JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER

JUGANDO CON EL INFINITO

MATEMÁTICAS PARA FORASTEROS

RÓZSA PÉTER
Eötövos Loránd Universiry, Budapest

TRADUCIDO POR
JORGE LOSADA RODRÍGUEZ
RAÚL PINO VELASCO

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
&
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Título orignal: *Játék a végtelennel: Matematika kívülállóknak*

Primera edición: abril de 2021

Traducción autorizada por el Profesor Béla Andrásfai

http//: `www.webspersoais.usc.es/persoais/jorge.losada`

ISBN: 978-84-09-30916-0
Depósito Legal: C 838-2021

Ilustración de portada y contraportada: Fragmentos del cuadro *Cálculo mental en la Escuela Pública de S. A. Rachinsky*, obra de Nikolay Bogdanov-Belsky (1868-1945).

Cuando comencé mi educación universitaria
todavía tenía muchas dudas sobre si era
lo suficientemente buena para las matemáticas.

Un compañero mío me dijo las palabras decisivas:
"no es que tú te merezcas estudiar matemáticas,
sino que las matemáticas se merecen que tú las estudies".

Rózsa Péter

Dedicado a mi hermano, el Dr. Miklós Politzer,
quien falleció en Colditz (Sajonia) en 1945.

Prefacio

ESTE libro ha sido redactado para personas con inquietudes intelectuales no matemáticas; esto es, para gentes de letras, artes y humanidades. He recibido tantas cosas buenas de esas disciplinas, que ahora me gustaría compensarles ofreciendo a cambio todo lo que sé de matemáticas. También quisiera convencer a estas personas de que, en realidad, no estamos tan alejados como a veces creemos. Me encantan las matemáticas no sólo por sus aplicaciones técnicas, sino también –y principalmente– por su propia belleza. El ser humano ha infundido en ellas su espíritu juguetón y éstas, como recompensa, nos agasajan a todos con el mejor de los juguetes: tocar y entender el infinito. Las matemáticas nos proporcionan contribuciones e ideas válidas y universales sobre el infinito y otros muchos conceptos, pero también arrastran consigo la naturaleza inconclusa e interminable de toda creación humana.

El carácter popular o divulgativo de este libro no implica en absoluto que se trate el tema de forma vana o superficial. Me he esforzado por presentar todos los conceptos con absoluta claridad y rigor pleno, intentado arrojar así nueva luz también para los ya versados en matemáticas y, por supuesto, para los profesores esta disciplina. Sí he descuidado sin embargo el aspecto sistemático y formalista que resultaría muy pesado aburrido. Es decir, sólo he omitido los tecnicismos (pues el propósito de este libro no es enseñar técnicas matemáticas). Si este libro cae en manos de un estudiante motivado, le proporcionará una imagen bastante completa y nítida del estado actual de las matemáticas. No era mi intención inicial escribir un libro tan extenso, pero el material fue aumentando a medida que escribía y el número de temas que podrían omitirse menguó rápidamente. Si había fragmentos a los que se habían adherido viejos recuerdos aburridos, me sentí como quien hace brillar de nuevo a una vieja baratija quitándole el polvo con sus manos.

Es posible que el estilo te parezca ingenuo en algunos momentos, pero poco importa eso; un punto de vista ingenuo en relación con hechos simples evoca siempre la emoción de un nuevo descubrimiento.

En la *Introducción* te contaré cómo surgió este libro. El escritor que menciono allí es Marcell Benedek, con quien intercambié numerosa correspondencia sobre cálculo diferencial. Escribir un libro a partir de aquellas cartas fue sugerencia suya.

No citaré ninguna fuente bibliográfica. Evidentemente, he aprendido muchas cosas de otras personas, pero a día de hoy ya no soy capaz de recordar con certeza de dónde saqué cada parte. No tenía libros frente a mí cuando escribí este libro. Sí que es cierto que, de vez en cuando, me venían a la mente algunas comparaciones e ideas cuya fuente sí recordaba perfectamente; mencionaré, por ejemplo, el hermoso libro de Rademacher y Toeplitz [1] o la excelente introducción al Análisis Matemático de Beke [2].

Una vez concebido un método en mi mente, no podía renunciar a él simplemente por no ser el más original. En este sentido, me refiero especialmente a las ideas que recibí de László Kalmár, compañero de promoción que sería después mi maestro en esto de las matemáticas. Todo lo que escribo en el libro está indisolublemente ligado a su forma de pensar y entender esta ciencia. En particular, quisiera dejar constancia aquí de que el "ejemplo del chocolate" con el que se ilustrará el estudio de las series infinitas se debe completamente a él; la discusión sobre la construcción de las tablas logarítmicas también es obra suya.

Sí citaré a mis pequeñas colaboradoras en el aula por sus nombres de pila; se reconocerán a sí mismas fácilmente. Quiero mencionar aquí a mi alum-

[1] Nota de los traductores: se refiere a la versión original de la obra:
H. Rademacher y O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Dover Publications, 1990.

[2] Nota de los traductores: se refiere a la obra (de la que desconocemos si existe alguna traducción):
M. Beke, *Differenciál- és integrálszámítás I–II* , Franklin-Társulat, 1916.

na Kató, quien acaba de terminar recientemente el cuarto año de la escuela primaria y contribuyó notablemente al libro mientras se escribía. Es a ella a quien debo agradecerle el poder ver el material a través de los ojos de una alumna con talento.

Sin embargo, la ayuda más importante que recibí a la hora de redactar este libro fue la de la "persona no matemática": Béla Lay, mi querida amiga y directora de teatro que hasta no hace mucho afirmaba *no tener oído para las matemáticas*. Fue ella quien siguió de cerca la elaboración y exposición de cada uno de los capítulos; yo sólo escribía el punto final cuando ella quedaba plenamente convencida. Sin su ayuda, este libro nunca hubiera sido escrito.

Pál Csillag examinó el manuscrito desde un punto de vista matemático; aunque en el último momento, László Kalmár también encontró tiempo para una revisión rápida. Agradezco a ambos la seguridad que siento de que todo lo escrito en el libro es correcto.

Rózsa Péter
Budapest, otoño de 1943.

Prefacio
(a la edición de 1957)

Desde 1943 han pasado ya diecisiete años plagados de tristes acontecimientos. Durante este tiempo, mi amigo (el matemático) Pál Csillag y mi alumna Kató (Kató Fuchs) han sido víctimas del fascismo. El padre de mi alumna Anna, que fue encarcelado durante más de diecisiete años por actividades sindicalistas, ha sido finalmente liberado. De esta manera, es posible que en la imaginación de Anna las líneas rectas que siempre se acercan entre sí acaben encontrándose (véase la página 224). Durante la ocupación alemana no pudo publicarse ningún libro y muchas de las copias existentes fueron destruidas por los bombardeos, las pocas que resistieron aparecieron el *Día del libro* de 1945.

Este libro refleja mi modo de pensar en 1943, que apenas he cambiado desde entonces. Desde entonces, László Kalmár y yo hemos probado que la existencia de los conocidos como “problemas absolutamente indecidibles” se sigue del Teorema de Gödel sobre problemas relativamente indecidibles, pero una consecuencia nunca será más importante que el teorema del cual se deriva.

Rózsa Péter
Budapest, primavera de 1957.

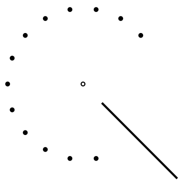
Índice general

Introducción

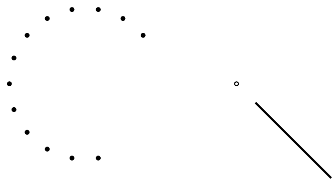
Me viene a la mente una conversación que tuve hace ya bastante tiempo. Uno de nuestros escritores y querido amigo mío se quejaba amargamente ante mí de que un importante aspecto de su educación había sido completamente descuidado: no sabía nada de matemáticas. Sentía esta carencia en su propio oficio a la hora de ponerse a escribir. Todavía recordaba el sistema de coordenadas de las matemáticas escolares y ya lo había empleado en comparaciones y metáforas, pero sentía que debían existir muchos más conceptos y herramientas matemáticas que también podría utilizar si los conociera. Según decía él mismo, su expresividad era mucho más pobre al no poder acceder a esa rica fuente. Era un gemido desesperado, pues aquel pobre hombre estaba convencido de que jamás sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas.

He recordado esta conversación muy a menudo, pues alentaba en mí nuevos planes e ideas. Entendí de inmediato que debía hacer algo. Para mí, en matemáticas, el estado de ánimo siempre ha sido el factor decisivo y, por otra parte, era cierto aquello que decía mi querido amigo: las matemáticas son, sin duda alguna, una fuente común de la que tanto escritores como artistas pueden y deben beber. Recuerdo todavía un ejemplo de mi infancia escolar. Estábamos leyendo una de las obras de Shaw y llegamos al momento en el que el protagonista pregunta a la protagonista cuál es su secreto para dominar y contener incluso a los hombres más rebeldes. La protagonista pensó por un instante y sugirió luego que tal vez eso podría explicarse por mantenerse siempre alejada de todos ellos. Al escuchar esto, mi compañera de pupitre (Ica

Benkő) exclamó de repente: “¡¡el teorema que aprendimos hoy en la clase de matemáticas, anda ya!!”. La pregunta matemática era la siguiente: ¿es posible acercarse a un conjunto de puntos desde un punto exterior de modo que nos acerquemos a todos los puntos del conjunto simultáneamente? La respuesta es afirmativa siempre y cuando el punto exterior se encuentre suficientemente alejado del conjunto:



Desde aquí no es posible:
si te acercas a unos puntos
te alejas de otros.



Desde aquí sí es posible:

La otra afirmación de mi amigo: aquello de que “nunca sería capaz de penetrar en el corazón de las matemáticas” y que, por ejemplo, nunca lograría entender el concepto de derivada, no quise ni creerla. Intenté descomponer ese concepto en los pasos más claros, simples y evidentes que pude. El resultado fue muy sorprendente: un matemático no puede ni imaginarse las dificultades que la fórmula más simple podría causar al profano; ocurre como cuando el maestro novel no comprende como un niño es capaz de silabear hasta veinte veces la palabra ca…ra…col sin percatarse de que es un caracol.

Esta fue una experiencia que me hizo pensar nuevamente. Siempre había creído hasta entonces que la razón por la que el público estaba tan mal informado sobre las matemáticas era, simplemente, que nadie había escrito un buen libro popular para el público general sobre, por ejemplo, cálculo diferencial. No es interés lo que falta, pues es bien sabido que el público se apropia de todo lo que cae en sus manos sobre este género, pero ningún matemático profesional ha escrito un libro así hasta el momento. Cunado digo esto, estoy pensando en el verdadero profesional que sabe exactamente hasta qué punto se pueden simplificar las cosas sin falsificarlas y que entiende que no se trata de dar la vieja medicina amarga en una fuente de plata (pues también es cierto que la matemática escolar es un amargo recuerdo para la gran mayoría); hablo de alguien capaz de iluminar los puntos esenciales, que conozca el gozo de la creación matemática y que sepa dar ese ímpetu cautivador a su escritura como para entusiasmar al lector. Me doy cuenta de que el libro más popular y divulgativo del mercado tampoco es comprensible para la mayoría de lectores.

Quizás sea éste el atributo característico del matemático: asumir y aceptar la amargura inherente al camino que recorre. "Me veo forzado a decirle, alteza, que el camino Real a la Geometría aún no ha sido inventado" dijo Euclides con enfado al rey Ptolomeo al ver que se éste había quedado dormido durante una de sus lecciones. No es posible leer matemáticas de manera superficial, la ineludible abstracción implica siempre cierto grado de auto-tortura y el matemático no es más que aquél para quien esa auto-tortura trae alegrías. El libro popular y divulgativo más simple tan sólo será entendido por aquellas personas que se comprometan de verdad y emprendan una amarga silabización de cada uno los detalles de una fórmula hasta entender por completo su significado.

No tengo intención alguna de escribir para esta gente; escribiré matemáticas sin fórmulas. Me gustaría transmitir la esencia y el espíritu de las matemáticas, pero desconozco si un intento como este será exitoso. Dejando de lado las fórmulas, renuncio a uno de los rasgos esenciales de las matemáticas. Tanto el escritor como el matemático son plenamente conscientes de la importancia de las fórmulas. Si no me crees, intenta imaginarte por un momento como expresarías la esencia de un soneto sin mencionar su estructura y forma tan características. Sin embargo, allá voy. Puede que, aun así, quede algo del verdadero espíritu y esencia de las matemáticas.

Hay algo que en ningún caso puedo permitir: no pospongas la lectura de ningún capítulo y no te conformes nunca con una simple ojeada. Las matemáticas sólo pueden construirse ladrillo a ladrillo, ningún paso es prescindible y no hay pasajes superfluos. Aunque no será tan evidente como lo sería en un aburrido libro sistemático, cada detalle posterior se basa en el anterior y es por tanto necesario que sigas algunas instrucciones: analiza con detalle y cautela todas las figuras y realiza los cálculos y dibujos que te vaya aconsejando. Prometo que no te aburrirás.

No haré uso de las nociones escolares más habituales. Empezaré contando y terminaré hablando de la rama más reciente de las matemáticas: la lógica matemática.

PARTE I

EL APRENDIZ DE BRUJO

1. *Jugando con los dedos*

EMPECEMOS por el principio. No describiré la historia de las matemáticas; eso sólo podría hacerse partiendo de la evidencia escrita ¡y cuán posterior al principio es la primera evidencia escrita! Debemos imaginarnos al hombre prehistórico en su entorno primitivo mientras empieza a contar. En esta obra, ese pequeño hombre que se convertirá poco a poco en un ser humano adulto y educado ante nuestros ojos siempre vendrá en nuestra ayuda; me refiero al bebé que empieza a conocer su propio cuerpo y el mundo que le rodea mientras juega con sus diez deditos. Es muy probable que para él las palabras "uno", "dos", "tres", "cuatro" y "cinco" sólo sean meras abreviaturas de "este es el chiquito", "este el del anillo", "este el de la mano", "este el escribano" y "este el matapulgas". No es ninguna broma lo que acabo de decir; una vez escuché a un doctor que hay personas a quienes cierta lesión cerebral les impide distinguir un dedo de otro y pierden así, irremediablemente, toda capacidad de contar. Esta conexión subconsciente sigue en el interior de muchas personas educadas y bien formadas, de lo que deduzco que uno de los orígenes de las matemáticas se encuentra en la naturaleza lúdica del ser humano y es por ello que las matemáticas no son sólo una ciencia, sino también un arte.

Se cree que contar fue una actividad práctica desde el principio; es posible que el hombre primitivo quisiese vigilar sus pertenencias contando cuantas pieles de animales tenía. No obstante, también es concebible que contar fuese una especie de ceremonia ritual; todavía hoy los neuróticos compulsivos cuentan como invocando cierta prescripción mágica que aísle ciertos pensamientos nocivos o prohibidos. Por ejemplo, si yo ahora te pido que cuentes de uno hasta veinte, ya tienes otra cosa en que pensar y no podrás seguir leyendo este libro. Sea como sea, ya se tratara de pieles de animales o de intervalos de tiempo sucesivos, contar siempre significa ir más allá de donde originalmente estábamos de uno en uno. Por supuesto, podemos avanzar más allá de nuestros diez dedos y aparece así la primera gran creación del ser humano: una sucesión infinita de números

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

la sucesión de los números naturales. Es infinita porque después de cada número, por muy grande que éste sea, siempre podemos contar uno más. Este invento necesitó de una gran dosis de abstracción, pues estos números sólo son sombras de la realidad visible. Por ejemplo, el 3 ya no significa tres dedos, 3 manzanas, 3 latidos, etc, sino aquello que es común a todos ellos, algo que abstraemos de ellos, es decir, su número o cantidad. Por otra parte, las cantidades muy grandes ni tan siquiera han sido abstraídas de la realidad, pues nadie ha visto nunca mil millones de manzanas y nadie ha contado nunca mil millones de latidos; simplemente, imaginamos estos números por analogía con los más pequeños que sí tienen una base en la realidad, pero en la imaginación uno podría seguir contando indefinidamente más allá de cualquier número conocido.

Nunca nos cansamos de contar. La simple alegría de la repetición es el motor. Los poetas lo tienen claro: el retorno al mismo ritmo, al mismo sonido o a la misma rima no son más que expresiones de cierta actividad vital. Del mismo modo, los niños tampoco se aburren jugando siempre al mismo juego; pero, sin embargo, el anciano reumático pronto se cansa de patear o lanzar el balón una y otra vez.

¿Hemos llegado hasta 4? ¡Contemos uno más, después uno más, después uno más! ¿Adónde hemos llegado? Pues llegamos al 7, el mismo número al que hubiéramos llegado si sumásemos tres de un solo golpe. Descubrimos así la suma:

$$4 + 1 + 1 + 1 = 4 + 3 = 7.$$

Sigamos jugando con esta operación. Sumemos 3 a 3, después otros 3, luego otros 3 y finalmente otros 3. En tal caso caso, habremos sumado 3 cuatro veces, hecho que podríamos enunciar brevemente diciendo que cuatro treses son 12, o simbólicamente:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$$

y esto es la multiplicación.

Una vez que conocemos la alegría de la repetición, es difícil parar. Podemos continuar jugando con la multiplicación de la siguiente forma: multipliquemos 4 por 4 y otra vez por 4, obtendremos así:

$$4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Esta repetición o "iteración" de la multiplicación se llama exponenciación. Se dice que 4 es la "base" e indicamos con un pequeño número escrito en la parte superior derecha del 4 el "exponente", que es el número de cuatros que tenemos que multiplicar. Es decir, la notación es la siguiente:

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Como ves, los resultados que obtenemos son números cada vez más grandes: 4×3 es más grande que $4 + 3$ y 4^3 es mucho más grande que 4×3. La divertida repetición nos eleva a números cada vez más grandes. Iteremos pues la exponenciación elevando 4 al exponente que es la cuarta potencia de cuatro, que es

$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256,$$

por lo que

$$4^{4^4} = 4^{256} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times \ldots$$

En total deberían aparecer ahí 256 cuatros, pero no tengo paciencia para seguir escribiendo y, por favor, ¡ni hablemos del cálculo efectivo de todas esas multiplicaciones! El resultado sería un número inimaginablemente grande, por lo que preferimos emplear el sentido común y aun sabiendo lo divertido que sería continuar iterando y repitiendo, no incluiremos la iteración de la exponenciación entre nuestras operaciones aceptables.

Quizás sea ésta la verdad: el espíritu humano juega con todo aquello que se le ofrece, pero sólo guarda y valora aquello que el sentido común le dicta como apropiado.

La suma, la multiplicación y la exponenciación han demostrado ser muy útiles y convenientes en multitud de actividades ordinarias del ser humano y es por ello que han adquirido derechos civiles plenos y perpetuos en matemáticas. Así pues, conocemos todas sus propiedades que simplifican y facilitan notablemente el cálculo. Por ejemplo, es un gran alivio saber que 28×7, además de ser calculado sumando 28 siete veces, también se puede calcular en tres pasos: primero efectuamos los productos 7×20 y 7×8 y luego sumamos $140 + 56$. Por otra parte, cuando sumamos una larga fila de números, es completamente indiferente el orden en que lo hagamos. Por ejemplo, para calcular $8+7+2$, podemos hacer primero $8+2 = 10$ y ahora a 10 ya es muy fácil sumarle 7, evitando así la incómoda suma de $8 + 7$. Tan sólo hay que entender que sumar significa contar tantas veces como números queremos sumar y entonces será evidente que cambiar el orden no altera en absoluto el resultado. Convencerse de que ocurre lo mismo con la multiplicación es un poco más complicado, pues 4×3 significa $3 + 3 + 3 + 3$ y 3×4 significa $4 + 4 + 4$, por lo que ya no es tan evidente que

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4.$$

Pero es evidente si dibujamos. Prueba y dibuja cuatro veces, una debajo de otra, tres puntos en posición horizontal como estos

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

obtendrás algo como esto:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Todos vemos ahora que es exactamente lo mismo que dibujar tres veces, una al lado de la anterior, cuatro puntos en posición vertical

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Este es el motivo por el que los matemáticos llaman a multiplicando y multiplicador con el mismo nombre: factores.

Fijémonos ahora en las reglas de la exponenciación:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5.$$

Si me canso de tanta multiplicar, puedo tomarme un descanso; el producto de los tres primeros cuatros es 4^3 y todavía tengo que multiplicar por 4^2; por tanto,

$$4^3 \times 4^2 = 4^5$$

y el exponente del resultado es 5, que es igual a $3+2$. Así pues, para multiplicar dos potencias de 4, sumamos los exponentes. De hecho, es una regla general.

Por ejemplo,

$$5^4 \times 5^2 \times 5^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5} \times \underbrace{5 \times 5} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5} = 5^9,$$

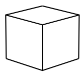
donde nuevamente $9 = 4 + 2 + 3$.

Revisemos el camino recorrido: fue contando como llegamos a cada operación. Por supuesto, cualquiera podría objetar ¿y dónde está la resta? ¿y la división? Pero estas operaciones no son más que inversiones de las operaciones ya comentadas (así como la extracción de raíces y los logaritmos). Porque, por ejemplo, $20 \div 5$ significa que ya conozco el resultado de una multiplicación cuyo resultado es igual a 20 y que estoy buscando el número que multiplicado por 5 da 20. En este caso, es muy fácil, pues todos sabemos que $5 \times 4 = 20$, pero no será siempre tan sencillo encontrar ese número y, de hecho, no existe siempre. Por ejemplo, 23 no coge entre 5 sin un resto, pues $4 \times 5 = 20$ es demasiado pequeño y $5 \times 5 = 25$ demasiado grande. Es por esto que nos vemos obligados a conformarnos con el más pequeño y decimos que 23 coge a 5 cuatro veces pero todavía faltan 3. Este tipo de situaciones provocan más dolores de cabeza que nuestras hilarantes iteraciones; las operaciones inversas suelen ser más amargas. Son el punto de ataque favorito de las investigaciones matemáticas, pues –como ya es bien sabido– a los matemáticos les encantan las dificultades. Hablaremos de las operaciones inversas más adelante.

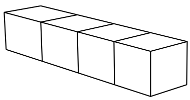
2. *Las curvas de fiebre de las operaciones*

En el capítulo anterior hemos constatado que la iteración de las operaciones más elementales nos eleva hacia números cada vez más y más grandes. Merece entonces la pena que nos paremos a reflexionar por un instante en las alturas alcanzadas.

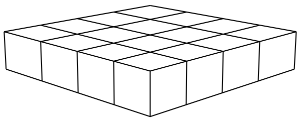
Las potencias, por ejemplo, se emplean en el cálculo del volumen de un cubo. Dado un pequeño cubo como unidad, se trata de saber cuántos de esos cubos serán necesarios para rellenar un cubo más grande cuyo volumen pretendemos medir. Consideremos pues, por ejemplo, un cubo de 1 cm; esto es, un cubo cuya altura, anchura y longitud miden exactamente 1 cm.



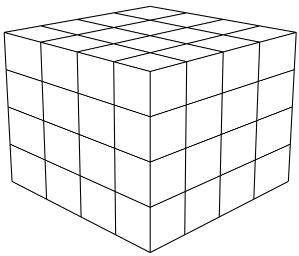
Coloquemos ahora cuatro de estos pequeños cubos pegados entre sí para formar una fila de cubos como esta:



y juntemos después cuatro de estas filas para formar una placa como esta:



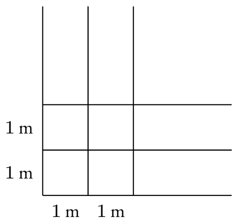
en la que hay exactamente $4 \times 4 = 4^2$ cubos. Finalmente, apilando cuatro de estas placas, obtenemos un cubo tan grande como este:



que consta de un total de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ cubos pequeños.

Recíprocamente, partiendo ahora del cubo grande cuya longitud, anchura y altura es de 4 cm, vemos que éste puede formarse empleando 4^3 cubos de 1 cm de longitud, anchura y altura. En general, obtenemos el volumen de un cubo elevando una de sus aristas a la tercera potencia. Es por esto que llamamos “cubicar” o “elevar al cubo” a la operación consistente en elevar a la tercera potencia[1].

Una consecuencia de lo anterior es que un cubo cuya arista sea relativamente pequeña tendrá un gran volumen. Por ejemplo, 1 kilómetro tampoco es una distancia excesivamente grande; la calle Nagymezö de Budapest mide aproximadamente 1 kilómetro de largo y, sin embargo, si construyeran un cubo tan grande como para que una de sus aristas fuese la calle Nagymezö, ese cubo tendría un volumen suficiente como para contener a toda la humanidad. Si no me crees, echemos cuentas: supongamos que nadie mide más de 2 metros de altura, hagamos entonces una planta cada 2 metros –dado que nuestro cubo mide 1 kilómetro de alto, tendrá 500 pisos de altura– y dividamos longitudinalmente cada una de estas plantas en franjas de 1 metro de ancho tal y como se indica en este dibujo:

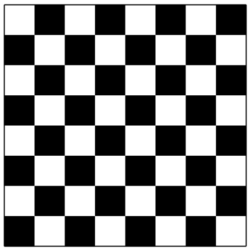


Cada franja se divide a su vez en 1 000 cuadrados y dado que teníamos 1 000 franjas, tendremos un total de $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ cuadrados en cada planta. La dimensión de cada cuadrado es de 1 metro de ancho por 1 metro de largo, por lo que podemos meter tranquilamente a cuatro personas en cada cuadrado; además, dos de esas personas llevarán a un niño pequeño

[1] Conozco las objeciones de algunos profesores: debería haber dicho que obtengo la *medida* del volumen del cubo elevando la *medida* de la longitud de su arista al cubo. Intentaré no aburrirte con estas simplezas, pero hay un asunto más importante; la pregunta es la siguiente, ¿es posible expresar la longitud de la arista de cualquier cubo en centímetros? Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

en brazos. Así pues, en cada planta caben 6 veces 1 000 000 personas, esto es, 6 millones de personas por planta, por lo que en las 500 plantes del cubo entrarían 500 veces 6 millones de personas, es decir, 3 000 000 000 personas, que era la población aproximada de la Tierra cuando me hablaron de dicho cubo.

Y, pese a todo, en el cálculo del volumen de un cubo tan sólo entra en juego la tercera potencia; un exponente mayor todavía nos haría avanzar mucho más rápido. Esto sorprendió al príncipe a quien el inventor del ajedrez “‘sólo” le pedía modestamente unos pocos granos de trigo como recompensa.



Por la primera casilla de su tablero pidió 1 grano de trigo, el doble –esto es, 2 granos– por la segunda casilla, el doble –esto es, $2 \times 2 = 2^2 = 4$ granos– por la tercera y así sucesivamente. Inicialmente, esta petición parece excesivamente modesta, pero a medida que vamos avanzando por las casillas del tablero nos encontramos con potencias de 2 cada vez más grandes, hasta que finalmente estaríamos hablando de un total de

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63}$$

granos de trigo (por favor, imagina que en la suma anterior aparecen todas las potencias intermedias; no tuve paciencia para escribir los 64 sumandos). Si uno se pone a calcular esa cantidad, resulta que es trigo suficiente como para cubrir la superficie de la Tierra con una capa de trigo de 1 cm de altura.

Después de esto, ya no debería sorprenderte la inmensa altura a la que nos elevará la iteración de la exponenciación. Me limitaré a mencionar el siguiente hecho anecdótico: se estima que 9^{9^9} es un número tan tan grande que para escribirlo sería necesario un papel de 18 000 kilómetros de longitud (¡escribiendo un dígito cada medio centímetro!) y además, toda una vida humana sería claramente insuficiente para efectuar dicho cálculo.

Revisando lo que llevaba escrito hasta ahora me he percatado de que empleé expresiones como "nos eleva a" para refirme a avanzar sobre la sucesión de números naturales, pero dicha sucesión de números:

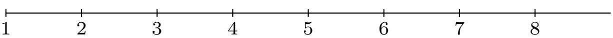
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

es una fila horizontal de números, por lo que debería haber dicho que avanzo hacia la derecha o, como mucho, que voy hacia números cada vez más grandes. No obstante, el término escogido muestra una clara influencia de nuestro estado de ánimo: hacerse cada vez más grande significa crecer y el crecimiento crea en los seres humanos una sensación de conmoción. Los matemáticos concretan este sentimiento sobre el papel acompañando a sus imaginaciones con dibujos y esquemas; el dibujo de un crecimiento muy rápido se identifica con una línea que se eleva de forma muy abrupta.

Los pacientes están más que familiarizados con estos dibujos; tan sólo necesitan echar un vistazo a su curva de la temperatura corporal para conocer el curso de su enfermedad. Supongamos que los siguientes números indican la temperatura corporal de un paciente medida a intervalos regulares de tiempo:

$$38°,\ 38.5°,\ 39°,\ 39°,\ 38°,\ 38.5°,\ 37°,\ 36.5°\,.$$

Estos datos se representan gráficamente del siguiente modo: dibujamos primero una línea recta horizontal e indicamos sobre ella los intervalos regulares de tiempo mediante marcas verticales separadas entre sí cierta distancia constante

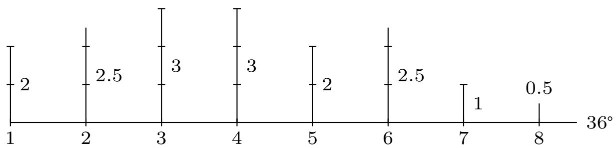


escogemos después otra distancia para representar a un grado de temperatura y, desde cada una de las marcas que representan a un instante de tiempo, trazamos hacia arriba[2] esa distancia tantas veces como indica la fiebre del paciente en dicho instante. No es necesario dibujar líneas tan largas, pues la temperatura corporal del paciente jamás caerá por debajo de 36° por lo que podemos imaginarnos que la línea horizontal se corresponde con esos 36°. Es decir, basta dibujar por encima de la línea horizontal los números:

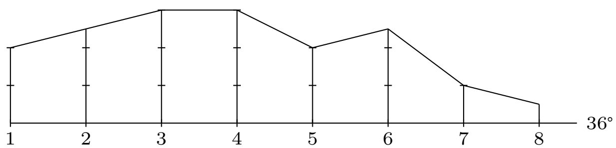
$$2,\ 2.5,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2.5,\ 1,\ 0.5,$$

[2] Decir "hacia arriba" es un discurso figurativo, ya que en una hoja de papel plana sólo podemos dibujar líneas horizontales. Sin embargo, percibimos que una línea como esa apunta, efectivamente, hacia arriba.

que representan a los correspondientes grados de temperatura corporal. Obtenemos así la siguiente gráfica:



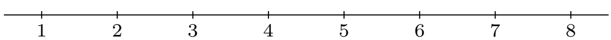
y conectando los extremos de los segmentos verticales:



La curva de fiebre así obtenida lo dice todo: mientras que los segmentos ascendentes indican una subida de la temperatura corporal, los segmentos descendentes representan una bajada de la fiebre del paciente y los segmentos horizontales muestran un periodo de estancamiento. El ascenso fue pues uniforme en un principio, esto lo atestigua que los dos primeros segmentos son igual de empinados y forman así una línea recta. Excepto una leve recaída en la sexta medición, el paciente se recuperó rápidamente: la inclinación del segmento que une la sexta y séptima medición es muy abrupta, más abrupta que la de cualquier incremento.

Nada ni nadie nos impide trazar las curvas febriles de nuestras operaciones.

Los números se suelen representar a lo largo de una línea recta escogiendo un punto de partida –al que llamaremos punto 0– y acumulando distancias de igual magnitud a partir de dicho punto; es decir, contamos empleando esas distancias:



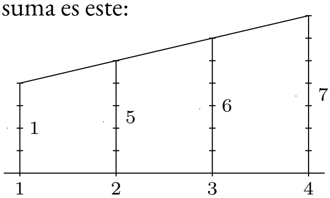
Si ya eres hábil contando, ahora puedes realizar las operaciones sobre dicha recta automáticamente. Por ejemplo, si $2 + 3$ fuese la operación considerada, tan sólo tendríamos que dar tres pasos hacia la derecha desde el 2 y leer después el resultado que allí aparece: 5. Si quisiésemos calcular $5 - 3$, tendríamos que desplazarnos tres pasos hacia la izquierda desde 5. Esto tan sólo es otra versión de aquella calculadora de la escuela primaria que nos permitía efectuar ciertas cuentas deslizando esferas por varillas metálicas.

Abandonemos la línea horizontal y miremos hacia arriba. Comencemos con un número fijo, como por ejemplo 3, y veamos como aumenta si le sumamos $1, 2, 3, \ldots$, si lo multiplicamos por $1, 2, 3 \ldots$ o si lo elevamos a $1, 2, 3, \ldots$ (“elevar a cierta potencia”, otra expresión en la que aparece la idea de apuntar hacia arriba).

Empecemos por la suma. Dado que uno de los sumandos siempre es 3, representaremos el otro sumando en la línea horizontal y la suma correspondiente hacia arriba:

$$
\begin{aligned}
3+1&=4\\
3+2&=5\\
3+3&=6\\
3+4&=7
\end{aligned}
$$

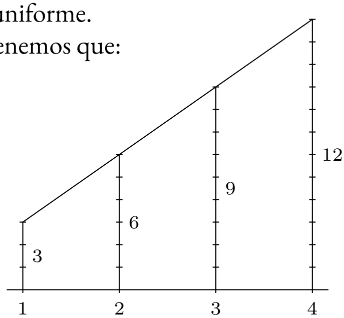
Así pues, si representamos horizontalmente a 1 mediante una distancia como esta y verticalmente mediante una distancia como esta otra, el “diagrama febril” de la suma es este:



Aquí, cada segmento de unión cae sobre una misma recta; deducimos entonces que la suma crece de manera uniforme.

En el caso da multiplicación, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
3\times 1&=3\\
3\times 2&=6\\
3\times 3&=9\\
3\times 4&=12
\end{aligned}
$$



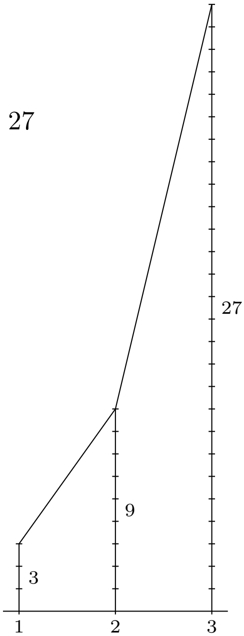
Se observa entonces que el producto también crece de forma uniforme a medida que aumentamos uno de sus factores, pero mucho más rápidamente que la suma: la pendiente de la recta es ahora mucho más pronunciada.

Finalmente, para las potencias tenemos que:

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$



Por tanto, observamos que las potencias ya no crecen de forma uniforme, sino que lo hacen a un ritmo cada vez mayor; 3^4 ya no cabría en esta hoja de papel. He ahí el origen de la expresión “crecimiento exponencial”.

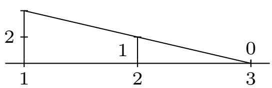
También podemos construir la curva febril de las operaciones inversas. Por ejemplo, para la resta tenemos que:

$$3 - 1 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - 3 = 0$$

$$3 - 4 = -1$$



Luego la diferencia también disminuye uniformemente a medida que aumenta el sustraendo.

La división es una operación delicada; no hablaré de su curva febril hasta más adelante.

Tan sólo añadiré el siguiente comentario: lo que acabamos de hacer es lo que los matemáticos denominan "representación gráfica de una función". Dado que el resultado final de la suma depende del valor escogido para el segundo sumando, se dice que el valor de la suma es función del segundo sumando, que sería la variable independiente. Lo que hicimos anteriormente no fue más que representar gráficamente el crecimiento de dicha función. Del mismo modo, el valor del producto es función de su factor variable y la exponenciación es función del exponente. Como ves, ya nos hemos encontrado con las funciones sin más que mencionar y jugar un poco con las operaciones más elementales. Continuaremos examinando estas relaciones funcionales más adelante, pues el concepto de función es la columna vertebral de toda la estructura matemática.

3. *Parcelando la sucesión infinita*

¡CUÁN largo camino hemos recorrido desde aquellos juegos iniciales con diez dedos! Si ya has olvidado que tienes diez dedos es porque no quise aburrirte con muchas cuentas. En otro caso, ya te habrías percatado de que por muy grande que sea el número que queremos escribir, tan sólo emplearemos para ello 10 símbolos distintos, a saber:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Pero, ¿cómo es posible describir una cantidad infinita de números con tan sólo 10 caracteres? El truco es simple y consiste en parcelar la sucesión de números agrupando oportunamente sus infinitos elementos. Tan pronto como hayamos contado 10 unidades nos decimos a nosotros mismos que todavía podemos captar esta cantidad de un sólo vistazo y juntamos esas diez unidades en un único manojo al que llamaremos decena; por tanto, una decena es el nombre colectivo para 10 unidades. Y, al igual que podemos cambiar 10 monedas de un céntimo por una única moneda de 10 céntimos, ahora también podemos contar a pasos agigantados avanzando de diez en diez. Evidentemente, también podremos atar luego diez decenas en un único manojo con una cinta en la que diga "1 centena". Continuando de este modo, podremos agrupar después 10 centenas en 1 millar, 10 millares en un diez mil millar, 10 diez mil millares en un cien mil millar y 10 cien mil millares en un millón. De este modo, es posible escribir cualquier número empleando esos diez símbolos. Tan pronto como sobrepasemos 9, escribimos un nuevo 1; indicaremos así 1 decena. El siguiente número consiste en una decena y una unidad, por lo que será descrito empleando dos 1's. Sin embargo, a la hora de escribir estos números, en principio, también deberíamos utilizar las palabras "decena", "centena", "unidades de millar", etcétera. No obstante, una idea inteligente hace que esto sea completamente innecesario. Fíjate en que el cajero del supermercado: coloca las monedas en diferentes compartimentos. Las monedas de menor valor están colocadas siempre más hacia la derecha porque el cajero necesita de ellas constantemente para dar las vueltas, mientras que reserva los compartimentos más hacia la izquierda para monedas y billetes de mayor valor. El cajero está tan acostumbrado a esta disposición que ya conoce el valor de las monedas mirando sólo para la posición del compartimento. Análogamente, nosotros también podemos ponernos de acuerdo en la posición que ocuparán las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etcétera. Escribiremos las unidades a la derecha y luego, avanzando hacia a la izquierda, las decenas, las centenas y así sucesivamente. Por tanto, está claro podemos omitir esas palabras, pues el valor de los números se reconoce por su posición; es decir, los símbolos también tienen un valor posicional.

$$354$$

consta de 3 centenas, 5 decenas y 4 unidades. Es a esto a lo que nos referimos cuando decimos que empleamos un sistema de numeración posicional y decimal.

Pero en realidad no hay ningún obstáculo que nos impida detenernos antes o después de 10. He escuchado hablar de pueblos primitivos cuyo concepto de los números consiste en lo siguiente: uno, dos, muchos. Sin embargo, también es posible un sistema de numeración para estos pueblos: consistirá en agrupar los números de dos en dos, en pares. El 2 es por tanto una nueva unidad: el par. Dos pares forman un cuarteto, dos cuartetos un octeto y así sucesivamente. En este sistema de numeración sólo hay dos símbolos:

$$0,\ 1,$$

pero son suficientes para escribir cualquier número. La forma más fácil de convencernos de esto es la siguiente: supongamos que tenemos unas monedas como estas:

8 4 2 y 1

por lo que las unidades del sistema de numeración binario aparecen ahora como unidades monetarias. La pregunta es la siguiente: ¿cómo juntarías 11 florines con la menor cantidad posible de monedas? Es claro que estas 3 monedas

8 2 1 (1)

suman 11 florines y además, no es posible sumar 11 florines con menos monedas. De forma similar

8 y 1 (2)

suman 9 florines y

8 4 2 y 1 (3)

suman 15 florines. Intenta comprobar por ti mismo que podemos obtener cualquier número entre 1 y 15 empleando cada una de las siguientes monedas

8 4 2 1

como máximo una vez. Sin embargo, ya no es posible hacer los mismo para 16 florines. Esto no debe sorprendernos en absoluto, pues $2 \times 8 = 16$ y la "16-upla" ya es la siguiente unidad a considerar. Por tanto, de acuerdo con el ejemplo (1) anterior, 11 se escribe en el sistema de numeración binario de la siguiente manera:

$$1011.$$

En efecto, pues eso significa en realidad: 1 uno, 1 dos, 0 cuatros y 1 ocho, y considerados todos juntos suman efectivamente 11. De forma similar, teniendo en cuenta los ejemplos (2) y (3) anteriores, concluimos que 9 y 15 se escriben en el sistema de numeración binario como

$$1001 \text{ y } 1111 \text{ respectivamente.}$$

Constatamos entonces que también podemos trabajar con sólo dos símbolos. También merece la pena practicar un rato el camino opuesto: en el sistema binario 11101 es igual a:

$$1 \text{ uno } + 0 \text{ doses } + 1 \text{cuatro } + 1 \text{ ocho } + 1 \text{ dieciséis},$$

es decir, a $1 + 0 + 4 + 8 + 16 = 29$ en el sistema decimal.

¿Cuál es la utilidad de un sistema de numeración? Bien, basta observar que toda operación será muchísimo más fácil si mantenemos cierto orden entre los números y, por ejemplo, sumamos unidades con unidades, decenas con decenas etcétera. El gerente del supermercado tampoco suma cada uno por uno los ingresos al final del día, sino que cuenta por separado el número de monedas y billetes que tiene en cada compartimento y suma luego las cantidades correspondientes. La conveniencia es a menudo un factor muy importante en el desarrollo de las matemáticas. La operación más inconveniente es, sin duda alguna, la división. Las incomodidades y tormentos que ésta conlleva motivaron la parcelación de la sucesión numérica. ¡Qué placenteras son esas divisiones en las que no queda ningún resto! Además, hay números verdaderamente hermosos en los que cogen muchos otros números sin dejar ningún resto. Un ejemplo muy bueno es el 60:

$$60 = \left[\begin{array}{l} 1 \times 60 \\ 2 \times 30 \\ 3 \times 20 \\ 4 \times 15 \\ 5 \times 12 \\ 6 \times 10 \end{array} \right.$$

por lo que $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30$ y 60 entran todos ellos en 60 sin dejar resto alguno o, si así lo prefieres, dividen a 60. Entonces, si queremos dividir entre alguno de estos doce números (aunque es un poco estúpido incluir aquí a 1, pues ni multiplica ni divide), conviene recordar que obtuvimos el número que queremos dividir (como cualquier otro número) contando de uno en uno. Contemos ahora 60 de estos 1's, luego otros 60 y así sucesivamente durante el mayor tiempo posible. La división de estos 60's es fácil y divertida y el mayor de los restos posibles es 59, que tampoco es un número excesivamente grande, por lo que no sería mucho problema dividir los posibles restos en caso de que los hubiere. Según esto, deberíamos agrupar los números en manojos de 60 y de hecho las antiguas civilizaciones emplearon el sistema de numeración de 60 para a medir ángulos y tiempo, magnitudes directamente relacionadas con estudios astronómicos que requieren de multitud de incómodas divisiones: un círculo completo todavía se divide hoy en $6 \times 60 = 360$ grados, 1 grado en 60 minutos y 1 minuto en 60 segundos; la división de una hora en minutos y segundos es idéntica

Por otra parte, 60 es un número quizás excesivamente grande y no lo suficientemente cómodo como para trabajar con él a diario. Entre los números cercanos a 10, 12 es quien tiene más divisores:

$$12 = \left[\begin{array}{l} 1 \times 12 \\ 2 \times \ \ 6 \\ 3 \times \ \ 4 \end{array} \right.$$

Es decir, los divisores de 12 son: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ y 12, que hacen un total de seis divisores, mientras que 10 tan sólo es divisible entre cuatro números:

$1, 2, 5$ y 10. Todavía son observables a día de hoy importantes huellas del sistema duodecimal: un año tiene 12 meses y 12 huevos forman una docena. El hecho de que haya prevalecido el sistema decimal indica que jugar con los dedos tiene una influencia mucho más fuerte en el ser humano que la mera y fría conveniencia. Los franceses todavía recuerdan cuando jugaban con los dedos de los pies: sólo quien estuvo antes acostumbrado al sistema de numeración de 20 puede llamarle al 80 cuatro veintes (*quatrevingt*).

Limitémonos entonces al sistema decimal y veamos cuáles son sus ventajas a la hora de la división.

La principal ventaja se observa cuando queremos dividir entre alguno de los divisores de 10: ya sea 2, 5 o el propio 10. Estos números dividen a 10 y también a $2 \times 10 = 20$, a $3 \times 10 = 30$ y, en general, a cualquier múltiplo de 10; por tanto, también dividen a $10 \times 10 = 100$, a $2 \times 100 = 200$, a $3 \times 100 = 300$ y así sucesivamente. Constatamos entonces que $2, 5$ y 10 dividen a las decenas, a las centenas, a las unidades de millar y así sucesivamente, por lo que tan sólo queda en el aire la duda de si dividen a las unidades. Pero 10 es más grande que cualquier valor posible de las unidades, por lo que ninguna unidad será divisible entre 10 y ésta es la razón por la que sólo son divisibles entre 10 los números que carecen de unidades. La ausencia de unidades se indica con un 0 al final y obtenemos así la conocida regla que dice que los números terminados en 0 son los divisibles entre 10. La única unidad divisible entre 5 es el propio 5 y este es el motivo por el 5 sólo divide a los números terminados en 0 o en 5. Finalmente, 2 divide a $2, 4, 6$ y 8, por lo que 2 dividirá a todos aquellos números que terminen en $0, 2, 4, 6$ u 8, es decir, a los números pares.

Con esto agotamos el estudio de los divisores de 10, pero no con las posibilidades que nos ofrece el sistema decimal. La siguiente unidad en este sistema es 100, por lo que los divisores de 100 también estarán en ventaja. Por ejemplo, 4 no divide a 10, pero sí divide a 100 ya que $4 \times 25 = 100$. Por tanto, 4 también divide a $2 \times 100 = 200$ o, en general, a cualquier múltiplo de 100 –es decir, a cualquier centena– y divide entonces a $10 \times 100 = 1\,000$ o, en general, a cualquier unidad de millar y así sucesivamente. Tan sólo queda ahora en el aire la duda de las decenas y las unidades. Por tanto, para decidir si un número –por muy grande que éste sea– es divisible entre 4, basta fijarnos en sus dos últimas cifras. Por ejemplo,

$$3\,478\,5\underline{24}$$

es divisible entre 4 porque 24 es divisible entre 4. Podemos decidir esto de un simple vistazo ignorando por completo las cinco primeras cifras. Del mismo modo, es vidente que

$$312.486.4\underline{34}$$

no es divisible entre 4 porque 4 no divide a 34.

Después de tratar con los divisores de 100, pasamos a hablar ahora de los divisores de 1 000. Por ejemplo, 8 no divide a 100, pues entran 80 pero quedan 20 como resto. Sin embargo, sí que divide a 1 000: podemos escribir 1 000 como $800 + 160 + 40$ y 20 divide a cada uno de estos tres sumandos. Es por esto, que 8 divide a todos los millares, diez millares, cien millares, etcétera. Por tanto, si queremos saber si un número –por muy grande que éste sea– es divisible entre 8, tan sólo tenemos que fijarnos en sus tres últimas cifras.

