

Esto es, parece que los números pares, excepto el 2, se pueden escribir como suma de dos números primos, y en ocasiones incluso de más de una forma. De hecho, esto es cierto para todos los números pares que han sido examinados hasta el momento. Sin embargo, a día de hoy, la veracidad de tal hecho para todo número par no es más que una mera conjetura.

La [conjetura de Fermat](#) es la más famosa y conocida. Sabemos que

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

o equivalentemente, que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

y además de éste, hay más ejemplos de ternas de números enteros en las que la suma de los cuadrados de los dos primeros números es igual al cuadrado del tercero. Garabateando en el margen de un libro, Fermat anotó que había encontrado una prueba de que una relación análoga a ésta pero con exponentes mayores que 2 ya no es posible, pero lamentaba también no disponer de espacio suficiente en dicho margen para escribir los detalles. En otras palabras, anotó que es imposible encontrar tres números enteros, x , y y z para los que

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$\text{o } x^4 + y^4 = z^4$$

$$\text{o } x^5 + y^5 = z^5$$

.....

Fermat murió hace ya bastante tiempo. Y aunque han sido muchos los matemáticos que han intentado reconstruir su demostración, ninguno ha tenido éxito hasta el día de hoy¹. Estos esfuerzos infructuosos por encontrar una prueba, que supuestamente alguien ya tuvo entre sus manos despertaron tal interés por este problema tan poco interesante que incluso hubo quien dejó por testamento una gran fortuna para quien lo resolviera. Y así, no es de extrañar que despertara la imaginación de los ignorantes tanto o más que la cuadratura del círculo. Afortunadamente, el espíritu empresarial ya se ha

¹ Nota de los traductores: La conjetura Fermat, también llamada Último Teorema de Fermat, fue probada en 1995 por el matemático inglés [Andrew Wiles](#).

atenuado notablemente una vez que el dinero prometido ha perdido gran parte de su valor.

No obstante, este problema ha tenido un efecto estimulante en las Matemáticas; pues con la intención de hacerlo más accesible, se introdujeron nuevos elementos ideales –los conocidos como “ideales”– que luego resultaron de gran utilidad en las ramas más importantes del Álgebra. Pero, aun así, la conjetura de Fermat sólo ha sido probada para algunos exponentes particulares; en su generalidad, todavía carece de respuesta. Lo más probable es que Fermat cometiera algún error en su prueba o que encontrara, simplemente, una prueba para cierto caso especial.

Pero también hay problemas en Matemáticas para los que se ha demostrado su irresolubilidad si nos restringimos a ciertos métodos y herramientas concretas. Éstos son, por tanto, problemas ajenos a toda discusión y completamente resueltos, pero en sentido negativo. Problemas de este estilo son, por ejemplo, la solución general de una ecuación de quinto grado y la cuadratura del círculo. La trisección de un ángulo o la duplicación de un cubo también pertenecen a esta categoría de problemas. Se ha probado que ambas tareas son irrealizables empleando únicamente regla y compás. Con estas herramientas podemos dividir cualquier ángulo a la mitad, pero ya no podemos dividirlo en tres ángulos de igual amplitud. La duplicación del cubo es el análogo tridimensional de la duplicación de nuestro estanque de peces. Mientras que en plano pudimos construir el lado del cuadrado grande con regla y compás, en el espacio tridimensional ya no es posible construir la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de uno dado empleando sólo esas herramientas. Esta tarea también es conocida como el [problema de Delos](#), ya que, supuestamente, los dioses exigieron al pueblo de Delos que duplicase el tamaño de su altar en forma de cubo para librarles de una calamitosa pandemia. Toda la buena voluntad de los fieles fue insuficiente. Fue [Platón](#) quien consoló a los habitantes de Delos: los dioses se habrían mofado de su negligente educación e ignorancia para indicarles las virtudes del estudio y cuidado de la Geometría.

Sin embargo, el teorema de Gödel no trata sobre problemas que todavía no han sido resueltos o cuya irresolubilidad ya ha sido probada, sino sobre problemas que son indecibles dentro del sistema axiomático correspondiente.

Ahora quisiera dar un esbozo general del argumento de Gödel.

Supongamos que tenemos un sistema axiomático consistente para los nú-

meros naturales o, lo que es lo mismo, para la Teoría de números. En esos axiomas habríamos incluido todo lo que pudiera ser necesario en esta área de las Matemáticas y, por supuesto, también nos habríamos cerciorado de que no hubiera ninguna contradicción. Además, habríamos escrito todo en el lenguaje de la lógica simbólica, por lo que cada enunciado no sería más que una cadena de signos.