Tenemos así un criterio (o receta) para saber a qué números divide determinado número: empezamos por comprobar si el número en cuestión divide a 10; en caso afirmativo, la divisibilidad dependerá únicamente de la cifra de las unidades y en caso negativo, tendremos que ir más allá y comprobar si dicho número divide a 100, 1 000 o 10 000 y, en función de lo que ocurra, será necesario examinar más o menos cifras para aclarar la divisibilidad. Claro que también existen números que non son divisores ni de 10, ni de 100, ni de 1 000 y, en general, de ninguna unidad del sistema decimal. Además, es fácil ver que éstos son la gran mayoría. Sin embargo, en ocasiones, este tipo de criterios les aportan cierta legitimidad. El caso más evidente y simple es el del 9; tenemos que:

$$10 = 9 + 1, \;\; 100 = 99 + 1, \;\; 1\,000 = 999 + 1, \; \ldots$$

por lo que 9 no divide a 10, ni a 100, ni a 1 000,…porque siempre que intentemos dividir entre él quedará un 1 como resto. Pero es justamente ese 1 quien nos proporcionará un bonito criterio de divisibilidad. Si dividimos 10 entre 9 queda 1 de resto, por lo que si dividiésemos 20 quedarían 2 de resto y si dividiésemos 30 quedarían 3. En general, si dividimos cierta cantidad de decenas entre 9, quedarán como resto tantas unidades como decenas dividíamos. Del mismo modo, si dividimos 100 entre 9, queda 1 como resto, por lo que si dividiésemos 200 quedaría 2 y, en general, al dividir cierta cantidad de centenas entre 9 obtenemos como resto tantas unidades como centenas dividíamos. Por tanto, para decidir la divisibilidad entre 9, lo más conveniente es distinguir entre unidades, decenas, centenas, etcétera. Por ejemplo:

$$234 = 2\,\text{centenas} + 3\,\text{decenas} + 4\,\text{unidades},$$

y entonces, al dividir 2 centenas queda 2 como resto, al dividir 3 decenas queda 3 como resto y al dividir 4 unidades quedan esas 4 unidades como resto. Es decir, el resto total es igual a

$$2 + 3 + 4 = 9,$$

que es divisible entre 9. Es decir, todos juntos, los restos suman un número divisible entre 9, por lo que 234 será divisible entre 9. Esta es la regla que estábamos buscando: *un número es divisible entre* 9 *si la suma de sus cifras es un número divisible entre* 9. Y la suma de las cifras de un número suele ser mucho menor que el propio número, por lo que podremos decidir de un plumazo si el número en cuestión es o no divisible entre 9. Examinemos, por ejemplo, el siguiente número:

$$2\,304\,576.$$

La suma de sus cifras es igual a

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 27$$

y si recuerdas la tabla de multiplicar, sabrás que 27 sí es divisible entre 9. Sin embargo,

$$2\,304\,5777$$

no es divisible entre 9 porque

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 7 + 7 = 28$$

y 9 no divide a 28.

En conclusión, lo que acabamos de hacer no es más que intentar evitar alguna de las dificultades intrínsecas de la división. Este *bypass* ha sido fructífero: casi sin darnos cuenta nos hemos encontrado con conexiones interesantes y sorprendentes. Más adelante, nos enfrentaremos a una divisiones que no pueden efectuarse sin dejar restos; abriremos así nuevas perspectivas para las matemáticas más audaces.

4. *El aprendiz de brujo*

El concepto de divisibilidad nos conduce a otras muchas cosas interesantes con las que también podremos jugar. Mencionemos por ejemplo el descubrimiento de que existen "números amigos": se dice que dos números son amigos si al sumar los divisores del primero obtenemos el segundo y viceversa. El propio número no suele contarse entre sus divisores "propios" (o importantes), por lo que, por ejemplo, los divisores propios de 10 serían $1,\ 2$ y 5. Un ejemplo de números amigos lo forman 220 y 284, pues

$$220 = \left[\begin{array}{r} 1 \times 220 \\ 2 \times 110 \\ 4 \times \ \ 55 \\ 5 \times \ \ 44 \\ 10 \times \ \ 22 \\ 11 \times \ \ 20 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad 284 = \left[\begin{array}{r} 1 \times 284 \\ 2 \times 142 \\ 4 \times \ \ 71 \end{array}\right.$$

y la suma de los divisores propios de 220 es igual a

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$$

mientras que la suma de los divisores propios de 284 es igual a

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

También hay "números perfectos": se dice que un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios. Un ejemplo de número perfecto es el 6. En efecto, pues sus divisores propios son $1,\ 2$ y 3, y tenemos que

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Las gentes antiguas atribuían propiedades mágicas a estos números e iniciaron por eso la búsqueda de más números perfectos y lo cierto es que se encontraron muchísimos más, pero todos pares. Entre ellos, destaca por su simplicidad el 28:

$$28 = \left[\begin{array}{r} 1 \times 28 \\ 2 \times 14 \\ 4 \times \ \ 7 \end{array}\right.$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28;$$

pues los restantes números perfectos ya son todos mucho más grandes. Estas gentes antiguas incluso fueron capaces de enunciar una receta que permite construir números perfectos, pero a día de hoy todavía desconocemos si esa receta nos proporciona todos los números perfectos o bien ignora algunos de ellos. Hasta el presente, nadie se ha encontrado con un número perfecto impar; es una cuestión abierta saber si existe alguno.

¡¿Pero de qué se trata todo esto?! El ser humano ha creado la sucesión de los números naturales para sus necesidades y propósitos. No es más que una herramienta para contar y efectuar otras operaciones que surgen después. Sin embargo, una vez que ha sido creada, el ser humano pierde todo poder y control sobre ella. La sucesión de los números naturales existe a partir de entonces por sí misma y ha alcanzado una existencia totalmente independiente de la nuestra en la que ya nada podemos modificar. Es ella quien dicta sus propias leyes y propiedades; propiedades que ningún ser humano llegó jamás a imaginarse cuando la creó. El aprendiz de brujo se queda entonces ojiplático frente a los espíritus que ha despertado. El matemático "ha creado un mundo nuevo de la nada" y después, ese mundo se apodera de él con sus misterios e intrigas; ahora el matemático ya no es un creador, sino un investigador que explora los secretos y conexiones del mundo que ha levantado.

Esta exploración es tan tentadora porque tan sólo requiere de una preparación mínima; basta con dos ojos bien abiertos y curiosos. Un día un estudiante de 10 años vino junto a mí con el siguiente problema: "ya me di cuenta en la clase anterior de que si sumo todos los números hasta un número impar, como por ejemplo hasta 7, obtengo exactamente lo mismo que si multiplico ese número por el *número del medio*. El *número del medio* hasta 7 es 4 (esto debe entenderse como que 4 está en el medio de la lista formada por los siete primeros números: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$) y $7 \times 4 = 28$, coincidiendo así con la suma de los números desde 1 hasta 7:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Sé que esto siempre es cierto, pero no sé por qué".

Bien, está sumando los primeros términos de una progresión aritmética; a ver cómo se lo explico para que me entienda. Eso fue lo que pensé. En cualquier caso, decidí compartir el problema con todo el grupo: "Zsuzsi tiene un problema interesante". Apenas había terminado de explicarlo cuando la niña más brillante de la clase levantó la mano tan emocionada que casi se cae de su pupitre. "Estoy segura de que dirás una tontería, Évi; es imposible que lo hayas resuelto al instante". Pero nada, ella insistía en que sí lo sabía. "Bien, dinos entonces".

"Zsuzsi dijo 7×4, que quiere decir

$$4+4+4+4+4+4+4,$$

en vez de

$$1+2+3+4+5+6+7.$$

Dijo 4 en vez de 1, que son 3 más. Pero luego, en vez de 7, dijo 4, que son 3 menos y se compensan con las anteriores. También dijo 4 en vez de 2, que son 2 más; pero después dijo 4 en vez de 6, que son 2 menos, por lo que también se compensan entre sí. Y, finalmente, dijo 4 en vez de 3 y 5; luego ambas cantidades son iguales".

Me vi obligada a dar la enhorabuena a Évi: yo jamás explicaría de forma tan clara y nítida.

Estas pequeñas e intrépidas exploradoras hacen observaciones realmente extraordinarias. "¡Es como un cuadernillo de ejercicios!", exclamó Marika, otra de mis pupilas. "¿Qué quieres decir con eso, Marika?", pregunté. "Las hojas del cuadernillo están emparejadas de la misma forma: la primera con la última, la segunda con la penúltima, la tercera con la antepenúltima y así todas las que quedan".

Es la pura curiosidad quien mueve a estas pequeñas investigadoras; Gauss, el *princeps mathematicorum*, debió haber descubierto esta misma relación por motivos más utilitarios durante su escuela primaria. Cuenta la historia que el profesor de Gauss quería tomarse un descanso y asignó a los estudiantes la aburrida tarea de sumar todos los números del 1 al 100. Sin embargo, poco pudo descansar; el pequeño Gauss exclamó al poco rato: "el resultado es 5 050". Y el profesor tuvo que admitir que la respuesta era correcta, pero ¿cómo se las había arreglado para hacer las cuentas tan rápido? "Me di cuenta de que $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ y así las sumas que siguen; suman todas 101. Además, la última de esas sumas es $50+51 = 101$. Por tanto, después efectuar 50 de esas sumas, los sumandos escogidos de cabo a rabo acaban por encontrarse en el medio. Y entonces la suma total es $50 \times 101 = 5\,050$".

El pequeño Gauss sumó así todos los números hasta cierto número par empleando un astuto e inteligente método que le permitió obtener rápidamente el resultado final. Zsuzsi, hizo algo similar, pero para sumar hasta un número impar. Si somos un poco retorcidos, podremos juntar ambos razonamientos. Hay un chiste muy conocido sobre alguien que observa un rebaño de ovejas pastando y afirma con vehemencia: "hay 357 ovejas en el rebaño". Cuando se le preguntó cómo las había contado dijo: "muy fácil, conté todas las patas y dividí entre 4". En ocasiones, los matemáticos actúan como ese rocambolesco señor. Por ejemplo, si queremos calcular la suma de todos los números hasta cierto número dado –ya sea éste par o impar–, podemos calcular primero el doble de tal suma sin mucho esfuerzo si lo hacemos *a lo Gauss*: sumamos el primero con el último, el segundo con el penúltimo... Es decir, procedemos del siguiente modo: escribimos la suma que queremos calcular dos veces, pero la segunda vez en orden inverso. Por ejemplo,

$$\begin{array}{c} 1+2+3+4 \\ 4+3+2+1 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} 1+2+3+4+5 \\ 5+4+3+2+1. \end{array}$$

De este manera, aparecen por columnas los números que tenemos que sumar. Y sumando dichos números, obtenemos que

$$\begin{array}{c} 5+5+5+5 \\ \quad =4\times 5=20 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} 6+6+6+6+6 \\ \quad =5\times 6=30 \end{array}$$

y ese resultado es exactamente el doble de la cantidad que buscábamos. Por tanto, basta dividir ahora entre 2. Así pues, los resultados correctos son 10 y 15 respectivamente. Puedes comprobar que es correcto:

$$1+2+3+4=10 \ \text{ y } \ 1+2+3+4+5=15.$$

En ambos casos, la regla consiste en multiplicar la suma del primer y último sumando por el número de sumandos y dividir luego entre 2. Dicho así, incluimos en una sola frase el método de Zsuzi y el método de Gauss: para $1+2+3+4+5+6+7$ la suma del primer y último sumando es igual a 8, que multiplicado por el número de sumandos da $7\times 8=56$ y la mitad de esto es 28; para $1+2+3+\cdots+100$, la suma del primer y último sumando es igual a 101, que multiplicado por el número de sumandos da $100\times 101=10\,100$, cuya mitad es 5 050.

Está claro, y en mi clase se percataron de inmediato, que aplicando la receta anterior solo se puede sumar una lista de números consecutivos, sino que también se puede sumar una lista de números que se suceden a pasos de igual longitud, como por ejemplo (el punto de partida puede ser cualquier cosa):

$$5+7+9+11+13,$$

donde cada sumando es el anterior más 2 unidades, o

$$10 + 15 + 20 + 25 + 35,$$

donde la diferencia entre dos términos consecutivos es igual a 5. Para estas sumas también se cumple que la suma del primer y el último sumando coincide con la suma del segundo y el penúltimo y así sucesivamente. Intenta convencerte. En el primer ejemplo

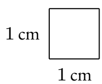
$$5 + 13 = 18, \quad 7 + 11 = 18$$

y para el cálculo del doble de esa suma también aparecería $9 + 9$, que es igual a 18. En el segundo ejemplo,

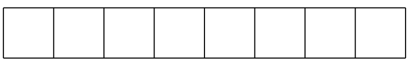
$$10 + 35 = 45, \quad 15 + 30 = 45, \quad 20 + 25 = 45.$$

Los matemáticos llaman progresiones aritméticas a las sucesiones en las que la distancia entre dos términos consecutivos permanece constante.

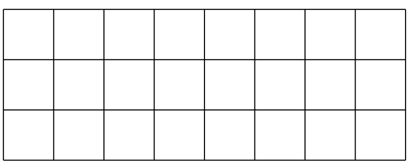
Curiosamente, también aparece la misma idea en otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, el truco empleado para sumar los primeros términos de una progresión aritmética también es útil en el cálculo áreas. Calcular el área de un rectángulo es muy sencillo, más fácil incluso que el calcular el volumen de un cubo: elegimos un cuadrado pequeño como unidad y nos preguntamos cuántos de ésos cuadrados hay que emplear para construir el rectángulo original. Tomemos, por ejemplo, un cuadrado de 1 centímetro cuadrado, es decir, un cuadrado de lado 1 cm:



y coloquemos 8 de esos cuadrados en fila



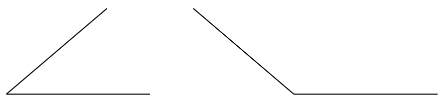
formando así un rectángulo. Para que no sea tan estrecho, coloquemos ahora tres filas como la anterior una encima de otra:



El rectángulo que acabamos de construir está formado por un total de $3 \times 8 = 24$ cuadrados pequeños.

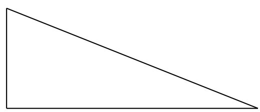
Recíprocamente, si partimos ahora de un rectángulo de 8 cm de largo y 3 cm de alto, tendremos espacio para exactamente $3 \times 8 = 24$ cuadrados pequeños y, en general, calcularemos el área de un rectángulo multiplicando dos lados adyacentes.

Observa también que los lados adyacentes de un rectángulo forman un ángulo recto (o lo que es lo mismo, dichos lados son perpendiculares entre sí). Un ángulo recto es un ángulo con el que debemos ser muy cuidadosos si estamos construyendo una casa; ninguno de los brazos que forman tal ángulo puede inclinarse alejándose o acercándose peligrosamente al otro brazo como sí ocurre con los ángulos agudos y obtusos:



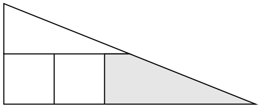
(pues unos tabiques así se derrumbarían muy fácilmente). En cambio, un ángulo recto se mantiene en perfecto equilibrio.

En la figura plana delimitada por tres líneas rectas –es decir, en un triángulo– es posible tener un ángulo recto, pero sólo uno. Haz algunos intentos para convencerte: por mucho que te empeñes, los otros dos ángulos siempre serán agudos.



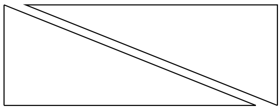
Los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado que se encuentra enfrente del ángulo recto es la hipotenusa.

Ahora bien, debido precisamente a sus ángulos agudos, no podremos formar nunca un triángulo rectángulo partiendo de nuestros pequeños cuadrados unidad:



Para empezar, en la primera fila ya dejamos fuera el área sombreada, por lo que la medición del área de un triángulo se presenta como una cuestión difícil y problemática.

Sin embargo, es un problema que puede resolverse muy fácilmente: si no sabemos calcular el área de un triángulo, calculemos el área de dos triángulos. Para ello, ajustamos a la hipotenusa del triángulo original un nuevo triángulo idéntico pero colocado en posición invertida; obtenemos así un rectángulo

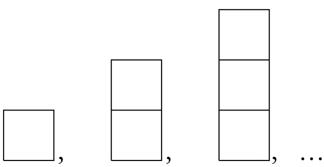


para el que sí sabemos calcular su área: hay que multiplicar dos de sus lados adyacentes. Y los dos lados adyacentes del rectángulo son los catetos de nuestro triángulo. De este modo, estaremos calculando el doble de la área del triángulo. Por tanto, para obtener el área del triángulo original sólo hay que dividir ahora entre dos. Es decir, el área de un triángulo rectángulo se calcula multiplicando sus dos catetos y dividiendo después entre dos.

Evidentemente, tal y como ya puntualizó Euclides hace más de dos mil años, este argumento es exactamente el mismo que el empleado para sumar los términos de una progresión aritmética. Euclides viste con túnica geométrica las propiedades de los números: para él los símbolos de

$$1,\ 2,\ 3, \ldots$$

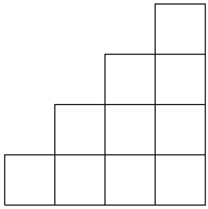
bien podrían ser



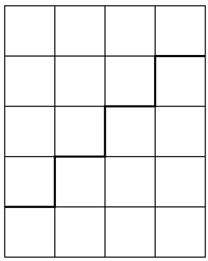
y en esa caso la suma

$$1 + 2 + 3 + 4$$

quedaría representada mediante un "triángulo con escaleras" como este:



y el truco que antes consistía en colocar la suma en orden inverso debajo, consiste ahora en insertar otro triángulo con escaleras encima del primero tal y como se indica en la siguiente figura:

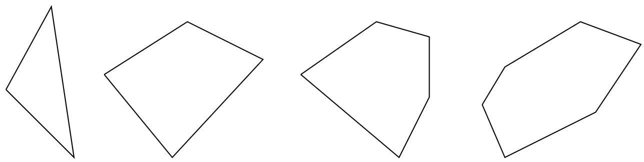


pues es así como el 1 va encima del 4, el 2 encima del 3, el 3 encima del 2 y el 4 encima del 1. Los cuadrados apilados son siempre 5 y son, en total, $4 \times 5 = 20$, lo cual es coherente con el hecho de que el rectángulo resultante tiene una anchura de 4 unidades y una altura de 5 unidades por lo que su área es igual a $4 \times 5 = 20$ unidades de área. Esto es exactamente el doble de la cantidad que estamos buscando, luego tal cantidad es justamente la mitad, pues el área de un triángulo escalonado también es la mitad del área del rectángulo. Y ahora ya está más que claro que hemos empleado el mismo argumento: primero en el lenguaje de la aritmética y ahora en el lenguaje de la geometría. Más adelante veremos que esta idea todavía admite más variaciones.

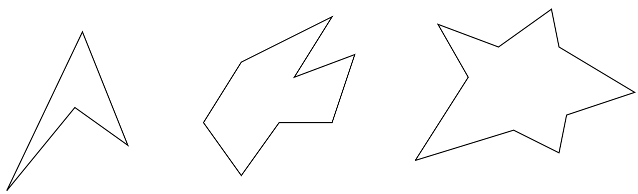
5. *Variaciones sobre un tema fundamental*

PERO, ¿qué interés tiene sumar una ristra de números como las del capítulo anterior? El problema que comentaremos a continuación es de apariencia completamente diferente a todo lo anterior y, sin embargo, terminará llevándonos hacia ese tipo de sumas.

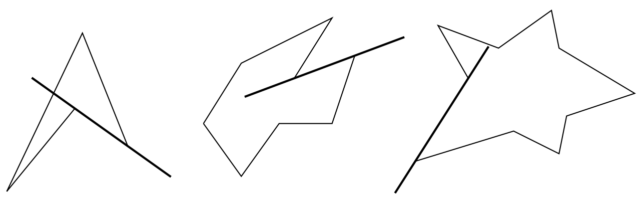
Ya hemos hablado antes de triángulos y cuadriláteros pero, en general, las figuras planas delimitadas por segmentos de recta se les llama polígonos.



A diferencia de los que siguen a continuación, los polígonos de la figura anterior son todos "convexos" y no presentan ningún tipo de abolladura.

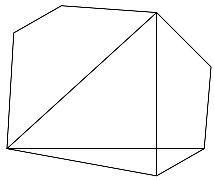


Más exactamente, éstos últimos se distinguen de los primeros en que si prolongamos alguno de sus lados, dividimos la figura plana en dos partes:

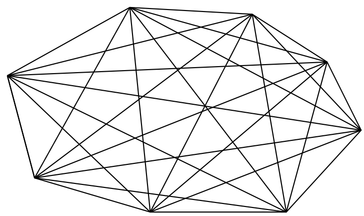


Convéncete de que esto no pasa para ninguno de los polígonos de la primera figura. Es importante que tengas clara esta diferencia, pues de ahora en adelante consideraremos siempre polígonos convexos (y haremos una distinción similar para el caso de los cuerpos geométricos).

Las líneas que unen dos vértices no consecutivos de un polígono se llaman diagonales (dos vértices consecutivos están conectados por un lado). Dibujemos, por ejemplo, algunas de las diagonales del siguiente polígono:

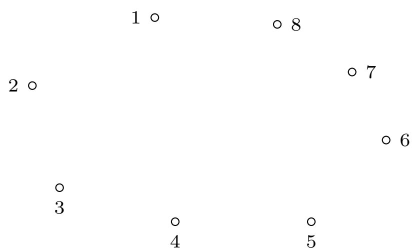


El problema es ahora el siguiente: dado un polígono, un octógono por ejemplo, ¿cuántas diagonales podemos dibujar? Aun siendo capaz de pintar en un dibujo todas las diagonales, no es ni mucho menos inmediato el contarlas, pues la figura está atiborrada de diagonales apiñadas dificultando así su conteo.



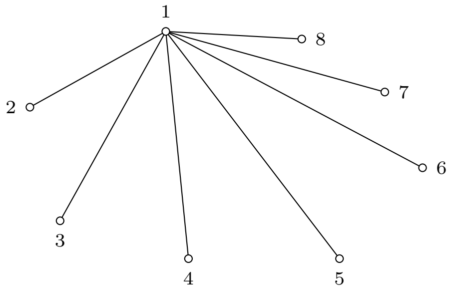
El problema se simplifica notablemente si no distinguimos entre vértices consecutivos y vértices no consecutivos, contando también entonces a los lados como diagonales. En cualquier caso, dado que sabemos que un octógono tiene 8 lados, bastaría restar luego 8 unidades al resultado obtenido.

Por tanto, el problema también puede formularse así: dados los 8 vértices de un octógono:

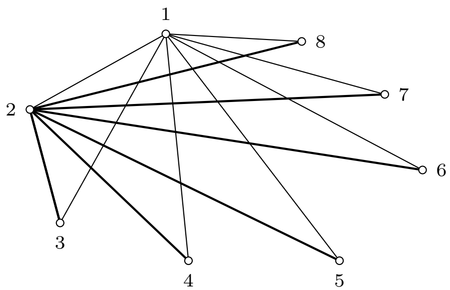


¿de cuántas maneras podemos conectarlos entre sí? Hay dos caminos que conducen a la respuesta.

El primer camino consiste en conectar el vértice número 1 con los otros siete vértices, obteniendo así 7 "diagonales":



A continuación, también unimos el vértice número 2 con los vértices restantes, excepto con el número 1, pues con ése ya fue emparejado anteriormente. Añadimos por tanto seis nuevas "diagonales":



Conectamos después el vértice número 3 con los otros vértices, exceptuando por supuesto ahora a los dos vértices con los que ya fue emparejado anteriormente, que son el 1 y el 2. Dibujamos así 5 nuevas "diagonales". Análogamente, el vértice 4 proporciona 4 "diagonales" más, el vértice 5 otras 3, el vértice 6 otras 2, el vértice 7 una única "diagonal" y, finalmente, el vértice 8 ya estaría emparejado con todos los demás vértices por lo que no aportaría ninguna diagonal a mayores. Tenemos en total

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \text{ diagonales,}$$

o dándole la vuelta,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \text{ diagonales.}$$

El segundo camino consiste en observar cuántas "diagonales" podemos dibujar desde un vértice y es evidente que éstas son 7 "diagonales", pues cada vértice puede ser emparejado con cualquiera de los otros 7 restantes. Pero cuidado con decir que si partiendo de un vértice puedo dibujar 7 diagonales entonces, dado que tenemos 8 vértices, habrá un total de 8×7 diagonales. Esto es erróneo, pues cada diagonal conecta 2 vértices y la diagonal que une, por ejemplo, los vértices 1 y 6 habría sido tenida en cuenta tanto al considerar las diagonales que salen del vértice 1 como cuando recontamos las diagonales que salen del vértice 6. El error consistiría por tanto en que hemos considerado cada diagonal dos veces y entonces, el resultado correcto es la mitad de $8 \times 7 = 56$, es decir, 28.

Evidentemente, tenemos que llegar al mismo resultado por ambos caminos, por lo que

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

es igual a la mitad de 8×7, coincidiendo también con el resultado de mi querida Zsuzsi.

Pero todavía podemos introducir más variaciones sobre este mismo tema. El problema también puede formularse del siguiente modo: dado que cada diagonal empareja dos vértices, lo que nos estamos preguntando en verdad es por el número de distintas maneras en que podemos escoger 2 vértices de entre los 8 de nuestro octógono. Y ahora, hablar de vértices es completamente irrelevante; bien podríamos pensar en una bolsa con 8 bolas pintadas cada una de un color distinto y preguntarnos de cuántas maneras distintas podemos escoger un par de bolas o, si tuviésemos que hacer parejas en un grupo de 8 estudiantes, de cuántas maneras distintas podemos escoger la primera pareja. Todas estas cuestiones se expresan matemáticamente preguntándonos por lo siguiente: ¿cuántas combinaciones de 2 elementos pueden generarse con 8 elementos?

Si denotamos a los elementos con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, las "combinaciones de 2 elementos" (o simplemente pares o parejas) que se forman a partir de ellos son las siguientes:

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	7 8
1 3	2 4	3 5	4 6	5 7	6 8	
1 4	2 5	3 6	4 7	5 8		
1 5	2 6	3 7	4 7			
1 6	2 7	3 8				
1 7	2 8					
1 8						

y es evidente que el número total de pares es (yendo de derecha a izquierda)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Por otra parte, también podríamos razonar diciendo que cada elemento puede emparejarse con los 7 restantes, de modo que 8 elementos proporcionarían a 8×7 parejas, pero como cada pareja habría sido contada dos veces –primero cuando consideramos las posibles parejas del primer miembro y después cuando hicimos lo propio con el segundo–, el resultado correcto es la mitad de 8×7.

Todos los caminos terminan en el mismo resultado final y no puedo evitar expresar esto sin escribir una fórmula. Pero antes, debo advertirte de lo siguiente: en matemáticas los paréntesis no indican que algo sea de menor importancia, sino que los matemáticos escriben entre paréntesis aquello que desean enfatizar. Por ejemplo, $(2 + 3) \times 6$ significa que debemos multiplicar por 6 al resultado de la suma $2+3$ –es decir a 5–, mientras que si lo escribimos sin paréntesis, como $2 + 3 \times 6$, significa que debemos sumar 2 al producto 3×6 (por acuerdo unánime de la comunidad matemática, la multiplicación "se une más estrechamente" que la suma y entonces, en este último caso, no sería necesario escribir $2 + (3 \times 6)$). Por otra parte, todo el mundo sabe que la mitad de 4, 6 y 10 puede escribirse, respectivamente, como:

$$\frac{4}{2}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{10}{2}$$

y que, por lo general, la división puede expresarse en este formato "fraccionario". En tal caso, si n es el número hasta el que queremos sumar todos los anteriores, la suma del primer y último sumando será igual a $1 + n$ y hay que multiplicar esto por el número de sumandos, que es n, y dividirlo finalmente entre 2. Es decir, todas las variaciones de nuestro tema fundamental se resumen en esta fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1 + n) \times n}{2}.$$

Las matemáticas son en realidad como un idioma: un idioma un tanto extraño que habla en símbolos. La fórmula anterior sólo es una cadena de símbolos, no significa nada en sí misma; cada uno puede substituirla por sus propias experiencias. Para una persona podría significar el recuento de las diagonales de un polígono; pero para otra podría ser, sin embargo, el recuento de las distintas opciones para escoger la pareja principal de un baile. Escribir una fórmula matemática no es más que una expresión de nuestra alegría por haber respondido a todas esas preguntas con un único argumento.

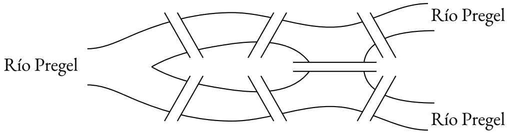
Posdata sobre geometría sin mediciones

Han sonado mientras tanto dos nuevos temas: uno geométrico y otro aritmético. Me gustaría avanzar un poco más por el camino de la geometría.

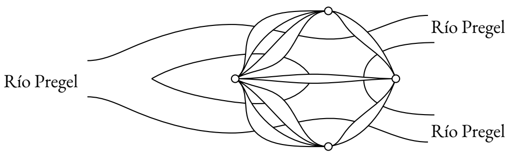
Volvamos nuevamente a la figura que muestra al octógono con todas sus diagonales. Es cierto que tal figura no es nada clara; las diagonales se cruzan unas con otras y dan lugar a una gran cantidad de puntos de corte. Con todo, que el polígono sea convexo facilita notablemente las cosas, pues al quedar todos los vértices fuera del jaleo provocado por tanta diagonal, éstos no se confunden nunca con las intersecciones de las diagonales. No obstante, sería todo bastante más claro si las diagonales fuesen gomas elásticas fijadas a los vértices correspondientes, pudiendo así moverlas, estirarlas y deformarlas a nuestro antojo en el espacio. Agarraríamos la primera diagonal hasta cierta altura, después la siguiente sería elevada hasta una altura un poco inferior, la tercera hasta una altura todavía menor que la anterior y así sucesivamente hasta terminar. De este modo, las diagonales ya no se cortarían entre sí y dado que estos levantamientos y estiramientos no alteran en absoluto el número diagonales, ahora podríamos contarlas muy fácilmente.

Hay una rama de la Geometría, conocida por el nombre de Topología, que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes aún imaginándonos a dichas figuras como realizadas en un material elástico que nos permita estirarlas, comprimirlas y deformarlas a nuestro gusto. Ciertamente, es un tanto extraño que esta ciencia forme parte de la Geometría, pues aquí no hay nada que medir: al estirar, comprimir o deformar, la longitud de las distancias y la amplitud de los ángulos sufren evidentes alteraciones, por lo que estas magnitudes carecen ahora de todo interés. Lo que dota de especial interés a estas investigaciones es que todavía son muy novedosas y además, conocemos su origen perfectamente, pues fuimos testigos del nacimiento de esta rama de las matemáticas a partir de un divertido juego.

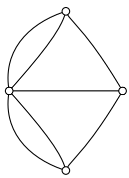
Se trata de un famoso acertijo sobre los puentes de Königsberg (hoy Kaliningrado). Las dos islas que forma el río Pregel a su paso por la ciudad están conectadas entre sí y con ambas orillas del río mediante siete puentes tal y como se indica en este croquis:



El rompecabezas consiste en saber si iniciando una caminata en cualquier lugar de la ciudad, es posible regresar al punto de partida habiendo pasado por todos los puentes pero una única vez por cada uno de ellos. Te animo a que lo intentes. A medida que vayas probando, entenderás que el acertijo no cambia en nada si nos imaginamos que los puentes que conducen a una misma isla o a una misma orilla del río convergen en un punto (esto nos evitaría tener que caminar más de la cuenta), por lo que el croquis bien podría ser algo como esto:

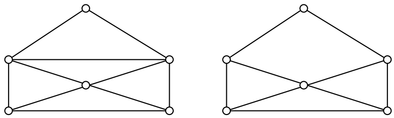


También podríamos pensar que es una tontería tener dos puentes que conecten una misma isla con una misma orilla, pero se supone que un puente fue diseñado para peatones y el otro para el tráfico motorizado. Aún podemos esbozar por tanto un croquis más sencillo y esquemático que el anterior:



El acertijo se plantea ahora preguntando si es posible dibujar la figura anterior de un sólo trazo, sin levantar el lápiz del papel –pues nuestro caminante no puede volar– y de modo que terminemos con la punta del lápiz en el punto de partida.

Es probable que te hayas encontrado antes con este tipo de rompecabezas. A veces se plantean en relación con unos sobres para cartas como estos:

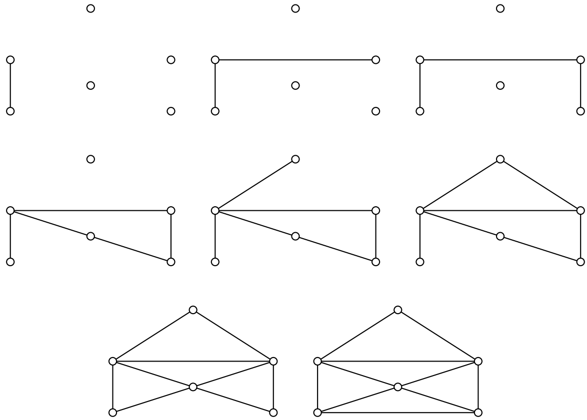


Es evidente que estamos ante preguntas que caen dentro del alcance de la Topología, pues para saber si podemos representar una figura mediante un único trazo, nada importa que ésta sea de goma pudiéndose estirar, comprimir y deformar tanto como deseemos sin cortarla o romperla en pedazos y pegar después algunos de estos.

El gran Euler dio una respuesta simple y clara a estas preguntas. Si podemos dibujar tal figura de un sólo trazo finalizando además en el punto de partida, se tiene entonces que el lápiz sale del punto de inicio y también termina en él, por lo que cada vez que llega a un vértice debe partir de ese mismo vértice hacia otro vértice. Por tanto, cada línea que llega a un vértice tiene una pareja: la línea que sale de dicho vértice. Así pues, en cada vértice de la figura deben encontrarse un número par de líneas. Se puede probar que esta condición también es suficiente: si a cada vértice llega un número par de aristas, entonces se puede dibujar tal figura de un sólo trazo que termina donde empezó.

De acuerdo con esto, el problema del paseo por Königsberg no tiene solución; lo imposibilita cada uno de los vértices del croquis. En el vértice del extremo izquierdo se encuentran 5 aristas y en los tres vértices restantes se cruzan, en cada uno de ellos, otras 3 aristas y tanto 5 como 3 son números impares.

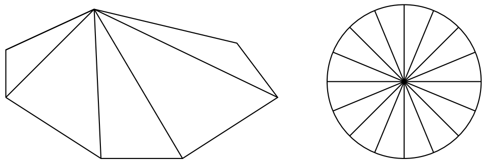
En cambio, el primer sobre sí que se puede dibujar de un sólo trazo si no exigimos la condición de que el lápiz termine en el punto de partida, porque tanto en los vértices de la parte superior como en el vértice central, se cruzan 4 aristas y éste es un número par. Sólo los vértices de la parte inferior podrían fastidiarnos, pues en ellos se cruzan 3 aristas. Por tanto, si permitimos que el trazo empiece en uno de esos vértices y termine en el otro, podremos dibujar el sobre de un único trazo:



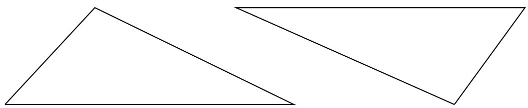
El segundo sobre es un caso perdido: tiene más de dos vértices problemáticos, pues a excepción de los vértices superior y central –donde se cruzan 2 y 4 aristas respectivamente–, en los restantes vértices se cruzan 3 aristas.

Éste es el juego que dio origen a la Topología, pero no te creas que tal disciplina se quedó anclada en esta etapa tan lúdica y divertida. En la actualidad, la Topología está considerada como una rama muy seria y compleja que ofrece infinidad de aplicaciones. La Física Moderna, por ejemplo, se vale de ella para describir los circuitos eléctricos y la Química Orgánica la emplea en el estudio de los modelos moleculares. Por lo general, podríamos decir que siempre aparecerán argumentos topológicos si lo que deseamos es hacernos una idea de cierta estructura independientemente de sus dimensiones.

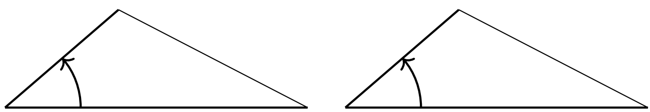
Merece la pena reflexionar unos minutos en el tipo de nociones geométricas echamos por la borda al hablar de Topología. Tales conceptos son los de congruencia y semejanza, que juegan un papel fundamental en Geometría, pues un polígono arbitrario siempre puede descomponerse en triángulos: basta dibujar todas las diagonales desde uno de sus vértices. Incluso podemos pensar que un círculo también es, en cierto sentido, una figura aproximadamente triangular: basta dibujar ahora una cantidad suficientemente densa de radios de modo que cada uno de los arcos parezca casi recto (sé que este último "casi" evoca en ti un recuerdo escolar desagradable; prometo que aclararé su significado de forma totalmente precisa y rigurosa más adelante).



Dos triángulos son congruentes si se puede colocar uno encima de otro cubriéndolo perfectamente. Por ejemplo, los siguientes dos triángulos son congruentes:

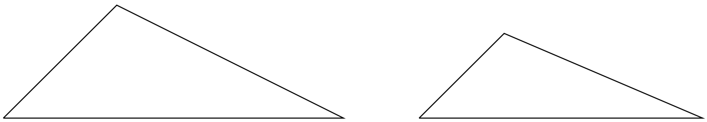


Podemos asegurarnos de que así es recortándolos y girándolos después hasta colocarlos en una misma posición. Si lo haces, observarás que los 6 elementos (esto es, los 3 lados y los 3 ángulos) se superponen con total exactitud. Pero para que que esto ocurra, basta con que sean idénticos ciertos pares de elementos. Basta, por ejemplo, con que coincidan respectivamente dos lados y el ángulo que forman en un triángulo con dos de los lados del otro triángulo y al ángulo que allí forman:

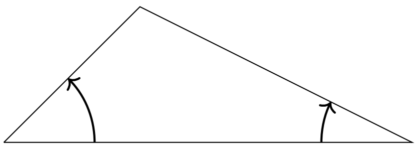


Porque si todo lo que sé es que los datos dibujados con trazo más grueso son iguales, al colocar los ángulos iguales el uno encima del otro, los puntos finales de los lados adyacentes también se superponen y el tercer lado del triángulo es el que une estos dos puntos, por lo que no hay otra opción: ese lado y los dos ángulos que éste forma también coinciden.

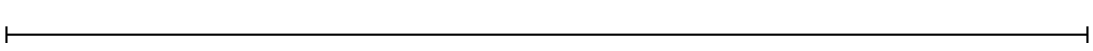
Dos triángulos se dicen semejantes si su forma es igual pero no necesariamente su tamaño. Uno puede ser, por tanto, una copia reducida o ampliada del otro. Podemos imaginar esta situación pensando que hemos tomado una fotografía de un triángulo grande y que luego hemos reducido la imagen obtenida. Está claro que gozamos de plena libertad para escoger la longitud de uno de los lados del triángulo pequeño; de hecho, podemos suponer que nuestra máquina fotográfica puede hacer fotos tan pequeñas como deseemos y, sobre todo, que no distorsiona, es decir, que reduce los otros dos lados en la misma medida pero sin modificar los ángulos. En la imagen pequeña, los lados mantendrán la misma inclinación, por lo que la amplitud de los ángulos no se verá alterada en absoluto. Concluimos entonces que los lados de dos triángulos semejantes están igualmente agrandados o empequeñecidos (expresaremos esto diciendo que son proporcionales) y que sus ángulos son iguales.



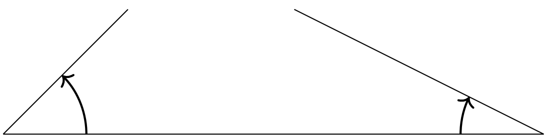
Es por ello, que para que dos triángulos sean semejantes, basta con que tengan dos ángulos iguales. En efecto, pues si pretendemos dibujar un triángulo semejante a uno dado:



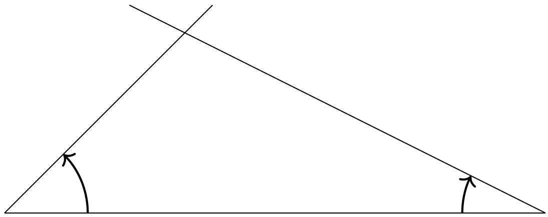
consideramos entonces cualquier lado del nuevo triángulo, el inferior, el más largo, el más pequeño, el que sea:



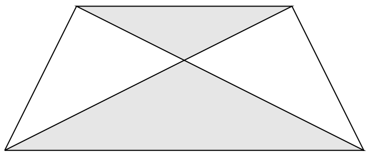
dibujamos luego los ángulos inferiores del nuevo triángulo



y ya no queda nada a nuestra elección, basta prolongar los brazos de estos ángulos para cerrar el triángulo, obteniendo así un triángulo semejante al original. Por tanto, la semejanza de triángulos depende en realidad de la coincidencia de dos ángulos.



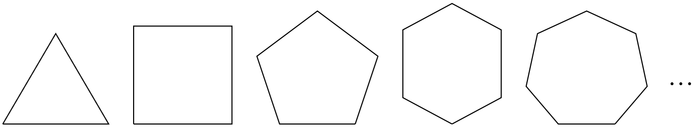
En Geometría nos encontramos muy a menudo con figuras congruentes y semejantes. En el trapecio isósceles que aparece a continuación, los triángulos blancos son congruentes y los sombreados son semejantes:



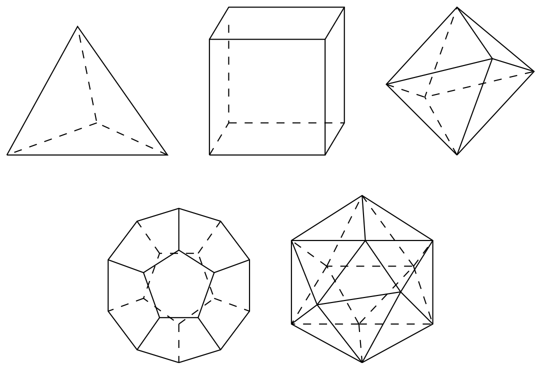
Ahora bien, en el marco de la Topología, ya dijimos que carece de todo sentido e interés hablar de congruencia o semejanza. Si estiramos, comprimimos o deformamos una figura, su forma y tamaño sufrirán importantes modificaciones; las líneas rectas pueden convertirse en curvas y podrían incluso salirse del plano en el que originalmente vivían.

Resulta entonces especialmente curioso que sea la Topología la disciplina adecuada para decidir cuántos cuerpos regulares existen, pues la “regularidad” de los sólidos está directamente relacionada con la congruencia y, por tanto, con la medición.

Se dice que un sólido convexo es regular si todas sus caras son figuras planas congruentes entre sí con lados y ángulos iguales (como las que se muestran a continuación) cortándose además el mismo número de caras en cada vértice.



La Topología aborda este problema fijándose exclusivamente en determinadas propiedades de los sólidos regulares como, por ejemplo, en que cada cara está delimitada por el mismo número de lados o que en cada vértice se cortan el mismo número de caras y aristas. Estas propiedades no tienen nada que ver con el tamaño o con la forma. De este modo, empleando herramientas puramente topológicas, se demuestra que sólo es posible construir cinco sólidos cumpliendo las propiedades anteriormente indicadas. Y para probar que hay exactamente cinco empleamos la Geometría. Tres de ellos están delimitados por triángulos, el cubo por cuadrados y las caras del restante son pentágonos:



Este descubrimiento es muy sorprendente, pues en el plano no hay ninguna razón que evite la existencia de polígonos regulares con tantos lados como deseemos. La sucesión de polígonos regulares de la página 43 continua indefinidamente. Así pues, concluimos que no debemos trasladar al espacio tridimensional aquello que pensemos en el plano sin someterlo antes a una profunda reflexión. En el espacio suceden cosas muy diferentes.

Una vez más, merece la pena reflexionar un rato: esperábamos encontrarnos con nuevos fenómenos en el espacio, pues allí el movimiento es más libre que en el plano, por lo que tendimos a pensar que existiría una mayor variedad y, por ende, más sólidos regulares. Y ahí está la clave: el hecho de tener más opciones se traduce en condiciones más difíciles de cumplir, porque también tendríamos más condiciones entre las que escoger, es decir, más libertad. A diferencia de lo que ocurre en los vértices de una figura plana –donde sólo pueden cortarse dos lados–, en el vértice de un sólido tridimensional podrían cortarse un número arbitrario de aristas y también de caras. Podríamos tener 30 aristas cortándose en un vértice, 3 aristas en otro, una cara podría ser un triángulo, otra un polígono de 30 lados, etcétera. Por tanto, es una restricción muy severa privar a un sólido de todas estas posibilidades exigiéndole un número igual de aristas en cada vértice y caras iguales y regulares.

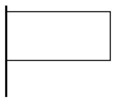
Sólo pueden hacer frente a tantas restricciones cinco sólidos.

Hasta me vino a la mente la Topología pensando en como sumar hábilmente $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Esto prueba que las Matemáticas son un todo orgánico: dondequiera que toquemos, los vínculos y relaciones entre sus distintas ramas se nos agolpan en la cabeza.

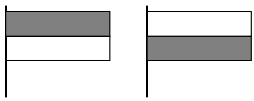
6. Pasamos por todas las posibilidades

Es muy probable que al profesor no le preocupen en absoluto las distintas opciones para emparejar a sus alumnos; resolverá la situación teniendo en cuenta las amistades y hostilidades presentes en el aula. Pero el pequeño investigador que todavía mantiene intacta su curiosidad quiere probar y recorrer todas las posibilidades. En una de mis clases estábamos discutiendo que para multiplicar por 357 tan bien podemos empezar por las centenas como por las unidades y una niña interrumpió súbitamente preguntando si no podríamos empezar por las decenas. Cuando le respondí que por supuesto que podía, pero que debería ser especialmente cuidadoso a la hora de escribir los productos parciales, todas quisieron saber de cuántas formas posibles podemos efectuar tal multiplicación. Me vi pues obligada a desviarme un poco hacia la Combinatoria, porque es ésa la rama de las Matemáticas que estudia el número de posibles ordenamientos.

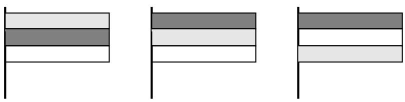
Apenas hay niños a quienes no les guste saber cuántas banderas distintas podemos diseñar con 3 colores. Por supuesto, con un único color tan sólo tenemos una bandera



y (si deseamos emplear cada color una única vez) sólo podemos añadir una banda de otro color de dos formas distintas : encima o debajo.

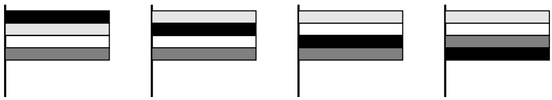


¿Cómo añadir un tercer color a estos dos? Bien, pues encima, en medio o debajo. Partiendo de la bandera de la izquierda, podemos construir tres nuevas banderas:



y, por supuesto, con la bandera de la derecha podemos hacer exactamente lo mismo:

por lo que, en total, con tres colores podemos diseñar $2 \times 3 = 6$ banderas. Sabiendo esto, procedemos ahora con cuatro colores del mismo modo: el cuarto color puede ser colocado encima del primer color, entre el primero y el segundo, entre el segundo y el tercero o debajo del tercero. Y esto lo podemos hacer con cualquiera de las banderas de tres colores que ya hemos obtenido. De este modo, de cada bandera de tres colores, sacamos cuatro banderas de cuatro colores. Por ejemplo, a partir de la primera bandera de tres colores obtenemos las siguientes banderas:



Por tanto, partiendo de $2 \times 3 = 6$ banderas de tres colores, podemos diseñar $2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24$ banderas de cuatro colores. Podemos añadir a 1 como factor, pues no provocará ningún efecto y observamos así una agradable regularidad:

el número de banderas con un color es	1
el número de banderas con dos colores es	$1 \times 2 = 2$
el número de banderas con tres colores es	$1 \times 2 \times 3 = 6$
el número de banderas con cuatro colores es	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Evidentemente, este seguirá siendo el caso aun cuando no trabajemos con banderas y colores. Ahora sabemos, por ejemplo, que podemos servir sopa a 5 niños de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ formas distintas o que cualesquiera 6 “elementos” pueden ser ordenados o “permutados” de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ formas distintas. En la expresión

$$1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

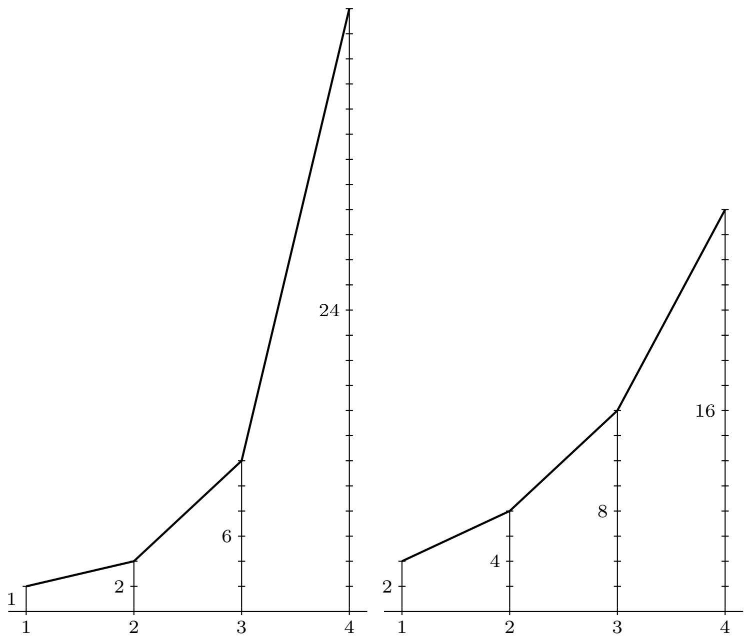
estamos transmitiendo el siguiente mensaje: multiplica los números desde 1 hasta 6, pero ¡no más! Habitualmente, esto se expresa escribiendo el último factor y añadiendo luego un signo de admiración, por lo que la notación abreviada para el producto anterior es:

$$6!$$

Y dado que estamos trabajando con "factores", leeremos eso como "seis factorial". Por tanto,

$$1! = 1,\ 2! = 1 \times 2,\ 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ y así sucesivamente.}$$

El valor del factorial depende, por supuesto, de hasta donde lleguemos multiplicando, por lo que nos encontramos de nuevo ante una función. Representemos rápidamente su curva febril. Trazamos para ello en una línea horizontal los números hasta el que multiplicamos y hacia arriba el valor del factorial correspondiente (adjuntamos al lado la curva febril de las potencias de 2 para comparar):



Inicialmente, la curva febril del factorial permanece por debajo de la curva de las potencias (fíjate, por ejemplo, en el trozo entre 1 y 2), pero luego se eleva repentinamente por encima de ésta y se dispara hacia arriba rápidamente. Y esto no sólo es cierto para las potencias de 2, el factorial siempre acaba creciendo de forma más abrupta que la curva febril de cualquier potencia. Es natural, nada importa cuan grande sea la base. Supongamos, por ejemplo, que la base es 100; al elevarla a una potencia, multiplicamos siempre por ese mismo 100, mientras que cuando calculamos un factorial, los 99 primeros factores son menores que 100, pero a partir del centésimo son todos mayores que 100, ya que multiplicaremos por $100,\ 101,\ 102,\ 103,\ldots$ por lo que, más tarde o más temprano, los factoriales siempre acaban tomando la delantera.

Hemos calculado el número de banderas con dos, tres y cuatro colores de forma gradual a partir del número de banderas con un único color y llegamos así a la hermosa sucesión con productos dada por:

$$1 \times 2, \quad 1 \times 2 \times 3, \quad 1 \times 2 \times 3 \times 4, \ldots$$

Otros problemas de Combinatoria también nos conducen a resultados igualmente bellos. Ya sabemos de cuantas formas distintas podemos emparejar cierto número de elementos; hemos demostrado, por ejemplo, que entre 8 elementos podemos escoger un total de

$$\frac{8 \times 7}{2}$$

pares distintos y, de manera análoga, entre 15 elementos, tendremos

$$\frac{15 \times 14}{2}$$

pares distintos y así sucesivamente. ¿No podría construirse gradualmente a partir de esto el número total de ternas, cuartetos o quintetos que se pueden seleccionar de entre cierto número elementos?

Consideremos de nuevo uno de los pares formados a partir de los elementos del conjunto $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$; se, por ejemplo, el par

$$1\ 2$$

y veamos de cuántas formas distintas podemos añadir un tercer elemento a dicho par. Ahora, el orden no importa, tan sólo nos preocupa si un elemento ha sido o no ha sido seleccionado (estamos, por ejemplo, ante el problema de nombrar un comité de 3 miembros entre un grupo de 8 personas; lo único importante es quién entra en el comité). Y al par $1\ 2$ podemos añadirle cualquiera de los 6 elementos restantes, obteniendo así las seis ternas que se indican a continuación:

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 4 \\ \underline{1\ 2\ 5} \\ 1\ 2\ 6 \\ 1\ 2\ 7 \\ 1\ 2\ 8 \end{array}$$

(por favor, ignora de momento el subrayado).

Del mismo modo, podemos ampliar cualquier par a una terna de seis formas distintas. Por ejemplo, para el par $2\ 5$ tenemos las siguientes ternas:

$$\begin{array}{c} 2\ 5\ 1 \\ 2\ 5\ 3 \\ 2\ 5\ 4 \\ 2\ 5\ 6 \\ 2\ 5\ 7 \\ 2\ 5\ 8 \end{array} \quad \text{o, ordenadas crecientemente,} \quad \begin{array}{c} \underline{1\ 2\ 5} \\ 2\ 3\ 5 \\ 2\ 4\ 5 \\ 2\ 5\ 6 \\ 2\ 5\ 7 \\ 2\ 5\ 8 \end{array}$$

por lo que a primera vista, parece que partiendo de 8 elementos podemos formar 6 veces más ternas que pares; pero entre estas ternas algunas son idénticas. Por ejemplo, la terna $1\ 2\ 5$ puede construirse partiendo del par $1\ 2$, pero también partiendo del par $2\ 5$ (fíjate, aparece subrayada en las dos listas anteriores) y también podría venir además de añadir 2 como tercer elemento al par $1\ 5$. Claramente, obtenemos cada terna tres veces: una vez a partir de cada uno de los tres pares que quedan cuando eliminamos uno de sus elementos. Por ejemplo, excluyendo uno de los elementos de la terna $2\ 3\ 5$, nos salen los siguientes pares:

$$2\ 3 \quad 2\ 5 \quad 3\ 5$$

y la terna $2\ 3\ 5$ se obtiene a partir del primer par añadiendo un 5, a partir del segundo añadiendo un 3 y a partir del tercero añadiendo un 2. Por tanto, obtendremos el número ternas que puedo escoger entre 8 elementos multiplicando el número de pares por 6 y dividiendo luego el resultado entre 3. Ya sabemos que el número de pares es igual a $(8 \times 7)/2$; podemos multiplicarlo por 6 y dejar la división entre 2 para el final

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{2},$$

quedando todavía pendiente la división entre 3. Pero dividir primero entre 2 y después entre 3 es lo mismo que dividir entre 2×3 (por ejemplo, $12 \div 2 = 6$ y $6 \div 3 = 2$ mientras que si dividimos 12 entre 2×3 también obtenemos 2). Así pues, añadiendo un irrelevante 1 en el denominador por razones meramente estéticas, entre 8 elementos podemos escoger

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \text{ ternas distintas.}$$

Del mismo modo, entre 12 elementos hay

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} \text{ ternas distintas}$$

y entre 100 elementos

$$\frac{100 \times 99 \times 98}{1 \times 2 \times 3}.$$

Una vez conocido el número de ternas, podemos pasar a los cuartetos. Sean nuevamente 8 elementos. En tal caso, partiendo de un terna, podremos construir 5 cuartetos distintos añadiendo en cada uno uno de los elementos restantes. Partiendo por ejemplo de la terna

$$1\ 2\ 3,$$

podemos construir estos cuartetos:

$$\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 5 \\ 1\ 2\ 3\ 6 \\ 1\ 2\ 3\ 7 \\ 1\ 2\ 3\ 8 \end{matrix}$$

De acuerdo con esto, obtendríamos cinco veces más cuartetos que ternas; pero, en realidad, habríamos escrito cada cuarteto cuatro veces. Por ejemplo, el cuarteto

$$1\ 2\ 3\ 4$$

puede obtenerse a partir de

$$\begin{array}{rccc} & 1\ 2\ 3 & \text{añadiendo} & 4, \\ \text{a partir de} & 1\ 2\ 4 & \text{añadiendo} & 3, \\ \text{a partir de} & 1\ 3\ 4 & \text{añadiendo} & 2, \\ \text{y a partir de} & 2\ 3\ 4 & \text{añadiendo} & 1. \end{array}$$

Por tanto, tenemos que dividir entre 4.

El número de ternas posibles era

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3};$$

esto debe multiplicarse por 5 y dividirse luego entre 4. Es decir, el número de posibles cuartetos es igual a

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$$

Ya puedes observar la regularidad que va emergiendo. El número de grupos de 7 elementos entre un conjunto formado por 10 elementos es igual a

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}.$$

Este también es un resultado bello y regular: cuando queremos escoger grupos de 7 en un conjunto de 10 elementos, escribimos siete factores en el numerador y otros siete factores en el denominador, pero mientras que los del denominador avanzan desde 1, los del numerador retroceden desde 10.

Así pues, por ejemplo, el número de elementos individuales que podemos escoger en un conjunto de 5 elementos es igual a $5 \div 1 = 5$ (lo cual ya era algo evidente) y el número de ternas posibles en un conjunto de tres elementos es igual a

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1,$$

hecho que también era evidente, pues si tenemos tres bolas sólo podemos escoger tres de una única manera: la evidente. Hay también una única manera de retirar nuestra mano sin escoger ninguna bola y ésta es independiente del número de bolas que haya en la bolsa. Nos conviene decir entonces que el número de posibles combinaciones de cero elementos es igual a 1.

Por tanto, el número de combinaciones posibles se puede expresar de acuerdo con la tabla de la siguiente página:

escoger

	0	1	2	3	4
de 1	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{1}=\mathbf{1}$	$-$	$-$	$-$
de 2	$\mathbf{1}$	$\frac{2}{1}=\mathbf{2}$	$\frac{2\times 1}{1\times 2}=\mathbf{1}$	$-$	$-$
de 3	$\mathbf{1}$	$\frac{3}{1}=\mathbf{3}$	$\frac{3\times 2}{1\times 2}=\mathbf{3}$	$\frac{3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3}=\mathbf{1}$	$-$
de 4	$\mathbf{1}$	$\frac{4}{1}=\mathbf{4}$	$\frac{4\times 3}{1\times 2}=\mathbf{6}$	$\frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}=\mathbf{4}$	$\frac{4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4}=\mathbf{1}$

Podemos organizar estos resultados del siguiente modo. Si añadimos otro 1 en la posición más alta, representando así el hecho de que sólo hay una manera de retirar la mano sin escoger nada de una bolsa vacía, esto es, que el número de cero combinaciones entre cero elementos es 1, obtenemos la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}$$

....

que recibe el nombre de Triángulo de Pascal. Tiene muchas propiedades interesantes. Es natural que sea simétrico, es decir, que su mitad izquierda coincida con su mitad derecha, porque viene a ser lo mismo extraer una bola de una bolsa con 3 bolas que dejar 2 bolas en tal bolsa. Análogamente, formando pares entre los 5 elementos de un conjunto, construimos ternas con los elementos restantes, por lo que para cinco elementos, el número de pares coincide con el número de ternas. Y, si te fijas, son justamente estos los números que ocupan posiciones simétricas en el Triángulo de Pascal.

Otra propiedad del Triángulo de Pascal nos proporciona una regla extremadamente simple para construir sus sucesivas filas. No anoté el 2 de la tercera fila entre los dos 1's de la primera fila sin ningún motivo; lo hice así porque

$1+1=2$. Lo mismo ocurre con el 3 de la cuarta fila situado entre el 1 y el 2, pues $1+2=3$ y así con todos. Esta regla se mantiene indefinidamente y dado que $1+4=5$ y $4+6=10$, la siguiente fila del Triángulo de Pascal es

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

y procediendo de nuevo como antes, la siguiente fila será

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

y así sucesivamente. La demostración de esto es relativamente sencilla, pero nos conformaremos con hacer una simple verificación. El primer 15 aparece en la posición que indica el número de parejas que podemos formar a partir de un conjunto de 6 elementos. Tal número es

$$\frac{6\times 5}{1\times 2}=\frac{30}{2},$$

que coincide efectivamente con el 15 de la casilla correspondiente.

Se deduce de esto que la suma de los términos de una fila es igual al doble de la suma de los términos de la fila anterior. Escribamos, por ejemplo, la fila siguiente a la última que hemos calculado. Procedemos para ello del siguiente modo:

$$1 \qquad 1+6 \qquad 6+15 \qquad 15+20 \qquad 20+15 \qquad 15+6 \qquad 6+1 \qquad 1$$

y vemos entonces que aparecen por duplicado los términos de la fila

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

Esto, a su vez, ilumina otra propiedad del Triángulo de Pascal: al sumar los términos de una fila obtenemos la potencia de 2 correspondiente. Dado que esto es lo que ocurre al principio (ignoremos por ahora el primer 1): $1+1=2=2^1, 1+2+1=4=2^2$, no es necesario que ir más lejos. Si esto es cierto para una fila, dicha propiedad será "heredada" por la fila siguiente, pues ya vimos antes que la suma de los términos de cada fila es el doble de la suma de los términos de la fila anterior y si duplicamos una potencia de 2, obtenemos un producto $2\times 2\times\cdots\times 2$ con un 2 más entre sus factores, obteniendo así la siguiente potencia de 2.

Este tipo de prueba se fundamenta enteramente en la construcción de la sucesión de los números y se llama "inducción matemática". La sucesión de los números naturales empieza en 1 y, contando de uno en uno, podemos alcanzar cualquiera de sus miembros. La idea de la inducción matemática consiste simplemente en que si algo que se "hereda" es cierto al principio de la sucesión, entonces también será cierto para *todos* los números naturales. Y esto nos proporciona un método para probar que una propiedad es cierta para *todos* los números, algo que en principio sería inconcebible empleando únicamente nuestro cerebro finito. Pero de este modo, sólo necesitamos probar dos cosas, y ambas son concebibles por un cerebro finito: que la propiedad es cierta para 1 y que es de naturaleza "hereditaria".

Ésta es una lección muy importante: en matemáticas se puede entender el infinito por medio de argumentos finitos.

Si te gusta jugar con las multiplicaciones, es posible que hayas reconocido las primeras filas del Triángulo de Pascal. Si calculamos las potencias sucesivas de 11, observamos que:

$$\begin{array}{lll}
11^1 = 11 & = & 1 \quad 1 \\[1em]
11^2 = \ \ 11 \times 11 & & \\
\underline{11\ \ } & & \\
121 & = & 1 \quad 2 \quad 1 \\[1em]
11^3 = \ \ 121 \times 11 & & \\
\underline{121\ \ } & & \\
1331 & = & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\[1em]
11^4 = \ \ 1331 \times 11 & & \\
\underline{1331\ \ } & & \\
14641 & = & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
\end{array}$$

Por tanto, las cifras de los resultados nos dan los números del Triángulo de Pascal. Si te has fijado en las multiplicaciones, tendrás claro el motivo de tal coincidencia: cuando sumamos los productos parciales, efectuamos exactamente las mismas sumas que cuando obteníamos nuevas filas del Triángulo de Pascal. En el caso de 11^5 se fastidia todo porque la suma de los productos parciales ya es una suma con llevadas:

$$\begin{array}{l}
11^5 = \ \ 14\,641 \times 11 \\
\underline{14\,641\ \ } \\
161\,051
\end{array}$$

mientras que la fila correspondiente del Triángulo de Pascal es

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1.$$

Tenemos que:

11 es, en realidad, $10 + 1$

$$\begin{aligned} 121 &= 100 + 20 + 1 \\ &= \mathbf{1} \times 10^2 + \mathbf{2} \times 10^1 + \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\,331 &= 1\,000 + 3\,00 + 30 + 1 \\ &= \mathbf{1} \times 10^3 + \mathbf{3} \times 10^2 + \mathbf{3} \times 10^1 + \mathbf{1} \text{ y así sucesivamente.} \end{aligned}$$

Por tanto, los números del Triángulo de Pascal aparecen como los coeficientes de las potencias decrecientes de 10 en el desarrollo en potencias de $10 + 1$. El segundo sumando de $10 + 1$ es 1, y toda potencia de 1 es igual a 1 (pues $1 \times 1 = 1$), por lo que parece que las potencias de este segundo sumando no influirán en la expresión. No obstante, podemos colarlas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 11^3 = 1\,331 &= 1\,000 + 300 + 30 + 1 \\ &= \mathbf{1}\times 10^3 + \mathbf{3}\times 10^2 \times 1 + \mathbf{3}\times 10^1 \times 1^2 + \mathbf{1}\times 1^3. \end{aligned}$$

Observamos que mientras las potencias del primer sumando disminuyen, las potencias del segundo sumando se incrementan. La importancia de esto radica en el hecho de que podemos generalizar esta expresión para obtener la expansión de potencias de otras sumas de dos sumandos. Por ejemplo,

$$7^3 = (5 + 2)^3 = \mathbf{1}\times 5^3 + \mathbf{3}\times 5^2 \times 2 + \mathbf{3}\times 5 \times 2^2 + \mathbf{1}\times 2^3.$$

A la vista de todo lo que ya hemos comentado, no sería difícil probar esto en el caso general, pero nos conformaremos con una mera comprobación numérica:

$$\begin{aligned} 1 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 \quad &= 125 \\ 3 \times 5^2 \times 2 = 3 \times 5 \times 5 \times 2 = 15 \times 10 \quad &= 150 \\ 3 \times 5 \times 2^2 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 = 3 \times 10 \times 2 &= 60 \\ 1 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 \quad &= \underline{8} \\ & 343 \end{aligned}$$

y efectivamente, $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 7 = 343$.

Este descubrimiento es muy útil. En lugar de calcular la potencia de un número, a menudo es más conveniente dividir la base en dos sumandos cuyas potencias sean fáciles de calcular. Hay quienes detestan multiplicar por 7, pero cuando calculamos la forma expandida de $(5 + 2)^3$, aparecen multiplicaciones muy sencillas; más exactamente, sólo multiplicamos por 5 o por 2 (factores que intentamos agrupar después para que aparezcan tantas multiplicaciones por 10 como sea posible, ya que multiplicar por 10 es un juego de niños).

Un sinónimo de "dos sumandos" es "binomio", por lo que el desarrollo anterior se llama Teorema Binomial y los números del Triángulo de Pascal son los coeficientes binomiales.

La segunda potencia (o cuadrado) es, sin duda alguna, de las más empleadas y la segunda fila del Triángulo de Pascal es

$$1 \qquad 2 \qquad 1,$$

por lo que de acuerdo con lo anterior, para calcular $(5+3)^2$, tendremos que emplear esos coeficientes. Las potencias de 5 decrecerán desde 2 y las potencias de 5 crecerán hasta 2, obteniendo así el siguiente desarrollo:

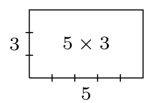
$$(5+3)^2 = \mathbf{1} \times 5^2 + \mathbf{2} \times 5 \times 3 + \mathbf{1} \times 3^2,$$

en el que omitiendo los innecesarios 1's queda lo siguiente:

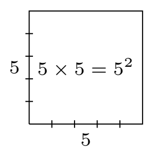
$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2.$$

Llegamos así a la famosa regla (quizás de infausto recuerdo) que dice: para calcular el cuadrado de una suma hay que sumar "el cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el segundo al cuadrado".

Claro que también podemos ver esto de una forma mucho más elemental; por ejemplo, de forma geométrica. Sabemos que el área de un rectángulo es el producto de dos de sus lados adyacentes; así que, recíprocamente, si tenemos un producto, podemos representarlo como el área de un rectángulo cuyos lados adyacentes son los factores correspondientes. Veamos, por ejemplo, la representación del producto 3×5:

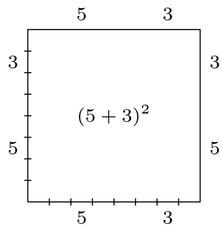


y aquí la del producto $5^2 = 5 \times 5$:

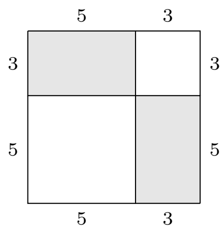


que es, evidentemente, un cuadrado. Motivo éste por el que la potencia 2 también recibe el nombre de elevar “al cuadrado”.

Representemos ahora $(5+3)^2 = (5+3) \times (5+3)$:



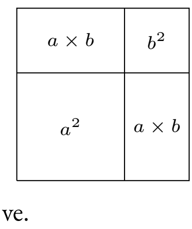
Con este dibujo hemos perdido de vista los sumandos de la suma, pero podemos resucitarlos marcando la siguiente fragmentación:



Observando cada una de las piezas, vemos que el área del cuadrado grande es 5^2, mientras que el área del cuadrado pequeño es 3^2 y además de éstos, también tenemos que contar con dos rectángulos de área 5×3. Por tanto,

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2.$$

Esto es tan claro y nítido como las figuras de los libros de texto hindúes. Los indios son gentes de pocas palabras; se limitan a enunciar el teorema: una suma de dos términos se “eleva al cuadrado” de tal y cual manera. Y luego escriben “ver” y dibujan una figura que lo explica todo:



Y el que tiene ojos para ver, ve.

7. *Coloreando la sucesión infinita*

Los hindúes han sido excelentes matemáticos desde la antigüedad y tienen habilidades especiales en esta ciencia. Hace años escuché esta anécdota sobre uno de sus mejores científicos: uno de sus colegas europeos le preguntó jocosamente si el número de la matrícula del taxi en que viajaban, 1729, era un número despreciable u ominoso y él respondió al momento con pasmosa naturalidad: "¡oh no! al contrario, el número 1729 es muy interesante; es el primer número que se puede expresar de dos formas distintas como suma de dos cubos, $10^3 + 9^3$ y $12^3 + 1^3$ suman ambos 1729".

Los números de cuatro cifras son para los hindúes como un amigo íntimo para nosotros, conocen todas sus intimidades. En nuestro caso, tratamos s los números pequeños de esa manera en la escuela primaria; a los ojos de un niño pequeño, 2 no es uno más de esos números grises, sino una individualidad que ha aprendido a reconocer por muchos de sus aspectos: es el primer número par, es $1 + 1$, es la mitad de 4 y muchas más cosas. Por mucho que coloreemos los números hasta 10 o hasta números tan grandes como hacen los hindúes, éstos sólo serán un ínfimo fragmento de la infinitud de los números naturales, que continuarán avanzando de manera gris y apocada pero indefinidamente.

Sabemos que hay números pares. En efecto, cada dos números, obtenemos un número par:

$$1,\ \underline{2},\ 3,\ \underline{4},\ 5,\ \underline{6},\ 7,\ \underline{8},\ 9,\ \underline{10},\ 11,\ \underline{12}, \ldots$$

y, del mismo modo, cada tres números, obtenemos uno divisible entre 3:

$$1,\ 2,\ \underline{3},\ 4,\ 5,\ \underline{6},\ 7,\ 8,\ \underline{9},\ 10,\ 11,\ \underline{12}, \ldots$$

y saltando de cuatro en cuatro, números divisibles entre 4:

$$1,\ 2,\ 3,\ \underline{4},\ 5,\ 6,\ 7,\ \underline{8},\ 9,\ 10,\ 11,\ \underline{12}, \ldots$$

y así sucesivamente. Éstas sólo son olas que, más pequeñas o más grandes, una vez iniciadas, continúan rodando constantemente y de modo indefinido. ¿No ocurre entonces nada inesperado? ¿No hay ningún capricho o desvarío que rompa y agite semejante aburrimiento?

Afortunadamente sí lo hay. Y es la distribución rebelde y caprichosa de los números primos. Recuerda el significado de la divisibilidad:

todos los divisores de 10 son	$1,\ 2,\ 5,\ 10;$
todos los divisores de 12 son	$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12;$
pero todos los divisores de 11 son	$1,\ 11.$

Cualquier número es divisible entre 1 y sí mismo, pero hay números que no son divisibles entre ningún otro número. Éste es el caso, por ejemplo, del número 11. Ésos números son los números primos.

En relación con esto, el 1 tiene un comportamiento muy peculiar: sólo tiene un único divisor, 1, y éste coincide además consigo mismo, por lo que non suele considerarse a 1 como número primo. Por tanto, de acuerdo con esto, el menor número primo es el 2, que también es el único número par que es primo, pues todo número par es divisible entre 2 y sólo podría ser un número primo si su divisor es él mismo.

Los números primos deben su importancia a que los restantes números pueden construirse a partir de éstos como juntando ladrillos o bloques y es por esto que los matemáticos suelen referirse a esos números con el nombre de números compuestos. Más precisamente, podemos reformular lo que acabamos de decir indicando que todo todo número compuesto puede escribirse como producto de ciertos números primos.

Intentemos escribir 60 como producto de primos. Sabemos que

$$60 = 6 \times 10,$$

pero 6 y 10 también pueden descomponerse en factores:

$$6 = 2 \times 3 \;\text{ y }\; 10 = 2 \times 5;$$

y escribiendo esto mismo en lugar de 6 y 10, llegamos a que:

$$60 = 2 \times 3 \times 2 \times 5,$$

donde todos los factores son números primos.

Podríamos haber abordado esta descomposición de otra manera, pues ya sabemos que 60 se puede escribir de muchas otras formas como producto de dos números. Si partiésemos de que

$$60 = 4 \times 15,$$

donde $4 = 2 \times 2$ y $15 = 3 \times 5$, entonces

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

y si empezásemos por la factorización

$$60 = 2 \times 30,$$

entonces

$$\begin{array}{ll} & 30 = 5 \times \;\; 6 \;\text{ y }\;\; 6 = 2 \times 3, \;\text{ por lo que }\; 30 = 5 \times 2 \times 3; \\ \text{o} & 30 = 2 \times 15 \;\text{ y }\; 15 = 3 \times 5, \;\text{ por lo que }\; 30 = 2 \times 3 \times 5; \\ \text{o} & 30 = 3 \times 10 \;\text{ y }\; 10 = 2 \times 5, \;\text{ por lo que }\; 30 = 3 \times 2 \times 5. \end{array}$$

Observamos por tanto que 30 se descompone en todo caso como un producto en el que aparecen los números primos 2, 3 y 5. Escribiendo este producto en lugar de 30, obtenemos que:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Sea cual sea el camino escogido, 60 siempre será factorizado empleando los mismos números primos, lo único que puede variar es el orden en el que éstos aparecen. Ordenando dichos factores y escribiendo los productos con factores iguales como potencias, llegamos a que:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

Descomponer cualquier otro número en factores primos es igual de fácil (y se puede demostrar que obtendremos una factorización única). Si nos atrancamos al principio y no sabemos por donde comenzar, conviene recordar que el divisor más pequeño de un número (ignorando a 1) es un número primo. En efecto, pues si el primer divisor fuese un número compuesto, éste tendría un divisor más pequeño que también dividiría al número original. Por tanto, buscando siempre el divisor más pequeño, encontraremos todos los factores primos de cualquier número dado. Por ejemplo,

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Esta descomposición ilumina la estructura del número en cuestión. Por ejemplo, podemos deducir de inmediato que los divisores de 90 (además del ya clásico y previsible 1) son los siguientes:

primos: $2,\ 3\ \text{y}\ 5$;

producto de dos números primos:

$$2 \times 3 = \mathbf{6},\quad 2 \times 5 = \mathbf{10},\quad 3 \times 3 = \mathbf{9},\quad 3 \times 5 = \mathbf{15};$$

producto de tres números primos:

$$2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18},\quad 2 \times 3 \times 5 = \mathbf{30},\quad 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{45};$$

producto de cuatro números primos:

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{90}.$$

Así pues, ya estamos convencidos de que merece la pena echar un vistazo más de cerca a los componentes básicos de los números, esto es, a los números primos. Intentemos escribir entonces, uno por uno, todos los números primos. Ya sabemos que el número primo más pequeño es el 2 y que, a partir de ahí, tenemos que omitir los números pares, pues son divisibles entre 2. Vemos después que 3, 5 y 7 son números primos y sentimos así la tentación de que 9 también sea primo, pero esto no es cierto porque 3 divide a 9. Podríamos pensar que los números primos se van diluyendo, pero esto tampoco es cierto porque 11 y 13 son nuevamente números primos. Tengo que pedirte que hagas un esfuerzo: intenta enumerar todos los número primos hasta, como mínimo, 50. Para que compruebes si lo hiciste bien, escribiré dicha lista a continuación; pero debes saber que sólo se perciben los caprichos de la sucesión por uno mismo, tropezando y cometiendo errores una y otra vez.

La lista de los números primos comienza así:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47, \dots$$

Los antiguos griegos nos dejaron una ingeniosa idea que nos permite obtener esta lista de forma mecánica y evitando cualquier tipo de error: es la conocida como Criba de Eratóstenes. Comencemos por anotar todos los números del 2 al 50. El primer número de la lista tiene que ser necesariamente un número primo, pues todos sus divisores serían menores que él y, por ser él el primero, no hay ningún número antes que él. Veamos cuál es ese número: es el 2. Saltando de dos en dos, nos encontraremos con los múltiplos de dos y así, a excepción del propio 2, ninguno de estos números será un número primo. Así pues, empezando desde ahí, tacha todos los múltiplos de 2:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\
13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, \\
24, & 25, & 26, & 27, & 28, & 29, & 30, & 31, & 32, & 33, & 34, \\
35, & 36, & 37, & 38, & 39, & 40, & 41, & 42, & 43, & 44, & 45, \\
 & & & 46, & 47, & 48, & 49, & 50 & & &
\end{array}$$

El primer número que permanece intacto después de 2 tiene que ser necesariamente un número de primo, pues sólo podría ser múltiplo de alguno los números anteriores y antes de él solo hay un número cuyos múltiplos acabas de tachar. Veamos cuál es ese número: es el 3. Saltando ahora de tres en tres, obtendremos los múltiplos de tres; táchalos (no pasa nada por que taches un mismo número varias veces):

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\
13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, \\
24, & 25, & 26, & 27, & 28, & 29, & 30, & 31, & 32, & 33, & 34, \\
35, & 36, & 37, & 38, & 39, & 40, & 41, & 42, & 43, & 44, & 45, \\
 & & & 46, & 47, & 48, & 49, & 50 & & &
\end{array}$$

Procediendo ahora como antes, observamos que el primer número que queda intacto es el 5, por lo que debes tachar todos sus múltiplos. Salta de cinco en cinco desde el 5 en adelante. Procedemos luego con el 7 de forma análoga:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\ 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, \\ 24, & 25, & 26, & 27, & 28, & 29, & 30, & 31, & 32, & 33, & 34, \\ 35, & 36, & 37, & 38, & 39, & 40, & 41, & 42, & 43, & 44, & 45, \\ & & & 46, & 47, & 48, & 49, & 50 & & & \end{array}$$

Y ya podemos parar, pues el primer número que ha quedado intacto es el 11, que multiplicado por un número mayor o igual que 7 se pasa de 50 y los múltiplos de 11 más pequeños ya fueron tachados anteriormente. Escribamos entonces los números que han quedado sin tachar, esos serán los primos:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47, \ldots$$

Obtenemos así la lista de números primos menores que 50 que ya habíamos escrito anteriormente.

Es posible construir una máquina que ejecute mecánicamente todas estas instrucciones y que nos indique así todos los números primos menores que cierto número. Sin embargo, esto no altera en absoluto el hecho de que los números primos aparecen sucesivamente de manera completamente impredecible sin importar para nada cuán lejos avancemos.

Se puede probar fácilmente que nos encontraremos con grandes espacios entre números primos consecutivos si avanzamos lo suficiente en la sucesión de los números naturales. Los resultados de las siguientes operaciones muestran una laguna de, como mínimo, 6 unidades de longitud; esto es, seis números consecutivos que no son primos:

$$\begin{array}{cc} 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{2} & 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{3} \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{4} & 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{5} \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{6} & 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + \underline{7} \end{array}$$

Es evidente que estos números son números consecutivos porque cada uno de ellos se diferencia del anterior en una unidad y además, ninguno es primo, pues $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ es divisible entre cada uno de sus factores por lo que el primer número es divisible entre 2, el segundo entre 3, el tercero entre 4, el cuarto entre 5, el quinto entre 6 y el sexto entre 7. Efectuando el producto, obtenemos que

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5\,040,$$

por lo que seis números consecutivos no primos son, por ejemplo:

$$5\,042,\ 5\,043,\ 5\,044,\ 5\,045,\ 5\,046,\ 5\,047.$$

Estos números son bastante grandes y nos hemos visto obligados a recorrer un largo trecho de la sucesión de números naturales para encontrar una laguna de seis términos sin números primos. Pero, por supuesto, es posible que exista un hueco como este mucho antes. No obstante, si no somos reacios a largas caminatas, encontraremos una laguna de 100 términos de la misma manera. Basta considerar ahora el producto de todos los números enteros entre 2 e 101:

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 100 \times 101$$

y sumar primero 2, luego 3, después 4 y finalmente 101.

Aplicando este argumento, podemos encontrar lagunas sin números primos tan grandes como deseemos.

Por otra parte, conforme vayamos avanzando en la sucesión de números naturales, nos encontraremos una y otra vez con números impares consecutivos que son ambos números primos. Éste es el caso, por ejemplo, al principio de la sucesión, de los números 11 y 13 o de 29 y 31. Los matemáticos sospechan que podremos encontrar números primos "gemelos" independientemente de lo lejos que caminemos en la sucesión de los números naturales, incluso mucho más allá de la parte ya examinada; pero, a día de hoy, esto aún no ha sido probado de manera tan general.

Pero, ¿ acaso es que hay números primos tan grandes como deseemos? ¿no se limitan éstos a aparecer al principio de la sucesión de los números naturales? Podemos responder a estas cuestiones de forma nítida y clara. De hecho, conocemos la respuesta desde hace más de dos mil años: fue Euclides quien dio una elegante prueba de la infinitud de los números primos.

Debemos entender este hecho de la misma manera que entendemos la infinitud de los números naturales. Si alguien dice que los números primos terminan aquí o allá, no podrá llegar muy lejos con esa afirmación porque podremos demostrarle que hay números primos más allá de donde dice.

Basta demostrar esto en un caso particular, pues en todos los demás casos ocurre lo mismo. Todo lo que tenemos que recordar es que cada dos números encontramos uno divisible entre 2, cada tres uno divisible entre 3 y así sucesivamente, por lo que el consecutivo a un número divisible entre 2 no puede ser divisible entre 2, el consecutivo a un número divisible entre 3 no puede ser divisible entre 3 y así sucesivamente. Si alguien dijera que los números primos son:

$$2,\ 3,\ 5\ \text{y}\ 7$$

y que terminan ahí, podremos refutarlo de inmediato. Basta considerar

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1.$$

En efecto, pues $2 \times 3 \times 5 \times 7$ es divisible entre 2, 3, 5 y 7, por lo que el número siguiente a éste, que es el $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$, no puede ser divisible entre ninguno de esos números. Pero debería ser divisible entre algún número primo porque como número que es, admite una descomposición en factores primos y si sólo fuese divisible entre 1 y sí mismo, entonces sería un número primo. Quien afirmó que 7 era el último número primo estaba totalmente equivocado: tiene que haber números primos más allá de 7. Y, de la misma forma, más allá de cualquier número primo.

Calculemos el número en cuestión:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211.$$

Después de unos cuantos experimentos, nos convenceremos de que este número no es divisible entre ningún otro número que no sea 1 o él mismo, es decir, se trata de un número primo. Y es el número primo mayor que 7 cuya existencia estipulé anteriormente. En ningún momento dije que este fuese el primer número primo después de 7; si así fuese, entonces la sucesión de los números primos tendría un patrón claro y regular.

Más exactamente, lo que asegura nuestro método es que para encontrar un número primo mayor que 7 no es necesario caminar más allá de $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$. Y de la misma forma, que para encontrar un número primo mayor que 11, no es necesario ir más allá de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1$. Sin embargo, estas son distancias bastante grandes, ¿no es posible encontrar números primos más cercanos?

Esta cuestión ha sido abordada por numerosos matemáticos a lo largo de la historia. Mencionaré sólo un elegante resultado: el matemático ruso Chebyshov demostró que del 2 en adelante, siempre hay un número primo entre cualquier número y su doble. Por ejemplo:

entre 2 y 4 tenemos el 3
entre 3 y 6 tenemos el 5,
entre 4 y 8 tenemos el 5 y el 7,
y entre 5 y 10 sólo tenemos el 7;

y aunque no parece haber ningún tipo de regularidad en esto, no deja por ello de ser cierto por mucho que avancemos en la sucesión de números naturales. Es más, en realidad, podemos encontrar tantos números primos como deseemos entre un número y su doble siempre y cuando caminemos suficientemente lejos.

Así que ya reconocemos cierta regularidad en la antojadiza sucesión de los números primos: no pueden separarse unos de otros de manera completamente arbitraria.

Y a pesar de lo dicho hasta el momento, sí existe una "regla para los números primos". Pero ésta irá en el sentido del "casi" que nos permitía pensar a un círculo como una figura plana formada por muchísimos triángulos delgados (sentido que prometí aclarar más adelante).

Hasta el 2 (incluyéndole a él) tan sólo hay un número primo: el propio 2. Hasta el 3 hay dos primos: 2 y 3. Hasta el 4 hay nuevamente dos números primos, hasta el 5 hay tres –pues se añade el 5 a la lista–, hasta el 6 se mantienen esos mismos tres; hasta el 7 ya tenemos cuatro: 2, 3, 5 y 7. Hasta el 8, 9 y 10 siguen esos mismos cuatro. Por tanto, el número de números primos es:

hasta 2	hasta 3	hasta 4	hasta 5	hasta 6
1	2	2	3	3

hasta 7	hasta 8	hasta 9	hasta 10
4	4	4	4

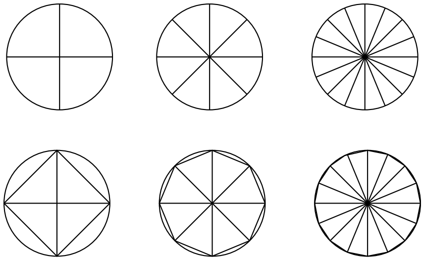
Esta sucesión salta una unidad cada vez que llegamos a un nuevo número primo y esto, como ya dijimos antes, ocurre a intervalos muy irregulares. Sin embargo, mediante una regla de cálculo perfectamente definida, podemos construir una sucesión [1] de modo que cuanto más avancemos en ella, más se parecerán sus términos a los términos de nuestra sucesión. Por tanto, los números de estas dos sucesiones serán "casi" iguales para términos suficientemente avanzados. Esta situación es idéntica a la que se da cuando en un

[1] Para aquellos que todavía recuerdan los logaritmos, indico a continuación como sería tal sucesión

$$\frac{2}{\log 2}, \frac{3}{\log 3}, \frac{4}{\log 4}, \frac{5}{\log 5}, \ldots$$

Es poco probable que recuerdes *este tipo* de logaritmo: es el conocido como logaritmo natural. Hablaremos de él más adelante.

círculo los sectores circulares se parecen cada vez más a los triángulos que se generan si empleamos muchísimas divisiones. En tal caso, cada sector circular "casi" es idéntico al triángulo correspondiente:



Ni tan siquiera es concebible una regla exacta para los números primos, pero conviene saber que este comportamiento "casi" regular sí tiene un significado exacto. Mantengo mi promesa, volveré sobre esto más adelante.

No puedo ni intentar un esbozo grosero de la demostración del Teorema de los números primos, pues los mejores matemáticos se lo han pasado unos a otros durante mucho tiempo perfeccionándolo aquí y allá hasta llegar a su estado actual. La investigación sigue avanzando en este campo y se ha logrado estimar cada vez con mayor precisión el error que se comete al sustituir los términos de nuestra sucesión irregular por los de la sucesión construida siguiendo la regla perfectamente definida de los logaritmos. Aquí no es ni la utilidad ni la conveniencia quien anima y justifica la investigación, sino la mera belleza y dificultad de la cuestión. Esta belleza es completamente distinta de la armoniosa belleza de la Combinatoria; se trata ahora de la atractiva estética de la ausencia de regularidad y es una noble tarea intentar forzar lo irregular a reglas pautadas y específicas.

El Teorema de los números primos viene a decirnos que aunque estos se distribuyen de forma completamente irregular entre los distintos fragmentos de la sucesión de números naturales, sí están sujetos a cierto tipo de orden y reglas si los consideramos en su totalidad infinita. Recuerdo una comparación que leí en algún sitio sobre el problema del libre albedrío: si miramos de cerca a un enjambre de abejas, observaremos que cada abeja vuela de aquí para allá y de forma un tanto caótica, pero sin embargo, la totalidad del enjambre se mueve en una dirección perfectamente definida y hacia un objetivo claro y concreto.

8. *“He pensado un número”*

REGRESEMOS de nuevo a las matemáticas más prácticas. Ya sabemos como calcular el volumen de un cubo, pero muy a menudo necesitamos calcular el volumen de cuerpos irregulares y en ese caso, ya no es posible ni suficiente medir ciertas dimensiones. Pero siempre podremos proceder del modo que se indica a continuación. Supongamos que nuestro cuerpo está hecho de corcho. Pesémoslo y tallemos después, en ese mismo material, un cubo de 1 centímetro cúbico (esto es, un cubo cuyo volumen es 1 centímetro cúbico) al que también pesamos. El número de veces que el peso del cubo va en el peso del cuerpo irregular es el volumen del sólido irregular en centímetros cúbicos.

No podemos determinar directamente el volumen, pero sí podemos determinar otra magnitud con la que el volumen mantiene una estrecha y conocida relación: el peso. Y es partiendo del peso como deducimos el volumen desconocido.

Esta situación es muy común en Matemáticas; aunque cierta cantidad requerida es desconocida, sí conocemos su relación con otras cantidades y partiendo de dichas relaciones, somos capaces de averiguar el valor de la cantidad desconocida.

Bien, dejaré que lo descubras tú mismo: he pensado un número, le sumé 5 y obtuve 7; ¿cuál era el número? Todos sabrán de inmediato que era el 2.

Compliquémoslo un poco más: he pensado un número, lo he multiplicado por 5, luego he dividido entre 2, he sumado 3 y obtuve 18. ¿Cuál es el número en el que había pensado? Este acertijo no suele plantearse por escrito, pero oralmente, quien intenta descifrar el número en cuestión tiende a olvidar fácilmente la ristra de operaciones involucradas, por lo que es mejor anotar las cuentas a medida que se nos van enumerando.

Dado que desconocemos cuál es dicho número, propongo que le llamemos x. Si el poeta Mihály Babits escribe:

Minden folyót vár a Styx	*[A todos los ríos espera Styx*
Óh megoldó biztos x!	*Ay! la solución es x!]*

entenderás que yo sugiera el nombre x a todo aquél que pretenda descifrar dicho número.

Hecho esto, apuntamos la sucesión de operaciones anteriormente mencionadas: el número original es x, que multiplicado por 5 se convierte en $5x$, al dividir entre 2 se hace igual a $5x/2$ y al sumarle 3 se convierte en $5x/2+3$ y sabemos que esto era igual a 18. Es decir, sabemos que:

$$\frac{5x}{2}+3=18,$$

por lo que el número pensado originalmente satisface esa "ecuación" y es partiendo de ella como obtendremos su valor.

Hay personas que tienen tan buen sentido de los números que son capaces de adivinar el valor de x con sólo mirar para la ecuación. Si no es tu caso, retrocede un paso. Si algo se ha convertido en 18 después de sumarle 3, es porque antes era igual 15; luego

$$\frac{5x}{2}=15.$$

A partir de esta ecuación, ya es más fácil adivinar quien era x. Si todavía no eres capaz, puedes retroceder un paso más. Si obtenemos 15 cuando dividimos algo entre 2, es porque justo antes de dividirlo era igual a 30; luego

$$5x=30$$

y ahora ya todo el mundo sabe que si multiplicas un número por 5 y obtienes 30, entonces ese número sólo puede ser el 6.

El desmantelamiento gradual que acabamos de hacer puede realizarse con cualquier otra ecuación. Cuando pasamos de

$$\frac{5x}{2}+3=18 \quad \text{a} \quad \frac{5x}{2}=15,$$

el 3 que se sumábamos a la izquierda del signo $=$ desaparece y restamos 3 al número de la derecha. Es a esto a lo que nos referimos cuando decimos que un término que aparece sumando puede pasarse al otro lado da ecuación restando. Y cuando pasamos de

$$\frac{5x}{2}=15 \quad \text{a} \quad 5x=30,$$

el 2 que aparecía dividiendo a la izquierda desaparece y multiplicamos por 2 al número de la derecha. Esto se expresa diciendo que podemos pasar un divisor al otro lado de la ecuación multiplicando. En general, podemos mover algo de un lado de la ecuación a otro haciendo lo contrario.

Al enfrentarnos a una ecuación complicada, a poco que pensemos, nos daremos cuenta de inmediato de que el problema sigue siendo esencialmente el mismo: adivinar el valor de un número que alguien ha pensado. Supongamos por ejemplo que el problema se ha formulado ahora como sigue: "un padre tiene 48 años y su hijo 23. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el doble de edad que su hijo?" Habrá, por supuesto, quienes sepan responder enseguida y sin necesidad de ecuación alguna. Aquéllos que sean un poco más lentos pueden razonar del siguiente modo: los rápidos ya conocen el resultado, ya saben cual es el número correcto, pero para nosotros ese número sigue siendo x, por lo que será después de x años cuando el padre tendrá el doble de años que su hijo. ¿Cómo comprobarán quienes ya tienen la respuesta que su resultado es el correcto? Pues, simplemente, verán cuál es la edad tanto del padre como del hijo una vez pasados esos x años y comprobarán si es cierto que el padre tiene el doble de años que el hijo. Después de x años, la edad del padre será $48 + x$ años y la del hijo $23 + x$ años, por lo que el descifrador experto ha pensado un número, lo ha sumado tanto a 48 como a 23 y dice que el resultado de la primera suma es igual al doble de la segunda:

$$48 + x = 2 \times (23 + x).$$

Es a partir de esta ecuación que debemos averiguar quién es x. La multiplicación por 2 de la derecha puede efectuarse duplicando ambos términos:

$$48 + x = 46 + 2x.$$

La x que aparece sumando a la izquierda se puede pasar a la derecha restando y, del mismo modo, el 46 de la derecha también se puede pasar a la izquierda restando para juntar así todas las x en un mismo lado de la ecuación:

$$48 - 46 = 2x - x.$$

$48 - 46 = 2$ y es evidente que si a $2x$ le restamos x, obtenemos x; luego

$$2 = x,$$

por lo que el número pensado fue el 2. Es decir, el padre tendrá el doble de la edad que su hijo dentro de 2 años. En efecto, pues el padre tendrá 50 años y el hijo 25.

Compliquémoslo todavía un poco más. "He pensado dos números; su suma es igual a 10, ¿cuáles son los dos números que he pensado?"

Podemos escribir lo que nos dicen del siguiente modo: sean x e y los dos números (si desconocemos el nombre de pila y el apellido de alguien podemos llamarle x y), por lo que la persona que ha formulado el problema afirma que

$$x + y = 10.$$

Es muy fácil encontrar dos de esos números. Por ejemplo, 1 y 9 ya valen. ¡Pero 2 y 8 o 4 y 6 también! e incluso hay más soluciones. Es evidente que con estos datos todavía es imposible determinar cuales fueron los dos números escogidos; si realmente queremos averiguarlo, deberíamos decir: ‘¡queremos saber algo más sobre esos números!”. Bueno, añado entonces que la diferencia entre esos dos números es igual a 2:

$$y - x = 2.$$

Ahora es fácil darse cuenta de que esto ya sólo se cumple para uno de los pares anteriores. Los números que sumando 10 se diferencian en 2 unidades son el 4 y el 6.