En tal caso, así como antes asociábamos un par de números a cada punto del plano, ahora podemos asociar un número a cada una de esas cadenas de caracteres. Para ello, procederemos tal y como indicamos a continuación. Dado que tenemos una cantidad finita de signos lógicos y matemáticos, asociaremos a cada uno de éstos uno de los primeros números primos (aquí consideraré a 1 como número primo). Así pues, por ejemplo, el signo 1 se correspondería con el propio número 1 y hecho esto, ya no son necesarios más signos para los demás números, pues podemos escribir a 2 como $1 + 1$, a 3 como $1 + 1 + 1$ y así sucesivamente; al signo “=” le asociamos el segundo número primo, que es el 2; al signo de “negación”, es decir, a “ \neg ” le asociamos tercer número primo, que es el 3; al signo “+” le asociamos el cuarto número primo, que es el 5 y así sucesivamente. Nada importa aquí el orden que escojamos para nuestros signos. Supongamos que 17 es el número primo que se corresponde con nuestro último símbolo. Ahora, a partir del 19, los siguientes números primos se asociarán con las letras x, y, z, \dots que denotarán a los valores desconocidos que aparecen en los enunciados del sistema. Por ejemplo, x se corresponde con 19, y con 23 y así sucesivamente.

Obtenemos de este modo una especie de “diccionario”:

1	1
=	2
\neg	3
+	5
	
x	19
y	23
	

a partir del cual vemos de inmediato que, por ejemplo, la fórmula $1 = 1$ se corresponden con la terna de números 1, 2, 1.

Veamos ahora como pasar de la terna 1, 2, 1 a un único número. Esto es

relativamente fácil de hacer e incluso disponemos de varias opciones. Una de ellas podría consistir, por ejemplo, en sumar los tres números; obtendríamos así, en nuestro caso, el número 4. Todo correcto, pero el problema es que este 4 se ha tragado los otros números: sólo a partir de él es imposible saber de qué números se compuso y en qué orden. Por ejemplo, 4 podría provenir tranquilamente de

$$1 + 3 \text{ o } 3 + 1 \text{ o } 2 + 2 \text{ o } 1 + 1 + 1 + 1 \text{ o } 2 + 1 + 1$$

y no sólo de

$$1 + 2 + 1.$$

¡Lo que quiero es un número que me permita identificar exactamente cada una de las partes que lo componen! Y por supuesto que hay una forma de obtener tal número: consiste en multiplicar los tres primeros números primos, que son:

$$2, 3 \text{ y } 5,$$

elevando previamente cada uno de ellos a la potencia respectiva que es indicada por cada uno de los números que forman nuestra terna:

$$1, 2 \text{ y } 1.$$

Es así como se obtiene el siguiente producto:

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90,$$

por lo que de ahora en adelante, asociaremos la fórmula

$$1 = 1$$

con el número

$$90.$$

Partiendo únicamente de un número, es fácil identificar cuál es la fórmula que se le ha asignado; lo único que hay que hacer es descomponer el número en factores primos ordenados:

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1,$$

por lo que los números primos

$$1, 2 \text{ y } 1$$

aparecen de nuevo como exponentes y, según nuestro “diccionario”, a ellos están asociados los signos

$$1, = \text{ y } 1,$$

por lo que partiendo de 90, identificamos correctamente la fórmula correspondiente; que es, en este caso,

$$1 = 1.$$

Cada enunciado del sistema se corresponde entonces con un número. Y entonces, a cada demostración se le puede asignar un número empleando el mismo procedimiento. Desde un punto de vista puramente formal, una demostración no es más que una cadena de enunciados (en la que cada enunciado es una consecuencia del anterior) y ya hemos asignado un número a cada enunciado, por lo que si una prueba consta de, por ejemplo, tres enunciados, se corresponderá entonces con tres números, pero a su vez, estos tres números se pueden convertir en un único número empleando el método anteriormente mencionado de modo que podremos identificar sus componentes en cualquier momento; todo lo que tenemos que hacer es descomponerlo en factores primos ordenados.

Supongamos que ha aparecido un número espantosamente grande en alguna de las asignaciones y supongamos también que hemos tenido la paciencia suficiente como para descomponerlo en factores primos, obteniendo entonces

$$2^{90\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \times 3^{90}$$

Observamos en primer lugar que los exponentes no son números primos. Por lo tanto, el número dado no se corresponde con un simple enunciado, sino con una cadena de enunciados, esto es, con una demostración. Además, sabemos que tal prueba consta de un total de dos declaraciones, que no son más que aquellas que se corresponden con los números

$$90\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ y } 90.$$

Descomponiendo estos dos números en sus correspondientes factores primos ordenados, recuperaremos los enunciados correspondientes. En el primer número hay diecinueve ceros, por lo que tal número es igual a

$$9 \times 10^{19} = 3^2 \times 10^{19} = 3^2 \times 2^{19} \times 5^{19}$$

al ser $10 = 2 \times 5$. Por tanto, ordenando las bases de menor a mayor, obtendríamos

$$2^{19} \times 3^2 \times 5^{19},$$

por lo que la terna asociada al enunciado es la siguiente:

$$19, 2, 19.$$

Por otra parte, la descomposición en números primos del segundo número es bien conocida:

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1,$$

por lo que la terna asociada a la segunda declaración es la siguiente:

$$1, 2, 1.$$

Y recordando de nuevo el “diccionario”:

1	1
=	2
\neg	3
+	5
	
x	19
y	23
	

vemos claramente que la terna

$$19, 2, 19,$$

se corresponde con la fórmula

$$x = x,$$

mientras que la terna

$$1, 2, 1$$

se corresponden con la fórmula

$$1 = 1.$$

Por lo tanto, lo que dice esta prueba es que si para cualquier x arbitrario tenemos que

$$x = x,$$

entonces

$$1 = 1.$$

Esta es una demostración muy pobre y, sin embargo, el número que se corresponde con ella ya es de tamaño astronómico, por lo que bien podemos imaginarnos cuán dantesco será el número asociado a una demostración de cierta relevancia. No obstante, lo esencial es que sabemos a ciencia cierta que le corresponderá cierto número perfectamente definido y que se puede reconstruir tal prueba a partir de ese número (aunque quizás no durante una vida humana).

¿QUÉ NO SABEN LAS MATEMÁTICAS?

Por tanto, podemos traducir fórmulas y pruebas a números naturales. Pero, ¿para qué sirve todo esto?

La Metamatemática examina el sistema desde el exterior; sus enunciados y afirmaciones se refieren a fórmulas o demostraciones sobre tal o cual fórmula en el sistema. Ahora bien, estas afirmaciones pueden transformarse empleando nuestro “diccionario” de manera que hablen de números naturales cuya descomposición en factores primos es tal o cual.

Por ejemplo, a medida que la Metamatemática examina las fórmulas del sistema que se pueden expresar empleando los signos del sistema, es posible que descubra que las cadenas de signos

$$1 = 1$$

y

$$\neg (1 = 1)$$

deben tratarse con cautela porque una es la negación de la otra. Ya hemos visto que la fórmula

$$1 = 1$$

se corresponde con el número

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90.$$

Por otra parte, según el “diccionario” (obviando que los paréntesis también son signos que, en realidad, deberían haber sido emparejados con ciertos números)

$$\begin{array}{rcl} 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ = & \dots\dots\dots & 2 \\ \neg & \dots\dots\dots & 3 \\ + & \dots\dots\dots & 5 \\ & \dots\dots\dots & \end{array}$$

la fórmula

$$\neg (1 = 1)$$

se corresponden con el cuarteto

$$3, 1, 2, 1$$

y puesto que los cuatro primeros números primos son:

$$2, 3, 5 \text{ y } 7$$

el número natural asignado a dicho enunciado es igual a

$$2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1.$$

Efectuemos los productos:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 10 \times 10 \times 2 \times 3 \times 7 \\ &= 100 \times 42 = 4\,200 \end{aligned}$$

y escribamos ambas descomposiciones en factores primos una junto a la otra:

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1,$$

$$4\,200 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1.$$

Por tanto, la afirmación metamatemática “*las sucesiones de signos de las fórmulas*

$$1 = 1 \text{ y } \neg(1 = 1)$$

expresan lo contrario la una de la otra” se traduce diciendo que “90 y 4 200 son dos números tales que la descomposición en números primos de este último comienza con 2^3 pero los exponentes de los siguientes números primos coinciden con los exponentes de la descomposición en números primos de 90”.