Por tanto, para adivinar dos incógnitas, necesitamos de dos ecuaciones, esto es, de un sistema de ecuaciones. Si a partir de las dos ecuaciones anteriores no fuese claro o evidente cuáles son los números que buscamos, podríamos emplear algunos trucos para que fuese más evidente.

Por ejemplo, si hubiera alguien que aún no se ha dado cuenta de que la solución del sistema de ecuaciones anterior es 4 y 6, podría hacer lo siguiente: pasar el término que aparece restando a la izquierda del signo $=$ de la segunda ecuación a la derecha sumando y aislar así la incógnita y como

$$y = x + 2.$$

De esto se deduce que el segundo número es 2 unidades mayor que el primero y por tanto, ahora podemos reformular el problema de forma más simple: “he pensado un número, le sumé un número dos unidades mayor y me dio 10; ¿cuál es el número que he pensado?”. Podemos escribir lo que acabamos de decir como

$$x + (x + 2) = 10$$

y esta ecuación sólo tiene una incógnita, por lo que ya sabemos resolverla. Y una vez conocido el valor de x, poco debe preocuparnos quién es y, será simplemente dos unidades más que x.

Ahí va otro ejemplo: “he pensado dos números; al primero le sumé el doble del segundo y me dio 11 y al doble del primero le sumé cuatro veces el segundo para obtener 22 como resultado ¿cuáles son los dos números que he pensado?”.

El problema puede resumirse diciendo que:

$$x + 2y = 11$$
$$2x + 4y = 22$$

Si has estado atento y tienes buen ojo, ya te habrás dado cuenta de la burla. Probemos con algún intento: 1 y 5 satisfacen la primera ecuación, pues

$$1 + 2 \times 5 = 11$$

y esos números también satisfacen la segunda ecuación porque

$$2 \times 1 + 4 \times 5 = 22.$$

Por tanto, uno podría pensar que ya hemos encontrado los números que buscábamos, pero no es así. Echemos otra ojeada. Los números 3 y 4 satisfacen la primera ecuación, pues

$$3 + 2 \times 4 = 11$$

y también la segunda, porque

$$2 \times 3 + 4 \times 4 = 22.$$

Parece entonces que todo par de números satisfaciendo la primera ecuación cumple automáticamente con la segunda, por lo que esa condición no aportaría nada en absoluto a la hora de decidir cuál es el par de números correcto.

A poco que nos fijemos, nos daremos cuenta de que es natural que así sea, pues independientemente de los valores de x e y, $2x$ siempre será el doble de x y $4y$ siempre será el doble de $2y$, por lo que $2x + 4y$ es el doble de $x + 2y$ y si $x + 2y = 11$ entonces $2x + 4y$ sólo puede ser igual a 22, el doble de 11. Según esto, la segunda ecuación no dice nada nuevo sobre los números pensados; afirma exactamente lo mismo que la primera pero de forma más complicada.

Todavía sería más injusto que nos propongan encontrar los valores de x e y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 11$$
$$2x + 4y = 23$$

Podemos rompernos la cabeza hasta el día del juicio final, pero lo cierto es que no existen dos números cumpliendo ambas condiciones. Ya vimos antes que, independientemente de quienes sean x e y, $2x + 4y$ siempre es el doble de $x + 2y$; por lo tanto, si $x + 2y$ es igual a 11, $2x + 4y$ tiene que ser igual a 22. No hay otra opción, no puede ser 23. Así pues, lo único que podemos decir es que la segunda condición contradice a la primera.

En resumen, podremos averiguar el valor de dos incógnitas a partir de dos ecuaciones siempre y cuando esas ecuaciones no digan lo mismo y no se contradigan.

Y ahora, ¿cómo podríamos lidiar con un problema como el que siguiente?

"He pensado un número, lo he elevado al cuadrado, luego sumé 8 veces el número que había pensado y me dio 9 como resultado final". Escribiendo lo que nos han dicho tendríamos que

$$x^2 + 8x = 9.$$

Sólo hay una incógnita, pero la complicación consiste ahora en que aparecen potencias; nos encontramos ante una ecuación “cuadrática” o “de segundo grado”.

Evitemos empezar con una ecuación de segundo grado tan complicada. Esta es más simple:

$$x^2 = 16.$$

Todos vemos de un simple vistazo que el número pensado era el 4 porque 4 es el número cuyo cuadrado es igual a 16.

La siguiente ecuación también es muy fácil:

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Sabiendo que el número cuyo cuadrado es 16 es 4, está claro que debe ser

$$x + 3 = 4$$

y ahora ya es inmediato que entonces $x = 1$.

En la última ecuación que hemos discutido aparece $(x+3)^2$. Recordemos brevemente como se eleva al cuadrado una suma de dos sumandos: al cuadrado del primer término (aquí x^2) hay que sumarle el doble del producto de los dos términos (aquí $2 \times 3x = 6x$) y el cuadrado del segundo término (aquí $3^2 = 9$). Y entonces, nuestra ecuación en forma expandida sería

$$x^2 + 6x + 9 = 16,$$

por lo que si nos la hubieran presentado de esta forma, no tendríamos ni pajolera idea de cómo abordarla. Por tanto, es necesario, practicar la identificación del cuadrado de la suma de dos sumandos en forma expandida. Por ejemplo, si nos dan la ecuación

$$x^2 + 8x + 16 = 25, \tag{1}$$

deberíamos ser capaces de observar que $8x = 2 \times 4x$ y que 16 es el cuadrado del 4 que aparece en ese producto, por lo que

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 = (x + 4)^2$$

y se trata entonces de la ecuación

$$(x + 4)^2 = 25,$$

que ya podemos resolver como antes.

Por supuesto, si en la ecuación (1) anterior pasamos el 16 que aparece sumando a la izquierda del signo $=$ a su derecha restando, no cambiamos en nada tal ecuación. Y dado que $25 - 16 = 9$, nos quedaría la ecuación

$$x^2 + 8x = 9$$

y en esta expresión también deberíamos ser capaces de ver que el lado izquierdo se puede completar para formar el cuadrado de una suma de dos sumandos, pues

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x$$

y el término que faltaría para tener $(x + 4)^2$ es $4^2 = 16$. Sumando el mismo número en ambos lados de la ecuación, la igualdad sigue siendo cierta. Así pues, sumando 16 en ambos lados:

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16$$
$$x^2 + 8x + 16 = 25$$

y ya sabemos como lidiar con la última ecuación.

Aplicar la táctica de "completar cuadrados" para obtener el cuadrado de un binomio siempre es posible. Si el término cuadrático no fuese x^2, sino por ejemplo $3x^2$ como en la siguiente ecuación

$$3x^2 + 24x = 27,$$

dividiremos ambos miembros entre 3, pues la igualdad se mantiene y un tercio de $3x^2$ es x^2, la tercera parte de $24x$ son $8x$ y un tercio de 27 es 9, por lo que llegaríamos a la ecuación

$$x^2 + 8x = 9,$$

que ya sabemos resolver. Si los números que aparecen en la ecuación no fuesen todos divisibles entre 3, o si el coeficiente de x fuese negativo, aparecerían fracciones y restas por el medio, pero no quiero incordiarte con estas cosas todavía, aunque quisiera decirte que no representan ningún tipo de dificultad añadida.

Así pues, completando cuadrados en cada caso de la forma adecuada, obtendremos el cuadrado de un binomio y de este modo, no habrá ecuación de segundo grado que se nos resista.

Esta manera de razonar es característica del pensamiento matemático: sucede muy a menudo que el matemático no se lanza directamente a la tarea requerida, sino que la moldea y amasa hasta convertirla en un problema que ya ha resuelto en el pasado. Tal modo de proceder es ridiculizado en el siguiente chiste. "Frente a ti hay un hornillo de gas, un grifo, una cazuela y un mechero; quieres hervir un poco de agua. ¿Qué harías?" La respuesta suele escucharse con cierto grado de temor e incerteza: "enciendo el gas, echo un poco de agua en la cazuela y la pongo al fuego". Muy bien, pero ahora modifiquemos ligeramente la tarea: todo está igual que antes, pero ya tenemos agua en la cazuela. "¿Qué harías ahora?" Ahora el experto cocinero ya habla con confianza y seguro de sí mismo: "¡pues enciendo el hornillo y coloco la olla al fuego!" Es entonces cuando debes abofetearlo con arrogancia, "¡así es como actúa el físico! El matemático vacía la olla y dice: *he reducido el problema a la situación anterior*".

En cualquier caso, este argumento o modo de proceder es la esencia y fundamento de la resolución de las ecuaciones de segundo grado y no la fórmula que se deduce a partir de ella y que los niños memorizan tan eficazmente que incluso serían capaces de recitarla en sueños décadas más tarde.

Surge ahora otra dificultad: supongamos que ya hemos completado los cuadrados en el lado de la izquierda pero no encontramos ningún número cuyo cuadrado sea igual al número de la derecha. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en la siguiente ecuación:

$$(x+3)^2 = 2.$$

Si he pensado un número natural al que represento por x, esto no podría suceder nunca; pero sí podrá darse este caso cuando hablemos de ecuaciones más serias y avanzadas. Aparecerá entonces el problema de invertir una potencia; pues ahora estaríamos buscando un número cuyo cuadrado es igual a 2. A esto se le llama extraer la raíz cuadrada y, como operación inversa que es, será discutida en capítulos venideros (en los que también hablaremos de cuántas soluciones admite una ecuación de segundo grado; de momento nos conformamos con encontrar una), pero te adelanto ya ahora que podremos resolver dicha ecuación.

Las personas que no se basan en fórmulas y comprenden el razonamiento anterior, son capaces de resolver fácilmente algunas ecuaciones de orden superior particulares. Consideremos, por ejemplo,

$$(x+1)^3 = 27.$$

Dado que $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$, concluimos que 3 es el número cuyo cubo es igual a 27. Por tanto, debe ser $x + 1 = 3$ y $x = 2$.

También podríamos expandir $(x+1)^3$ empleando para ello el Teorema del binomio y fijarnos después en la expresión que se obtenida. Pero "completar cubos" no siempre es posible. Sin embargo existen procedimientos generales que nos permiten resolver cualquier ecuación de tercer y cuarto grado. Las fórmulas que nos proporcionan estos métodos involucran, además de las cuatro operaciones básicas, a raíces cuadradas, cúbicas y cuartas. Esto es, tendremos que encontrar números cuyo cuadrado, cubo o cuarta potencia es igual a cierto número, como por ejemplo, en el caso anterior, a 2.

La rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio de las ecuaciones se llama Álgebra. Y aunque en la escuela secundaria suelen llamarle Álgebra a todo aquello que no es Geometría, lo cierto es que aparecen ecuaciones en todas las ramas de las Matemáticas (también, por supuesto, en la Geometría). Es quizás por esto, que muchos estudiantes tienden a pensar que las Matemáticas consisten, simplemente, en la resolución de ecuaciones y que el objeto de estudio e investigación de las Matemáticas superiores son ecuaciones muy complicadas.

Hubo una época en la que los matemáticos centraron todo su interés en las ecuaciones y en el Álgebra. Se pensaba por aquel entonces que una vez resueltas las ecuaciones de tercer y cuarto grado, el desarrollo de las matemáticas debía consistir en idear ingeniosos métodos para obtener la solución general de ecuaciones de grado superior, como por ejemplo, de quinto o sexto grado. Podemos imaginarnos por tanto la consternación que debió suponer el descubrimiento por parte de Abel de las condiciones que ha de satisfacer una ecuación (de cualquier grado) para ser resoluble mediante las cuatro operaciones básicas y la extracción de raíces: Abel se encontró con que sólo las ecuaciones de primer, segundo, tercer y cuarto grado satisfacen tales condiciones. Queda luego fuera de toda duda que podamos resolver, en general, ecuaciones de quinto grado empleando únicamente las operaciones anteriormente mencionadas. Parecía que los algebristas debían soltar su pluma y rendirse.

Es aquí cuando llegamos a uno de los pasajes más románticos en la historia de las Matemáticas. Pues fue por aquella época cuando un joven francés de unos veinte años, Galois, se dejó la vida en un duelo por motivos amorosos. La víspera de su muerte, escribió una carta a un amigo en la que, como testamento, anotó todos sus pensamientos e ideas, dando así un nuevo impulso al Álgebra justo cuando ésta había perdido su *raison d'être*.

A pesar de que no existe ningún procedimiento general para resolver ecuaciones de quinto grado, sí podemos resolver algunas ecuaciones particulares. Por ejemplo, para obtener una solución de las ecuaciones:

$$x^5 = 32 \text{ y } (x+1)^5 = 32,$$

basta tener en cuenta que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 = 2^5$, por lo que la solución de la primera ecuación es

$$x = 2$$

y para la segunda ecuación

$$\text{si } x + 1 = 2, \text{ entonces } x = 1.$$

Pero hay más ecuaciones que también podemos resolver. Por poner un ejemplo, una solución de

$$x^5 + 2x^4 + x = 0$$

es $x = 0$, pues todo múltiplo de 0 y toda potencia de 0 es igual a 0, luego $0^5 + 2 \times 0^4 + 0$ es, efectivamente, igual a 0.

Esto fue lo que proporcionó una nueva vía de ataque para el Álgebra: aun sabiendo que no podemos soñar con un procedimiento general, sigue siendo un problema bien interesante decidir cuáles son las ecuaciones de grado superior que sí pueden resolverse empleando las operaciones mencionadas.

Y el testamento de Galois proporciona un método para atacar dicho problema.

Tal método resultó ser extremadamente fructífero y es gracias a él, que se inició un nuevo florecimiento del Álgebra, que brota ahora incluso con más fuerza que antes. Allí donde sean heridas, las Matemáticas surgirán de nuevo con fuerza y vigor renovado. Este nuevo brote, hoy ya una rama, conserva viva la memoria de Galois en su mismo nombre: es la conocida como Teoría de Galois.

Quisiera que te fijases en algo importante. Fue en el Álgebra donde nos encontramos por primera vez con el siguiente fenómeno: las Matemáticas son capaces de probar su propia incapacidad en un área determinada del conocimiento con sus propias herramientas. Volveremos sobre esto más adelante.

PARTE II

LA FUNCIÓN CREATIVA DE LAS FÓRMULAS

9. Números con dirección

En los capítulos anteriores he acumulado numerosas deudas y promesas en relación con la inversión de las operaciones ya conocidas. Ya es hora de enfrentarnos a las operaciones inversas.

La resta parece la más inofensiva. ¿De qué se trata realmente? La suma se puede invertir de la siguiente manera: conocemos el valor de la suma de dos términos, supongamos que es igual a 10, y que uno esos términos es igual a 6, ¿cuál es el valor del otro término? Evidentemente, 4, que es lo que queda después de extraer de 10 el término conocido. ¿Dónde está entonces la dificultad?

La dificultad comienza en el hecho de que, en realidad, tuve que pararme a pensar un poco antes de escoger 10 y 6 para el ejemplo que acabo de comentarte. En el caso de la suma, podría haber escogido dos números de la sucesión de números los naturales con los ojos vendados; no habría ningún problema para sumarlos en cualquier orden. Pero, ¿qué hubiera ocurrido si en el ejemplo anterior dijese: la suma de dos términos es igual 6 y uno de esos términos es igual a 10? ¿Cuánto valdría entonces el otro término? Tal enunciado es evidentemente falaz, pues la suma total no puede ser menor que ninguno de sus sumandos. Por tanto, debemos ser cuidados y asegurarnos de que el minuendo sea mayor que el sustraendo.

¿Eso es todo? Pensarás que entonces no mereció la pena posponer hasta tan tarde una operación tan simple. A nadie se le ocurriría restar más de lo que originalmente tiene y las restas sensatas no presentan ningún tipo de dificultad.

Todo esto es cierto y correcto, pero lo cierto es que en la práctica nos encontraremos a diario con situaciones en las que nos vemos forzados a restarle un número mayor a otro más pequeño.

Recordemos aquel problema en el que tuvimos que averiguar en cuántos años el padre tendría el doble de años que el hijo y hagámonos ahora esa misma pregunta pero con un padre de 52 años y un hijo de 27 años. El razonamiento es el mismo que antes: tal coincidencia se dará dentro de x años, cuando ambos tengan x años más. El padre tendrá para entonces $52 + x$ años y el hijo $27 + x$, por lo que

$$52 + x = 2 \times (27 + x).$$

Procedemos ahora como ya hicimos anteriormente. Efectuamos las multiplicaciones de segundo miembro

$$52 + x = 54 + 2x$$

y juntamos a la derecha del signo de igualdad todas las incógnitas; es decir, pasamos la x de la izquierda para la derecha restando y al 54 de la derecha lo pasamos sumando para la izquierda restando, llegando así a

$$52 - 54 = 2x - x$$

y quitándole una x a $2x$, tan sólo queda una x, por lo que

$$52 - 54 = x$$

y es aquí donde quedamos atrancados. El resultado de la resta imposible $52 - 54$ sería el valor del número que buscamos.

A esto bien podemos responder: si el número desconocido sólo puede ser el resultado de una resta imposible, debemos buscar entonces el error en el enunciado del problema, pues este padre nunca tendrá el doble de la edad de su hijo.

Echemos un vistazo a las edades mencionadas en este problema: 52 años y 27 años. Cualquier persona mínimamente familiarizada con los números se dará cuenta de inmediato que hace dos años, padre e hijo tenían, respectivamente, 50 y 25 años, por lo que ya han pasado dos años desde que el padre tuvo el doble de edad que su hijo.

Así pues, parece que el problema debería haberse formulado preguntando los siguiente: ¿hace cuántos años que el padre tenía el doble de la edad que el hijo?

De este modo, creo que deberíamos evitar cualquier problema con la ecuación. Hace x años todos éramos x años más jóvenes, por lo que el padre tendría $52 - x$ años y el hijo $27 - x$ años y afirmamos sobre estas edades que

$$52 - x = 2 \times (27 - x)$$

A la derecha multiplicamos la diferencia que allí aparece por 2 (si tuviésemos que efectuar el producto 2×99, lo más sencillo sería empezar multiplicando 2 por 100 en vez de por 99 y restar después 2 unidades a 200, pues estaríamos considerando a 99 como la diferencia entre 100 y 1, por lo que el doble de esta diferencia es la diferencia entre 2×100 y 2×1)

$$52 - x = 54 - 2x.$$

Juntemos todas las incógnitas en el miembro de la izquierda; para ello, pasamos el $2x$ que aparece restando para la izquierda sumando:

$$2x + 52 - x = 54.$$

Ahora, el 52 que aparece sumando en el primer miembro lo pasamos a la derecha restando:

$$2x - x = 54 - 52$$

y efectuando las operaciones pertinentes, concluimos finalmente que

$$x = 2,$$

como ya sabíamos de inicio.

Todo esto está muy bien; siempre podremos proceder de tal modo, pero seguir las huellas de un camino ya recorrido hasta chocar contra una pared para dar luego la vuelta, replantear el problema y comenzar de nuevo es bastante latoso y aburrido. Y, en verdad, ya teníamos la solución a nuestro alcance. Volvamos pues a donde antes nos detuvimos; a la expresión

$$52 - 54,$$

que resuelve por sí misma toda dificultad: "¡te digo que la diferencia es 2! Además, debes contar estos años en la dirección opuesta, no hacia adelante o hacia el futuro, sino hacia el pasado. ¿Por qué te empeñas en no querer entenderme?"

Así es como se propone dar significado y sentido a la resta $52 - 54$: considerar tanto la diferencia entre 54 y 52, pero también que ésta debe ser tenida en cuenta con cierta dirección opuesta a la habitual hasta el momento. Como esta dirección apunta hacia atrás en el tiempo, hacia el pasado, indica que debeos restar 2 años a las edades actuales y esto suele marcarse mediante el signo de la resta, por lo que acostumbramos escribir:

$$52 - 54 = -2.$$

De acuerdo con esto, deberíamos marcar los números usuales con un signo "$+$", pues si el resultado de la ecuación dijese que la situación en cuestión ocurrirá *una vez pasados dos años*, tendríamos entonces que sumar 2 años a las edades actuales. Efectivamente, si deseamos enfatizar tal hecho, podemos añadir el signo "$+$".

La necesidad de atribuir cierta dirección a una cantidad no es algo inusual. Si en un día de frío invierno decimos que la temperatura exterior es de 4 grados, no estaremos dando una información muy exhaustiva. Es necesario indicar si se trata de 4 grados por encima o por debajo de cero, para una persona sensible al frío se trata de una gran diferencia.

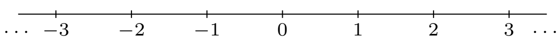
Por el mismo motivo, es impreciso hablar del siglo III sin aclarar si nos referimos al siglo III a.C. o al siglo III d.C. o de 15° de longitud sin indicar si estamos 15° al este o al oeste del meridiano base de la Tierra. El contable también tiene mucho cuidado a la hora de anotar una nueva entrada de 1 000 florines a la derecha o a la izquierda de la línea central de su libro de cuentas, porque a la mayoría de la gente no le resulta indiferente que sus ahorros aumentan o disminuyan en 1 000 florines.

En todos este casos, las cantidades bidireccionales pueden marcarse con "$+$" o "$-$" y recibir un nombre distinto para aclarar su dirección: los números con signo "$+$" son los números positivos y los números con signo "$-$" son los números negativos. Siempre se puede pensar a un número negativo como el resultados de una resta en la que el sustraendo es mayor que el minuendo.

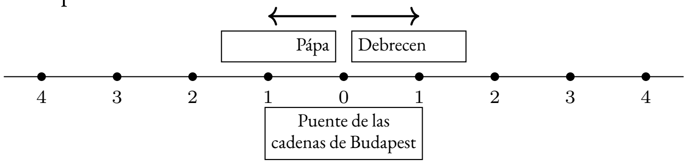
Por ejemplo, si la temperatura en la calle es de 5° C por encima de 0° C y desciende 8° C, esto significa que la temperatura ha descendido y podemos considerarlo por tanto como una resta; debemos restar 8 a 5 y no hay nada que lo impida; basta ir, simplemente, más allá de 0° C. La temperatura será pues de 3° C bajo cero, es decir, de -3° C.

$$5 - 8 = -3.$$

Una resta como esa siempre nos llevará más allá del cero en la dirección opuesta de la habitual. Por tanto, si queremos representar los números con dirección en una línea recta, tenemos que dibujar a los números positivos avanzando en una dirección (generalmente hacia la derecha) y a los números negativos avanzando en dirección opuesta



Esta misma recta numérica puede entenderse como un ejemplo más a la hora de ilustrar el concepto de cantidades o números con dirección: sólo tenemos que imaginarla como una carretera secundaria con un cartel como este en el punto cero:

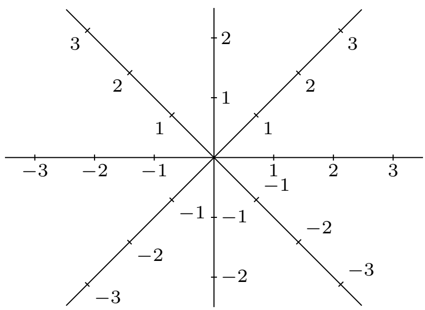


Hay casos en los que sólo nos interesa el valor "absoluto" de los números y no su dirección; como por ejemplo, cuando sólo tenemos curiosidad por conocer la distancia entre dos puntos. La longitud de una serpiente, de por ejemplo 3 metros, no necesita de ningún signo, pues nadie en su sano juicio entenderá tal distancia como 3 metros de cabeza a cola y otros 3 metros de cola a cabeza, sumando un total 6 metros.

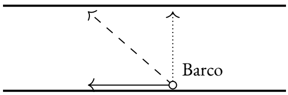
Era previsible que más tarde más temprano los opuestos aparecerían en Matemáticas, pues pensar en opuestos algo típico del ser humano: verdad y mentira, luces y sombras, tesis y antítesis.

Pero las mentes más finas no sólo perciben los opuestos más evidentes. La transición entre la luz y la sombra es infinitamente gradual y desde un punto de partida, podemos tomar más de dos direcciones: desde el Puente de las Cadenas de Budapest salen carreteras secundarias en todas las direcciones de la rosa de los vientos.

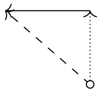
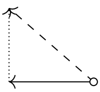
Por tanto, no debemos completar la semirrecta que representaba a los números naturales únicamente con otra semirrecta en dirección opuesta, sino con toda la multitud de avenidas que pasan por el punto 0:



Esto no es únicamente una idea abstracta: las cantidades con direcciones arbitrarias, también llamadas “vectores”, juegan un importante papel en la Física. El movimiento puede producirse en cualquier dirección y una fuerza también puede actuar en cualquier dirección. Además, las operaciones con estas cantidades dirigidas tienen un sentido y significado perfectamente definidos: a veces actúan dos o más fuerzas al mismo tiempo y nos interesa conocer su efecto combinado. Por ejemplo, todo remero sabe que si quiere cruzar el río, no llegará al punto de la otra orilla que ve justo en frente, sino algo más abajo, pues no sólo actúa su propia fuerza muscular; la corriente también hace fuerza.



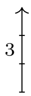
En agua estancada el bote seguiría la línea de puntos; mientras que un bote sin remos sería arrastrado siguiendo la línea más gruesa durante el tiempo que tarda en cruzar el río. En realidad, el bote avanza por la línea que va describiendo bajo la influencia de estas dos fuerzas y por tanto, alcanza la otra orilla como si hubiera tomado estos dos caminos por separado, primero uno y después el otro:

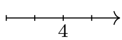
 o en orden opuesto 

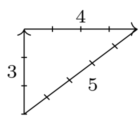
Sea cual sea el orden, el bote siempre llegará al mismo lugar. Por tanto, el orden de los sumandos es indiferente en esta suma.

Este tipo de suma también puede considerarse como un conteo sucesivo. Contamos primero las unidades de la “componente” del vector en dirección $\uparrow$ y contamos luego en dirección $\leftarrow$ con las unidades del otro vector, obteniendo así el vector que nos ha llevado hasta allí directamente. Esta es la suma, o, como suele decirse en este caso, la resultante.

Es una suma un tanto extraña. Por ejemplo, la suma de



y


es igual a


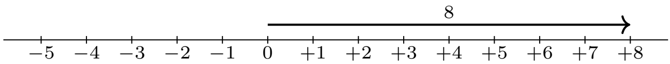
y si la medimos con precisión, veremos que consta exactamente de 5 unidades, por lo que obtenemos así el siguiente resultado aparentemente absurdo:

$$3 + 4 = 5.$$

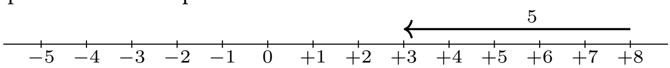
Pero aquí no debemos expresarnos nunca de forma tan vaga; debemos indicar que dirección tiene nuestro 3, que dirección tiene nuestro 4 y cual es la dirección del 5 resultante. Así, ya no será tan extraño obtener una suma menor que $3 + 4 = 7$, pues la suma de los efectos de dos fuerzas opuestas puede llegar incluso a anularse. Se cuenta que ocho caballos tiraban de un carro muy pesado en la aldea de Rátót y que el carro no se movía hasta que alguien se percató de que cuatro caballos tiraban en un sentido y los otros cuatro en el sentido opuesto.

Dejemos de lado los números dirigidos en cualquier dirección y contentémonos solamente con dos direcciones opuestas.

Ya tenemos instrucciones sobre cómo sumar números positivos y negativos en la recta numérica. Por ejemplo, si queremos sumar 8 y -5, comenzando desde 0, contamos primero 8 unidades hacia la derecha:



y después 5 hacia la izquierda

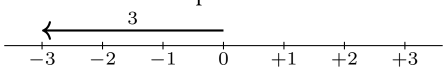


llegando así a 3, por lo que la suma de $+8$ y -5 es igual a $+3$. No olvidemos –pensando ya en cosas que aparecerán más adelante– que

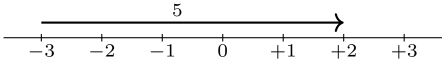
$$8 + (-5) = 3 = 8 - 5,$$

por lo que para sumar un número negativo, basta efectuar una simple resta.

La resta también es muy fácil de entender en la recta numérica; consiste en invertir el procedimiento anterior. Veamos, por ejemplo, como restar -3 a 2. Esto significa que nos encontramos ante una suma de dos términos en la que uno de esos términos es igual a -3 y resultado final es igual a 2; desconocemos el otro término. En el caso de la suma empezamos del siguiente modo: nos desplazamos 3 unidades hacia la izquierda desde cero



y nos preguntamos ahora: ¿qué tenemos que hacer para llegar a $+2$? Pues debemos avanzar desde -3 hacia la derecha hasta llegar a $+2$,



por lo que la diferencia entre 2 y -3 es igual $+5$. Curiosamente, obtenemos lo mismo que si hubiésemos sumado. Siempre ocurre así; en lugar de restar, siempre podemos restar pero un número de signo opuesto.

Podríamos pensar que como ya sabemos sumar, la multiplicación no debería presentarnos ninguna dificultad, pues tomar -2 tres veces no significa más que efectuar la siguiente suma:

$$(-2) + (-2) + (-2)$$

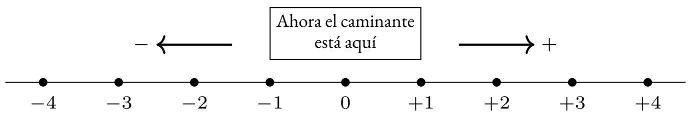
y si desde -2 contamos otros 2 hacia la izquierda y después otros 2, llegaremos finalmente a -6, por lo que

$$(+3) \times (-2) = -6$$

Pero, ¿y si suponemos que el multiplicador es un número negativo? Podemos sumar un número dos, tres o cuatro veces, una tras otra, pero no tiene ningún sentido sumarlo -2 veces. Ahora que ya tenemos algo de experiencia, no diremos tan alegremente: si no tiene sentido, no lo hagas; admitamos que no podemos multiplicar por números negativos. Después de todo, hemos introducido los números negativos para no tener que atacar un mismo problema de dos formas distintas y poder actuar así al unísono y de forma uniforme en todos los casos. Ocurre exactamente lo mismo con la multiplicación; si estamos peleándonos con un problema que puede resolverse multiplicando números positivos, es un inconveniente decir: si los factores son positivos, multiplicamos; si no es así, hacemos otra cosa. Observemos qué es lo que hacemos en ese caso y llamémosle a eso multiplicación por números negativos. Tenemos derecho a ello, pues si algo todavía no tiene un significado, tenemos la libertad de dárselo.

Un ejemplo será más claro que tanta palabrería. Si alguien camina a un ritmo constante de 3 kilómetros por hora, ¿qué distancia habrá recorrido después de 2 horas? La respuesta a esta pregunta se obtiene, claramente, mediante una multiplicación: si camina 3 kilómetros en una hora, en dos horas caminará $2 \times 3 = 6$ kilómetros. Por tanto, multiplicando la velocidad del caminante por la duración de la caminata, obtendré la respuesta.

Ahora, planteemos el problema de modo que tanto la longitud de la caminata, el tiempo y la velocidad sean cantidades con cierta dirección. Hay un punto en el camino –al que llamaré "aquí"– desde el cual consideraré positivo caminar a su derecha y negativo caminar a su izquierda. Si nuestro caminante se mueve hacia la derecha a una velocidad de 3 kilómetros por hora, diré que su velocidad es de $+3$ kilómetros por hora; mientras que si lo hace hacia la izquierda, diré que su velocidad es de -3 kilómetros por hora. Finalmente, escojo un instante de tiempo al que llamaré "ahora" y considero como positivo a todo momento posterior y como negativo a todo momento anterior. El punto de partida de la caminata será etiquetado siempre como "ahora el caminante está aquí":



Limitémonos a los casos críticos:

I.- Alguien camina a un ritmo de $+3$ kilómetros por hora. Ahora está aquí. ¿Dónde estaba hace dos horas? La respuesta podría entenderse como el resultado de la multiplicación:

$$(-2) \times (+3).$$

Pensemos un poco: el caminante tiene una velocidad positiva, por lo que camina hacia la derecha. Ahora está aquí, significa que acaba de llegar hasta aquí (debes señalar el punto singular de la figura, esto es, el lugar donde hemos colocado el letrero), por lo que hace dos horas debía estar en algún punto a la izquierda de este punto y a la distancia que se recorre en dos horas, es decir, a una distancia de $2 \times 3 = 6$ kilómetros. El punto -6 está situado 6 kilómetros a la izquierda del letrero, por tanto

$$(-2) \times (+3) = -6.$$

De acuerdo con esto, cuando multiplicamos un número positivo por un número negativo, obtenemos un número negativo.

II.- Supongamos ahora que el ritmo de nuestro caminante es de -3 kilómetros por hora y que ahora está aquí. ¿Dónde estaba hace dos horas? La respuesta podría entenderse como el resultado de la multiplicación:

$$(-2) \times (-3).$$

La velocidad negativa significa que el caminante se dirige hacia la izquierda; acaba de llegar aquí ahora (señala de nuevo el punto del letrero en la figura). Esto sólo es posible si durante las dos horas anteriores ha estado caminando a la derecha del letrero y, nuevamente, habiendo recorrido hasta este momento 6 Kilómetros. El punto $+6$ está situado a 6 millas a la derecha del letrero, por lo que

$$(-2) \times (-3) = +6.$$

De acuerdo con esto, el producto de dos números negativos es un número positivo.

Esto es como una doble negación: "no es cierto que no estuviese atendiendo" significa que sí que estaba atendiendo.

Teniendo en cuenta la regla de los signos para la multiplicación, podemos deducir inmediatamente que la regla de los signos para la división es similar. Por ejemplo,

$$(+6) \div (-3)$$

significa buscar un número que al ser multiplicado por -3 sea igual a $+6$: éste es, obviamente, -2. La regla de los signos para las potencias también es muy fácil:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \times (-2)} \times \underbrace{(-2) \times (-2)} = (+4) \times (+4) = +16$$

y

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \times (-2)} \times \underbrace{(-2) \times (-2)} \times (-2)$$

$$= (+4) \times (+4) \times (-2) = (+16) \times (-2) = -32$$

En general, los factores negativos dan lugar a un resultado positivo cuando los agrupamos en pares, por lo que para saber el signo del resultado final, basta comprobar si queda algún factor solitario. Así pues, cualquier potencia con exponente par de un número negativo es un número positivo, mientras que cualquier potencia impar de un número negativo siempre será otro número negativo.

Hemos generalizado la multiplicación para el caso de factores negativos empleando un único ejemplo, por lo que es razonable preguntarnos si acaso un ejemplo distinto no podría conducirnos a otras reglas totalmente distintas. La única garantía de la que disponemos consiste en que nuestra nueva regla de multiplicación es coherente con las reglas de la multiplicación entre números naturales y, por lo tanto, no entraremos nunca en conflicto con las

Matemáticas anteriores. Por ejemplo, aquí también es cierto que los factores son intercambiables. En efecto, pues hemos visto (y podríamos haberlo deducido del ejemplo del caminante) que

$$(-2) + (-2) + (-2) = -6,$$

o equivalentemente,

$$(+3) \times (-2) = -6;$$

mientras que, del ejemplo del caminante, sabemos que

$$(-2) \times 3 = -6.$$

Por tanto,

$$(+3) \times (-2) = (-2) \times (+3).$$

Debemos ser cuidadosos con este tipo de cuestiones. Siempre que introducimos nuevos números o nuevas operaciones, lo hacemos con el objetivo de uniformizar procedimientos; por tanto, es fundamental asegurarse de que cumplen las reglas antiguas. No queremos tener que separar nuestras operaciones en diferentes tipos según aparezcan o no los nuevos números o nuevas operaciones. Este respeto por los conceptos previos a la hora de generalizar y hacer nuevas extensiones se denomina "principio de permanencia".

La sucesión de los números naturales fue una creación espontánea. Fue la ruptura de dicha estructura, que había funcionado notablemente bien en el pasado, la que nos llevó de forma consciente a la creación de nuevos números. Es la forma de dicha estructura quien nos ayuda en este proceso de creación. El esbozo o esquema general de los nuevos números viene queda definido mediante leyes derivadas de los números antiguos, leyes que jamás rechazaremos y de las cuales no queremos alejarnos demasiado. Todo esto nos proporciona una guía para dicha creación consciente: los nuevos números deben ser moldeados pensando que han de encajar bien con la estructura ya definida por los números antiguos. Tal y como dice Goethe, dado que las palabras dan forma al pensamiento:

> *...porque allí donde faltan las ideas,*
> *aparece a tiempo una palabra...*

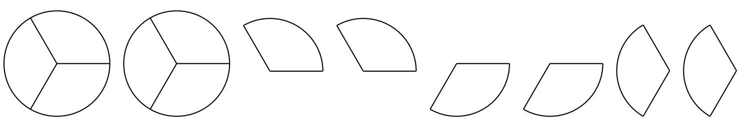
10. *Densidad sin límite*

Para el siguiente problema ni tan siquiera necesitamos de una ecuación; cualquier niño se enfrenta a diario con divisiones imposibles de efectuar entre números naturales. Dos niños tienen que compartir una manzana; ya saben que ninguno se la comerá entera. Cortarán la manzana por la mitad, uno corta y el otro escoge, y mientras tanto, ignorándolo por completo, habrán extendido el concepto de número.

Hasta este momento, hemos considerado siempre a una unidad como algo indivisible. Pero ahora acabamos de introducir la mitad de dicha unidad como una unidad nueva y más pequeña. Una vez que hemos dado este paso tan arriesgado, ya no hay nada que nos impida dividir la unidad en 3, 4, 5,… o cualquier número de partes y emplear luego estas unidades más pequeñas para contar. Por ejemplo: dos mitades, tres mitades, cuatro mitades,… o simbólicamente

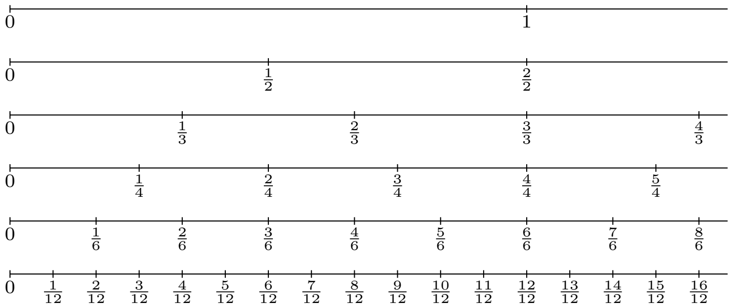
$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$$

Esta notación no contradice en absoluto el hecho de haber denotado previamente a la división mediante una raya de fracción porque si tuviésemos que dividir, por ejemplo, 2 en 3 partes iguales –pensemos en tres niños repartiendo dos pasteles–, la forma más inteligente de proceder consiste en dividir ambos pasteles en tres partes iguales y que cada uno se zampe dos tercios, esto es $\frac{2}{3}$, de pastel.



El número debajo de la raya indica el tamaño de la unidad, es el *denominador*. El número encima de la raya cuenta cuántas de dichas unidades hemos tomado, es el *numerador*.

De este modo, aparecen muchos más números en nuestra recta numérica original. En efecto, pues podemos añadir nuevas rectas numéricas considerando unidades cada vez más y más pequeñas. Muestro a continuación algunas de esas rectas numéricas:



Entre todos los números que aparecen en las diferentes rectas numéricas, algunos son iguales. Veamos cuales son aquellos que aparecen exactamente uno debajo de otro. Aparecen entre éstos, por ejemplo,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12} \qquad \text{o} \qquad \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$$

y a partir de ellos averiguamos cuáles son las diferencias superficiales que, en realidad, no alteran en absoluto el valor de una fracción. Por ejemplo, la fracción $\frac{4}{6}$ tiene exactamente el mismo valor que la fracción $\frac{2}{3}$, de apariencia mucho más simple; "simplificamos" $\frac{4}{6}$ como $\frac{2}{3}$. Podemos efectuar dicha simplificación dividiendo numerador y denominador entre 2; en efecto, pues $4 \div 2 = 2, 6 \div 2 = 3$ y entonces $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Proceder de tal modo es lo natural. Reflexionemos por un instante, los tercios son dos veces más grandes que los sextos, por lo que si cogemos la mitad de piezas que son el doble de grandes, tomamos en realidad exactamente la misma cantidad.

Observamos también que $\frac{3}{3}$ es, en realidad, un número entero: la unidad. Por otro lado, $4/3$ es una unidad más $1/3$ de unidad, lo que se escribe de forma abreviada como $1\frac{1}{3}$. Estas no son fracciones propiamente dichas, pues su valor no es una parte de la unidad; es por ello que estas fracciones reciben el nombre de fracciones impropias.

Es evidente que en una misma recta podemos sumar y restar fácilmente. Por ejemplo, desde $\frac{3}{4}$ llegamos hasta $\frac{5}{4}$ contando otros dos cuartos, por lo que

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}.$$

Para multiplicar por un número entero procedemos de modo similar

$$2 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12}$$

y contando cinco doceavos más desde $\frac{5}{12}$ llegamos a $\frac{10}{12}$.

Sumar dos números que han sido contados empleando unidades de diferente tamaño es un poco más complicado. Consideremos, por ejemplo,

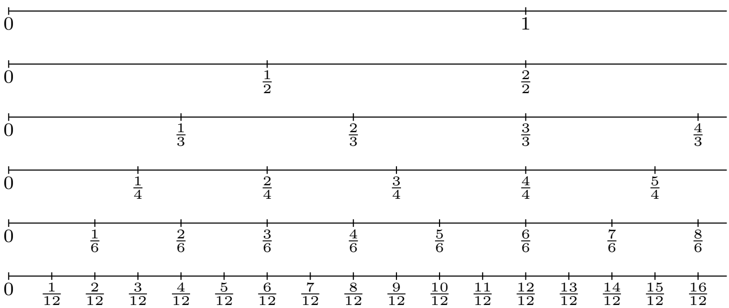
$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}.$$

Optamos entonces por la siguiente vía: buscamos primero una línea en la que haya un número igual a $\frac{2}{3}$ y otro igual a $\frac{3}{4}$ (basta reflexionar un instante para convencernos de que siempre existirá dicha recta). En este caso nos vale la recta de los doceavos, pues

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

y ahora ya podemos efectuar la suma en esa misma recta con facilidad:

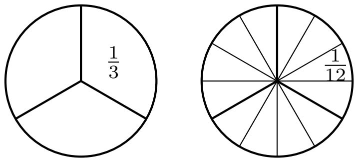
$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}.$$



De manera similar, también tenemos que saltar a otra línea si queremos dividir[1]. Asegúrate midiendo que la mitad de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$ y que un cuarto de $\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{2}{12}$. No obstante, es lo natural, pues un denominador cuatro veces más grande significa que hemos dividido algo en el cuádruple de trozos o

[1] Esto me recuerda a las transiciones electrónicas: los saltos que dan los electrones entre distintos niveles de energía al ser sometidos a radiación. Es posible que esta comparación con la teoría atómica sea valiosa para algún lector.

piezas, tomando luego el mismo número de piezas nuevas y más pequeñas que tomábamos antes de piezas más grandes. De este modo, lo que obtenemos ahora es una cuarta parte de lo que teníamos antes. Por ejemplo, si se trata de pasteles:



Vemos entonces que al aplicar cualquiera de las operaciones fundamentales a las fracciones, obtenemos nuevamente y como resultado otra fracción, que bien puede ser una fracción propia o una fracción impropia. Por tanto, a la hora de efectuar operaciones con fracciones, tenemos que emplear los distintos teclados de nuestro órgano.

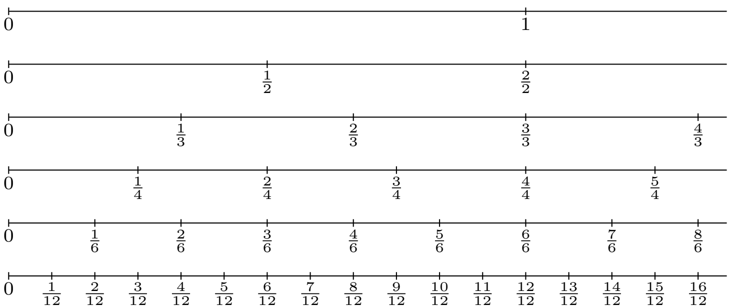
Nuevamente, aparece una dificultad si queremos multiplicar por una fracción. El enunciado “suma algo repetidamente media vez o cierta proporción de veces” no tiene sentido. Un pequeño alumno me dijo en cierta ocasión: “si uno por tres es igual tres: 3, entonces $\frac{1}{2}$ por tres debería ser igual a medio tres: ɔ” y es evidente que hay algo de verdad en esto. No obstante, el lenguaje cotidiano viene en nuestra ayuda. “La estatura de Peti es $\frac{2}{3}$ la de su hermano” significa que la altura de Peti es dos tercios de la altura de su hermano. Tomar $\frac{2}{3}$ de algo significa no cogerlo todo, sino sólo dos tercios del total y ése es el verdadero significado de la multiplicación en, por ejemplo, la siguiente situación: si 1 kg de uvas cuesta 5 florines, entonces 4 kg de uvas costarán $4 \times 5 = 20$ florines, por lo que obtuve el precio total multiplicando el precio de 1 kg por el número de kilos que he comprado. Modifiquemos ahora ligeramente el escenario: si 1 kg de uvas cuesta 5 florines, ¿cuántos florines costarán tres cuartos de un kilo de uvas? El resultado que obtengamos debería coincidir con el valor del producto

$$\frac{3}{4} \times 5.$$

El precio de tres cuartos de kilo es, evidentemente, 3 veces el precio de un cuarto de kilo. El precio de un cuarto de kilo será una cuarta parte de 5 florines (esto es, 1 florín y 25 fileres). Tengo que comprar tres veces ésto (por lo que pagaré 3 florines y 75 fileres), de modo que $\frac{3}{4} \times 5$ significa, en realidad, que tomamos tres cuartas partes de 5. Y, por supuesto, puedo obtener el valor correspondiente dividiendo entre 4 y multiplicando por 3.

Un argumento similar nos permite concluir que para dividir entre $\frac{3}{4}$, debemos multiplicar por 4 y dividir entre 3. Por lo tanto, estas operaciones dan nuevamente como resultado otra fracción que estará en una u otra línea. Además, se puede probar fácilmente que con esta generalización del concepto de multiplicación, todas las reglas de cálculo anteriores permanecen intactas. No debería sorprendernos en absoluto que el resultado del producto sea menor que el número multiplicado, pues multiplicar un número por $\frac{2}{3}$ significa tomar dos terceras partes de él y eso será, evidentemente, menor que el propio número.

Es muy fácil multiplicar 20 por $\frac{1}{4}$; tan sólo tienes que coger un cuarto de 20, que es 5. Y es igual de fácil multiplicar por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{5}$; basta tomar, respectivamente, la mitad, la tercera y la quinta parte de 20. Es por esto que merece la pena dividir una fracción en "fracciones elementales".



Por ejemplo,

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$$

y observado las rectas numéricas vemos que $\frac{4}{12}$ es lo mismo que $\frac{1}{3}$, por lo que

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

y que $\frac{1}{12}$ es un cuarto de $\frac{1}{3}$ (compruébalo tú mismo en la figura). De acuerdo con esto, tenemos que,

$$84 \times \frac{5}{12} = 84 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)$$

y esta multiplicación puede computarse tomando un tercio de 84, que es igual a 28, y sumándole luego un cuarto de esto último, es decir 7, obteniendo así finalmente $28 + 7$, que es igual a 35. En particular, esto es especialmente útil para los ingleses, quienes todavía conservan reliquias de todo tipo de sistemas numéricos en sus múltiples unidades de medida. Por ejemplo en su moneda, el chelín británico, que se dividía en 12 peniques, motivo por el que las multiplicaciones por doceavos eran –y todavía son– muy frecuentes en Gran Bretaña.

Hemos visto que todas nuestras operaciones elementales también se pueden realizar entre fracciones. Veamos otro ejemplo: un estudiante está resolviendo ejercicios de aritmética; soluciona el ejercicio más sencillo en un tercio de hora (es decir, en 20 minutos), mientras que para el más difícil necesita en media hora. En promedio, ¿cuánto tarda en resolver cada ejercicio?

Para resolver el ejercicio más difícil y el más fácil emplea, en total,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \text{ horas.}$$

Si ambos ejercicios fuesen de la misma dificultad, el estudiante emplearía la mitad de dicho tiempo en resolver cada uno de los dos ejercicios. Y ése será, muy probablemente, el tiempo que necesitará para resolver un ejercicio de dificultad intermedia. Calculemos exactamente cuánto es ese tiempo: en la línea de los sextos encontramos números iguales a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente. En efecto, pues

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

por lo que la suma de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es igual a

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}.$$

La mitad de esto (compruébalo tu mismo en la figura) es el siguiente número de la línea de los doceavos:

$$\frac{5}{12},$$

por lo que para resolver un ejercicio de dificultad media, el estudiante emplearía $\frac{5}{12}$ de hora (25 minutos) y esto es, por supuesto, más tiempo que el que necesita para solucionar uno de los ejercicios más fáciles y menos tiempo que el que emplearía en resolver el ejercicio más duro.

El promedio de dos números cualesquiera se calcula tomando la mitad de su suma. De esta forma, siempre obtenemos un número cuyo valor se encuentra entre los dos valores inicialmente dados. Esto es a lo que los matemáticos llaman la media aritmética de (o promedio entre) dos números.

Este ejemplo, aparentemente inocente y simple, revela perspectivas vertiginosas a poco que reflexionemos.

En primer lugar, juntemos todas nuestras líneas numéricas en una única línea. No hay ninguna razón que nos impida representar cada fracción en una misma línea. Inicialmente era más claro emplear una línea distinta para cada fracción de unidad, pues empleando una única línea numérica, las fracciones cuyo valor es el mismo coincidirían en un mismo punto. A continuación, escribiré cada fracción en tal y como apareció por primera vez:

$$0 \quad \tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{5}{12} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{7}{12} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{5}{6} \quad \tfrac{11}{12} \quad 1 \quad \tfrac{13}{12} \quad \tfrac{7}{6} \quad \tfrac{5}{4} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{17}{12} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{19}{12} \quad \tfrac{5}{3} \quad \tfrac{7}{4} \quad \tfrac{11}{6} \quad \tfrac{23}{12} \quad 2$$

Esto ya se hace muy denso, pero pesemos que tan sólo hemos juntado unas pocas líneas; los quintos, los séptimos, los treceavos, los centavos y muchos otros aún no aparecen en esta línea en absoluto. Tratemos de identificar nuestro camino entre tanto número.

En primer lugar, observamos que los números enteros sí están presentes; pues éstos pueden considerarse como aquellas fracciones cuyo denominador es 1. Por ejemplo, si pensamos en el significado de la división, concluimos que $\frac{3}{1}$ es, en realidad, igual 3, pues ése es el valor que obtenemos al dividir 3 entre 1. Los números enteros y las fracciones forman colectivamente los números racionales, denominación que ya presagia la posibilidad de construir números de manera menos racional.

Excluyendo al cero (que puede entenderse como $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, etcétera), ¿cuál será la fracción más pequeña? Es evidente que $\frac{1}{12}$ no es la fracción más pequeña, pues $\frac{1}{13}$ todavía es más pequeña. Si compartimos un pastel con una persona a mayores, las porciones serán más pequeñas. Ocurre exactamente lo mismo con cualquier fracción que consideremos candidata a ser la más pequeña: $\frac{1}{101}$ es menor que $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1001}$ es menor que $\frac{1}{1000}$. Por tanto, entre los números racionales no sólo no existe el más grande, sino que tampoco existe el más pequeño.

Así pues, no podemos empezar a enumerar los números racionales. Comencemos entonces con una fracción pequeña arbitraria, como por ejemplo $\frac{1}{12}$, y conformémonos con enumerar todos los números racionales a partir de ahí. ¿Cuál es la fracción que viene inmediatamente después? El $\frac{1}{6}$, que es siguiente número que aparece en nuestra línea numérica, no puede ser, pues el promedio de $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{6}$ es una fracción que está entre ambas fracciones. Pero para cualquier otro número a la derecha de $\frac{1}{12}$ podría calcular la media aritmética entre $\frac{1}{12}$ y ese número, y tendría de nuevo una fracción más próxima a $\frac{1}{12}$ que el número inicialmente escogido. No existe entonces el sucesor inmediato de $\frac{1}{12}$. Por tanto, concluimos que tampoco es posible enumerar los números racionales de $\frac{1}{12}$ en adelante. En general, escogidos dos números racionales cualesquiera, por muy cercanos que estén en nuestra línea numérica, estos números jamás serán vecinos inmediatos, siempre habrá otro número racional entre ellos. Es a esto a lo que nos referimos cuando decimos que el conjunto de los números racionales es "denso en todas partes".

Nos encontramos aquí con una nueva imagen del infinito: además del crecimiento ilimitado de los números naturales y de los números primos, también tenemos una densidad ilimitada o infinita. No existe ningún número tan grande como para que no exista, en la sucesión de los números naturales o en la de los números primos, un número todavía mayor. Este es el significado exacto de lo que los matemáticos expresan al decir que estas sucesiones tienden a Infinito. Tampoco existe una distancia tan pequeña como para que a menos de esa distancia de $\frac{1}{12}$ no haya ningún número racional. Esto se expresa diciendo que $\frac{1}{12}$ es un punto de condensación del conjunto de los números racionales. Por supuesto, esto no sólo es cierto para $\frac{1}{12}$, sino que todos los números racionales son puntos de condensación.

Sin embargo, a pesar de todo, sí es posible enumerar los números racionales en una única sucesión, aunque obviamente no de menor a mayor.

Ya vimos que pueden ordenarse o enumerarse empleando una cantidad infinita de sucesiones cuando empleábamos una línea distinta para cada fracción de unidad. En aras de la uniformidad, a continuación escribiremos los números naturales en forma fraccionaria:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, \dots \\[1ex]
\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, \dots \\[1ex]
\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, \dots \\[1ex]
\frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, \dots \\[1ex]
\frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{5}, \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Pero ahora se trata de ordenarlos en una única sucesión. Esto se puede hacer escribiendo los números, uno tras otro, siguiendo las líneas oblicuas que he dibujado en la lista anterior. De esta manera, más tarde o más temprano, llegará el turno de cada fracción:

$$\underbrace{\frac{1}{1}},\ \underbrace{\frac{2}{1},\ \frac{1}{2}},\ \underbrace{\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}},\ \underbrace{\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}},\ \underbrace{\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}},\dots$$

y tendremos así grupos cada vez más largos pero finitos, por lo que obtenemos una sucesión bien definida que cualquier persona podría seguir escribiendo si ha entendido la regla de enumeración. En verdad, ni siquiera necesitaría mirar para las líneas oblicuas de la figura anterior. Bastaría con que se percatase de que la suma del numerador y el denominador de la única fracción del primer grupo vale 2, la suma del numerador y el denominador de las dos fracciones del segundo grupo 3, 4 para las tres fracciones del tercer grupo, 5 para las cuatro el cuarto grupo y así sucesivamente. Teniendo esto en cuenta,

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 = 1 + 6,$$

por lo que el siguiente grupo sería

$$\frac{6}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{6}$$

y ahora cualquiera puede continuar con este proceso mecánicamente. En general, se considera que una sucesión infinita está completamente definida si una vez reconocido su patrón, cualquiera puede escribir los términos de la misma hasta la posición que desee.

Es evidente que en nuestra sucesión habrá términos con el mismo valor; ya mencionamos esto cuando hablamos de las distintas líneas numéricas. Si queremos escribir cada número racional una única vez, debemos añadir a la regla de construcción que las fracciones que puedan simplificarse serán omitidas. Por ejemplo, en la parte de la sucesión que ya hemos escrito, habría dejar fuera a $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$ y $\frac{2}{4}$. Entre estos, $\frac{2}{2}$ y $\frac{3}{3}$ tienen el mismo valor que $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{2}$ tiene el mismo que $\frac{2}{1}$ y $\frac{2}{4}$ coincide con $\frac{1}{2}$. Así pues, en este caso, la sucesión de números racionales empezaría de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$$

y puede continuarse de manera mecánica. En efecto, pues soy capaz de decir cuál es el primer, segundo, tercer,... término de la sucesión. La sucesión puede ser numerada; esto es, “numerable” o “contable”, vocablos técnicos ambos ligeramente engañosos.

Este simple hecho arroja luz sobre un fenómeno sorprendente: a pesar de que los números racionales (es decir, todas las fracciones) son densos en todas partes, hay –en cierto sentido– tantos números racionales como números enteros. ¿Cómo podemos comparar dos infinidades entre sí? Bien, pues hay un método muy sencillo. Si en una clase de danza quiero saber si hay tantos niños como niñas, no necesito contarlos por separado; basta con pedirle a los chicos que vayan con sus parejas. Si no queda ningún niño sin pareja y no hay “patitos feos”, entonces ya sé que hay exactamente el mismo número de niños que de niñas. Este modo de contar o comparar se puede transferir al caso de conjuntos infinitos; si podemos emparejar los elementos de dos conjuntos infinitos de modo que ningún elemento de un conjunto quede sin emparejar con algún elemento del otro conjunto, diremos entonces que esos conjuntos son igual de numerosos.

Ahora bien, la sucesión de números racionales que acabamos de escribir se puede emparejar con la sucesión de los números naturales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \ldots$$

Emparejamos el 1 con $\frac{1}{1}$, el 2 con $\frac{2}{1}$, el 3 con $\frac{1}{2}$ y así sucesivamente; por ejemplo, 10 se emparejará con el décimo término de nuestra sucesión, esto es, con $\frac{5}{1}$. Si queremos saber con qué número se emparejará el 100, solo tenemos que escribir –siguiendo el procedimiento anteriormente comentado– los cien primeros términos de nuestra sucesión; el último número que escribamos será la pareja de 100. Es evidente que cualquiera pude continuar realizando este emparejamiento hasta la posición que desee y por tanto, es imposible escoger un número –ya sea de la sucesión de los números racionales o de la sucesión de los números naturales– que se quede sin pareja. En este sentido, el conjunto de números naturales es tan numeroso como el conjunto de números racionales y esto es así aunque podemos imaginarnos a los números naturales como uvas pasas esparcidas en el denso pastel que forma el conjunto de los números racionales, pareciendo así una aparente e insignificante minoría.

Esto pone de relieve un fenómeno de gran importancia: debemos tratar al Infinito con mucha cautela. Hay quienes entienden como un principio lógico de validez universal aquello de que la parte es más pequeña que el todo. Pues acabamos de ver un contraejemplo: los números naturales constituyen una parte insignificante del conjunto de los números racionales y, sin embargo, son tan numerosos como los números racionales. Muchos de los principios lógicos genéricos, como el comentado anteriormente, fueron abstraídos por el ser humano a partir de una gran variedad de experiencias, pero toda esas experiencias conciernen a lo finito. Emplear principios derivados de experiencias finitas para revestir el Infinito ha provocado históricamente grandes confusiones, pues el Infinito se libera rápidamente de esos ropajes tan inapropiados.

Que el ser humano todavía esté muy enojado con la posibilidad de que la parte pueda llegar a ser igual al todo se debe –muy probablemente– a que no es sólo la experiencia quien mantiene los principios lógicos, sino también ciertas fuerzas del subconsciente. Los fundamentos del orden moral mundial son puestos en entredicho si la parte puede competir con el todo. Tal vez sea por esto que parte del gozo de la fruta prohibida podría aventurarse fuera del mundo de estrictas leyes hacia la libertad del Infinito.

11. *Captamos el infinito de nuevo*

REGRESEMOS por un momento desde el Infinito al mundo tangible y observemos de nuevo que en las manos con las que intentamos entender este mundo tenemos diez dedos. ¿Podrán incluirse las fracciones en el sistema decimal?

Recordemos cómo funcionaba este sistema: a la izquierda de las unidades estaba la posición de las decenas, que son unidades diez veces más grandes y a su izquierda, estaba la posición de las centenas, que son de nuevo diez veces más grandes que las decenas y así sucesivamente. Esta idea sugiere que continuemos con esta disposición pero también hacia la derecha: en la primera posición escribiremos las décimas, en la segunda las décimas de décima –esto es, las centésimas–, en la tercera las milésimas y así sucesivamente. Pero tenemos que separar estas nuevas unidades de las anteriores de algún modo, porque aunque yo pretenda que en

$$1\ 2$$

el 1 signifique una unidad y el 2 dos décimas, todo el mundo interpretaría esto como un doce. Es por ello que empleamos el punto decimal:

$$1.2$$

y no se debe olvidar nunca que esto no es más que una simple abreviatura de

$$1 + \frac{2}{10}.$$

Del mismo modo,

$$32.456 = 32 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$$

y es así como obtenemos las fracciones decimales.

Las fracciones cuyos denominadores son 10, 100, 1000 o cualquier otra unidad del sistema decimal se pueden escribir en forma decimal. Por ejemplo,

$$\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100},$$

pudiendo además simplificar la fracción $\frac{20}{100}$ dividiendo numerador y denominador entre 10, obteniendo así que

$$\frac{23}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$$

y dado que no hay números enteros, concluimos finalmente que

$$\frac{23}{100} = 0.23$$

Pero, ¿se puede escribir toda fracción como número decimal?

El método más sencillo para convertir una fracción en número decimal consiste, simplemente, en efectuar la división indicada por la propia fracción.

$$\frac{6}{5} = 6 \div 5 = 1 \text{ con resto } 1.$$

El 1 del resto substituye por décimas, convirtiéndose así en 10 décimas y dividiendo nuevamente entre 5 obtenemos 2 décimas, por lo que debemos apuntar un 2 después del punto decimal:

$$\begin{array}{l} 6 \div 5 = 1.2 \\ 10 \end{array} \text{ de modo que } \frac{6}{5} = 1.2.$$

De manera similar,

$$\frac{7}{25} = \begin{array}{l} 7 \div 25 = 0.2 \\ 70 \\ 20 \end{array} \text{ con resto 20 décimas,}$$

que pueden pensarse como 200 centésimas que al ser divididas entre 25 serán 8 centésimas por lo que

$$7 \div 25 = 0.28 \text{ de modo que } \frac{7}{25} = 0.28.$$

Pero muy a menudo nos atascamos en los casos más simples:

$$\frac{4}{9} = \begin{array}{l} 4 \div 9 = 0.44\ldots \\ 40 \\ \;\;40 \\ \;\;\;4 \end{array}$$

esta división no termina nunca. Podemos continuar todo el tiempo que queramos, pero siempre quedará 4 como resto. Por tanto, $\frac{4}{9}$ no puede escribirse como un número decimal.

¡Pero qué conveniente es operar con decimales! Sólo por dar un ejemplo: multiplicar un número decimal por 10 no es más que un juego de niños. Por ejemplo, para calcular

$$45.365 \times 10,$$

basta recordar que 4 decenas por 10 son 4 centenas, 5 unidades por 10 son 5 decenas, 3 décimas por 10 son 3 unidades y así sucesivamente. Vemos inmediatamente que para efectuar la multiplicación basta, simplemente, con mover el punto decimal una posición hacia la derecha:

$$453.65$$

ya que así se han desplazado todos los valores valores posicionales un lugar hacia la izquierda y las decenas, por ejemplo, se han convertido en centenas. Si multiplicamos el resultado de nuevo por 10:

$$4536.5$$

obtenemos cien veces el número original (las 5 unidades, por ejemplo, se han convertido ahora en 5 centenas) y teniendo en cuenta esto, es inmediato que para multiplicar por 100, basta desplazar el punto decimal dos posiciones hacia la derecha. También se puede ver que dividir entre 10 consiste, simplemente, en desplazar la coma decimal una posición hacia la izquierda. Esto es muy fácil y sencillo. ¡Pero qué bueno sería poder escribir todas fracción como un número decimal!

Veamos de nuevo dónde nos quedamos atascados anteriormente:

$$\begin{array}{l} \frac{4}{9} = 4 \div 9 = 0.44\ldots \\ \quad\;\; 40 \\ \quad\;\;\; 40 \\ \quad\;\;\;\; 4 \end{array}$$

Aquí el resto siempre es 4, que se convierte en 40 al pasar a una unidad diez veces más pequeña y 40 entre 9 coge nuevamente a 4. Aunque esta división nunca termina, sí tenemos la respuesta a mano: el 4 se repite indefinidamente.

Una persona práctica dirá ante esto: aunque la división terminase en la décima posición, tampoco emplearía todas esas cifras. En realidad, tan sólo me interesan los decilitros (y un decilitro equivale a una décima parte de un litro), o los centímetros (y un centímetro es una centésima de metro), o quizás los gramos (y un gramo es una milésima de kilo). Carece de interés y sentido considerar la insignificante cantidad que queda a partir de las milésimas. Todo lo que necesito de ese número decimal infinito es:

$$\begin{array}{rl} & 0.4 \\ \text{o} & 0.44 \\ \text{o bien} & 0.444 \end{array}$$

y con eso me basta y me sobra para realizar cualquier cálculo con $\frac{4}{9}$ como si fuese un verdadero número decimal finito.

Puede que los físicos necesitan muchas más cifras, porque sus mediciones deben ser muy precisas; pero también existe el conocido como margen de error. Un físico que se dispone a repetir cierto experimento estima con antelación la magnitud de las variaciones debidas a las inexactitudes e imprecisiones de nuestros propios sentidos y de los instrumentos de medición, por lo que ya sabe que en sus cálculos no merece la pena incluir las cifras decimales más allá de ese punto. Se puede suponer que los instrumentos serán perfeccionados, reduciendo así su margen de error, pero siempre persistirá cierto error. Así pues, siempre será posible detenernos en alguna posición de la

$$0.4444444444\ldots$$

sucesión de cifras decimales, aunque sea posiblemente en un término muy distante o avanzado. Nada importa que no conozcamos de antemano hasta dónde hemos de llegar, pues una vez conocida la expansión decimal de $\frac{4}{9}$ más allá de cualquier límite, siempre podremos llegar sin ningún problema hasta la posición requerida. En este caso, por muy lejos que vayamos, aparecerá siempre el dichoso 4.

Entonces, ¿es posible convertir toda fracción en un número decimal al menos en este sentido? O planteando la pregunta de otro modo, aun admitiendo que la división nunca termine, ¿se suceden las cifras del resultado según alguna regla fija que nos permite hacernos una idea general de la expansión decimal al completo?

Es fácil ver que la respuesta es afirmativa. Toda expansión de este tipo se hace "intermitente"; esto es, más tarde o más temprano, aparecerá un grupo de números que se repetirá constantemente. Examinemos, por ejemplo, la fracción $\frac{21}{22}$.

Si dividimos entre 22 el resto siempre es menor que 22, por lo que si la división nunca termina, cada resto será uno de los siguientes números:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$$
$$14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21$$

Supongamos que tenemos una cómoda con 21 cajones numerados del 1 al 21. Si mientras realizamos la división sale, por ejemplo, un 7 como resto, ponemos una bola en el cajón numerado con el 7. Si continuamos dividiendo pacientemente, al completar 22 divisiones, habremos metido 22 bolas en 21 cajones, por lo que habrá al menos un cajón con dos bolas. Es decir, después de –como mucho– 21 pasos, se repite uno de los restos. Si tenemos suerte, dicha repetición aparecerá mucho antes de ese valor límite, pero una vez que se ha repetido uno de los restos, todas las cuentas se repetirán a partir de ahí. Veamos esto en nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{21}{22} =& 21 \div 22 = 0.954\\ &210\\ &\;\;\,120\\ &\;\;\;\;\;100\\ &\;\;\;\;\;\;\;\;12\end{aligned}$$

Para! 12 ya salió antes como resto. Es aquí donde empieza la recurrencia:

$$\begin{aligned}\frac{21}{22} =& 21 \div 22 = 0.954\\ &210\\ &\;\;\,120\\ &\;\;\;\;\;100\\ &\;\;\;\;\;\;\;\;120\\ &\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;100\\ &\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;120\\ &\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;100\end{aligned}$$

de modo que, con la excepción de un 9 "irregular" inicial, el par de cifras 54 se repite indefinidamente.

Recíprocamente, si nos dan un número decimal periódico, es posible averiguar de qué fracción proviene. Comencemos con 0.9545454... y supongamos que desconocemos la fracción de la que proviene este número decimal. Dado que no la conocemos, le llamaremos x:

$$x = 0.954545454\ldots$$

Si multiplicamos por 1 000, es decir, si movemos el punto decimal tres posiciones hacia la derecha, la parte entera del resultado estará formada por el trozo de la expansión decimal del número original que va desde el principio hasta el final del primer período,

$$1\,000x = 954.54545454\ldots$$

Y si multiplicamos por 10, la parte entera estará formada por la parte irregular que aparecía en la expansión del número original antes de que comenzase a repetirse el periodo:

$$10x = 9.54545454\ldots$$

Si restamos este último valor del primero, nos queda por un lodo que hay que restarle $10x$ a $1\,000x$, obteniendo así $990x$, y por otro lado, dado que la parte a la derecha del punto decimal consiste para ambos números en la repetición indefinida del par de cifras 54, la parte decimal de estos números es idéntica. Así pues, al efectuar la resta correspondiente, se cancelarán y puesto que la diferencia entre 954 y 9 es 945, concluimos finalmente que

$$990x = 945.$$

Pasando ahora el 990 dividiendo a la derecha, tenemos que

$$x = \frac{945}{990},$$

fracción que puede simplificarse dividiendo numerador y denominador entre 45:

$$\begin{array}{ccc} 945 \div 45 = 21 & \text{y} & 990 \div 45 = 22, \\ 45 & & 90 \end{array}$$

por lo que

$$x = \frac{21}{22}$$

lo cual coincide, evidentemente, con lo que ya sabíamos desde el principio.

Mientras tanto, sin embargo, hemos dado un paso descuidado: no prestamos la atención debida al Infinito. Nos imaginamos a $0.9545454\ldots$ no sólo hasta cierto grado de precisión, sino que escribimos su expansión decimal infinita, pero luego lo multiplicamos como si fuese un número finito más. ¿Es correcto suponer desde el principio que $0.9545454\ldots$ tiene algún tipo de significado finito?

Consideremos esta cuestión con un ejemplo más simple, pues es igual de problemático saber si

$$1.111111\ldots,$$

donde los unos se repiten indefinidamente, tiene algún significado finito. Es curioso que, en general, la mayoría de la gente no se asusta con un número decimal infinito como el anterior, pero sí se horroriza ante una suma infinita como esta:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots \textit{ ad infinitum}$$

aunque sólo sea una forma distinta de escribir exactamente lo mismo. En realidad, no me sorprende en absoluto que miren horrorizados a esta suma, pero sí me sorprende –y mucho– que acepten con total naturalidad lo primero. La sucesión

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ldots$$

puede considerarse perfectamente definida, pues cualquiera podría continuar escribiendo términos hasta donde desee. Sin embargo, asumir que podemos sumar todos los términos de esta sucesión infinita –por muy conocida que ésta sea– es, en verdad, una idea audaz. ¿Qué podemos entender por tal suma?

Un conocido matemático húngaro empleó el siguiente ejemplo para comprender el concepto de suma infinita cuando todavía era un joven estudiante:

> *Había un tipo de chocolate que los fabricantes pretendían popularizar; para ello, colocaban un cupón en el envoltorio de papel plateado y prometían un tableta de chocolate gratis a quien entregase* 10 *de esos cupones. Si tenemos una de esas tabletas de chocolate, ¿cuánto vale realmente?*

Es evidente que vale más que una tableta de chocolate, pues contiene un cupón con el que puedes conseguir $\frac{1}{10}$ de tableta de chocolate (ya que puedes obtener una tableta entera con 10 cupones). Pero con este $\frac{1}{10}$ de tableta tiene asociado a su vez la décima parte de un cupón, y si con un cupón obtenemos $\frac{1}{10}$ de tableta de chocolate, con $\frac{1}{10}$ de un cupón obtenemos un décimo de eso, esto es, $\frac{1}{100}$ de tableta de chocolate. A este $\frac{1}{100}$ de tableta de chocolate va asociado nuevamente $\frac{1}{100}$ del cupón con el que obtenemos una décima parte de tableta de chocolate, y una décima parte de $\frac{1}{100}$ es un $\frac{1}{1000}$ de tableta de chocolate y así indefinidamente. Este proceso nunca se detendrá, por lo que mi única tableta de chocolate junto con su cupón vale, en realidad, por

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\cdots \quad \text{tabletas de chocolate.}$$

Por otro lado, podemos demostrar que el valor de una tableta de chocolate junto con su cupón es igual al de $1\frac{1}{9}$ de tableta de chocolate.

El 1 anterior es, por supuesto, el valor de la tableta de chocolate real, por lo que basta probar que el cupón que le acompaña vale $\frac{1}{9}$ de tableta de chocolate. Para ello, probaremos que 9 cupones valen lo mismo que una tableta de chocolate y entonces será evidente que un cupón vale $\frac{1}{9}$ de tableta. Supongamos que tengo 9 cupones, voy a la tienda y digo: “por favor, ¿puede darme una tableta de chocolate? Quisiera comerla aquí y ahora. Lo pagaré después, al terminar". Como el chocolate, saco el cupón que lo acompaña y ya tengo 10 cupones con los que puedo pagar. Me he comido el chocolate y no me queda ningún cupón. Por tanto, el valor exacto de 9 cupones es igual al de una tableta de chocolate y así, el valor de un cupón es igual al de una novena parte de tableta de chocolate. Es decir, una tableta de chocolate junto con su correspondiente cupón vale $1\frac{1}{9}$ tabletas de chocolate y entonces el valor preciso de la suma infinita

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$$

es igual a $1\frac{1}{9}$, perfectamente palpable e incluso comestible.

Así es como puedo formular este resultado: si algo es aproximadamente igual a 1 en una primera aproximación grosera, a $1 + \frac{1}{10}$ en una segunda aproximación ligeramente mejor, a $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ en una tercera aproximación todavía mejor pero aún inexacta y así indefinidamente, entonces ese algo es exactamente igual a $1\frac{1}{9}$; insisto, no aproximadamente, sino con precisión total.[1]

Así es como puedo estar a la altura de las promesas de capítulos anteriores: de modo similar a lo que acabamos de mostrar, también podemos dotar de total precisión aquello que decíamos sobre aproximar el área del círculo mediante figuras poligonales y el teorema sobre la distribución de los números primos. Por supuesto, es necesario que confíes en en mi palabra de honor, pues no puedo entrar todos los detalles o entretenerme con extensas pruebas.

En Álgebra, por ejemplo, determinamos un número del siguiente modo: sea x el número tal que si lo divides entre 2, lo multiplicas por 3 y le sumas 5, obtienes 11; es decir, sea x denota al número que satisface la ecuación

$$\frac{x}{2} \times 3 + 5 = 11.$$

Pero acabamos de ver otro método para definir un número. La rama de las matemáticas que da un número empleando aproximaciones sucesivas, pero aun así con precisión total, es el Análisis.

Empecemos ahora con el número $1\frac{1}{9}$. La unidad puede dividirse en 9 novenos, de modo que

[1] Aclararé en el próximo capítulo qué entendemos por un "valor aproximado".

$$
1\frac{1}{9}=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}=\begin{array}{l}10\div 9 = 1.1111111\ldots,\\ 10\\ \;\;10\\ \;\;\;\;10\\ \;\;\;\;\;\;10\\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;1\end{array}
$$

donde el significado de la igualdad entre $1\frac{1}{9}$ y esa expansión infinitamente larga acaba de obtener el significado exacto.

En Matemáticas, tal igualdad es expresada diciendo que la sucesión de "sumas parciales"

$$1,\ 1.1=1+\frac{1}{10},\ 1.11=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100},\ldots$$

"tiende hacia el límite" $1\frac{1}{9}$ o diciendo también que la serie

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$$

es convergente y su suma es $1\frac{1}{9}$.

Hemos introducido aquí un nuevo concepto de suma. Debe examinarse si cumple con las antiguas reglas de cálculo. No me detendré a examinar este asunto en detalle; me limitaré a responder a la cuestión: ni tan siquiera debemos planteárnoslo. El Infinito se escapa también aquí a nuestras viejas reglas. Es más, se ha desarrollado toda un teoría para estudiar cuáles son las sucesiones cuyos términos se pueden colocar o agrupar de cualquier forma sin que esto les afecte en absoluto. La suma infinita de la que hemos hablado antes es de ese tipo:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$$

Pero intentemos sumar, por ejemplo,

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Si cambiamos el orden en el que efectuamos las operaciones y agrupamos los términos en pares

$$\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\cdots$$

obtendremos una suma formada únicamente de ceros y, por muchos ceros que sumemos, el resultado final siempre será cero. Así pues, el resultado de la suma infinita sería cero. No obstante, si agrupamos los términos de esta manera

$$1\underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0}-\cdots$$

obtenemos entonces la serie

$$1+0+0+0+\cdots$$

cuya suma es, evidentemente, igual 1. Por tanto, en general, no debemos esperar que sea lícito realizar las sumas en cualquier orden.

Sin embargo, otras propiedades sí sobreviven. Por ejemplo, para multiplicar una serie infinita por un número, basta multiplicar término a término.

Sigamos jugando con el resultado anterior. Si a

$$1.111111\ldots = 1\frac{1}{9}$$

le restamos 1, obtenemos

$$0.111111\ldots = \frac{1}{9}$$

y multiplicando por 9, obtenemos que

$$0.999999\ldots = \frac{9}{9} = 1.$$

Dividiendo entre 10 (es decir, desplazando el punto decimal una posición hacia la izquierda e imaginando tal punto decimal a la derecha del 1 seguida de ceros) obtenemos que

$$0.099999\ldots = 0.1$$

y dividiendo de nuevo entre 10,

$$0.0099999\ldots = 0.01$$

y así sucesivamente. Concluimos pues que los números decimales finitos 1, $0.1, 0.01, \ldots$ también se pueden escribir de forma infinita –basta escribir después de los correspondientes ceros una infinidad de nueves– deducimos de esto que todo número decimal se puede escribir de dos formas distintas. Sea, por ejemplo, 0.2 el número decimal en cuestión. Podemos escribirlo como

$$0.2000000\ldots$$

pues sumar 0 centésimas, 0 milésimas, 0 diezmilésimas, etcétera no altera nada en absoluto, pero también como

$$0.199999\ldots$$

ya que la décima –esto es, 0.1– que restamos a 0.2 es exactamente lo mismo que $0.099999\ldots$, valor que sumamos luego para compensar dicha resta (se puede demostrar que esta es la única ambigüedad posible a la hora de escribir la expansión en cifras decimales de una fracción).

Cada sumando de la serie

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

es una décima parte del anterior; esto es, se obtiene del anterior multiplicándolo por $\frac{1}{10}$. Deberías recordar ahora las progresiones aritméticas: son las sucesiones de números en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Las sucesiones en las que el cociente entre dos términos consecutivos permanece constante se llaman progresiones geométricas.

No debemos ser engreídos y creer que podremos sumar cualquier serie infinita. Consideremos ahora, por ejemplo, la siguiente progresión geométrica

$$1+10+100+100+\cdots$$

en la que el cociente entre dos términos consecutivos siempre vale 10. Es evidente que las sumas parciales se hacen tan grandes como deseemos (por ejemplo, desde la cuarta suma parcial en adelante, cada una de ellas será mayor que 1 000), luego esta serie tiende claramente a infinito. Es más, la serie geométrica en la que cada término va seguido de ese mismo término multiplicado por 1, también tiende a infinito, pues en la serie

$$1+1+1+1+1+1+\cdots$$

cada suma parcial es mayor que 1 000 de la milésima en adelante, mayor que 1 000 000 de la millonésima en adelante y así sucesivamente.

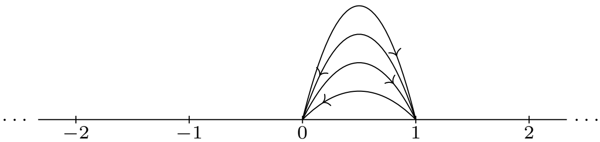
Si a cada término le sigue ese mismo término por multiplicado por -1, dado que $1\times(-1)=-1$, $(-1)\times(-1)=+1$, $(+1)\times(-1)=-1$ y así sucesivamente, la serie correspondiente viene dada por

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

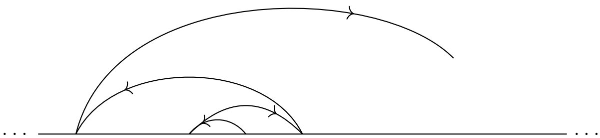
y ya sabemos cuán espantosas es esta serie. Sus sumas parciales son:

$$\begin{aligned}
&1,\\
&1-1=0,\\
&1-1+1=0+1,\\
&1-1+1-1=0+0=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vemos entonces que el valor de las sumas parciales va alternando entre 0 y 1.



Saltan constantemente entre 0 y 1 (o empleando una palabra más precisa, “oscilan”), por lo que no se acercan a ningún número. Si el cociente entre dos términos consecutivos es un número negativo cuyo valor absoluto es mayor que 1, los saltos serán cada vez mayores. En tal caso, el esquema correspondiente sería algo como esto:



De entre todas las series que hemos mencionado, sólo podemos sumar una:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \cdots$$

Ciertamente, este hecho está directamente relacionado con que los sumandos son cada vez más pequeños y de hacen además, siempre y cuando avancemos lo suficiente, tan pequeños como deseemos. Con la precisión del ejemplo de la tableta de chocolate, los sumandos tienden a cero. (Se puede probar que si algo es aproximadamente igual a $\frac{1}{10}$ en una primera aproximación grosera, a $\frac{1}{100}$ en una segunda aproximación más precisa, a $\frac{1}{1000}$ en una tercera aproximación todavía más precisa y así sucesivamente, entonces tal cosa sólo puede ser exactamente igual a cero. No siempre formularé esto de manera tan extensa, sino que sólo me referiré a la precisión del “ejemplo de la tableta de chocolate”.) Por tanto, parece coherente decir que si tenemos que sumar una cantidad infinita de términos que se hacen cada vez más pequeños e insignificantes, los últimos sumandos influirán cada vez menos en el resultado final, por lo que las sumas parciales serán cada vez más representativas del valor del monto total.

Pero esto aún está muy lejos de ser suficiente para poder sumar los infinitos términos de una sucesión.

Por ejemplo, la sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\dots$$

también converge (o tiende) a 0, aunque lo hace más lentamente que la anterior. En la primera sucesión, cada término a partir del cuarto es menor que $\frac{1}{1\,000}$, pero en esta sucesión tal cota sólo es cierta desde milésimo término en adelante. Las sumas parciales de la sucesión tienden a infinito.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\cdots$$

Para convencernos de esto último, procedemos del siguiente modo: ya sabemos que el valor de una fracción disminuye cuando se aumenta el denominador (si cortamos un bizcocho en más rebanadas, las rebanadas serán más pequeñas). En consecuencia, las sumas parciales se harán más pequeñas si sustituimos $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ por $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$ por $\frac{1}{16}$ y así sucesivamente. En general, siempre que lleguemos a un término en cuyo denominador aparezca una potencia de 2 ($4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$) sustituiremos los términos anteriores por ese mismo término. Procediendo de tal modo, las sumas parciales de esa nueva sucesión será menores que las sumas parciales originales:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\cdots$$

He aquí el valor de la suma de cada grupo:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4} \qquad \text{simplificando} \qquad =\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8} \qquad =\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Constatamos así que cada grupo suma $\frac{1}{2}$ y dado que $2\,000 \times \frac{1}{2}$ es igual a $1\,000$, $2\,000\,000 \times \frac{1}{2}$ es igual a 1.000.000, etcétera, las sumas parciales de esta serie serán mayores que cualquier número dado si son suficientemente largas. ¡Imagínate entonces lo qué ocurre con la serie original!

Por tanto, para que una serie infinita sea sumable, no basta simplemente con que los términos tiendan a 0; deben acercarse a 0 con cierto ritmo y velocidad.

12. *La línea está llena*

Las expansiones decimales de las fracciones resultan sorprendentemente regulares: o bien son un número decimal finito, o bien un número decimal periódico. Mientras tanto, nos acostumbramos a la idea de tratar a una expansión infinita como un número perfectamente definido. Por ejemplo, comenzando con $1.111111\ldots$ acabamos concluyendo que esto era exactamente igual a $1\frac{1}{9}$. Es casi imposible evitar la siguiente cuestión: podemos imaginarnos una expansión decimal infinita no periódica, ¿coincidirá con algún número?

De hecho, podemos construir una expansión decimal cuyas cifras sean tan regulares como para que cualquiera pueda seguir escribiéndolas hasta donde desee, pero sin que aparezca ningún grupo de cifras recurrente. Un ejemplo de esto es

$$0,101001000100001000001\ldots$$

La regla es muy simple: después de cada 1 aparece cada vez un 0 más. Por tanto, no se trata de una expansión decimal periódica o intermitente, ya que, en ese caso, tarde o temprano, los unos que aparecen entre los ceros deberían aparecer a intervalos regulares. Así pues, esto no es la expansión de ninguna fracción: sus sumas parciales no convergen a ningún número racional.

Mostraré, sin embargo, que esas sumas parciales convergen a una especie de brecha o hueco en el conjunto de los números racionales. Esto pondrá de relieve que, a pesar de la densidad infinita de los números racionales, existen ciertas lagunas entre ellos.

Si nos detenemos en las décimas, estaremos despreciando muchas cifras, por lo que las siguientes expansiones truncadas serán mayores que

$$0.1$$

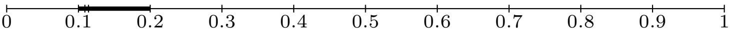
Sin embargo, cualquiera de esas expansiones decimales será menor que

$$0.2,$$

pues tal y como ya comentamos en el capítulo anterior, sólo cuando el 1 de las décimas va seguido de infinitos nueves

$$0,199999999\ldots$$

es igual a 0.2. En consecuencia, toda expansión decimal truncada posterior tomarán valores entre 0.1 y 0.2; es decir, su imagen cae en el segmento de la línea numérica que aparece dibujado con trazo más grueso:



Como primera aproximación puede considerarse cualquier punto de este intervalo.

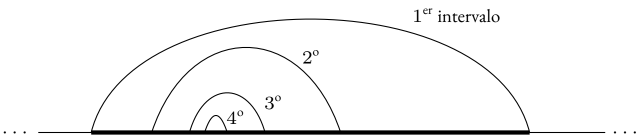
Del mismo modo, si nos detenemos en las milésimas, las expansiones decimales truncadas futuras quedarán atrapadas entre

$$0.101 \quad \text{y} \quad 0.102.$$

Esto sólo se puede mostrar en la figura anterior de forma aproximada, pues dichos puntos están demasiado cerca (se diferencian en una milésima). Los puntos de este nuevo intervalo nos proporcionan una aproximación mucho mejor que la anterior; conviene observar que este nuevo intervalo está completamente contenido en el primer intervalo. Continuando con este argumento, las expansiones decimales truncadas se van encajonando en intervalos cada vez más estrechos:

$$\begin{array}{lll} \text{entre} & 0.101001 & \text{y} \;\; 0.101002 \\ \text{entre} & 0.1010010001 & \text{y} \;\; 0.1010010002 \\ \text{entre} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

Si estos intervalos no se redujesen tan rápidamente, el esquema correspondiente sería algo como esto:



Las longitudes de estos intervalos son, respectivamente,

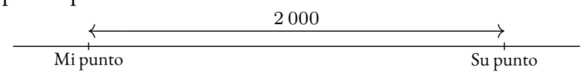
$$\begin{array}{l} 0.1 \\ 0.001 \\ 0.000001 \\ 0.0000000001 \end{array}$$

Es decir: una décima, una milésima, una millonésima y así sucesivamente. Estas longitudes convergen, por supuesto, a cero (y lo hacen con una velocidad tan terrorífica que es imposible dibujarlas o incluso nombrarlas con palabras).

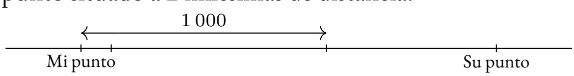
Así pues, las expansiones decimales truncadas se van encajando conforme aumenta su longitud en intervalos que se estrechan indefinidamente.

Este "encajamiento" es como el de los cubos de juguete que apilan los niños pequeños. O como el divertido paquete debajo de cuya envoltura exterior aparece una nueva envoltura que rompemos con más entusiasmo que la primera para encontrarnos con más papel de regalo. El paquete inicial se hace así cada vez más pequeño, pero siempre llegamos al final y acabamos encontrándonos con algo en el interior de todas las capas de envoltorio, aunque quizás sólo sea una minúscula bolita de papel. No obstante, no puedes divertirte indefinidamente con un paquete como este; más tarde o más temprano, el juego siempre termina. Para nosotros, el juego continua indefinidamente.

El segundo intervalo está completamente contenido en el primero, el tercero en el primero y en el segundo, el cuarto en los tres anteriores y así sucesivamente. Nuestra intuición nos dice que aun reduciendo estos intervalos encajados indefinidamente, el minúsculo punto en el que acabarán por convertirse debe ser parte común a todos ellos. Y puedo probar que no puede haber más de un punto en la parte común a todos ellos. Supongamos que he encontrado un punto común y que alguien afirma haber encontrado un punto diferente del mío pero que también cae en todos los intervalos encajados. Por supuesto, su punto no debería estar muy lejos del mío; en la siguiente figura dibujará ambos puntos a una distancia bastante grande en aras de la claridad, pero el argumento aplica igualmente para cualquier distancia por muy pequeña que ésta sea.



Nada importa cuan cerca estén dichos puntos, si son diferentes, hay cierta distancia entre ambos; supongamos que 2 milésimas. Tomemos la mitad de esta distancia, es decir, 1 milésima. La longitud de los intervalos encajados tiende a cero; por tanto, más tarde o más temprano, todo intervalo tendrá una longitud menores que 1 milésima y mi punto caerá en uno de esos intervalos y aun coincidiendo con el extremo izquierdo de un intervalo de longitud inferior a 1 milésima, el extremo derecho de dicho intervalo jamás podrá extenderse hasta un punto situado a 2 milésimas de distancia:



Por tanto, el punto que nos habían dado como contraejemplo queda fuera de este intervalo y, en general, de cualquier intervalo encajado en éste. Ya no hay ninguna dudad: es imposible que ese punto esté en todos los intervalos.

Todos nuestros intervalos tienen, por tanto, un único punto en común y así, dado que sea cual sea el intervalo que escojamos, las expansiones decimales truncadas de $0,1010010001\ldots$ estarán todas en dicho intervalo si son lo suficientemente largas, los puntos correspondientes a dichas expansiones decimales finitas se acercan cada vez más al punto en cuestión; es decir, convergen a tal punto.

Descubrimos así un punto de nuestra línea de números al que, hasta ahora, no le correspondía ningún número. No importa cuán densamente cubran la línea las fracciones, ninguna de ellas coincide con ese punto. Las expansiones decimales de las fracciones son finitas o periódicas y en nuestro $0.101001000100001\ldots$ no hay ningún tipo de repetición periódica o intermitencia. Y, sin embargo, se trata de un punto perfectamente definido que se encuentra a cierta distancia de 0; pero si intentamos medir esa distancia, fracasaremos si intentamos hacerlo empleando unidades enteras o fracciones de ellas. Así pues, hasta el momento, esta distancia ni siquiera tiene una medida. Para compensar esta deficiencia, diremos que la medida de tal distancia es el número "irracional"

$$0.101001000100001000001\ldots$$

e introducimos un nuevo número, anónimo hasta el momento, pero perfectamente definido y de quien los valores racionales

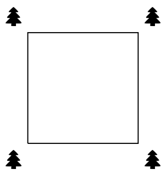
$$0.1,\ 0.101,\ 0.101001,\ldots$$

son cada vez mejores aproximaciones. Esto no es más útil, tanto para las personas ordinarias como para los físicos, que el desarrollo decimal $\frac{4}{9} = 0.444444\ldots$. Podemos alcanzar cualquier grado de precisión mediante aproximaciones racionales, pues conocemos el patrón que siguen las cifras de su expansión decimal.

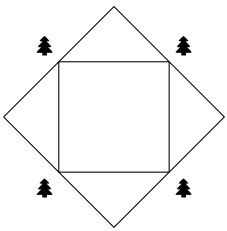
También se puede demostrar que cualquier desarrollo decimal infinito y no periódico dado mediante cierta regla, sea cual sea esa regla, se corresponde con cierto punto de la línea numérica situado a una distancia del punto 0 perfectamente definida. Consideraremos todos los desarrollos decimales infinitos de este tipo como medidas de las distancias correspondientes y nos referiremos a ello como números irracionales.

De la misma manera podemos mostrar que un punto definido corresponde a cualquier decimal infinito que no es periódico, pero está dado por alguna regla, es decir, tal punto está en la recta numérica a una distancia de 0 bien definida. Consideraremos todos los desarrollos decimales infinitos de este tipo como medidas de las distancias correspondientes y los llamaremos números irracionales.

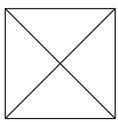
Estos argumentos podrían parecerte muy abstractos, pero tuve una alumna, Éva, que se percató por sí misma de la existencia de distancias cuya longitud no puede expresarse empleando unidades enteras o fracciones de éstas. Tuvo que pensar en este divertido rompecabezas: en cada esquina de un estanque de peces cuadrado hay un árbol:



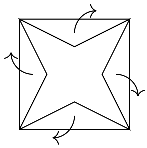
Quieren aumentar el tamaño del estanque al doble con la condición de que el nuevo estanque también sea un cuadrado y evitando talar los árboles. Éva descubrió que la solución consiste en hacer lo siguiente:



El cuadrado grande es el doble de grande que el cuadrado pequeño, porque si dibujamos las diagonales del cuadrado pequeño



y doblamos los cuatro triángulos así obtenidos hacia afuera,



obtenemos entonces el cuadrado más grande y es evidente que el área añadida al cuadrado pequeño es exactamente la misma que su área original.

Pero Éva no estaba satisfecha con eso. Ahora también tenía curiosidad por saber cuál sería la longitud de los lados del nuevo estanque si la longitud de los lados del estanque antiguo fuese, por ejemplo, de 1 kilómetro. En tal caso, el área del estanque antiguo sería igual a $1 \times 1 = 1$ kilómetro cuadrado; el área del nuevo estanque es el doble, es decir, 2 kilómetros cuadrados, por lo que la cuestión se reduce a buscar un número que elevado al cuadrado sea igual 2.

Es así como llegamos a la inversión de la exponenciación, esto es, la extracción de raíces. El problema consiste en calcular $\sqrt{2}$, que es el número –si es que existe– cuyo cuadrado es igual 2.

Así que Éva empezó a probar: si el lado del cuadrado pequeño medía 1 kilómetro, el lado del cuadrado grande mediría más que eso. Pero no podría medir más de 2 kilómetros, porque entonces tendría un área mayor que $2 \times 2 = 4$ kilómetros cuadrados. Por tanto, tal lado debe medir entre 1 y 2 kilómetros.

A continuación, Éva intento añadir algunas décimas a 1. Mientras lo intentaba, se percató de que

$$1.4^2 = 1.4 \times 1.4 = 1.96 \quad \text{y} \quad 1.5^2 = 1.5 \times 1.5 = 2.25$$

1.96 es menor, pero 2.25 es mayor que el área del estanque nuevo, que es igual a 2 kilómetros cuadrados. Por tanto, el lado del estanque grande debe medir entre

$$1.4 \;\text{ y }\; 1.5$$

Luego dividió ese intervalo en centésimas y, como antes, se percató ahora de que la longitud del lado debe estar entre

$$1.41 \;\text{ y }\; 1.42$$

kilómetros. Continuando con este proceso durante algún tiempo, Éva se fue convenciendo de que nunca encontraría un número cuyo cuadrado sea exactamente igual 2. "¡Pero tiene que existir tal número! Aquí está bien claro, es la longitud del lado de este cuadrado. ¡Lo he dibujado yo misma!" decía Éva.