En esta última frase ya no hay ni rastro de Metamatemáticas, se trata una afirmación puramente teórica sobre números naturales. Pero el sistema axiomático bajo consideración sirve precisamente para formular enunciados sobre números naturales. Por lo tanto, podemos escribir esa frase empleando únicamente los signos del sistema, de modo que no quede en ella ni una sola palabra, convirtiéndose así en una de esas grises y ordinarias cadenas de signos que están libres de toda ambigüedad. Sin embargo, tal cadena sí que es ambigua. En efecto, pues podemos leer en ella dos cosas bien distintas: está, por una parte, el texto sobre Teoría de números que captamos al sustituir cada signo por su significado original, pero también está, por otra parte, aquello que dice la afirmación metamatemática que contiene.

Mientras jugaba con estas cadenas de signos ambiguas, Gödel se encontró con cierto número, supongamos que fue con 8 mil millones. Sabemos como se forma este número a partir de factores primos, pero una vida humana no sería suficiente para hacer todos los cálculos. No obstante, Gödel observó que para este número ocurre lo siguiente: si empleamos los signos del sistema del mismo modo que hicimos en el caso de la oración que acabamos de discutir pero para escribir ahora el enunciado metamatemático:

“la fórmula correspondiente a 8 mil millones no es demostrable en el sistema”

y nos preguntamos qué número se asigna a tal fórmula según el diccionario, nos sorprenderemos al saber que ese número es, exactamente, 8 mil millones. Por lo que “la fórmula asignada al número 8 mil millones” es esa misma fórmula. Por lo tanto, en uno de sus dos sentidos el enunciado dice lo siguiente:

“no soy demostrable”.

Debe quedar claro que esto no es un juego de palabras ni ningún tipo de sofisma. Tenemos ante nosotros una fórmula gris ordinaria, una cadena de signos como cualquier otra. Pero cuando descubrimos con ayuda de nuestro “diccionario” la connotación metamatemática que se ha colado en tal sucesión de signos, nos percatamos de que tararea inocentemente la siguiente cantinela:

“no soy demostrable”.

No es de extrañar que una fórmula como esta sea indecidible en el sistema axiomático; nada importa cuán inocente sea el enunciado sobre Teoría de números que exprese en su otro sentido.

Si fuese demostrable, contradeciría aquello que ella misma afirma en su sentido metamatemático, esto es, que no es demostrable.

Por el contrario, si fuese refutable, tal refutación confirmaría el enunciado metamatemático que contiene, esto es, que no es demostrable. Pero en tal caso, esa refutación sería su prueba.

Por tanto, no se puede probar ni refutar: es indecidible.

Quiero enfatizarlo otra vez: ignorando el “diccionario”, esta cadena de signos no es más que una fórmula triste y ordinaria del sistema; podría indicar tranquilamente una inocente afirmación sobre sumas y productos. No obstante, Gödel demostró que existen fórmulas indecidibles en cualquier sistema axiomático. Así pues, podría suceder que, por ejemplo, la conjetura de Goldbach fuese una afirmación de este estilo. Es decir, es posible que todavía no haya sido resuelta porque si establecemos un sistema de axiomas a partir de los medios con los que se ha experimentado hasta ahora, la expresión formal de la propia conjetura podría estar tarareando según el “diccionario” la siguiente cantinela:

“no soy demostrable dentro del sistema”.

Ocurre exactamente lo mismo con cualquier problema que todavía no haya sido resuelto; todo matemático debe considerar esta posibilidad.

Todavía podría plantearse la siguiente objeción: todo esto no es más que una deficiencia de los sistemas axiomáticos. Es de suponer que los “proble-

mas de Gödel” podrían resolverse si uno no se limita a un sistema axiomático particular. Pero el matemático estadounidense [Alonzo Church](#) construyó en 1931 un problema que no puede resolverse mediante ninguna de las consideraciones matemáticas imaginables a día de hoy, independientemente de si nuestras conclusiones pueden limitarse al marco de algún sistema de axiomas o no.

Aquí es donde debo dejar de escribir: hemos llegado a los límites del pensamiento matemático actual. Esta época es una época de toma de conciencia; y las matemáticas también hacen su pequeña aportación: ella misma ha revelado los límites de sus propias habilidades.