La intuición de Éva era correcta: no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2. Éva ya había demostrado la ausencia de tal número entre los enteros, pues probó que el número buscado está entre 1 y 2, y no hay más números enteros entre 1 y 2. Sin embargo, todavía faltan por examinar las fracciones que toman valores entre 1 y 2.

Simplifiquemos primero estas fracciones hasta que ya no puedan simplificarse más. En tal caso, su denominador nunca será un 1, ya que, por ejemplo, $\frac{3}{1}$ es el número entero 3 y no hay ningún número entero entre 1 y 2. Y también es cierto que su cuadrado no será simplificable porque, por ejemplo,

$$\left(\frac{15}{14}\right)^2 = \frac{15 \times 15}{14 \times 14}$$

y $\frac{15}{14}$ no se puede simplificar ya que

$$15 = 3 \times 5 \text{ y } 14 = 2 \times 7,$$

y entonces 15 y 14 no tienen factores primos comunes y tampoco adquieren factores primos comunes al multiplicarse por sí mismos:

$$\left(\frac{3 \times 5}{3 \times 5}\right)^2 = \frac{3 \times 5 \times 3 \times 5}{2 \times 7 \times 2 \times 7},$$

luego no es posible ningún tipo de simplificación. Pero una fracción no simplificable cuyo denominador sea distinto de 1 jamás será igual a 2.

Sin embargo, las pruebas de Éva indican el comienzo de los encajonamientos sucesivos y, simultáneamente, nos proporcionan las primeras cifras de la expansión decimal de $\sqrt{2}$. El desarrollo decimal de cualquier número entre 1 y 2 empieza así:

$$1.\ldots$$

Cualquier número con esta apariencia puede ser considerado como una primera aproximación de $\sqrt{2}$.

Si a mayores sabemos que ese número se encuentra entre 1.4 y 1.5, su expansión decimal continuará de la siguiente manera:

$$1.4\ldots$$

y cualquier número con esta apariencia ya nos proporciona una mejor aproximación. Dado que el número que buscamos se encuentra entre 1.41 y 1.42, su expansión decimal continuará así:

$$1.41\ldots$$

Ahora, dividiríamos el intervalo de extremos 1.41 y 1.42 en milésimas y miraríamos cuál es el número de entre

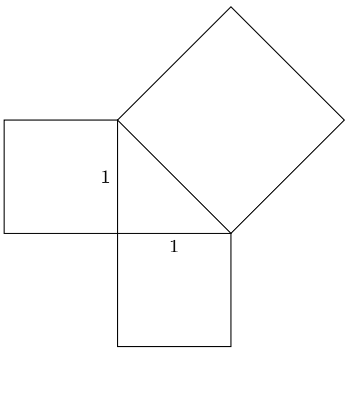
$$1.410,\ 1.411,\ 1.412,\ 1.413,\ 1.414,\ 1.415,\ 1.416,$$
$$1.417,\ 1.418,\ 1.419$$

cuyo cuadrado es menor que 2 pero tal que el cuadrado del número siguiente ya es mayor que 2. Estos dos números nos darán un nuevo intervalo, de longitud una milésima, en el que colocar a $\sqrt{2}$, y al mismo tiempo, habremos encontrado la cifra que ocupa la posición de las milésimas en el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$.

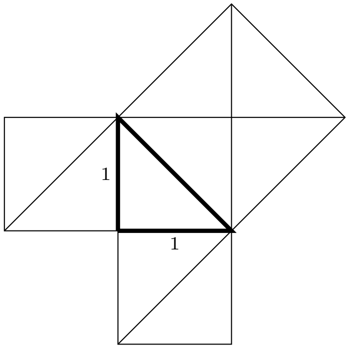
También existe un método mecánico para determinar las cifras del desarrollo decimal de $\sqrt{2}$, pero la idea clave se hace evidente mediante el encajonamiento en intervalos cada vez más pequeñas que acabamos de explicar.

Este método se puede continuar indefinidamente y nos proporciona, en cada nueva iteración, una mejor aproximación. Sabemos que no terminaremos nunca y que no aparecerá ningún tipo de periodicidad o recurrencia, pues $\sqrt{2}$ no es un número racional. Sin embargo, al mismo tiempo, es completamente preciso y palpable cual es este número dado mediante aproximaciones racionales cada vez más precisas: es la longitud del lado del estanque duplicado.

El famoso Teorema de Pitágoras también puede ayudarnos a comprender la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan ambos una unidad y coloca, sobre cada uno de sus tres lados, un cuadrado:



Si trazamos una de las diagonales de cada uno de los dos cuadrados pequeños y las dos diagonales del cuadrado grande, obtenemos que todos los triángulos (hay ocho en total) son congruentes:



encontrándose cuatro de éstos en los dos cuadrados pequeños y los otros cuatro en el cuadrado más grande. Por tanto, el área de los dos cuadrados pequeños juntos es igual al área del cuadrado grande, y dado que calculamos el área de un cuadrado elevando al cuadrado uno de sus lados, deducimos que: la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa (esto no sólo es cierto para este triángulo en particular, sino para todo triángulo rectángulo, pero la demostración en el caso general es un poco más complicada). La suma de los cuadrados de los dos catetos es:

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

y este 2 es el mismo que el cuadrado de la hipotenusa; es decir, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

Se puede demostrar que entre números irracionales es posible realizar distintas operaciones si las aplicamos sobre los valores aproximados y como estos valores aproximados son números racionales, mantienen intactas las antiguas reglas de cálculo. Por tanto, ahora estamos ante una situación en la que el infinito sí respeta las antiguas reglas.

Ahora podemos volver a la cuestión –dejada antes en suspenso– sobre si siempre podemos expresar la longitud de la arista de un cubo o la longitud del lado de un rectángulo en centímetros. La respuesta es que no siempre es posible, en el sentido de que hay distancias que no se pueden medir con precisión empleando fracciones de centímetro. Porque si, por ejemplo, $\frac{1}{20}$ de centímetro cubre cierta distancia 31 veces, entonces tal distancia es igual a un $\frac{31}{20}$ de centímetro. Sin embargo, acabamos de ver que si cada cateto de un triángulo rectángulo mide 1 centímetro, entonces la longitud de la hipotenusa no puede expresarse en términos de esta unidad como ningún número racional (cabe destacar que no podemos hacerlo en términos de esta unidad, porque tal y como corresponde a una longitud perfectamente definida, podríamos elegir a $\sqrt{2}$ como unidad y entonces, en términos de esta unidad, es evidente que sí podría expresarse).

A pesar de estas dificultades, con ayuda de los valores racionales aproximados, se puede probar con "precisión de chocolate" que los resultados sobre áreas y volúmenes siguen siendo válidos.

También tengo una deuda en relación con las ecuaciones cuadráticas. Tuvimos algunas dificultades con la siguiente ecuación:

$$(x+3)^2 = 2.$$

Ahora ya podemos resolverla. Dado que ya presentamos los números negativos y teniendo en cuenta que el cuadrado de un número positivo o negativo es positivo, tanto $+\sqrt{2}$ como $-\sqrt{2}$ son números cuyo cuadrado es igual a 2. Por tanto,

$$x+3 = +\sqrt{2} \ \text{ o } \ x+3 = -\sqrt{2}$$

y pasando el 3 restando a la derecha, obtenemos dos resultados:

$$x = +\sqrt{2} - 3 \ \text{ o } \ x = -\sqrt{2} - 3.$$

Pero los números negativos introducen una nueva complicación: no sabemos que hacer con la ecuación

$$x^2 = -9,$$

ya que $+3$ y -3 al cuadrado son $+9$ y no conocemos ningún número cuyo cuadrado sea igual -9. Volveré sobre esta cuestión más adelante.

Introdujimos los números irracionales porque encontramos brechas o espacios vacíos en la línea numérica; esto es, puntos a los que hasta aquel momento no les correspondía ningún número. Los números racionales junto con los números irracionales (que son los conocidos como números reales; más adelante hablaremos de otros números cuya existencia se aleja de la realidad) llenan por completo la línea numérica. En efecto, pues si escogemos un punto arbitrario de la línea numérica, éste estará –tal y cómo mostró Éva para

$\sqrt{2}$– entre cierto par de números enteros, décimas, centésimas, milésimas, etcétera. Estos pares de números irán indicando, una tras otra, las cifras del desarrollo decimal del número asociado al punto escogido. Si el desarrollo decimal es finito (es decir, si el punto coincide con alguna décima, centésima, milésima,…) o empieza a repetirse periódicamente, entonces el número correspondiente al punto escogido es racional, si no, es irracional.

Para encajonar el punto correspondiente al número $1\frac{1}{9}$, que aparece en el ejemplo del chocolate, empezaríamos observando que está entre 1 y 2, luego entre 1.1 y 1.2, luego entre 1.11 y 1.12, luego entre 1.111 y 1.112 y así sucesivamente. Por tanto, los números

$$1,\ 1.1,\ 1.11,\ 1.111,\ldots$$

caerán, uno tras otro, en estos intervalos cada vez más pequeños (cayendo justo en el extremo izquierdo de cada intervalo). Es esto lo que está detrás del hecho de que estos números sean cada vez mejores aproximaciones de $1\frac{1}{9}$, pues se acercan tanto como deseemos a ese número. Y, por supuesto, proporcionan una expansión decimal periódica, pues $1\frac{1}{9}$ es un número racional.

¿Hay muchos números irracionales? Aunque hasta ahora solo nos hemos encontrado con ellos accidentalmente, parece que debería haber muchos, pues que un desarrollo decimal sea periódico o finito parece una casualidad o incluso algo realmente extraordinario. Pero ya fuimos engañados por un sentimiento similar cuando nos pareció evidente que habría más números racionales que naturales y resultó, sin embargo, que los números racionales pueden enumerarse en una sucesión, pudiendo emparejarse así con los números naturales: el primero con el 1, el segundo con el 2 y así sucesivamente. ¿Qué dice este método de emparejamiento sobre los números irracionales?

Por el momento, examinemos el conjunto formado por números racionales e irracionales, esto es, el conjunto de los números reales, e imaginémonos a todos ellos como sus desarrollos decimales. De entre éstos, limitémonos a los números que caen entre 0 y 1, es decir, a los números cuya expansión decimal comienza con un 0 a la izquierda de la coma decimal, así no habrá que preocuparse en absoluto por partes enteras. Sostengo que este pequeño segmento de números reales es más numeroso que el conjunto de los números naturales, es decir, que no podremos enumerarlos en una sucesión sin obviar a ninguno.

Supongamos que alguien dice que no estoy en lo cierto, que él conoce un contraejemplo. Es decir, que afirma haber enumerado los números reales (que tienen a 0 por parte entera) en una sucesión sin prescindir de ninguno de ellos. Esta persona escribe la sucesión indicándonos unos cuantos términos iniciales que nos permiten observar cierto patrón de modo que cualquiera podría continuar escribiendo términos de la sucesión hasta donde desee; es más, cada número irracional individual sólo puede especificarse de este modo, pues su desarrollo decimal es infinito. Supongamos que la sucesión comienza del siguiente modo:

el primer número es:	0.1
el segundo número es:	0.202020 . . .
el tercer número es:	0.3113111311113 . . .
. . . .	. . . .

y se supone que continúa de acuerdo con cierto patrón de modo que, más tarde o más temprano, todo número real entre 0 y 1 aparece en la sucesión.

Sea cual sea esa regla, construiré un número real con parte entera 0 que, con total seguridad, no aparece en la sucesión.

En primer lugar, completo los desarrollos decimales finitos añadiendo inofensivos ceros. De este modo:

el primer número:	0.1000000000000000 . . .
el segundo número:	0.2020202020202020 . . .
el tercer número:	0.3113111311113111 . . .
. . . .	. . . .

Ahora ya puedo empezar. El desarrollo decimal de mi número comienza así:

$$0.\ldots$$

¿Qué cifra debo escribir en la posición de las décimas? Miro la sucesión y me fijo en la cifra de las décimas del primer término. Escribiré *algo distinto*; eso sí, evitando siempre el 0 y el 9. Por decir algo, dado que la cifra de las décimas del primer término es un 1, yo escribo un 2 en la posición de las décimas de mi número (aunque, en realidad, podría haber escogido entre 3, 4, 5, 6 , 7 u 8). Si en la posición de las décimas del primer término apareciese cualquier cifra distinta de 1, entonces escogería a 1 como décima para mi número. Por tanto, hasta ahora, el desarrollo decimal de mi número es algo del estilo

$$0.2\ldots$$

Completo la posición de las centésimas mirando para las centésimas del segundo término de la sucesión del contraejemplo y escribo de nuevo *algo distinto*. Me limitaré a trabajar con el 1 y con el 2. Dado que la cifra de las centésimas del segundo término de la sucesión es un 0, que es distinto de 1, escribo un 1 en las centésimas de mi número (si hubiese un 1, escribiría un 2). Así pues, el desarrollo decimal de nuestro número continúa así:

$$0.21\ldots$$

Podemos continuar así indefinidamente: escribo un 2 en la posición de las milésimas porque el tercer número de la sucesión tiene 1 milésima. Por tanto, el desarrollo decimal hasta las milésimas de mi número será:

$$0.212\ldots$$

y cualquier persona puede de continuar colocando unos o doses hasta la posición que desee: si los números del contraejemplo se suceden de acuerdo con cierto patrón conocido, nunca me quedaré estancada en la construcción de mi número. Y obtengo así, un desarrollo decimal infinito con parte entera nula y que, ciertamente, se ha quedado fuera de la sucesión que nos indicada pues mi número se diferencia del primer término de la sucesión en, cuando menos, la cifra de las décimas; del segundo término en, cuando menos, la cifra de las centésimas; del tercer término en, cuando menos, la cifra de las milésimas y así sucesivamente. Por tanto, mi número se diferencia de cada uno de los términos de la sucesión en, al menos, una cifra. Y no es posible que difiera solamente en la forma y no en el valor, pues esa ambigüedad sólo se da entre desarrollos decimales que tienen una cola infinita de ceros o nueves y en el desarrollo decimal de mi número sólo aparecen unos y doses.

Concluimos por tanto que cualquiera que intente emparejar a los números reales con los números naturales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ldots$$

dejará siempre algún número real en el tintero. El conjunto de los números reales es mucho más numeroso que el de los números naturales. Y si no nos restringimos a los números reales con parte entera nula, el conjunto aún será más abundante.

En lo anterior, hemos considerado a los números racionales e irracionales todos juntos. Pero sabemos que los números racionales son numerables (o contables), es decir, que se pueden contar y escribir en una sucesión. Si se pudiesen enumerar los números irracionales en una sucesión, entonces sería muy fácil juntar ambas sucesiones en una única sucesión: bastaría ir alternando números de cada una de las sucesiones (por ejemplo, podemos unir la sucesión de los números enteros positivos y la sucesión de los números enteros negativos

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, \ldots \end{array}$$

en una única sucesión escribiendo

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 5,\ -5, \ldots).$$

y una sucesión combinada de números racionales e irracionales contendría a todos los números reales, pero acabamos de probar que es imposible la existencia de una sucesión como esa. Por tanto, el conjunto de los números irracionales no puede enumerarse, por separado, en una sucesión y se deduce de esto que el conjunto de los números irracionales no puede contarse (no es contable o numerable), por lo que es un conjunto mucho más numeroso que el de los números racionales.

Así que no sólo se trataba de llenar unos huecos en el conjunto de los números racionales. Los números irracionales se extienden a lo largo de toda la línea numérica; y los números racionales, a pesar de su densidad y omnipresencia en la línea, no son más que uvas pasas esparcidas en ella. Esto me recuerda al éter, del que se suponía que llenaba completamente todo el espacio de la atmósfera de la Tierra, mientras que las aparentemente ubicuas moléculas de aire flotaban en él dispersas.

13. Las curvas de fiebre se suavizan

MIENTRAS saldaba las deudas y promesas de capítulos anteriores, me acordé del pobre y solitario 1 de la cúspide del Triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Hemos probado que de la segunda fila en adelante, la suma de los términos de cada fila es:

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3, \dots$$

Si queremos casar el 1 de la cúspide con todo esto, ése debería ser el valor de 2^0. Pero hasta este momento, no hemos dado ningún tipo de significado a 2^0; multiplicar algo por sí mismo 0 veces no tiene sentido y nunca antes nos habíamos encontrado con la necesidad de dar significado a este tipo de expresiones.

Estudiemos un poco más la exponenciación. Recuerda cuán fácil era multiplicar dos potencias de un mismo número; bastaba sumar los exponentes. Por ejemplo:

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{3 \times 3}\times\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3^6 \quad \text{y} \quad 6 = 2 + 4.$$

Si sólo aparecen potencias de un mismo número, también podemos efectuar otras operaciones de forma muy sencilla. Por ejemplo:

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3}$$

y simplificando entre 3×3, obtenemos que

$$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{1} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

por lo que

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^4 \quad \text{y} \quad 6 - 2 = 4.$$

Es decir, la división se efectúa restando ambos exponentes. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left(3^2\right)^4 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\
&= \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3} \\
&= 3^8 \quad \text{y} \quad 8 = 2 \times 4,
\end{aligned}$$

por lo que para elevar una potencia a otra potencia, basta con multiplicar ambos exponentes.

Por tanto, merece la pena hacer una tabla con las distintas potencias de una base concreta. Escojamos a 2 como base; es relativamente fácil calcular sus potencias:

$$\begin{array}{lcr}
2^1 & = & 2 \\
2^2 & = & 4 \\
2^3 & = & 8 \\
2^4 & = & 16 \\
2^5 & = & 32 \\
2^6 & = & 64 \\
2^7 & = & 128 \\
2^8 & = & 256 \\
2^0 & = & 512 \\
2^{10} & = & 1\,024 \\
2^{11} & = & 2\,048 \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Si tenemos que multiplicar dos números, con suerte podremos obtener el resultado final a partir de esta tabla sin demasiado esfuerzo. Si, por ejemplo, nos pidieran calcular

$$64 \times 32,$$

entonces estaríamos de suerte, pues están ambos números en la tabla. Los exponentes correspondientes son 6 y 5, y es muy fácil sumarlos, dando 11. Una vistazo rápido a la undécima fila nos da el resultado:

$$2048.$$

Y si nos piden elevar 32 al cuadrado, dado que el exponente correspondiente a 32 es 5, al multiplicado por 2 obtenemos 10, y mirando para la décima fila leemos el resultado:

$$32^2 = 1024.$$

Es un juego infantil; pero es una pena que no aparezcan todos los números en la tabla. Quizás valga la pena extender el significado de la exponenciación con el objetivo de que todo número (como por ejemplo, 3 mismamente) se pueda expresar como potencia de 2.

De este modo, obtenemos una nueva inversión de la exponenciación: ahora buscamos el exponente al que debemos elevar 2 para obtener 3. Esta operación (y su resultado, si es que existe) se llama logaritmo.

Los números más incómodos y molestos a la hora de realizar cálculos son las fracciones y tampoco aparecen en la tabla; la potencia más pequeña de 2, 2^1, ya es igual a 2. Por tanto, el aspecto principal de la nueva interpretación de la exponenciación será que, como antes, un número mayor que 2 se pueda escribir como una potencia de 2 con exponente mayor que 1; de este modo, evitaremos tener que andar buscando a nuestro número de un lado a otro por toda la tabla. Es decir, si también queremos obtener fracciones, entonces tenemos que interpretar la potencias de 2 con exponente menor que 1.

Si retrocedemos a pasos enteros, las potencias

$$2^0,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3}, \ldots$$

todavía esperan pacientemente alguna interpretación.

A la hora de extender esta operación, es especialmente importante asegurarnos de que las antiguas reglas de cálculo sigan vigentes, porque no debemos perder de vista nuestro objetivo: queremos que el cálculo con las nuevas potencias sean tan cómodo y práctico como anteriormente.

Entre otras cosas, debemos asegurarnos de que multiplicar una potencia de 2 por 2^0 debe equivaler a sumar 0 al exponente. Pero sumar 0 no altera nada en absoluto; por tanto, multiplicar por 2^0 debe interpretarse como multiplicar por un factor que provoca que el valor del producto final sea igual al otro factor. El factor que no cambia el valor de un número es, por supuesto, el 1; por lo que debemos definir 2^0 (y de manera similar la potencia 0-ésima de cualquier otra base) como:

$$2^0 = 1.$$

Con esta definición, el Triángulo de Pascal adquiere una estructura uniforme.

A la hora de definir 2^{-1}, debemos asegurarnos de que

$$2^1 \times 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^0 = 1.$$

Si pasamos el 2^1 al otro lado de la ecuación dividiendo, la ecuación

$$2^1 \times 2^{-1} = 1$$

se convierte en

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}.$$

Del mismo modo, de la condición

$$2^2 \times 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1,$$

deducimos que

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

y de la condición

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1,$$

se sigue que

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

y así sucesivamente. Por tanto, si queremos respetar las antiguas reglas de cálculo, debemos interpretar las potencias con un exponente negativo como el cociente de 1 entre la potencia con el exponente positivo correspondiente.

Entonces la tabla también se expande hacia atrás e incluye así a ciertas fracciones:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
2^{-3} & = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = & 1 \div 8 = 0.125 \\
 & & 10 \\
 & & \;\;20 \\
 & & \;\;\;\;40 \\
2^{-2} & = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = & 1 \div 4 = 0.25 \\
 & & 10 \\
 & & \;\;20 \\
2^{-1} & = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2} = & 1 \div 2 = 0.5 \\
 & & 10 \\
2^{0} & = & \qquad\qquad 1 \\
2^{1} & = & \qquad\qquad 2 \\
2^{2} & = & \qquad\qquad 4 \\
\vdots & &
\end{array}$$

Esto ya es una buena herramienta para hacer cuentas con las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... es decir, con los números decimales 0.5, 0.25, 0.125, ...

Pero todavía hay huecos muy grandes entre los números de la tabla. Por ejemplo, $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$. Si queremos escribir un número entre 2 y 4 (por ejemplo, 3 o 2.7) como potencia de 2, necesitaremos cierto exponente entre 1 y 2. El número $1\frac{1}{2}$, por ejemplo, se encuentra entre todos esos números y dado que $\frac{2}{2} = 1$, es igual a $\frac{3}{2}$; hecho que también debemos tener en cuenta a la hora de interpretar la potencia de 2 con exponente $\frac{3}{2}$, o en general, con cualquier exponente fraccionario.

La interpretación exacta quedará determinada si recordamos que también queremos respetar la regla de la potencia de una potencia. En efecto, pues si queremos que dicha regla siga siendo válida, entonces

$$\left(2^{\frac{3}{3}}\right)^2 = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3,$$

de modo que $2^{\frac{3}{2}}$ debe ser el número cuyo cuadrado es igual a 2^3, pero ese es el número que denotamos por $\sqrt{2^3}$ y entonces:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}.$$

Calculando $\sqrt{8}$ hasta la posición de las décimas, obtenemos que sería aproximadamente igual a 2.8. Por tanto, dado que

$$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5,$$
$$10$$

y puesto que es más fácil operar con exponentes en forma decimal, podemos insertar una nueva fila en nuestra tabla entre 2^1 y 2^2:

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
2^1 &= 2\\
2^{1.5} &= 2.8\dots\\
2^2 &= 4\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aunque 2.8 ya se acerca bastante, aún no hemos alcanzado nuestro sueño que consistía en escribir 3 como cierta potencia de 2. Se puede probar que no es posible escribir 3 como una de potencia de 2 cuyo exponente sea una fracción, pero sin embargo, sí que podemos obtener aproximaciones tan exactas como deseemos empleando potencias fraccionarias. Definimos una potencia con exponente irracional mediante dichas aproximaciones.

Esa es la idea básica para elaborar las tablas de logaritmos. Las viejas tablas de logaritmos se hicieron de este modo. La tabla que se estudia en la escuela tiene a 10 como base (por lo que sólo se indican los exponentes). Y aquí, se hace un gran sacrificio por seguir jugando con los dedos; pues entre las potencias de 10, (esto es, entre 10, 100, 100, . . .) los huecos todavía son más grandes que entre las potencias de 2 y es necesario un esfuerzo mucho mayor para rellenarlos.

En otras tablas de logaritmos aparecen los logaritmos en base "e" o logaritmos naturales. Este "e" es un número irracional cuya expansión decimal comienza así: $2.71\ldots$ ¿Cuál es la idea que justifica considerar a ese número como la base natural? Hay muchas maneras de responder a esta cuestión; creo que la siguientes es la más habilidosa.

Ya sabemos que 10 no es la base más adecuada para una tabla de logaritmos. De hecho, sería buena idea escoger como base a un número menor que 2, pues en ese caso, los huecos entre potencias sucesivas con exponente entero se menguarían su tamaño. Por supuesto, es evidente que no podemos pasarnos y escoger a 1 como base, pues cualquier potencia de 1 es igual 1, y tampoco debemos escoger una base menor que 1, ya que elevando una fracción propia a una potencia entera, reducimos su valor; basta observar que, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Probemos entonces con 1.1; será fácil hacer las cuentas porque ya conocemos las potencias de 11 del Triángulo de Pascal; bastará con fijarse en el punto decimal y tener en cuenta que cada vez que multiplicamos por una décima, en realidad, estamos dividiendo entre 10, por lo que el punto decimal se desplazará una posición hacia la izquierda. No olvidemos tampoco que la potencia 0-ésima de cualquier base es igual a 1.

$$\begin{aligned}
1.1^0 &= 1\\
1.1^1 &= 1.1\\
1.1^2 &= 1.21\\
1.1^3 &= 1.331\\
1.1^4 &= 1.4641\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Estas potencias crecen muy lentamente e incluso antes de abordar el laborioso llenado de los huecos vacíos, ya disponemos de una gran cantidad de números entre 1 y 2.

Naturalmente, un número menor y más próximo a 1, todavía será mejor. Probemos con la base 1.001 (ahora nos salen los elementos del Triángulo de Pascal separados por un par de ceros):

$$\begin{aligned}
1.001^0 &= 1\\
1.001^1 &= 1.001
\end{aligned}$$

$$1.001^2 = 1.002001$$
$$1.001^3 = 1.003003001$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ésta ya es una densidad tremenda; estas potencias crecen tan lentamente que uno ya casi levantan sospechas: ¿llegarán a 2 en algún momento? Pero se puede demostrar que las potencias de cualquier número mayor que 1, por poco mayor que éste sea, tienden a infinito, aunque quizás muy lentamente.

Esta tabla todavía presenta un pequeño defecto estético: es precisamente debido a su lento crecimiento que exponentes desproporcionadamente grandes se corresponden con números relativamente pequeños. Por ejemplo, tenemos que avanzar, aproximadamente, hasta la milésima potencia para llegar a 2. Si los exponentes fuesen mil veces más grandes, tendríamos una tabla más armoniosa y estética. Pero esto es fácil de conseguir: basta elevar la base a la milésima potencia, porque

$$\mathbf{(1.001^{1\,000})^{\frac{1}{1\,000}}} = 1.001^{1\,000\times\frac{1}{1\,000}} = 1.001^{\frac{1\,000}{1\,000}} \mathbf{= 1.001^1}$$
$$\mathbf{(1.001^{1\,000})^{\frac{2}{1\,000}}} = 1.001^{1\,000\times\frac{2}{1\,000}} = 1.001^{\frac{2\,000}{1\,000}} \mathbf{= 1.001^2}$$

y así sucesivamente, por lo que elevando la base $1.001^{1\,000}$ a una milésima parte del exponte de la base 1.001, obtenemos idéntico resultado.

Trabajando con la base $1.001^{1\,000}$, podemos avanzar de milésima en milésima. Dado que en forma decimal

$$\frac{1}{1\,000} = 0.001, \quad \frac{2}{1\,000} = 0.002, \quad \frac{3}{1\,000} = 0.003, \dots$$

y empleando las relaciones que acabamos de obtener para las potencias con base 1.001, tenemos que:

$$(1.001^{1\,000})^0 \quad = 1.001^0 = 1$$
$$(1.001^{1\,000})^{0.001} = 1.001^1 = 1.001$$
$$(1.001^{1\,000})^{0.002} = 1.001^2 = 1.002001$$
$$(1.001^{1\,000})^{0.003} = 1.001^3 = 1.003003001$$

Por tanto, ahora ya no hay tal desproporción entre el número obtenido y exponente asociado, mientras que la densidad se mantiene intacta.

Es claro que las bases

$$1.0001^{10\,000},\ 1.00001^{100\,000},\ 1.000001^{1\,000\,000},\ldots$$

son cada vez mejores para nuestro propósito y se puede probar que esta sucesión converge hacia un número irracional cuya expansión decimal comienza así: $2.71\ldots$. Este número juega un papel muy importante en Matemáticas, por lo que se le ha dado un nombre especial: se llama número "e". Y los logaritmos con base e se denominan logaritmos naturales, pues llegas a ellos de manera tan natural cuando buscas bases cada vez más prácticas y útiles.

Por el bien del logaritmo, hemos llenado los huecos vacíos en la definición de las potencias. Y ahora, la exponenciación ya no tiene sentido únicamente para números naturales, sino que también para cualquier número real. Por tanto, también podemos completar con más datos la salteada curva de fiebre de la función de potencia. Ya sabemos trabajar con ecuaciones, por lo que escribiremos esta función en forma de ecuación. Consideremos de nuevo a 2 como base. Variaremos el exponente, a quien me referiré como x por ser éste un número desconocido y denotaremos por y al valor de la potencia; es decir:

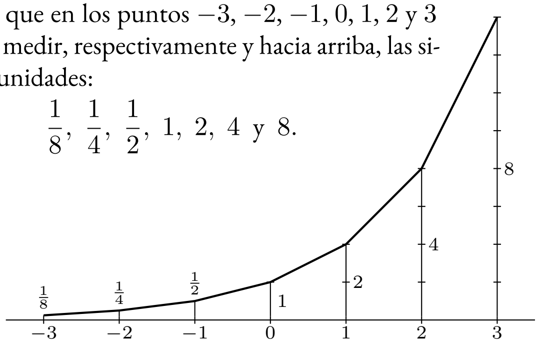
$$y = 2^x.$$

Representaré los valores de x a lo largo de una línea recta horizontal empleando unidades como esta (añadimos ahora el punto 0 con los números negativos a su izquierda) y los valores de y hacia arriba empleando unidades como esta . Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = -3 \text{ entonces } y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\\
&\text{si } x = -2 \text{ entonces } y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},\\
&\text{si } x = -1 \text{ entonces } y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},\\
&\text{si } x = 0 \text{ entonces } y = 2^{0} = 1,\\
&\text{si } x = 1 \text{ entonces } y = 2^{1} = 2,\\
&\text{si } x = 2 \text{ entonces } y = 2^{2} = 4,\\
&\text{si } x = 3 \text{ entonces } y = 2^{3} = 8;
\end{aligned}$$

de modo que en los puntos -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3 debemos medir, respectivamente y hacia arriba, las siguientes unidades:

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4\ \text{y}\ 8.$$



Incluso podemos añadir más valores intermedios para x. Por ejemplo,

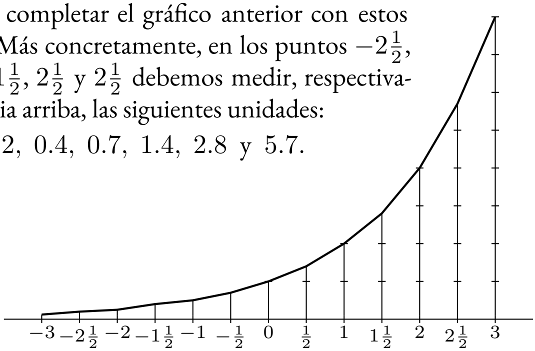
$$2^{1\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2.8\ldots$$

Del mismo modo, podemos calcular valores entre otros números enteros. Con precisión hasta las décimas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = -2\tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 0.2,\\
&\text{si } x = -1\tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 0.4,\\
&\text{si } x = \ -\tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 0.7,\\
&\text{si } x = \quad \tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 1.4,\\
&\text{si } x = \ 1\tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 2.8,\\
&\text{si } x = \ 2\tfrac{1}{2} \text{ entonces } y = 5.7.
\end{aligned}$$

Y podemos completar el gráfico anterior con estos resultados. Más concretamente, en los puntos $-2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$ debemos medir, respectivamente y hacia arriba, las siguientes unidades:

$$0.2,\ 0.4,\ 0.7,\ 1.4,\ 2.8\ \text{y}\ 5.7.$$



Apenas hay "codos" o esquinas puntiagudas en las intersecciones de los segmentos de esta curva febril. Y si imaginamos que continuamos añadiendo puntos intermedios hasta incluir allí a todos los números racionales e irracionales, la curva febril se irá suavizando progresivamente hasta convertirse en una suave y verdadera curva.

Yendo hacia la izquierda de la curva, ésta se acerca cada vez más a la línea recta horizontal, pero nunca la alcanzará, pues no hemos encontrado ningún exponente para el que 2 elevado a dicho exponente sea igual a cero y sólo están sobre tal recta aquellos puntos para los que y es nula.

Se puede observar el mismo fenómeno en la curva febril de la división, cuya representación gráfica no ha sido presentada hasta este momento porque limitándonos a los números enteros no podríamos observar tal efecto. Consideremos, por ejemplo, a 12 (de quien ya sabemos que admite muchos divisores) como dividendo y variemos el divisor, a quien nos referiremos entonces por x. Evidentemente, el resultado de la división dependerá del divisor, por lo que llamaré y al cociente correspondiente:

$$y = \frac{12}{x}.$$

$$\begin{array}{lrlrl}
\text{Si } x = & -12 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-12} = & -1, & \text{ porque } (-1) \times (-12) = 12, \\
\text{si } x = & -6 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-6} = & -2, & \text{ por razones similares,} \\
\text{si } x = & -4 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-4} = & -3, & \\
\text{si } x = & -3 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-3} = & -4, & \\
\text{si } x = & -2 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-2} = & -6, & \\
\text{si } x = & -1 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{-1} = & -12, & \\
\text{si } x = & 1 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{1} = & 12, & \\
\text{si } x = & 2 & \text{ entonces } y = \dfrac{12}{2} = & 6, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = 3 \text{ entonces } y = \frac{12}{3} = 4,\\
&\text{si } x = 4 \text{ entonces } y = \frac{12}{4} = 3,\\
&\text{si } x = 2 \text{ entonces } y = \frac{12}{6} = 2,\\
&\text{si } x = 12 \text{ entonces } y = \frac{12}{12} = 1.
\end{aligned}$$

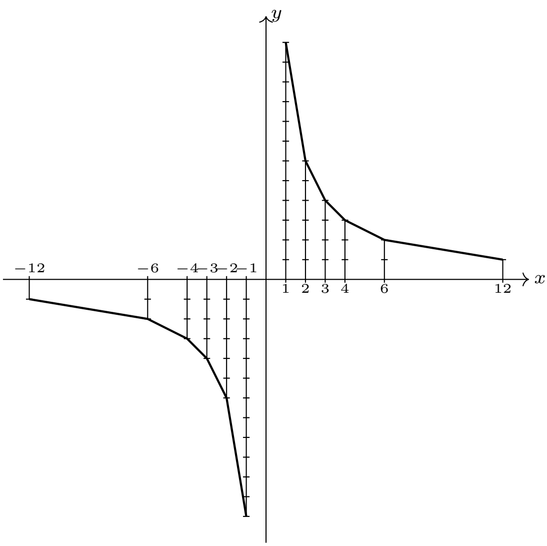
Los valores de y positivos se miden hacia arriba desde el eje horizontal, mientras que los valores negativos se miden hacia abajo. Así pues, en los puntos:

$$\begin{array}{ll}
-12,\ -6,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1 & \text{dibujamos}\\
-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -6,\ -12 & \text{unidades hacia abajo}
\end{array}$$

y en los puntos

$$\begin{array}{ll}
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12 & \text{dibujamos}\\
12,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 & \text{unidades hacia arriba}
\end{array}$$

Sea la unidad en ambas direcciones:



Casi que no hacen falta más valores intermedios; la curva ya se está suavizando muy bien. Es interesante analizar sus extremos más de cerca. Para ello, es recomendable trazar otra línea recta que pasando por el punto cero, tenga la dirección de los valores de y. En este caso, la línea recta horizontal es el eje x y la línea recta perpendicular que pasa por el punto cero es el eje y. Vemos además que tanto el eje x como el eje y se aproximan cada vez más a ambas partes de la curva, pero sin llegar nunca a tocarlas: son entonces dos asíntotas de la curva. De hecho, si aún avanzamos más hacia la derecha en el eje x, considerando por ejemplo $x = 24$, tenemos que

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{24}$$

y simplificando entre 12,

$$y = \frac{1}{2}.$$

Si $x = 36$, dividiendo otra vez entre 12,

$$y = \frac{12}{36} = \frac{1}{3};$$

mientras que para $x = 48$,

$$y = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

y así sucesivamente. Cuanto más avancemos a lo largo del eje x, más pequeños se harán los valores de y, pero no llegarán nunca a valer 0 porque por muy grande que sea el número de partes en que dividamos a 12, cada una de esas partes siempre tendrá cierto tamaño. Del mismo modo, también podemos ir en la dirección negativa del eje x y obtendremos así los valores

$$-\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{4}, \ldots$$

que tienden nuevamente hacia 0 sin llegar a ser nunca iguales a 0, por lo que la otra parte de la curva también se acerca cada vez más pero desde abajo al eje x, sin llegar nunca a tocarlo.

Por otro lado, si $x = \frac{1}{2}$, dado que en una unidad hay dos mitades, en 12 unidades hay 12×2 mitades, esto es, 24 mitades, y entonces

$$y = 24.$$

Del mismo modo, dado que en 12 unidades hay 36 tercios y 48 cuartos:

$$\text{si } x = \frac{1}{3} \text{ entonces } y = 36,$$

$$\text{si } x = \frac{1}{4} \text{ entonces } y = 48 \text{ y así sucesivamente.}$$

Según esto, a medida que x se acerca a 0, la altura y correspondiente se hace cada vez más grande. No obstante la curva no tocará jamás al eje y, ya que eso solo podría suceder cuando $x = 0$. Pero en ese caso, tendríamos que $y = \frac{12}{0}$ y nos toparíamos con la eterna e infranqueable prohibición: ¡nunca dividas entre cero!

La prueba de la división consiste en multiplicar: $20 \div 5 = 4$ porque $5 \times 4 = 20$. Pero, ¿a qué daría lugar una división entre 0? Las respuestas más comunes son:

$$5 \div 0 = 0. \text{ Comprobación: } 0 \times 0 = 0 \text{ que es distinto de } 5,$$

$$5 \div 0 = 5. \text{ Comprobación: } 0 \times 5 = 0 \text{ que es distinto de } 5,$$

$$5 \div 0 = 1. \text{ Comprobación: } 0 \times 1 = 0 \text{ que es distinto de } 5.$$

Independientemente del factor que multipliquemos por 0, el resultado siempre será el mismo: 0 y no 5, por lo que 5 no se puede dividir entre 0.

Piensa que si un número es muy pequeño, entonces coge en 5 un número muy grande de veces. Y cuanto menor sea el número entre el que dividimos, mayor será el resultado. Por tanto, si existiera el número más grande, sería el resultado de dividir entre el número más pequeño, esto es, entre cero. Pero no existe el número más grande.

¿Podremos dividir 0 entre 0? Intentémoslo:

$$0 \div 0 = 1; \text{ comprobación: } 0 \times 1 = 0,$$

por lo que parece correcto. Pero si ahora digo que

$$0 \div 0 = 137,$$

esto también es correcto porque 0×137 es igual a 0. Algo más está mal aquí: el resultado es completamente indeterminado, la comprobación asegura que toda respuesta es correcta. La prohibición aplica de forma estricta en todos los casos. Una revista estudiantil lo explicó del siguiente modo: cuando el Señor colocó a Adán en el Paraíso, le dijo: "puedes dividir entre cualquier número ¡pero nunca entre 0!".

Cualquiera podría pensar que si está tan estrictamente prohibido, entonces a nadie se le ocurrirá dividir entre 0. Y bueno, descaradamente es posible que nadie se atreva, pero a veces el 0 aparece disfrazado. Por ejemplo, si escribo

$$(x+2)^2 - (x^2 - 4x + 4)$$

ya no lo reconoce todo el mundo de inmediato aunque sólo he restado a $(x+2)^2$ su forma expandida. Dividir entre estos ceros camuflados es el paso clave de numerosas bromas en las que se prueba, por ejemplo, que $1 = 2$. En matemáticas, cometiendo un error o admitiendo como verdadero a un enunciado que contradice a otras proposiciones, es posible demostrar cualquier cosa, incluso que $1 = 2$.

Si grabamos en nuestra memoria la gráfica de la curva anterior –de la que diré su nombre: es una hipérbola–, no olvidaremos jamás la prohibición ya mencionada. Lo más llamativo de la curva es que está dividida en dos ramas. Ambas ramas se estiran suave y constantemente, pero en el 0 aparece una profunda y áspera brecha que se extiende hasta el Infinito: la rama de la izquierda corre hacia abajo, mientras que la de la derecha lo hace hacia arriba, hasta el Infinito. Y entre ellas, ahí está el eje y, elevándose cual espada desenvainada: puedes acercarte pero ¡ni te atrevas a llegar hasta 0!

14. *Matemáticas sólo hay una*

AUNQUE ya sabemos cómo escribir algunas funciones en forma de ecuación, esto no debe llevarnos a pensar que las fórmulas sean decisivas o imprescindibles a la hora de definir una función. Intentemos expresar la siguiente y como función de x mediante alguna fórmula simple: siempre que x sea un número racional, el valor de y será 1, y siempre que x sea un número irracional, el valor de y será 0 (se trata de la función de Dirichlet). La definición es impecable: el valor de y depende realmente del valor elegido para x y a cada valor de x le corresponde un valor y perfectamente determinado. Por ejemplo, si $x = 1.5$ entonces $y = 1$, pero si $x = \sqrt{2}$ entonces $y = 0$. Sin embargo, encontrar una fórmula para esta función es realmente difícil y, desafortunadamente, ni tan siquiera podemos representarla gráficamente porque salta insistentemente entre 0 y 1 debido la densidad y omnipresencia tanto de los números racionales como de los números irracionales.

La esencia del concepto de función es el emparejamiento de los valores de x con los valores de y correspondientes. La variable x no toma necesariamente todos los valores; ya vimos que en la función definida mediante la ecuación $y = \frac{12}{x}$ debemos omitir el valor 0 porque esa función no está definida para $x = 0$. Cada vez que definimos una función, tenemos que especificar cuál es el conjunto de posibles valores para x e indicar una regla o instrucción precisa que aclare qué valor de y corresponde a cada x.

Dibujar la gráfica de una función siempre será de gran ayuda. Una buena gráfica dice más que cualquier descripción verbal por muy prolija y detallada que ésta sea.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente función: sea cual sea el número x, el valor de y siempre será igual a la parte entera de x. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{si } \; x &= 5.45, \quad \text{entonces } \; y = 5, \\ \text{si } \; x &= \sqrt{2}, \quad \text{entonces } \; y = 1, \end{aligned}$$

porque, como ya hemos visto anteriormente, $\sqrt{2} = 1.41\ldots$

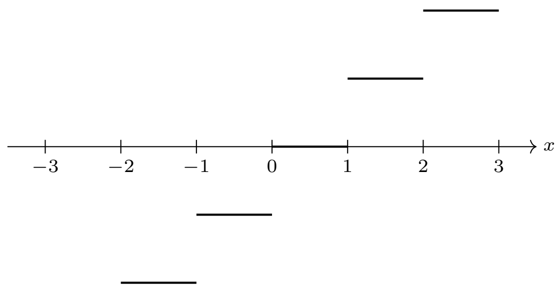
Intentemos dibujar la gráfica de esta función:

$$\begin{aligned} \text{si } \; x &= 0, \quad \text{entonces } \; y = 0, \\ \text{si } \; x &= 0.1, \quad \text{entonces } \; y = 0, \\ \text{si } \; x &= 0.99999, \quad \text{entonces } \; y = 0; \end{aligned}$$

observamos así que $y = 0$ hasta que x llega a 1. Más adelante:

$$\begin{aligned} &\text{si } x = 1, \text{ entonces } y = 1, \\ &\text{si } x = 1.001, \text{ entonces } y = 1, \\ &\text{si } x = 1.99999, \text{ entonces } y = 1, \end{aligned}$$

por lo que $y = 1$ hasta que x llega a 2. Estos saltos se repiten sucesivamente si avanzamos sobre el eje x, pero también si retrocedemos en dirección negativa. Por tanto, la gráfica será algo como esto:



La curva consta de piezas horizontales y separadas como las que ahí vemos. Un vistazo rápido revela todo sobre la función: allí donde rompe la curva, el valor de la función pega un salto de altura 1 mientras que permanece constante en los segmentos horizontales. Por tanto, una función no sólo admite brechas infinitas, como la de $y = \frac{12}{x}$ en $x = 0$, sino que también puede presentar brechas menos profundas como en este caso. Por lo menos la gráfica de estas dos funciones se traza de forma continua y suave en los trozos donde no hay brechas, pero la función de Dirichlet no es continua en ningún sitio: es imposible encontrar un intervalo, por corto que sea, que no contenga puntos racionales e irracionales, por lo que el valor de la función está obligado a saltar constantemente.

Tampoco debe pensarse que si podemos definir una función mediante una fórmula simple y consideramos un conjunto de puntos lo suficientemente denso, entonces su gráfica se suavizará convirtiéndose en una curva sin "codos". Supongamos, por ejemplo, que la definición es la siguiente: sea cuál sea x, el valor de y será igual al valor absoluto de x, es decir, al valor de x ignorando su signo. La notación habitual para el valor absoluto consiste en escribir dos pequeñas línea vertical, una antes y otra después del número en cuestión.

Por ejemplo:

$$|-3| = 3,$$
$$|+3| = 3,$$
$$\text{y naturalmente} \qquad |0| = 0.$$

La función que acabamos de definir puede expresarse mediante la sencilla fórmula que escribimos a continuación:

$$y = |x|.$$

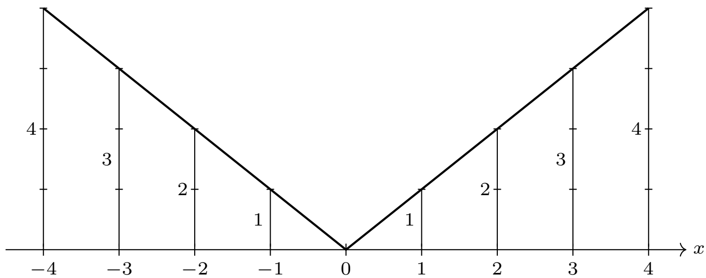
En consecuencia, mientas x recorre los valores:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4$$

y toma, uno tras otro, los siguientes valores:

$$4,\quad 3,\quad 2,\quad 1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4.$$

La representación gráfica es esta:



La gráfica de nuestra función consta, por tanto, de dos líneas rectas que se cortan formando un ángulo. Y nada cambia si añadimos más valores intermedios; por ejemplo

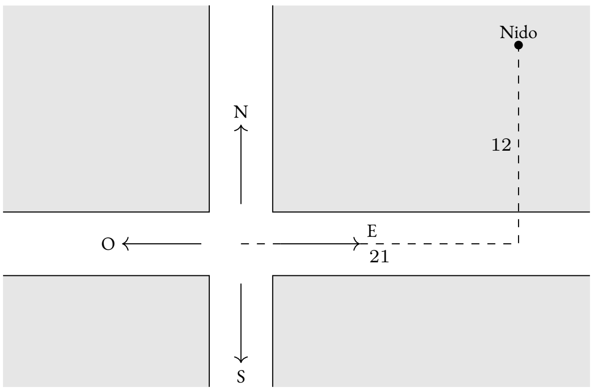
$$\text{si } \ x = 1\tfrac{1}{2}, \ \text{ entonces } \ y = |1\tfrac{1}{2}| = 1\tfrac{1}{2}.$$

He dibujado este valor con trazo discontinuo, pero el punto en cuestión cae en uno de los brazos del ángulo.