Pero, ¿son éstos los obstáculos definitivos? Hasta ahora, en la historia de las Matemáticas siempre ha habido una salida para cada callejón sin salida. No obstante, hay un punto de la demostración de Church sobre el que conviene reflexionar: y es que tuvo que definir con exactitud qué entendemos por “consideración matemática imaginable a día de hoy” para poder aplicar luego a ese concepto los procedimientos de las Matemáticas. Pero tan pronto como se define algo, se delimita a ese algo y ninguna valla es tan estrecha como para impedir el paso de los problemas indecidibles, que se cuelan nuevamente.

Aunque ahora no entendamos ni veamos cómo, los futuros desarrollos de las Matemáticas ampliarán su horizonte conceptual. La eterna lección consiste entonces en que las Matemáticas no son una disciplina estática y cerrada, sino que están vivas y en constante desarrollo. Por más que queramos forzarlas para que adopten cierta forma, al verse acorraladas, siempre encuentran la salida y se escapan al exterior para renacer nuevamente.

Después de usar

Si quieres consultar de nuevo alguna página, por ejemplo, aquella en donde hablamos de la integral, sólo encontrarás un título en el Índice que dice: “Mucho poco vale mucho”. Así que indicaré a continuación los conceptos matemáticos que se encuentran en cada capítulo (¡no permitas que esto te desanime!).

PARTE I

- 1 Sumas, multiplicación y exponenciación.
- 2 El volumen del cubo. Representación gráfica de funciones.
- 3 Sistemas de números. Reglas de divisibilidad.
- 4 Progresiones aritméticas. Área del rectángulo y el triángulo.
- 5 Diagonales de polígonos convexos. Combinaciones de dos elementos. La fórmula.
Posdata: Topología. Congruencia y semejanza. Sólidos regulares.
- 6 Combinatoria. Inducción matemática. Cuadrado de una suma de dos sumandos.
- 7 Descomposición en números primos. Distribución de los números primos. Teorema de los números primos.
- 8 Ecuaciones. La irresolubilidad de la ecuación de quinto grado. Teoría de Galois.

PARTE II

- 9 Números negativos. Vectores. Principio de permanencia.
- 10 Operaciones con fracciones. Media aritmética. Conjuntos densos en todas partes. El cardinal de los números racionales.
- 11 Conversión de fracciones a números decimales y viceversa. Series infinitas.

- 12 Números irracionales. Teorema de Pitágoras. El cardinal de los números reales.
- 13 Tablas de logaritmos. Generalización del concepto de potencia. Curvas suaves. Hipérbolas. El cero como divisor.
- 14 El concepto de función. Geometría analítica.
Posdata: (a) Funciones circulares (senos y cosenos). Aproximación de funciones periódicas.
(b) Geometría proyectiva. Invariantes.
- 15 La recta infinitamente distante. Números complejos. Relación entre las funciones circulares y la función exponencial. El Teorema fundamental del Álgebra. Expansión de una función en series de potencias.
- 16 La dirección de la tangente. La derivada. Máximos y mínimos.
- 17 Integrales definidas e indefinidas. Cálculo de áreas.

PARTE III

- 18 La cuadratura del círculo. Números trascendentes. Los axiomas de Euclides. Geometría de Bolyai. Diferentes geometrías.
Posdata: La cuarta dimensión.
- 19 Teoría de grupos. Teoría de conjuntos. Antinomias. Intuicionismo.
- 20 Lógica simbólica.
- 21 Teoría de la demostración. Metamatemáticas. Prueba de consistencia de la Teoría de números. Hipótesis del continuo.
Posdata: La axiomatización del Análisis matemático.
- 22 Problemas indecidibles y problemas indecidibles empleando ciertos medios dados. La cuestión de lo indecidible.

This is easily the best book on mathematics for everyman that I have ever seen. The author is both a highly creative mathematician and an experienced teacher of young children, and this happy combination, allied to a gift for lucid exposition has produced a delightful book...

Reuben Louis Goodstein, 1962.

This book is a popular account of modern mathematical ideas. The author states that her purpose is to reach that very large section of the population which always wanted to find out what modern mathematics was like, but thought that it was too difficult to understand. She attempts to give a clear picture of as many advanced concepts as possible without sacrificing rigour. The author's humour makes every page enjoyable. The author seems to have found a perfect compromise between rigour and clarity.

John Kemeny, 1948.

This is a delightful book, and the mathematician as well as the layperson could profit from reading it.

Philip Peak, 1977.

Ejemplar gratuito



**SOUTIÑO
EDITORA**