La representación gráfica nos proporciona una imagen nítida de una función, pero también inexacta e imprecisa: porque nuestro lápiz nunca será suficientemente fino ni nuestra regla completamente recta y nuestros ojos y manos son imperfectos. Sin embargo, hay ciertas propiedades de las figuras que no tiene nada que ver con lo que dibujamos sobre las que la Geometría sí tiene mucho que decir con precisión y exactitud. Una vez que conozcamos las propiedades geométricas de una hipérbola y que la gráfica de $y = \frac{12}{x}$ es una hipérbola, sabremos casi todo sobre esa función.

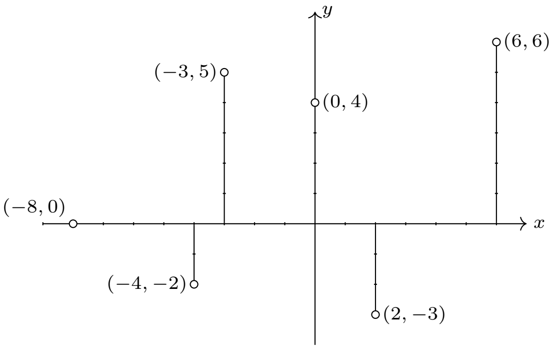
Pero la Geometría también suele recurrir a otras ramas de las Matemáticas en busca de ayuda. Por ejemplo, cuando quiere estudiar varios problemas de forma simultánea o coordinada, toma prestada una fórmula y bien sabemos la cantidad de problemas diferentes que pueden resumirse en una sola fórmula. Ya hizo esto a la hora de calcular áreas y volúmenes. La Matemática es *una* y no se descompone en dos ciencias separadas: Geometría y "Álgebra", como a veces creen los alumnos, especialmente si su profesor ha dividido los contenidos de manera que haya, por ejemplo, Álgebra los lunes y viernes y Geometría los miércoles. De esta manera, en realidad, las Matemáticas habrían sido divididas en dos materias.

Uno de los puentes que conecta la Geometría con la otra área es el sistema de coordenadas: las dos líneas rectas perpendiculares que pasan por el punto 0 –el eje x y el eje y– que ya hemos empleado para describir a la hipérbola. Estos dos ejes nos proporcionan un método que permite caracterizar los puntos del plano empleando números. Podemos pensar en ellos como si fuesen dos caminos que se cruzan en el campo: si encuentro un nido de pájaros en uno de los arbustos, puedo tomar nota de su posición yendo directamente hacia uno de los senderos mientras cuento cada uno de mis pasos, que serán lo más parejos posible, y contando luego también los pasos que me llevan por ese sendero hasta la intersección de ambos caminos:



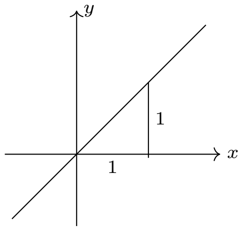
Si quiero enseñarle a alguien más el nido, sé que llegaré hasta él desde el cruce de ambos senderos si camino 21 pasos hacia el este y 12 hacia el norte. Estos dos números con dirección son las "coordenadas" del nido. En Geometría, lo habitual es determinar las direcciones empleando los signos "$+$" y "$-$". Generalmente, las direcciones positivas apuntan hacia la derecha y hacia arriba y las direcciones negativas hacia la izquierda y hacia abajo. Para medir las coordenadas, es mejor emplear una unidad perfectamente definida, y no los pasos. De este modo, a cada par de números le corresponde un único punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un par de números completamente determinado. La distancia recorrida en la dirección del eje x (siempre se dice ésta primero) es la abscisa del punto, mientras que la distancia recorrida en la dirección del eje y es su ordenada.

Indico a continuación las coordenadas de algunos puntos porque es buena idea coger un poco de práctica:



(Evidentemente, ésta no es la única forma de asociar números a puntos. Por ejemplo, aunque los senderos no sean perpendiculares entre sí, también puedo orientarme perfectamente si sigo sus direcciones; o incluso puede que desde el nido se divise otro sendero en el que se observa un árbol singular, por lo que podemos caminar en línea recta hacia dicho árbol y medir desde él, con ayuda de algún aparato, la dirección al nido tal y como se ve desde allí.)

Dado que podemos caracterizar los puntos del plano mediante pares de números, esto nos proporciona un método para caracterizar una línea recta mediante una relación entre pares de números, es decir, mediante una ecuación. Consideremos, por ejemplo, la línea recta que pasa por el punto de partida y el punto $(1,1)$:



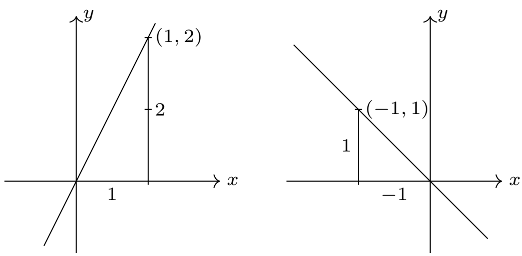
Si esto representase una línea ferroviaria, denotaríamos su pendiente como

$$1:1$$

Esto significa que mientras avanzamos 1 metro moviéndonos horizontalmente al lado del terraplén ascendente, la línea férrea se eleva 1 metro por encima de nosotros. Dado que esta pendiente se eleva de forma uniforme, alcanzará una altura de 2 metros después de avanzar 2 metros y una altura de 3 metros después de avanzar 3 metros y así sucesivamente. Por tanto, lo que caracteriza a de esta línea recta es que sus dos coordenadas son iguales: en cada uno de los puntos de la línea recta

$$y = x.$$

Y fuera de esa línea recta, no hay ningún punto del plano cuyas coordenadas sean iguales: si unimos cualquier punto ajeno a nuestra línea recta con el punto de partida, obtendremos una pendiente diferente, que incluso podría ser descendente. Por ejemplo:



Aquí, en la primera figura, el ascenso es $2:1$ a lo largo de toda la recta, por lo que la ordenada de cualquier punto que se encuentre sobre esa línea recta es el doble de su abscisa; en la segunda figura, la pendiente también es $1:1$, pero ahora es descendente en lugar de ascendente, por lo que en nuestro sistema de coordenadas debemos expresarla como $1:(-1)$; la consecuencia esto es que las dos coordenadas de cualquier punto de esta línea recta son iguales en valor absoluto, pero distintas en cuanto a signo, por lo que en realidad no son iguales.

Entonces, las coordenadas de los puntos que están fuera de nuestra línea recta inicial no pueden ser iguales iguales, por lo que la ecuación

$$y = x$$

caracteriza completamente a los puntos de dicha línea recta y sólo a ellos. Por tanto, podemos decir con razón que ésta es la ecuación de nuestra línea recta.

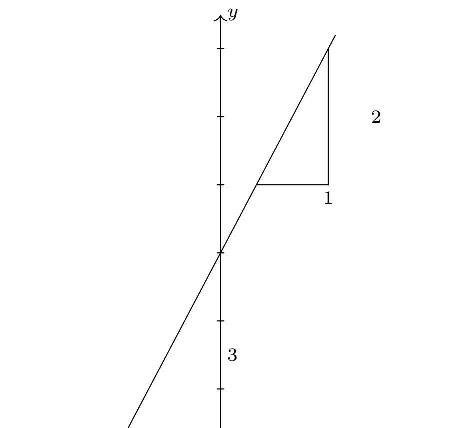
Además, por el camino, hemos descubierto la ecuación de las otras dos líneas rectas que hemos dibujado:

para la que tiene pendiente $2:1$ la ecuación es $y = 2x$,

(nos encontraremos con esta ecuación más adelante) y

para la que tiene pendiente $1:(-1)$ la ecuación es $y = -x$.

Empujemos la línea recta cuya pendiente es $2:1$ un poco hacia arriba, 3 unidades, pero sin modificar en nada su dirección:



La pendiente no ha cambiado; podemos convencernos de esto si damos un paso de 1 unidad hacia la derecha desde cualquiera de sus puntos, pues vemos que entonces la pendiente ha subido 2 unidades. La única diferencia respecto de la posición original es que ahora cada punto se ha elevado 3 unidades y, por lo tanto, la ordenada de cada punto ha aumentado en 3 unidades. La y que antes era igual a $3x$ se convierte ahora en $2x + 3$, por lo que la ecuación de la línea recta en esta posición es:

$$y = 2x + 3.$$

El rasgo común de las ecuaciones obtenidas hasta ahora:

$$y = x,\ y = 2x,\ y = -x,\ y = 2x + 3,$$

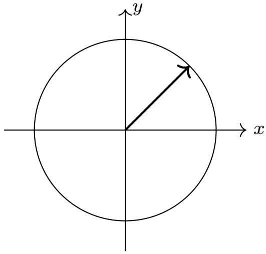
es que son todas ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Era de esperar que apareciesen dos incógnitas, pues cada punto del plano se identifica con un par de números. El hecho a destacar es que la ecuación de una línea recta en cualquier posición siempre es una ecuación *de primer grado*. Y también a la inversa, se puede demostrar que una ecuación de primer grado con dos incógnitas, expresada de cualquier modo, como por ejemplo la ecuación

$$5x - 3y = 7,$$

siempre puede verse como la ecuación de cierta línea recta. Por tanto, las ecuaciones de primer grado y las líneas rectas son dos expresiones distintas de un mismo concepto.

Este es un buen resultado, pero es no muy sorprendente: podemos trazar líneas rectas en todo tipo de posiciones, pero todas son rectas, por lo que pertenecen a una misma familia y entonces, también es completamente natural que sus ecuaciones formen cierta familia.

Veamos ahora alguna línea curva. Todo el mundo sabe que es un círculo; consideremos, por ejemplo, una rueda con muchos radios iguales: estos son los radios del círculo.



Sea uno de estos radios de, por ejemplo, 5 unidades de longitud, e imaginemos que el centro del círculo es nuestro punto de partida. Dondequiera que tomemos un punto de la frontera del círculo, si dibujamos sus coordenadas y el radio que pasa por dicho punto, obtenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos son las coordenadas e hipotenusa el radio.

Recordemos la relación ya comentada entre los lados de un triángulo rectángulo: el Teorema de Pitágoras. La suma de los de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado. Entonces, elevando al cuadrado y sumando las dos coordenadas de cualquier punto de la circunferencia, tenemos que obtener $5^2 = 25$:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Esta será la ecuación de la circunferencia.

Vemos de inmediato que se trata de una ecuación de segundo grado; y de hecho, no es una de las más simples. Examinemos entonces qué tipo de curva se corresponde con la ecuación de segundo grado más simples, esto es, con la ecuación

$$y = x^2.$$

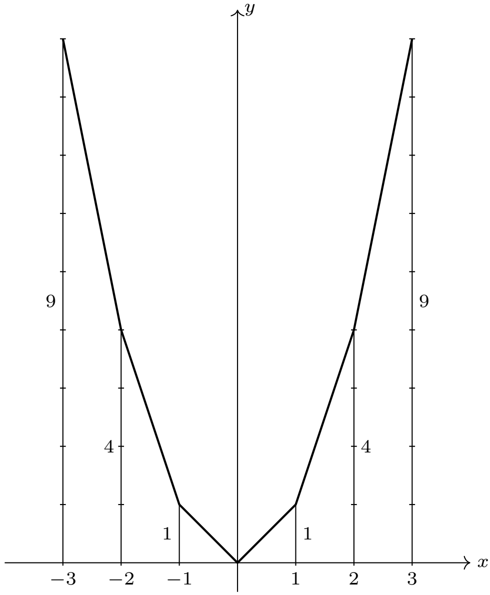
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = -3, \text{ entonces } y = (-3)^2 = +9,\\
&\text{si } x = -2, \text{ entonces } y = (-2)^2 = 4,\\
&\text{si } x = -1, \text{ entonces } y = (-1)^2 = 1,\\
&\text{si } x = 0, \text{ entonces } y = 0^2 = 0,\\
&\text{si } x = 1, \text{ entonces } y = 1^2 = 1,\\
&\text{si } x = 2, \text{ entonces } y = 2^2 = 4,\\
&\text{si } x = 3, \text{ entonces } y = 3^2 = 9.
\end{aligned}$$

Consideremos también algunos valores fraccionarios próximos a 0:

$$\begin{aligned}
&\text{si } x = -\frac{1}{2}, \text{ entonces } y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\\
&\text{si } x = \frac{1}{2}, \text{ entonces } y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Y dibujemos ahora la gráfica correspondiente:



La curva que se obtiene cuando suavizamos por completo las uniones entre segmentos se llama parábola. Evidentemente, las dos ramas se prolongan de forma indefinida y se hacen cada vez más y más empinados, pareciéndose así cada vez más a una línea recta vertical. Esta curva no tiene nada que ver con una circunferencia.

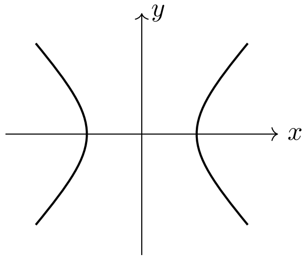
Ya nos encontramos antes con una curva cuya ecuación también es de segundo grado, pero no nos percatamos. Estoy hablando de la hipérbola. Su ecuación era

$$y = \frac{12}{x},$$

pero si pasamos el x que aparece dividiendo para la izquierda multiplicando, obtenemos que

$$x \times y = 12.$$

Ahora bien, toda ecuación con dos incógnitas x e y en la que aparece el producto $x \times y$ se considera como una ecuación de segundo grado porque se suman los dos exponentes de cada una de las incógnitas. Si esto no te parece suficientemente convincente, añadiré que si rotamos nuestra hipérbola hasta dejarla en una posición como esta:

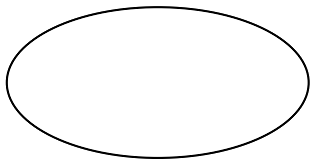


entonces su ecuación será

$$x^2 - y^2 = 24$$

y ya es evidente que estamos ante una ecuación de segundo grado.

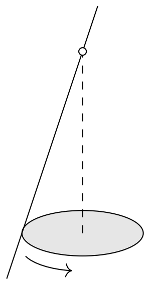
Me gustaría mencionar aquí que el círculo alargado, la elipse



también tiene una ecuación de segundo grado. No existen más curvas de este tipo (sin tener en cuenta algunos casos "degenerados"): si pudiésemos dibujar todas las curvas posibles de entre los cuatro tipos que acabamos de enumerar en todas las posiciones posibles en nuestro sistema de coordenadas, obtendríamos así la familia de curvas correspondiente a las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas. Pero es difícil imaginar una familia con miembros tan diferentes; algunas curvas son cerradas, pero otras se prolongan indefinidamente; algunas curvas constan de una única rama, pero otras de dos ramas separada. ¿Cuál es el parentesco que une a estas curvas?

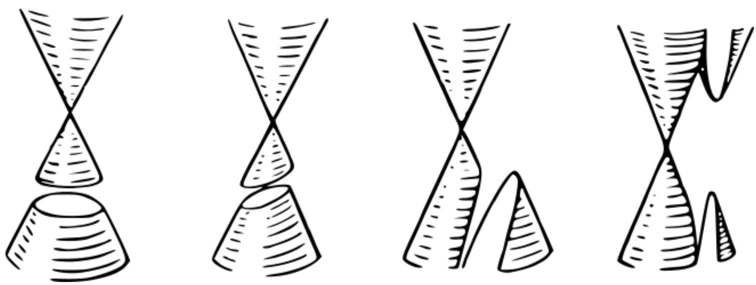
Te presento a esta familia, entenderás el parentesco de inmediato: todas estas curvas llevan el nombre de "secciones cónicas".

Ahora tenemos que saltar de nuevo del plano bidimensional al espacio tridimensional. ¡Lástima no poder dibujar en el espacio como dibujamos en un papel plano! Pero bueno, imagínate que tengo una pintura con la que puedo pintar el aire, un disco circular horizontal y una línea recta inclinada sobre el centro del disco que toca al disco en un punto de su borde:



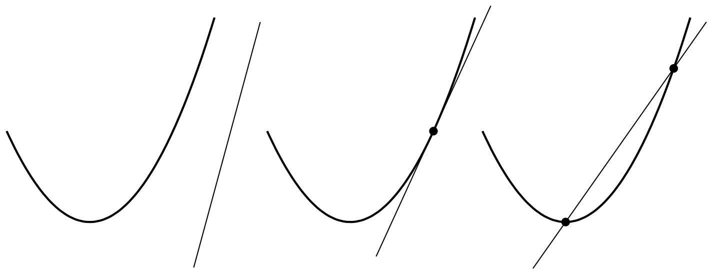
Imaginemos además que alguien ha sumergido a dicha línea recta en la pintura mágica de pies a cabeza (aunque en realidad no hay pies ni cabeza, porque la línea recta es infinitamente larga).

Ahora, con una mano sujetamos firmemente la línea recta imaginaria por el punto situado justo encima del centro del disco y desplazamos con la otra mano el punto que toca el borde del círculo alrededor de tal borde. Así, la pintura mágica pintará una superficie en el aire, tanto "por debajo" como "por encima" del punto fijo que queda quieto. Esa superficie se llama cono. Si cortamos el doble cono que acabamos de obtener empleando para ello distintos planos, aparecerán entonces nuestras cuatro curvas en el borde de las piezas truncadas:



Fíjate en que el cuarto plano es el único que también corta al cono superior.

Pero aun ignorando la relación geométrica entre estas cuatro curvas, que la ecuación de todas ellas sea de segundo grado saca a la luz muchas de las características ocultas que todas ellas mantienen en común. Tenemos que preguntarnos qué dice el Álgebra sobre esa familia de ecuaciones, pues cualquier propiedad que de eso deduzcamos será común para nuestras cuatro curvas. Consideremos, por ejemplo, los puntos de intersección con una línea recta. Un punto de intersección es un punto que está tanto en la curva como en la línea recta, por lo que sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones. La ecuación de una línea recta es una ecuación de primer grado y el Álgebra nos enseña que una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado, cada una con dos incógnitas, pueden tener: ninguna solución (real) en común, una única solución en común o bien dos soluciones en común. Por tanto, para cualquiera de nuestras cuatro secciones cónicas, es cierto que una línea recta sólo puede estar en una de estas tres posiciones: no se tocan en ningún punto, se tocan en un único punto o se cortan en dos puntos distintos, por ejemplo:



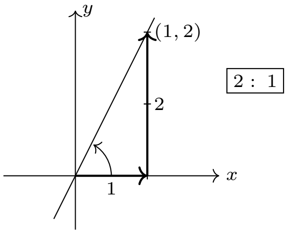
Por tanto, ni tan siquiera existe una línea recta que corte a la hipérbola de dos ramas en más de dos puntos.

Estos son los servicios que el Álgebra presta a la Geometría.

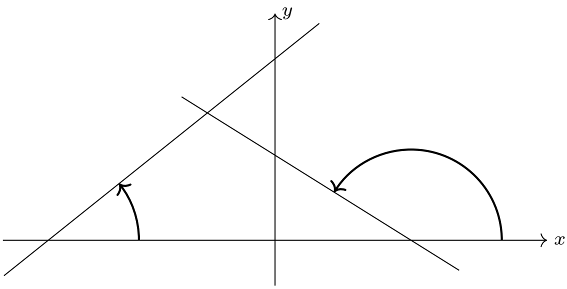
Posdata sobre ondas y sombras

Nos hemos cruzado con dos ideas geométricas. No quiero que pasen desapercibidas.

Una de ellas está relacionada con la forma en que hemos dado la dirección de una línea recta. La razón entre el ascenso neto y la distancia horizontal recorrida, esto es, la razón entre el cateto vertical y el cateto horizontal del triángulo rectángulo que aparece a continuación, determina completamente la dirección de una línea recta:

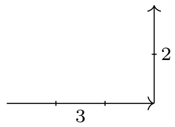


Pero, por supuesto, decir cuál es la amplitud del ángulo que forma la recta en cuestión al cortarse con otra dirección previamente definida también define claramente la dirección de dicha línea recta. Lo habitual es considerar a la dirección positiva del eje x como tal dirección de referencia y al ángulo correspondiente se llama ángulo de dirección o rumbo de la recta; será un ángulo agudo si la línea recta se eleva y un ángulo obtuso si la línea recta desciende.

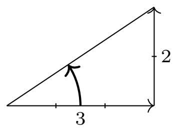


Ahora bien, la dirección de una línea recta y, por supuesto, su ángulo de dirección quedan completamente determinados por la razón entre los catetos del triángulo rectángulo ya mencionado. Por tanto, podríamos escoger esta relación o proporción como una medida de la amplitud del ángulo. Supongamos que se trata de un ángulo cuya amplitud se corresponde con una pendiente de 2 : 3. Es decir, que si trazamos una línea recta perpendicular a uno de los brazos del ángulo, obtendremos un triángulo rectángulo en el que la razón entre sus catetos es igual a $2:3$ o, con una notación ligeramente diferente, igual a $\frac{2}{3}$.

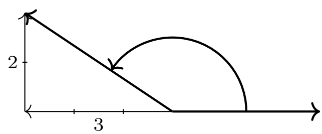
Dada la razón $\frac{2}{3}$, podemos dibujar el ángulo inmediatamente. Basta avanzar 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba:



y conectando el punto de llegada con el punto de partida, obtenemos el ángulo que buscábamos:

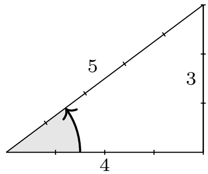


Si el ángulo es obtuso, la pendiente es descendente y ya hemos visto que en este caso la razón correspondiente será negativa, hecho que en absoluto nos impide aplicar el método anterior. Por ejemplo, si la razón es $-\frac{2}{3}$, la recta se eleva si camino hacia atrás, hacia la izquierda; avanzo por tanto 3 unidades hacia la izquierda, 2 unidades hacia arriba y conecto el punto así obtenido con el punto de partida, formando entonces un ángulo obtuso con la dirección positiva del eje x (pues el ángulo de dirección se considera siempre como el ángulo formado con la dirección *positiva* del eje x):

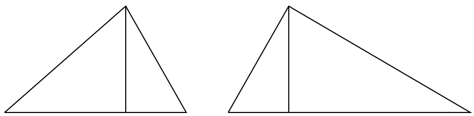


Un ángulo obtuso como este no puede aparecer nunca en un triángulo rectángulo, pero sí que podemos construir junto a él un triángulo rectángulo cuyos catetos están en razón $\frac{2}{3}$, que –salvo el signo– es la razón que caracteriza a nuestro ángulo obtuso.

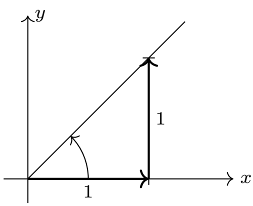
Se puede demostrar que la razón entre cualquier par de lados de un triángulo rectángulo también caracteriza ángulos. Estos cocientes entre lados, dado que dependen de la amplitud del ángulo en cuestión, se denominan funciones de ángulo o funciones angulares. La función de ángulo que acabamos de examinar es la “tangente”. Por otra parte, el cociente entre el lado opuesto al ángulo y la hipotenusa es el “seno”, mientras que el cociente entre el lado contiguo al ángulo y la hipotenusa es el “coseno”. Por ejemplo, en el siguiente triángulo:



el seno del ángulo sombreado es igual $\frac{3}{5}$ y su coseno a $\frac{4}{5}$. La interpretación de cada una de las funciones angulares se extiende a ángulos mayores que los agudos. Se han tabulado los valores de las funciones angulares para todo tipo de ángulos; si conocemos los lados de un triángulo rectángulo (un triángulo arbitrario siempre puede dividirse en dos triángulos rectángulos)

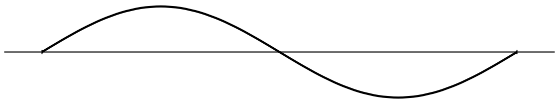


tan sólo tenemos que mirar la tabla correspondiente para conocer inmediatamente la amplitud de cada uno de sus ángulos. Es cierto que si conocieras los lados, podrías dibujar el triángulo y medir luego la amplitud de sus ángulos, pero ¡cuán pobre será la exactitud de esta medición en comparación con la lograda por los autores de las tablas! Pero no debes pensar que se obtienen los valores de las funciones angulares a partir de mediciones, ¡para nada! Su cálculo es posible conociendo exactamente algunos valores concretos. Por ejemplo, nuestra primera línea recta biseca el ángulo recto:

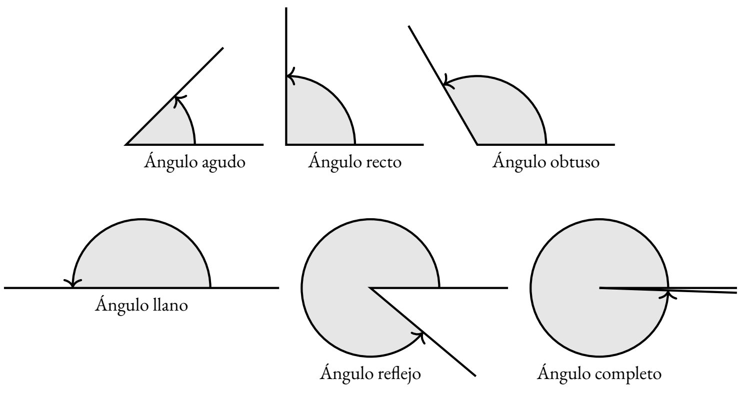


y entonces la tangente de su ángulo de dirección es $1 \div 1$, o equivalentemente, $\frac{1}{1} = 1$. El ángulo recto es el que se forma cuando damos un cuarto de vuelta, por lo que ya sabemos que la tangente del ángulo asociado un octavo de vuelta es igual a 1. Una vez conocidas las funciones angulares para ciertos ángulos, lo natural es preguntarnos por cómo calcular el valor de estas funciones angulares para, por ejemplo, el doble, la mitad o la suma de alguno de esos ángulos. La Trigonometría es la rama de las Matemáticas que busca esas relaciones. No obstante, las tablas están hechas de forma diferente; volveremos sobre esto más adelante.

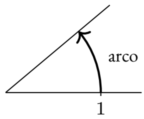
Las funciones angulares tienen significado e interés más allá de la Trigonometría. Por ejemplo, si dibujamos la curva febril de la función seno mientras el ángulo varía desde 0 hasta dar una vuelta completa, obtenemos una curva ondulada como esta:



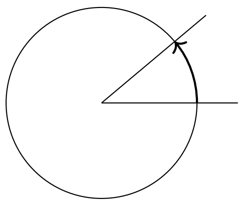
que todavía podría continuarse. En realidad, un ángulo mide la inclinación de una línea recta respecto de otra línea recta fija. Imagina, por ejemplo, que abrimos un abanico japonés lentamente:



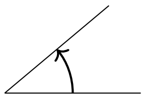
creamos así todo tipo de ángulos y se observa que el arco circular dibujado alrededor del vértice mide la magnitud de la rotación. Por supuesto, la longitud de este arco también depende del tamaño del abanico, pero siempre podremos medir nuestros ángulos con la longitud del arco de radio la unidad



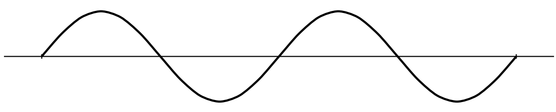
(esto es mucho más práctico que la medición habitual de la escuela con grados sexagesimales). Ahora es concebible (aunque no el abanico, pues éste se rompería) que la línea de giro siga girando incluso después de haber dado una vuelta completa,



de modo que la parte dibujada en negrita se ha recorrido dos veces. Es evidente que en ese caso la línea recta apunta en la misma dirección que si sólo hubiera girado este pequeño arco:

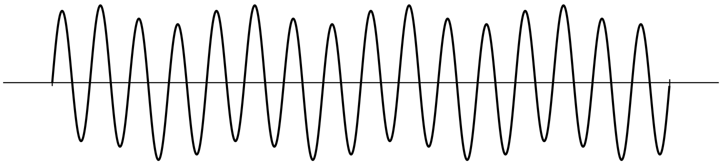


Por tanto, los valores de las funciones angulares comienzan a repetirse para algunos mayores que una vuelta completa y la curva continúa subiendo y bajando de la misma manera:

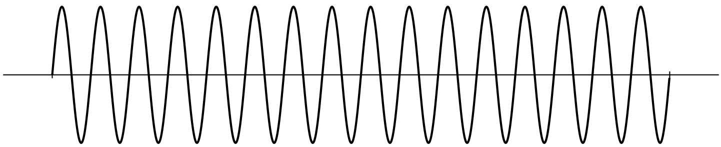


Este comportamiento es similar a la repetición de las cifras en el desarrollo decimal de algunas fracciones, por lo que se dice que la función seno es una función periódica.

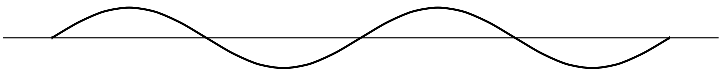
Todo físico está familiarizado con esta gráfica: es la curva de una función que representa un movimiento oscilatorio y juega un papel crucial en la Física Moderna. Cualquier radio-aficionado ha visto gráficas de ondas "moduladas" como esta:



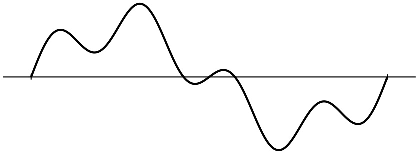
En la gráfica anterior, la onda más densa es la conocida como onda electromagnética. Su gráfica aislada sería algo como esto:



pero el sonido las modifica y modula mediante grandes ondas como esta:

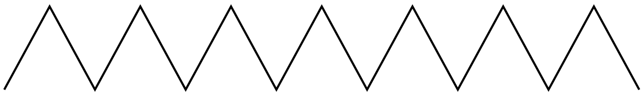


En este caso, las dos ondas a partir de las cuales se compone la onda modulada aún son claramente distinguibles. Pero, en la realidad, las ondas sonoras no son tan sencillas, pues en general no se trata de un sonido perfectamente claro y aislado, sino que siempre se juntan varios sonidos vibrando al mismo tiempo y no hay tanta diferencia entre ellos como entre las ondas sonoras y las ondas electromagnéticas, por lo que no son tan fácilmente distinguibles. El resultado de su superposición consiste simplemente en una distorsión de las ondas, que podrían convertirse, por ejemplo, en algo como esto:



A menudo es necesario leer de una onda distorsionada de qué ondas se compone. En general, surge la siguiente pregunta: si tenemos una curva continua que se extiende periódicamente de forma indefinida ¿es posible encontrar ondas simples cuyo efecto simultáneo produzca justamente dicha curva?

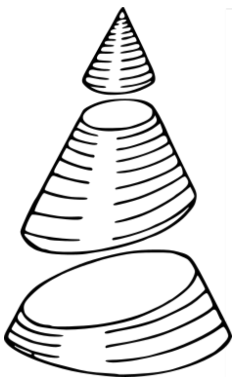
La respuesta es la siguiente: aun en el caso en que no sea posible lograrlo con precisión exacta, siempre podrás encontrar ondas simples que al superponerse unas sobre otras se aproximan tanto como tú desees a la curva y esto es cierto aunque la curva esté plagada de esquinas, como, por ejemplo, la siguiente:



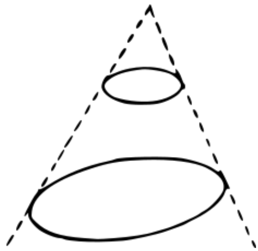
Por supuesto, para probar este resultado es necesario emplear el lenguaje de las funciones: no en términos de ondas, sino en términos de las funciones angulares correspondientes. El matemático húngaro Lipót Fejér fue pionero en este campo y se hizo mundialmente conocido desde muy joven.

* * *

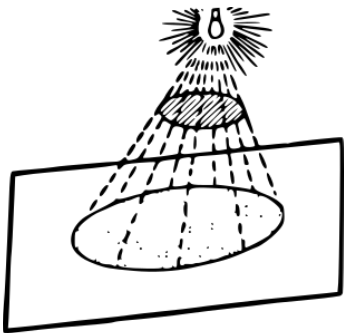
La otra idea geométrica mencionada está relacionada con las secciones del cono. Cortemos la parte inferior del cono empleando dos planos; primero con un plano horizontal y luego con un plano ligeramente inclinado:



y dibujemos el vértice del cono, la circunferencia y la elipse por separado:



Imagina que el vértice del cono es una pequeña bombilla que emite rayos de luz en todas direcciones. El círculo es un disco de papel sólido, que situado en el camino de los rayos de luz, impide que dichos rayos lo atraviesen. Los rayos que pasan por el borde del disco generan la superficie de nuestro cono, por lo que el círculo proyecta una sombra elíptica en un plano inclinado colocado por debajo:



Por tanto, podemos pensar una elipse como la sombra de un círculo, pues se obtiene "proyectando" un círculo desde un punto exterior en un plano inclinado.

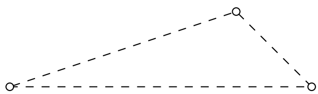
La misma proyección crea una sombra con forma parabólica o hiperbólica si aumentamos lo suficiente la inclinación del plano (si queremos obtener la otra rama de la hipérbola, tenemos que colocar otro disco circular en la trayectoria de los rayos ascendentes). Constatamos así cuán distorsionada puede ser una sombra.

La llamada "Geometría Proyectiva" busca propiedades que ni tan siquiera se pierden mediante la distorsión provocada por una proyección. Y, en efecto, ha logrado encontrar propiedades "proyectivas" que resultan ser "invariantes" respectos de estas proyecciones. Esto permite estudiar las secciones cónicas de forma sencilla y uniforme: basta con que nos ocupemos del círculo. Todas sus propiedades "proyectivas" permanecen inalteradas en las secciones cónicas generadas por proyección. La sombra puede estirarse hasta el Infinito, pero nunca se liberará de su amo.

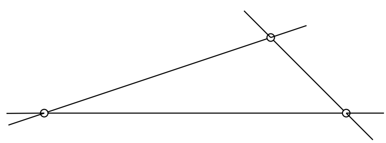
15. *Elementos “Írja”*

HAY una novela rusa muy interesante de la que he disfrutado de su adaptación al teatro hace pocos días. Llevaba por título “Teniente Írja” y el argumento consiste en que un teniente, mientras escribía al dictado de su superior, malinterpreta la exhortación “Teniente, ¡escriba!” [1] e introduce así al “Teniente Írja” en una lista de oficiales, que una vez firmada por el todopoderoso zar impide que nadie ponga dudad la mera existencia del susodicho teniente. El teniente Írja ni tan siquiera existe como ser humano realmente, es sólo un error tipográfico, pero nada impide que le sucedan multitud de hechos alrededor de él: va a la cárcel, se casa, provoca un levantamiento e influye decisivamente en la vida de los demás.

Estos elementos "Írja", inexistentes pero importantes, también se pueden encontrar en Matemáticas, aunque aquí se les llama elementos ideales. Tal es, por ejemplo, el punto “infinitamente distante” en el que “se encuentran dos rectas paralelas”, que servirá para el estudio uniforme de la Geometría, pues se puede probar que existe cierta “dualidad” entre puntos y líneas rectas: algunos teoremas sobre puntos y líneas rectas siguen siendo ciertos si cambiamos la palabra “punto” por “línea recta” y viceversa. Por ejemplo, el enunciado “3 puntos no alineados determinan un triángulo” es evidentemente cierto:



Su enunciado dual es el siguiente: 3 rectas que no pasan por el mismo punto definen un triángulo:



Esta dualidad es muy conveniente. Basta probar uno de los enunciados y,

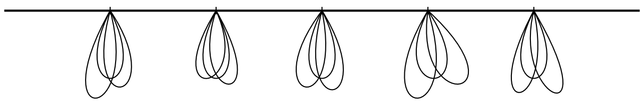
[1] Nota de los traductores: en la versión original en húngaro aparece *írja, hadnagy!*, que traducido al pie de la letra vendría a decir: *¡escriba, teniente!*.

automáticamente, habremos probado su dual: capturamos dos resultados en un único enunciado.

Sí, pero incluso en este ejemplo tan simple, el enunciado dual ya cojea, pues deberíamos haber añadido "siempre que las líneas rectas no sean paralelas". En este caso, es una bendición poder decir que las rectas paralelas ya estaban excluidas en el enunciado, pues sí que pasarían por un mismo punto: pasan todas por el punto infinitamente distante en que se cortan.

Pero este punto ideal infinitamente distante también es capaz de realizar tareas mucho más grandes que simplemente ahorrarnos algunas oraciones que comienzan por "a menos que". Si asignamos un único punto infinitamente distante común a líneas rectas que tengan la misma dirección, esto es, a líneas rectas que sean paralelas, pero otro punto infinitamente distante diferente a lineas rectas con distinta dirección, habremos creado tantos puntos ideales como direcciones existen. Además, es fácil indicar a cuál de éstos elementos nos referimos: basta indicar la dirección que apunta hacia él. Si modificamos un poco nuestras coordenadas, incluso podremos escribir la ecuación de la línea en la que se encuentran todos los puntos infinitamente distantes. Resulta que dicha ecuación tiene la misma forma que la ecuación de una línea recta, por lo que se dice que los puntos infinitamente distantes se encuentran en una línea recta infinitamente distante.

Bueno, hasta ahora todo esto parece un truco un tanto extraño: hemos escrito la ecuación de una línea recta inexistente. Quizás hubiera sido mejor que ni tan siquiera intentáramos imaginarla. Una línea recta es infinita en ambas direcciones y, sin embargo, sólo le hemos asociado un punto infinitamente distante (de eso se trata la dualidad, dos puntos ideales ya lo arruinarían todo); es como si sus dos extremos se encontrasen en el infinito, donde formarían una especie de lazo. Por tanto, aunque las líneas rectas se extienden en dos direcciones, transformadas en estos lazos, cuelgan de los puntos individuales de la línea recta infinitamente distante como si de frutas en una rama se tratasen y de modo que líneas rectas paralelas cuelgan de un mismo punto:



Aunque no debería trazar la línea recta infinitamente distante como una recta, pero ¿quién sabe cómo debería hacerlo? Tiene uno de sus puntos en el este y en el oeste al mismo tiempo, en otro de sus puntos se encuentran el norte y lo mismo ocurre para cualquier orientación posible. Olvidemos este asunto, ni tan siquiera pertenece al mundo de lo imaginables; el "teniente Írjá" no es más un error tipográfico.

¡Pero de qué cosas tan sorprendentes es capaz esta línea recta infinitamente distante! Dado que ya conocemos su ecuación, no es nada temerario intentar determinar sus puntos de corte con, por ejemplo, una parábola, tan sólo se trata que buscar las soluciones comunes de ambas ecuaciones. Resulta que será la línea recta infinitamente distante, a quien acabamos de considerar como la confusión en sí misma, quien ilumine con la luz correcta a la familia de las secciones cónicas.

Porque a cualquiera que se ocupe de este problema le surgirá la siguiente cuestión: dada una ecuación de segundo grado con dos incógnitas, ¿cómo se puede saber cuál es el tipo de sección cónica que le corresponde? La línea recta infinitamente distante da la respuesta: si su ecuación no admite ninguna solución en común con la dada, estamos ante una elipse; si ambas tienen una única solución en común, es una parábola y si tienen dos soluciones comunes, la ecuación dada es la de una hipérbola. Y no hay más posibilidades (una circunferencia no es más que una elipse perfectamente regular).

Ahora podemos dejar nuestra imaginación: el resultado obtenido se corresponde completamente con nuestras ideas. La elipse se encuentra por completo dentro de una región finita del plano, por lo que, evidentemente, no tiene ningún punto común con la línea recta infinitamente distante. Los dos brazos de la parábola son cada vez más empinados y se parecen cada vez más a dos líneas rectas paralelas, por lo que es natural pensar que se encontrarán en un mismo punto infinitamente distante. Las dos ramas de la hipérbola se extienden a lo largo de dos líneas rectas con direcciones diferentes, por lo que es natural pensar que estas ramas alcanzarán el Infinito en dos puntos diferentes.

¿No habría sido una lástima que no permitiéramos que estos inexistentes puntos se expresasen?

Ahora ya me atrevo con nuestra última asignatura pendiente: una ecuación de segundo grado como esta

$$x^2 = -9.$$

A un número cuyo cuadrado sea igual a -9, si es que existe tal número, lo denotaré por $\sqrt{-9}$. Sin embargo, hasta ahora no hemos encontrado ningún número cuyo cuadrado sea igual a un número negativo. Ya sea que eleve $+3$ o -3 al cuadrado, siempre obtengo $+9$. Ni tan siquiera sabemos quién o qué podría ser $\sqrt{-1}$. "Yo… yo no lo sé"[2] sería la única respuesta correcta. Pero supongamos que dije un "yo" un poco titubeante mientras pensaba y que algún entusiasta especialmente optimista se creyó que estaba dando a i por respuesta; es decir, que

$$\sqrt{-1} = i,$$

por lo que me interrumpe emocionado diciendo: "¡entonces yo también sé cuánto es $\sqrt{-9}$! ¡Es $3i$, aunque también podría ser $-3i$!". Bueno, pues tiene toda la razón en lo que dice: si $\sqrt{-1} = i$, entonces i es el número cuyo cuadrado es igual a -1; es decir,

$$i^2 = -1$$

y entonces

$$(+3i)^2 = 3i \times 3i = 9i^2 = 9 \times (-1) = -9$$

o

$$(-3i)^2 = (-3i) \times (-3i) = 9i^2 = 9 \times (-1) = -9.$$

El único problema es que esa i no existe, es todo un malentendido, un error de imprenta. De hecho, en verdad, no sabemos cuánto es $\sqrt{-1}$.

Pero ahora que el error de imprenta ya ha está en el libro, sigamos jugando con él como ya hicimos con el cálculo de $\sqrt{-9}$. Quizás este elemento inexistente también tenga sea capaz de muchas cosas.

¡Puede hacer cosas verdaderamente sorprendentes! La Teoría de funciones, que es la rama más respetada y distinguida de las Matemáticas, se construye sobre este elemento inexistente. Si queremos omitir esta "i", tenemos que restringirnos a la Teoría de funciones de variable real, pero no hay rama de las Matemáticas que no recurra a esta i en busca de ayuda, especialmente cuando pretende expresar algo muy profundo o complejo. La geometría no es una excepción. Esta "i" corona los esfuerzos por unificar enunciados individuales en un mismo sistema.

Prescindiendo de fórmulas, sólo puedo indicar una pequeña muestra de

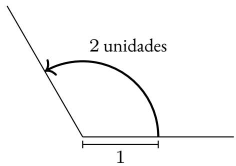
[2] Nota de los traductores: en la versión original en húngaro aparece *igazán nem tudom*, que traducido al pie de la letra vendría a decir: *yo no lo sé*.

todo esto, pues los elementos ideales deben enteramente su existencia a la fórmula que les define.

Por ejemplo, si permitimos el uso de i, revelaremos relaciones verdaderamente sorprendentes entre algunas funciones.

¿Quién podría imaginar que existiría alguna relación entre las funciones angulares y la función exponencial?

Sin embargo, se puede demostrar lo siguiente: si medimos la amplitud de un ángulo por la longitud de un arco circular de radio unidad,



entonces el coseno de un ángulo de, por ejemplo, dos unidades (denotado por cos 2 para abreviar) se puede escribir como:

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2},$$

donde e es la base de los logaritmos naturales. Se obtiene un fórmula similar para ángulos de cualquier amplitud:

$$\cos 3 = \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2},$$

$$\cos 4 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}, \quad \text{etcétera.}$$

¿Cómo es posible que el coseno de un ángulo, que no es más que el cociente entre dos distancias, y por lo tanto un verdadero número real, sea igual al inexistente número de la derecha?

Esto sólo es posible si el número de la derecha también es un número real. Mientras se efectúan las operaciones señaladas a la derecha, i aparece repentinamente desde un mundo imaginario, resalta las relaciones pertinentes y desaparece nuevamente. Este tipo de fenómenos también suelen aparecer a la hora de adivinar un número en el que alguien ha pensado previamente. Por ejemplo: “piensa un número, multiplícalo por 3, súmale 4, multiplica lo que tienes por 2 y réstale 6 veces el número que pensaste”. Esperamos hasta que nuestro amigo termine con las cuentas y, sin necesidad de más preguntas, ya podemos decirle con rotundidad: "¡te ha dado 8!". Podemos escribir los pasos del siguiente modo: sea x el número en cuestión, multiplicado por 3 es igual a $3x$, sumando 4 se convierte en $3x + 4$ y esto, una vez multiplicado por 2, es igual a $2 \times (3x + 4)$, a quien tenemos que restarle, finalmente, 6 veces el número que hemos pensado, y obtenemos así que

$$2 \times (3x + 4) - 6x$$

será el resultado final. Multiplicando ambos términos de $3x + 4$ por 2, llegamos a que

$$6x + 8 - 6x,$$

o equivalentemente,

$$8 + 6x - 6x,$$

pero si sumo $6x$ a 8 y le resto luego esa misma cantidad, es evidente que me sólo queda 8. El número que pensamos jugó cierto papel en nuestros cálculos, pero terminó por desaparecer al cancelarse.

De la relación entre las funciones angulares y la función exponencial también se pueden deducir nuevas identidades en las que ya no hay ni rastro de i. Por ejemplo, si queremos calcular el cuadrado de cos 2 partiendo de la fórmula

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2},$$

para evitar la incomodidad característica de las fracciones, pasamos el 2 de la derecha para la izquierda multiplicando

$$2 \times \cos 2 = e^{2i} + e^{-2i}$$

y elevamos ahora al cuadrado ambos miembros de esta ecuación. El cuadrado del primer miembro es igual a

$$2 \times \cos 2 \times 2 \times \cos 2 = 2 \times 2 \times (\cos 2)^2$$

(hay una buena razón para fingir olvidar que $2 \times 2 = 4$). El segundo miembro es la suma de dos términos. Por tanto, para calcular su cuadrado, tenemos que elevar primero al cuadrado el primer sumando. Para ello, conviene recordar que cuando elevamos al cuadrado una potencia, se multiplican los exponentes:

$$(e^{2i})^2 = e^{4i}.$$

A esto hay que sumarle el doble del producto de ambos términos. Teniendo en cuenta que podemos multiplicar dos potencias de e sumando sus exponentes y que el valor de la 0-ésima potencia es 1, obtenemos que:

$$2 \times e^{2i} \times e^{-2i} = 2 \times e^{2i+(-2i)} = 2 \times e^0 = 2 \times 1 = 2.$$

Y para terminar, todavía tenemos que sumarle el cuadrado del segundo término:

$$(e^{-2i})^2 = e^{-4i}.$$

Así pues, el cuadrado del lado derecho se puede escribir como sigue:

$$e^{4i} + 2 + e^{-4i},$$

o equivalentemente,

$$e^{4i} + e^{-4i} + 2$$

y entonces,

$$2 \times 2 \times (\cos 2)^2 = e^{4i} + e^{-4i} + 2.$$

Ahora pasamos uno de los factores de la izquierda a la derecha como divisor, por lo que todos los términos de la derecha deben dividirse entre 2. Dividimos pues 2 entre 2, que da 1 y dejamos indicada la división en los demás términos:

$$2 \times (\cos 2)^2 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2} + 1.$$

Pero aquí nos encontramos con un viejo conocido:

$$\frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}.$$

Ésa es la expresión cuyo valor coincide exactamente con el de $\cos 4$. Así pues,

$$2 \times (\cos 2)^2 = \cos 4 + 1$$

o, mejor redactado (ya que alguien podría pensar que estamos hablando del coseno de $4 + 1$, esto es, del coseno de 5),

$$2 \times (\cos 2)^2 = 1 + \cos 4.$$

Finalmente, pasando el 2 para la derecha dividiendo, obtenemos que:

$$(\cos 2)^2 = \frac{1 + \cos 4}{2}.$$

Ésta es una de las identidades trigonométricas más conocidas. Ya no hay en ella ni rastro de i, lo cual nos confirma que no nos hemos equivocado en nuestros cálculos, pero no hemos obtenido nada nuevo. No obstante, recordando que una suma de dos términos puede elevarse no sólo al cuadrado, sino que a cualquier número natural con ayuda del Teorema del binomio, obtendremos así muchas identidades trigonométricas de una sola vez.

Quisiera disculparme por una cuenta tan larga en la que además hay que recordar tantas reglas de cálculo. Pero me parece inevitable; para comprenderlo, es necesario que experimentes por ti mismo, al menos en una ocasión, cómo es que desaparece i de los cálculos después infundir nueva vida en ellos.

Pero no es éste el papel más importante de i.

Ni que decir tiene que también nos ayudó con las ecuaciones de segundo grado que todavía no podíamos resolver, pues se introdujo para tal fin: con su ayuda se extrae la raíz cuadrada de un número negativo. Es cierto que sólo obtendremos un resultado "imaginario", pero, a la vista de lo anterior, ya deberías estar convencido de que esos resultados imaginarios no deben tomarse a la ligera en ningún caso. Por ejemplo, la solución de

$$(x-2)^2 = -9$$

viene dada por

$$x - 2 = \sqrt{-9}$$

y ya sabemos que $\sqrt{-9} = 3i$ o $\sqrt{-9} = 3i$. Pasemos ahora el 2 de la izquierda para el segundo miembro y obtendremos así las dos "raíces" (las soluciones de las ecuaciones se llaman raíces, pues lo habitual es obtenerlas justo después de la extracción de raíces):

$$x = 2 + 3i \text{ y } x = 2 - 3i.$$

Estos números constan de una parte real y otra parte imaginaria; una combinación tan extraña del mundo real y el mundo imaginario se llama "número complejo". Aunque estos dos números pudieran parecerte muy extraños, su suma no deja de ser un número real. En efecto, pues al sumar $3i$ con $-3i$, se cancela la parte imaginaria. Además, también puedes comprobar fácilmente que su producto vuelve a ser real.

Entre los números complejos hay números imaginarios tanto reales como puros. Por ejemplo, $5 + 0i = 5$ es real, pero $0 + 2i$ es imaginario puro.

Si queremos extraer la raíz cuarta, sexta u octava de un número negativo, nos atascamos de la misma manera que en la extracción de la raíz cuadrada, pues la potencia par de cualquier número –ya sea éste positivo o negativo– siempre es un número positivo. Así, por ejemplo, la raíz cuarta de -16 no está ni entre los números positivos ni entre los números negativos, pues

$$(+2)^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

y

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \times (-2)} \times \underbrace{(-2) \times (-2)} = (+4) \times (+4),$$

que también es 16. Se podría pensar que estas nuevas raíces requieren de la introducción de nuevos elementos ideales. Sin embargo, resulta sorprendente y agradable que esto no sea necesario: con ayuda de i se pueden extraer todas las raíces. Además, se puede demostrar que toda ecuación de cualquier grado tiene soluciones complejas; este resultado es el Teorema fundamental del Álgebra y no contradice en nada a Abel cuando éste afirmó que estamos destinados a quedarnos atascados con la resolución de las ecuaciones de quinto grado. El Teorema fundamental del Álgebra es un resultado de "mera existencia"; no permite encontrar un número que satisfaga la ecuación empleando operaciones fundamentales y radicales.

La extracción de raíces cuadradas siempre nos proporciona dos valores: uno positivo y otro negativo. Es por ellos que una ecuación de segundo grado siempre admite dos raíces entre los número complejos. O más bien, no siempre, porque la ecuación

$$(x-3)^2 = 0$$

sólo admite una solución, pues sólo hay un número cuyo cuadrado es igual a cero: el propio cero; por lo que debe ser

$$x - 3 = 0,$$

de donde se deduce que

$$x = 3$$

es la única solución. La forma expandida de esta ecuación es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

y podemos aproximarnos a esta expresión tanto como deseemos si consideramos ecuaciones cuyos coeficientes se parecen cada vez más a 6 y a 9 respectivamente. Cada una de estas ecuaciones tiene dos raíces distintas que se acercan cada vez más entre sí a medida que nos aproximamos a la ecuación de partida. Es por esto que se dice que en el momento en que estas ecuaciones coinciden con la ecuación

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

las dos raíces también "coinciden".

¿Cuántas raíces tiene una ecuación de cuatro grado? La ecuación

$$x^4 + 1 = 0$$

se puede resolver sin ayuda de i. Efectivamente, pues tanto $+1$ como -1 elevados a la cuarta potencia dan $+1$. En consecuencia, pudiera parecer que sólo tiene dos raíces: $+1$ y -1. Pero ahora habla i: "¡oh, no! Eso no está bien, si la ecuación es de cuarto grado debería tener cuatro raíces. ¡Y aquí estoy yo! aquí estoy yo". Y de hecho, i es una raíz y $-i$ también, pues

$$i^4 = \underbrace{i \times i} \times \underbrace{i \times i} = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = +1$$

y

$$\begin{aligned}(-i)^4 &= \underbrace{(-i) \times (-i)} \times \underbrace{(-i) \times (-i)} = i^2 \times i^2 \\ &= (-1) \times (-1) = +1.\end{aligned}$$

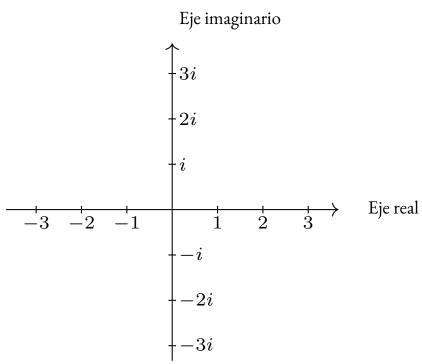
De este modo, i aporta orden a las raíces de cada ecuación, pues se puede probar que entre los números complejos una ecuación tiene tantas raíces como indica su grado, pudiendo –por supuesto– "coincidir" algunas de ellas.

Este es el servicio que nuestro i presta al Álgebra.

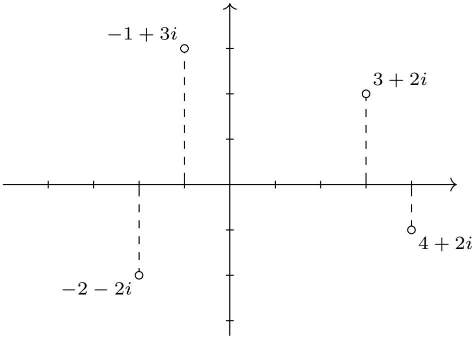
Pero reserva su mayor tesoro para la Teoría de funciones.

Para dar una pequeña muestra de lo que digo, tengo que representar antes los números complejos.

Consideremos a i como un nuevo tipo de unidad con la que contar. En tal caso, tenemos que representar sus múltiplos y submúltiplos en una nueva línea recta numérica. El punto 0 de esta nueva línea puede coincidir con el punto 0 de la línea de los números reales, pues $0 \times i$ coincide con 0. Por tanto, podemos considerar a estas dos líneas numéricas como los ejes fijos de un sistema de coordenadas:

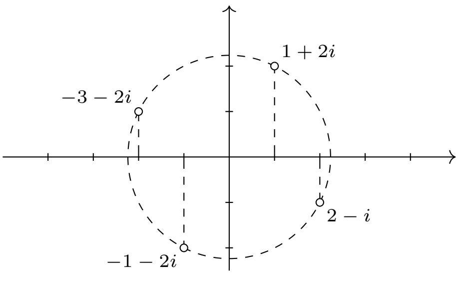


Esto nos permite representar a los números complejos, que constan de una parte real y otra imaginaria, como puntos del plano; la abscisa del punto del plano que representa a un número complejo dado será su parte real y la ordenada su parte imaginaria. A continuación puedes ver la representación gráfica de algunos números complejos:



Por tanto, los números complejos ya no se distribuyen a lo largo de una línea recta, sino en un plano numérico.

Llamaremos módulo (o valor absoluto) de un número complejo a la distancia al punto 0. Por supuesto, esta distancia puede ser más grande o más pequeña, pero a una misma distancia del punto 0 hay una gran cantidad de números complejos: están todos en una circunferencia con centro en el punto 0 y radio tal distancia. correspondiente:



No hay razón para considerar a uno de estos números más pequeño que otro. Por tanto, las expresiones "más pequeño" y "más grande" carecen de sentido en el contexto de números complejos.

Sin embargo, uno puede convencerse fácilmente de que las antiguas reglas de cálculo permanecen intactas si operamos con números complejos como antes: como si i fuese alguien desconocido de quien todo lo que sabemos es que podemos substituir i^2 por -1 y viceversa.

Regresemos ahora a un resultado anterior. Del ejemplo del chocolate sabemos que

$$1\frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \cdots$$

En el lado derecho cada sumando es $\frac{1}{10}$ del anterior; es decir, $\frac{1}{10}$ es la "razón" de la progresión geométrica. Tratemos de transformar $1\frac{1}{9}$ de forma que aparezca $\frac{1}{10}$ por algún sitio:

$$1 = \frac{9}{9}, \quad 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

Ya hemos simplificado mucho, pues ahora podemos dividir numerador y denominador entre un mismo número. Aquí dividiremos entre 10, sin importarnos en absoluto que sólo podamos indicar tal división en el denominador:

$$1\frac{1}{9} = \frac{1}{\frac{9}{10}}.$$

Esto es útil porque ahora podemos expresar $\frac{9}{10}$ fácilmente en términos de $\frac{1}{10}$: una unidad consta de diez décimos, por lo que si le quitamos un décimo, nos quedan exactamente $\frac{9}{10}$, de modo que

$$\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}$$

y así, finalmente,

$$1\frac{1}{9} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}.$$

Si reemplazamos $1\frac{1}{9}$ por la expresión de la derecha, llegamos a que

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \cdots$$

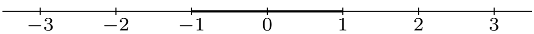
De este modo nuestro resultado puede generalizarse. Si la razón común de la progresión geométrica fuese, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{1}{10}$, entonces cada sumando es $\frac{2}{3}$ del anterior, de modo que los términos de la progresión serían:

$$1, \quad 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}, \cdots$$

pudiendo probarse ahora que

$$\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$$

Pero debemos ser cuidadosos, pues –como bien sabemos– no podemos sumar cualquier progresión geométrica. Por ejemplo, si la razón es 1, -1 o cualquier otro número cuyo valor absoluto sea mayor que 1, entonces no podremos sumar tal progresión. Se puede demostrar que si el valor absoluto de la razón es menor que uno, entonces la serie correspondiente sí es convergente y además, su suma se puede expresar de forma análoga a la ya comentada para $\frac{1}{10}$ y $\frac{2}{3}$. Por tanto, las razones para las que podemos sumar una progresión geométrica se encuentran todas ellas entre -1 y 1.



Si pienso en uno de los muchos números que caen en ese intervalo, pero no digo en cuál, entonces este número puedo llamarse x y aun siendo completamente desconocido, se pueden enumerar los términos de la progresión geométrica que con él se forma; son:

$$1, \quad 1 \cdot x = x, \quad x \cdot x = x^2, \quad x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x = x^3,$$

$$x^3 \cdot x = x \cdot x \cdot x \cdots x = x^4, \ldots$$

y para esta progresión geométrica también es cierto que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esto es cierto para cualquier x en el intervalo entre -1 y $+1$.

Evidentemente, el valor de $\frac{1}{1-x}$ depende del número x escogido, por lo que es una función de x. Se suele decir que hemos desarrollado la función en una "serie de potencias", que no es más que una serie infinita formada por potencias de x de cada vez mayor grado y son las sumas parciales de esa serie quienes dan una aproximación cada vez más precisa del valor de $\frac{1}{1-x}$. Así pues, podemos considerar a 1 como una primera y tosca aproximación de $\frac{1}{1-x}$, pero $1 + x$ ya es una aproximación más presentable, $1 + x + x^2$ todavía es mejor y así sucesivamente. La siguiente pregunta surge entonces de forma natural: dada una función, ¿es posible desarrollarla como una serie de potencias? (por supuesto, no esperamos una serie como la anterior, sino otra en la que las potencias de x aparezcan multiplicadas por ciertos números). Ésta es una cuestión fundamental en la Teoría de funciones. La función $\frac{1}{1-x}$ es relativamente simple y sus valores se pueden calculan fácilmente. Sin embargo, también es posible desarrollar la función exponencial en una serie de potencias. Y si la base es $e = 2.71\ldots$, para cualquier número x,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots,$$

donde –por si ya lo habías olvidado–

$$2! = 1 \times 2, \quad 3! = 1 \times 2 \times 3, \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

y así sucesivamente.

Esto será de gran ayuda para calcular valores de e^x cuando consideramos números concretos en lugar de x. Calcular potencias de un número irracional no parece nada cómodo ni divertido. Pero si x es pequeño, $1 + x$ será una buena aproximación de e^x y para calcular este valor tan sólo hay que sumar ese número a 1, por lo que no es más que un juego infantil. Si necesitásemos mayor precisión, cogeríamos una suma parcial más larga. En ese caso, tendríamos que calcular algunas potencias del número dado. Pero, por ejemplo, para $x = \frac{3}{10}$ es más fácil elevar este número a la segunda, tercera o cuarta potencia, que extraer la décima raíz del número irracional $(2.71\ldots)^3$, que es lo que realmente significa $(2.71\ldots)^{3/10}$.

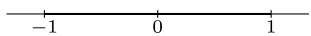
Es muy bueno que esta afirmación sea cierta para todo x. Las funciones angulares y la función logarítmica pueden desarrollarse en serie de potencias y, en la actualidad, sus tablas de valores se elaboran a partir de estos desarrollos.

Pero estas series no son todas convergentes en todo punto, por lo que conviene tener mucho cuidado para no reemplazar algo por una supuesta aproximación cuando, a lo mejor, ni tan siquiera hay nada que aproximar. Surge entonces la siguiente pregunta: da una función, ¿cómo puedo saber para qué valores de x tiene sentido su desarrollo en serie de potencias?

Echemos otro vistazo a nuestra serie geométrica. Ya hemos dicho que el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

es válido en el intervalo entre -1 y $+1$.



¿Es posible convencerse de que 1 marca el límite de validez de dicha identidad mirando únicamente para $\frac{1}{1-x}$?

¡Duele a la vista! ¿Qué pasaría si x fuese igual a 1?

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

¡Hasta es doloroso escribirlo! Ahí está la eterna prohibición: ¡nunca dividas entre 0! Por lo que es la propia función quien ya en el punto $x = 1$ nos grita "¡alto!".

¿Siempre revela la función hasta dónde podemos llegar?

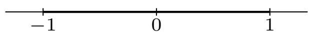
No entre los números reales. Y esto causó infinidad de problemas con multitud de funciones. Era hora de que i interviniera de nuevo y, al hacerlo, aclaró la cuestión de una vez por todas.

Veamos un ejemplo.

Cualquiera que sea un poco hábil manejando fórmulas puede convencerse fácilmente a partir de nuestra serie geométrica que la función $\frac{1}{1+x^2}$ se puede desarrollar en serie de potencias como:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

y que esta serie sólo es convergente cuando x se encuentra en el intervalo entre -1 y $+1$.



¿Revela esta función los límites de su desarrollo en serie de potencias?

Sustituyendo x por $+1$, tenemos que:

$$\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

por lo que no hay ningún problema en ese punto. Quizás el problema esté en el límite por la izquierda. Sustituyendo x por -1, observamos que

$$\frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

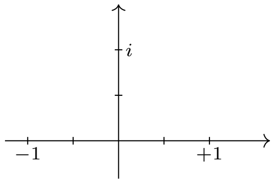
por lo que tampoco hay ningún problema en este punto.

Estamos metidos en un buen lío.

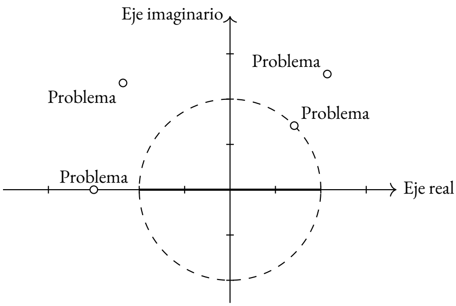
Y es entonces cuando i viene al rescate: "¿por qué no me pruebas conmigo para x?". Intentémoslo:

$$\frac{1}{1+i^2} = \frac{1}{1+(-1)} = \frac{1}{0}.$$

¡Alto! ¡División entre 0! Si pensamos en el plano de los números complejos, vemos de inmediato que la distancia entre i y el punto 0 es igual a 1 y el hecho de que la función se encuentre con un precipicio en ese punto muestra que no debemos aventurarnos más allá de los límites del disco de radio 1:



Concluimos entonces que no sólo basta con los números reales, sino que también conviene examinar los números complejos. En general, si hay un punto en el que la función llega a un precipicio, entonces no será posible desarrollar tal función como serie de potencia en cualquier punto más distante de 0 que dicho punto. Por tanto, dada una función, lo que debemos hacer es buscar en el plano complejo el punto problemático más cercano al punto 0. El módulo de ese punto es el radio del círculo centrado en el punto 0 en cuyo interior sí es posible desarrollar la función en serie de potencias.



Obtenemos así un círculo dentro del cual la serie de potencias sí es convergente y es posible que también lo sea en algún punto de su frontera, pero fuera de ese círculo la serie no converge. Conviene observar que dicho círculo también define un intervalo de números reales centrado en 0.

Así pues, i apareció de nuevo, puso todo en orden y, si queremos, ha vuelto a desaparecer, pues podemos ceñirnos al intervalo de números reales que i ha delimitado. Pero el buen matemático, encantado y hechizado, ya no le dejará esfumarse. Si i sabe tanto, ya no es justo considerarle como algo inexistente y merece la pena explorar la Teoría de funciones de variable compleja, ese "mundo creado a partir de la nada" y en el que el orden todavía es mayor que en el mundo real.

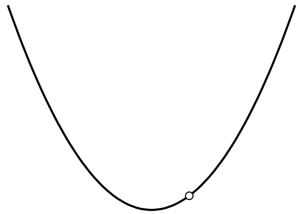
16. Algunos secretos del taller

Tan pronto como alguien se ha liberado de la primera influencia de una obra de arte, se despierta en él la curiosidad por cosas más mundanas y sencillas; uno quisiera saber cómo surgió la obra maestra y qué hay de humano en ella: el sudor, la presentación escrupulosamente limpia. En resumen, sería interesante echar un vistazo al interior del taller.

Regresemos de los mundos imaginarios y echemos un vistazo a los secretos del taller del matemático. Me refiero a las minucias del día a día que pretendía ahorrarte como lector, pero que no puedo ocultar por completo a tus ojos, pues el escritor que motivó la este libro tenía curiosidad por el cociente diferencial y el cociente diferencial forma parte de la caja de herramientas del matemático. Aunque este no sea un objeto tan brillante y atractivo como los anteriores, su importancia es extraordinaria; no hay obra de arte sin trabajo detallado.

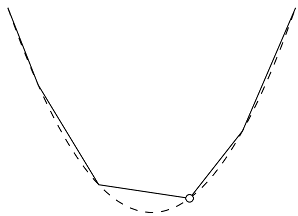
Desde el principio se dijo que el concepto de función es el núcleo de cualquier trabajo matemático y que es la gráfica correspondiente quien nos da una imagen de la función. Pero esta imagen es necesariamente imperfecta. Inicialmente, construíamos dicha curva juntando algunos segmentos rectos, pero después ya intentábamos condensar cada vez más y más segmentos con el objetivo de suavizar la gráfica. Y efectivamente, después de los primeros toques, los segmentos trazados a lápiz se iban fundiendo en algo de apariencia muy similar a la de una verdadera curva. En nuestro dibujo, un polígono regular de 16 lados apenas se podía distinguir de un círculo. Pero nadie creerá que se puedan deducir propiedades y relaciones exactas y precisas sobre nuestras funciones a partir de una imagen tan burda y vaga. Es necesario un instrumento mucho más fino que detecte y registre cualquier pequeña variación de la función con total precisión. Uno de esos instrumentos de precisión es el cociente diferencial.

Comencemos por el dibujo. Cuando intenté dibujar la gráfica de la parábola, dije que sus brazos se hacían cada vez más empinados. Sé bien lo que significa la dirección de una línea recta; su pendiente se puede comprobar de nuevo en cada punto. Puedes confiar en la línea recta: nunca se desviará de la dirección que ha tomado. Pero una curva es precisamente una curva porque cambia constantemente de dirección. Me fijo en un punto de la curva y le pregunto: "¿cuál es tu dirección aquí?".

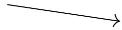


Pero la curva es suave y se me escapa de las manos: no hay una respuesta clara. Pero sí que siento que tiene cierta dirección en ese punto; en absoluto carece de sentido hablar de la inclinación o pendiente de la parábola.

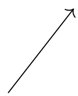
Rebobinemos la película hasta el momento en el que nuestra curva aún no era tan suave. En uno de esos fotogramas, seleccionamos cierto punto de la curva:



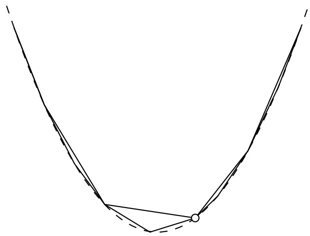
Todavía hay un "codo" en el punto indicado, por lo que la curva aún carece de una dirección definida en ese punto. Antes del punto en cuestión la dirección era esta:



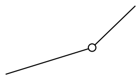
y después del punto esta:



por lo que la curva cambia de dirección en el propio punto. Avancemos ahora la película lentamente unos cuantos fotogramas más hasta un instante en el que ya aparecen más puntos intermedios:



Ahora el codo ya no es tan agudo:

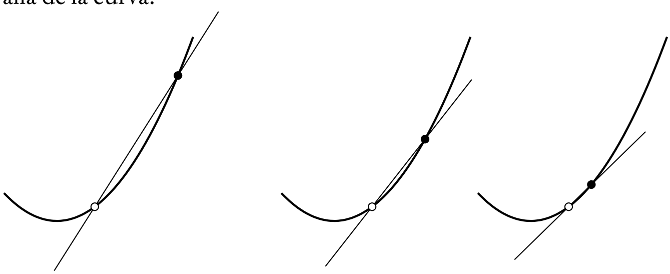


y las dos direcciones que se encuentran en nuestro punto apenas difieren entre sí.

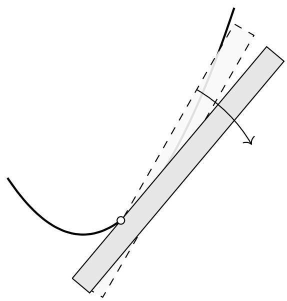
Sólo con la ayuda de un dibujo no puedo interpretar qué ocurrirá cuando añada más valores intermedios. Sin embargo, es evidente que la esquina se irá suavizando paulatinamente y las direcciones de antes y después del punto diferirán cada vez menos entre sí. La dirección de la curva en ese punto debe entenderse como la dirección común a la que se aproximan cada vez más ambas direcciones mientras se suaviza la curva.

Si estamos convencidos de que ambas direcciones se aproximan a una dirección común, bastará entonces con fijarnos en una de ellas.

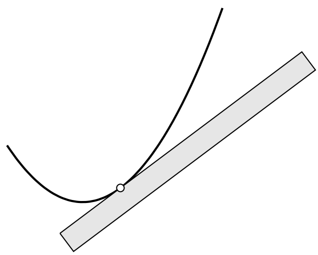
Consideremos entonces, por ejemplo, líneas rectas *posteriores* a nuestro punto. Apreciaremos mucho mejor su dirección si prolongamos las rectas más allá de la curva:



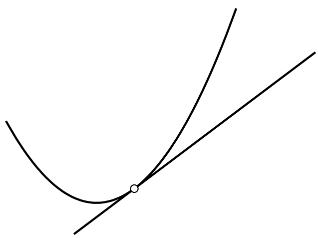
De este modo, obtenemos una serie de rectas secantes a la curva. A medida que la división se hace más densa, el punto adyacente se acerca cada vez más a nuestro punto y la porción de recta secante que queda en el interior de la curva se hace cada vez más pequeña. Observamos con claridad lo que sucede si sustituimos las rectas secantes por una regla que gira hacia afuera mientras uno de sus extremos permanece fijo sobre nuestro punto:



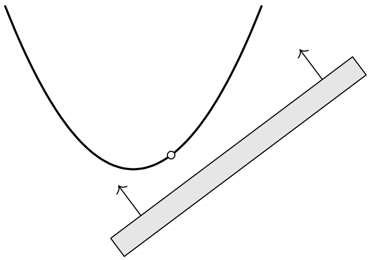
Habrá un momento en que el punto adyacente coincida con nuestro punto y la regla dejará entonces de cortar a la curva:



Y las rectas secantes se convierten en una recta tangente:



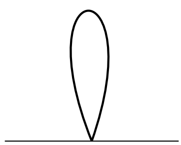
Es justo en ese momento cuando tenemos la sensación de haber captado la dirección a la que se aproxima la parte posterior de la esquina. Si nos acercamos a la curva desde el exterior con una regla en esa dirección, llegaremos justo a nuestro punto y por un instante, la recta se adhiere perfectamente a la curva



y si ligan tan bien juntas es porque ambas comparten la misma dirección. Afortunadamente, no tenemos que investigar esta dirección en el diminuto punto donde se tocan, porque la línea recta conserva el recuerdo de ese instante hasta el Infinito; su dirección no varía en absoluto.

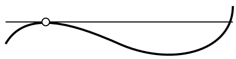
Ahora ya sabemos qué se entiende por dirección de una curva suave en uno de sus puntos: es la dirección de la recta tangente a la curva en dicho punto. Tal recta puede caracterizarse completamente, por ejemplo, mediante la razón con la que solemos indicar la pendiente de una cuesta. Y el coeficiente diferencial es justamente ese número.

Ya nos encontramos con la noción de tangencia cuando, de forma puramente algebraica, concluimos que una sección cónica puede tener 0, 1 o 2 puntos en común con una línea recta. Dijimos en aquel momento que si ambas figuras geométricas tienen un único punto en común, entonces la línea recta toca a la sección cónica. Esto es cierto y suficiente si hablamos de secciones cónicas. No obstante, en general, la propiedad decisiva de la recta tangente a una curva no es el tener un único punto en común con la curva; no basta con eso. Por ejemplo, si la curva tiene una esquina:



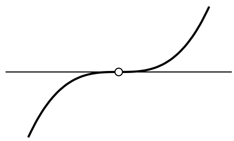
la línea recta de la figura que pasa por la esquina sin cortarla no puede considerarse en modo alguno como una recta tangente aunque sólo tenga un punto en común con la curva. Es evidente que tal línea recta no indica la dirección de la curva en ese punto. De hecho, en ese punto, la curva no tiene una dirección clara y la línea recta ni tan siquiera indica la dirección por la izquierda o por la derecha.

Por otra parte, la línea recta de esta figura



tiene dos puntos en común con la curva y sin embargo, sí debemos considerarla como la recta tangente a la curva *en el primer punto*, donde sí se amolda perfectamente a la curva.

Podríamos pensar que la propiedad definitoria consiste en que las tangentes tocan y las secantes intersecan o cortan, pero esto tampoco es correcto. Consideremos, por ejemplo, la línea recta de esta gráfica



que en el mismo momento en que se adhiere a la curva la interseca. Pero se amolda perfectamente tanto a la rama inferior como a la rama superior de la curva y no hay ningún motivo para no considerarla como la recta tangente en tal punto.

La condición característica consiste en que lleguemos a la recta en cuestión mediante rectas secantes que pasen por puntos de la curva cada vez más cercanos. Esto es lo que ocurre en los dos últimos casos; te pido que lo compruebes por ti mismo girando una regla que se mantiene anclada en el punto correspondiente.

En consecuencia, si queremos determinar la dirección de una recta tangente, en general, no podremos evitar un laborioso y detallado trabajo con rectas secantes cada vez más cercanas.

Por supuesto, jamás consideraremos el giro de una regla como un método preciso. Si para establecer cierta propiedad precisa fuese necesario conocer la dirección exacta de la curva en un punto, no nos atreveríamos a emplear un resultado obtenido de tal modo. El método de precisión no se debe esperar del dibujo, sino sólo del cálculo. [1]

Comencemos con un ejemplo. Quiero estudiar el comportamiento de la función dada por la ecuación

$$y = x^2.$$

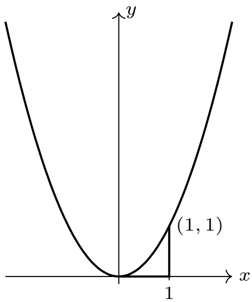
Ya sabemos que su gráfica es una parábola. Determinemos ahora con exactitud cuál es la dirección de la recta tangente a esa parábola en el punto cuya abscisa x es igual a 1.

En ese punto, la ordenada y es

$$y = 1^2 = 1,$$

por lo que nuestra parábola pasa por el punto $(1, 1)$. Buscamos entonces la dirección de la recta tangente que pasa por el punto $(1, 1)$.

La gráfica de la curva ya es bien conocida:



Sabemos lo que tenemos que hacer: en primer lugar, tenemos que elegir puntos adyacentes en la curva cada vez más próximos al punto $(1, 1)$. Luego dibujaremos las rectas secantes que pasan por el punto $(1, 1)$ y cada uno de esos puntos y determinaremos la dirección de cada una de estas rectas secantes mediante cocientes similares a los que empleamos para expresar la pendiente de un desmonte del ferrocarril. Una vez hecho todo esto, tendremos que averiguar cuál es el valor al que se aproximan estos cocientes cuando las rectas

[1] Aquellos que no sientan especial curiosidad por el cálculo diferencial e integral y estén cansados del trabajo detallado pueden omitir excepcionalmente lo que resta de este capítulo y el capítulo siguiente.

secantes se acercan al momento en que dejan de cortar a la curva.

Elegiremos los puntos adyacentes de tal manera que iremos hacia la derecha del punto $(1, 1)$ primero una unidad, luego una décima, luego una centésima, luego una milésima y así sucesivamente. En tal caso, las abscisas x de los puntos adyacentes serán las siguientes:

$$1 + 1 = 2,\ 1.1,\ 1.01,\ 1.001, \ldots$$

Las coordenadas de estos puntos también deben ser calculadas. Es decir, dado que $y = x^2$, tenemos que elevar las abscisas cuadrado. Esto es muy fácil, porque 2^2 es, por supuesto, igual a 4, y quizás todavía recuerdas la segunda fila en el Triángulo de Pascal, por lo que (teniendo en cuenta los ceros y los puntos decimales):

$$1.1^2 = 1.21,\ 1.01^2 = 1.0201,\ 1.001^2 = 1.002001, \ldots$$

Para no preocuparnos por pequeños detalles que enturbiarían consideraciones más importantes, quisiera puntualizar un detalle antes de continuar. Ya hicimos muchas simplificaciones con fracciones, por lo que sabemos que podemos dividir numerador y denominador entre un mismo número. Pero, por ejemplo, simplificando dividiendo entre 2 tenemos que

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

entonces también es cierto que

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Por tanto, también podemos multiplicar numerador y denominador por 2 por un mismo número. Aunque la expresión de la fracción se complica, esta regla será útil cunado aparezcan decimales en la fracción, como por ejemplo, en el siguiente caso:

$$\frac{0.21}{0.1}.$$

Ya sabemos que multiplicar un número decimal por 10 equivale a, simplemente, desplazar el punto decimal un lugar hacia la derecha. Y como es superfluo escribir un cero al comienzo de un número entero, multiplicando numerador y denominador por 10, obtenemos que

$$\frac{0.21}{0.1} = \frac{2.1}{1} = 2.1.$$

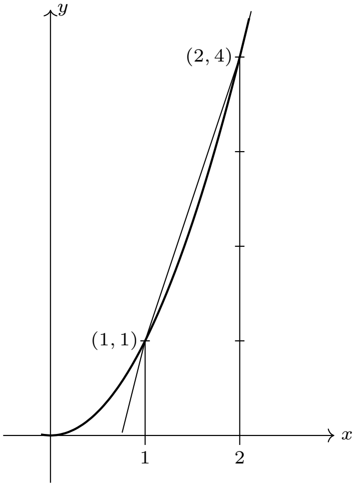
Del mismo modo, multiplicando numerador y denominador por 100, la fracción

$$\frac{0.0201}{0.01}$$

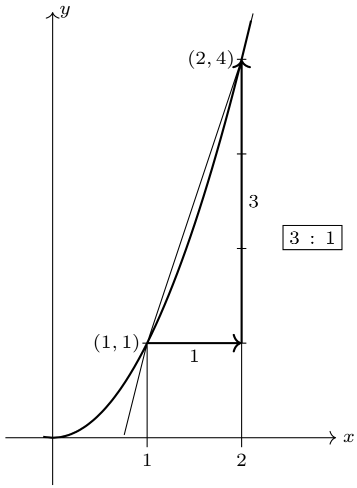
se convierte en

$$\frac{0.0201}{0.01} = \frac{2.01}{1} = 2.01.$$

Ahora ya podemos comenzar con el trabajo detallado. La abscisa x del primer número adyacente es igual 2 y su ordenada y es igual a $2^2 = 4$. Por tanto, la primera secante es la línea recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 4)$:



Determinemos la dirección de esta secante. Está claro: nos hemos movido una unidad hacia la derecha desde el punto $(1, 1)$ y 3 unidades hacia arriba, ya que es esta la altura que la coordenada Y del segundo punto se ha elevado por encima de nuestro punto. Se puede ver claramente, con líneas más gruesas, en la gráfica que se muestra en la página siguiente.

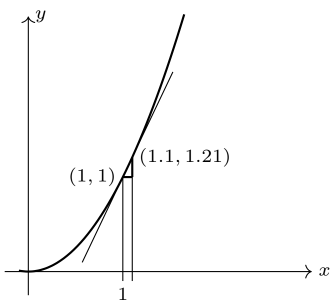


Por tanto, la pendiente de la primera recta secante es igual a 3, pues

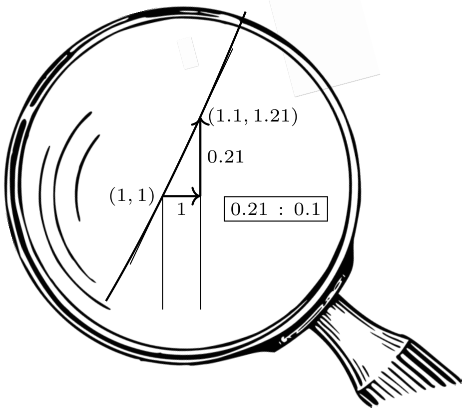
$$\frac{3}{1} = 3 = 2 + 1$$

(hay una buena razón por la que debemos escribirlo así).

Consideremos ahora el siguiente punto adyacente, para el cual $x = 1.1$ y ya habíamos calculado que entonces $y = 1.1^2 = 1.21$, por lo que ahora tenemos que identificar el punto $(1.1, 1.21)$. Si trato de dibujar la recta secante que une este punto con nuestro punto de partida e indico el triángulo rectángulo asociado a su pendiente con trazo más grueso, los trazos de la figura ya empiezan a confundirse:



Echemos un vistazo más de cerca a la parte relevante de la figura:



¿Cuánto nos hemos movido hacia la derecha? Pues 0.1, porque es esa la diferencia entre las abscisas de ambos puntos. ¿Cuánto ha crecido la ordenada del segundo punto por encima de nuestro punto $(1, 1)$? Pues tanto como la diferencia entre las ordenadas de ambos puntos, esto es,

$$1.21 - 1 = 0.21 \qquad \text{unidades.}$$

Por tanto, la pendiente de la segunda secante es

$$0.21 \div 0.1,$$

es decir,

$$\frac{0.21}{0.1}$$

y ya comentamos anteriormente que esto es lo mismo que

$$2.1 = 2 + \frac{1}{10}.$$

Si pasamos al siguiente punto adyacente, para el cual $x = 0.01$ e $y = 1.01^2 = 1.0201$ como ya se ha calculado de antemano, necesitaríamos de una lupa con más aumentos. Pero quizás podamos prescindir del dibujo, porque por lo visto hasta ahora, basta dividir la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abscisas. La ordenada de este nuevo punto adyacente y la ordenada del punto original $(1, 1)$ difieren en

$$1.0201 - 1 = 0.0201 \qquad \text{unidades,}$$

mientras que las abscisas de ambos puntos se difieren en

$$1.01 - 1 = 0.1 \qquad \text{unidades.}$$

De ahí que la pendiente de la tercera recta secante sea igual a

$$0.0201 \div 0.01 = \frac{0.0201}{0.01}$$

y esta fracción –ya lo explicamos antes– coincide con

$$2.01 = 2 + \frac{1}{100}.$$

Podemos continuar calculando el valor de los cocientes de las diferencias entre ordenadas y las diferencias entre abscisas; en resumen: los "cocientes diferenciales" de las rectas secantes que indican su pendiente. Y a medida que el punto adyacente se acerca al punto original, obtenemos –uno tras otro– los siguientes valores:

$$2+1,\ 2+\frac{1}{10},\ 2+\frac{1}{100},\ 2+\frac{1}{1\,000},\cdots$$

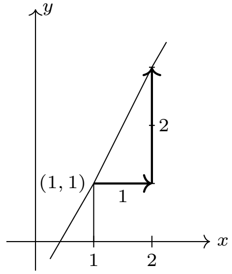
Ya vimos que la sucesión

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ldots$$

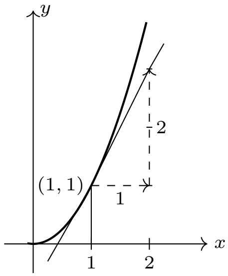
tiende a cero con la precisión y rigor del "ejemplo del chocolate". Por tanto, es al número

$$2$$

al que se aproximan cada vez más –o, si lo prefieres, al que tienden– las pendientes de las rectas secantes hasta convertirse en una recta tangente. Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$ es igual a 2, es decir, a $\frac{2}{1}$. Sabiendo esto, podemos trazar la recta tangente:



y si dibujamos la parábola con ayuda de una gran cantidad de valores intermedios, vemos que efectivamente esa recta toca tangencialmente a la parábola:



Por tanto, mientras nos entreteníamos con dibujos imprecisos, cayó en nuestras manos un método completamente exacto y riguroso para determinar la dirección de la recta tangente a una curva por un punto dado: elegimos un punto de la curva cercano al punto dado, dividimos la diferencia entre las ordenadas de ambos puntos por la diferencia entre sus abscisas y finalmente, intentamos averiguar a qué valor tienden estos cocientes cuando el punto cercano se acerca cada vez más al punto dado.

El valor al que se acercan –o al que tienden– los cocientes diferenciales se llama derivada. La diferenciación, tal y como anuncié previamente, es el método preciso y riguroso que nos permite determinar perfectamente la pendiente de la recta tangente a una suave curva en cierto y por tanto, al mismo tiempo, también nos permite examinar al detalle el comportamiento de la curva.

Este procedimiento se puede aplicar en cualquier punto: si la curva es suave, la recta tangente en cada punto de la curva tendrá una dirección determinada. En el punto $(2, 4)$, la pendiente de la parábola parece ser más pronunciada. Si calculamos los cocientes diferenciales asociados a los puntos de abscisa

$$x = 2 + 1,\ 2.1,\ 2.01,\ 2.001, \ldots$$

respecto del punto $(2, 4)$, obtenemos que –uno tras otro– su valor es

$$4 + 1,\ 4 + \frac{1}{10},\ 4 + \frac{1}{100},\ 4 + \frac{1}{1\,000}, \cdots$$

y entonces, con precisión absoluta, 4 es el número al que tienden estos valores. Por tanto, la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 4)$ es igual a $4 = \frac{4}{1}$

y es entonces mayor que la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 1)$, que era igual a $2 = \frac{2}{1}$.

Aplicando este método, se prueba que: en el punto de la parábola con abscisa $x = 3$, la pendiente de la recta tangente es igual a 6; en el punto de abscisa $x = 4$, es igual a 8 y, en general, la pendiente de la recta tangente a la parábola en uno de sus puntos es el doble de la abscisa del punto en cuestión. Esto se expresa diciendo que la derivada de la función

$$y = x^2$$

es, sea cuál sea el valor de x, igual a

$$2x.$$

Y con esto, toda la información sobre el comportamiento de la parábola está en nuestras manos.

Para obtener un punto de partida, es necesario leer un dato más de la ecuación que define a la parábola: y es que esta pasa por el punto 0 porque para $x = 0$, dado que el valor de $y = x^2$, el valor de la ordenada correspondiente es $x^2 = 0^2 = 0$. Todo lo demás ya lo revela la derivada.

Por ejemplo, si x es un número negativo, su doble también es negativo, por lo que la pendiente de la recta tangente en ese punto será, por tanto, negativa. En uno de estos puntos, la recta tangente apunta hacia abajo y la curva también, porque se acomoda y adhiere a tal recta. Por el contrario, si x es positivo, su doble también es positivo, luego la curva apuntará hacia arriba en esos puntos. Si $x = 0$, su doble también es nulo, por lo que la pendiente de la recta tangente en el punto 0 es nula. Y una pendiente nula no es una pendiente. Es, en realidad, un camino horizontal que además, coincide en este caso con el propio eje x. Si aumenta el valor absoluto de x, también aumenta el valor absoluto de su doble, y con él la inclinación de la recta tangente.

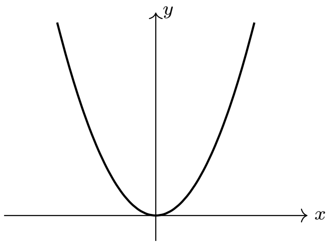
Esto da como resultado la siguiente imagen de la curva: la curva cae a la izquierda del punto 0, en el punto cero se hace horizontal por un instante al adherirse al eje x y de ahí en adelante, comienza a subir indefinidamente y cada vez más rápido. En consecuencia, el punto más bajo de la gráfica tiene abscisa $x = 0$ y, a medida que nos alejamos de ese mínimo, ambas ramas aumentan en altura y pendiente. Todo esto ya era conocido para nuestra parábola, pero en el caso de una función menos conocida, su derivada nos proporcionaría toda esta información.

Pero nuestros conocimiento sobre la parábola se agudizan si disponemos de su derivada. Cuando dibujamos las primeras curvas febriles, nos convencimos de que la gráfica de la función

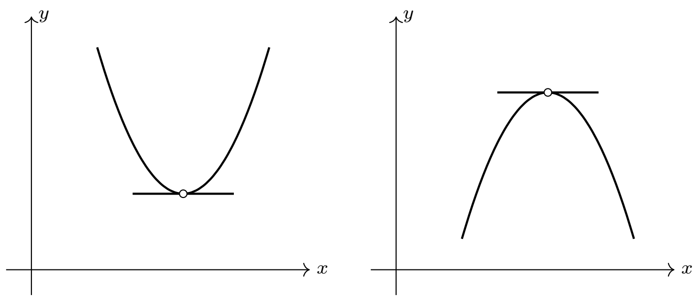
$$y = 2x$$

es una línea recta (lo cual es natural, pues estamos ante una ecuación de primer grado). Por tanto, esta función aumenta a un ritmo constante y se deduce de ello que aunque la inclinación de la parábola crece hacia ambos lados, no lo hace de forma apresurada o caprichosa, sino más bien de forma uniforme.

Por supuesto, la posición habitual de la parábola

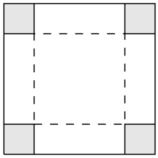


puede modificarse a multitud de situaciones y en muchos casos es ya no es tan evidente saber dónde está su punto más bajo o más alto. Pero la derivada lo detecta de inmediato: la recta tangente a la parábola en esos puntos es horizontal.



La búsqueda de estos puntos más bajos o más altos o, en el lenguaje de la Teoría de funciones, el estudio de máximos y mínimos de una función, tiene multitud de aplicaciones.

Supongamos que queremos hacer una caja a partir de una hoja de papel cuadrada recortando un pequeño cuadrado en cada una de sus cuatro esquinas, doblando luego los bordes hacia arriba.



El problema consiste en determinar cuál debe ser la dimensión de los cuadrados a recortar si queremos obtener una caja de capacidad máxima.

Desconocemos la longitud del lado de los cuadrados pequeños, por lo que le llamaremos x. En tal caso, calcular el volumen de la caja en función de x es relativamente sencillo. Es evidente que si x es muy pequeño, o lo que es lo mismo, que si recortamos cuadrados diminutos, entonces la caja será ancha y larga, pero muy baja. Por el contrario, si recortamos cuadrados muy grandes, la caja tendrá una base más pequeña, pero su altura será mucho mayor y tendremos así una caja alta, pero estrecha. Por tanto, x no debe ser ni demasiado pequeño ni demasiado grande; el valor óptimo estará en algún punto intermedio. La derivada determina con total precisión que obtenemos una caja de volumen máximo si el lado de cada cuadrado pequeño mide exactamente la sexta parte del lado del cuadrado grande.

Han disparado un proyectil; sabemos donde impactará, pues la derivada determina su trayectoria exacta.

Y todavía quedan innumerables aplicaciones.

Examinemos otro caso en el que la curva de la función no es tan conocida como la parábola. Como antes, al calcular los cocientes diferenciales, se puede determinar que en cada puto de la función función dada por la ecuación

$$y = x^3,$$

la pendiente de la recta tangente es igual a 3 veces el cuadrado de la abscisa del punto en cuestión; es decir, la derivada de esta función es

$$3x^2$$

¿Qué información podemos deducir de esto?

Para obtener un punto de partida, inferimos de la ecuación que define a la propia función que

$$\text{si } \ x = 0, \ \ \text{entonces } \ y = 0^3 = 0.$$

En consecuencia, esta curva también pasa por el punto 0.

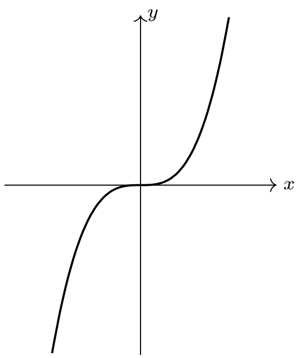
Escuchemos ahora qué nos dice la derivada.

Lo primero que nos llama la atención es que aparece x elevada al cuadrado (su gráfica es una parábola). De esto se pueden sacar dos conclusiones: una es que para la curva de la función $y = x^3$ ya no podemos hablar de un crecimiento constante de su pendiente, pues a medida que se aleja del punto 0, su pendiente aumenta cada vez más rápido; otra es que si nos fijamos en una abscisa x, ya sea ésta positiva o negativa, x^2 siempre será un número positivo, por lo que la recta tangente, y con ella la propia curva, tendrán un comportamiento ascendente tanto a la izquierda como a la derecha del punto 0. Dado que la curva pasa por el punto 0, la única forma de que ésta sea ascendente a la izquierda de dicho punto es permaneciendo por debajo del eje x. Después del punto 0, la curva se eleva por encima de esta altura, por lo que corta al eje x en el punto 0. Sin embargo,

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } 3x^2 = 3 \times 0^2 = 3 \times 0 = 0,$$

por lo que la pendiente de la recta tangente en el punto 0 es nula, siendo ésta entonces una línea recta horizontal. Y la línea horizontal que pasa por el punto 0 es, a su vez, el propio eje x. En consecuencia, el eje x toca a nuestra curva donde la interseca, esto es, en el punto 0. A medida que la curva se acerca a este punto, su pendiente se hace cada vez más suave, descansa por un instante y renueva luego sus fuerzas para comenzar a elevarse de nuevo, lentamente al principio, pero cada vez más rápido.

Teniendo en cuenta todo esto, obtenemos el siguiente esbozo de la curva:



Ahora representemos gráficamente la función

$$y = x^3.$$

Tenemos que:

$$\begin{array}{lrl} \text{si } x = 0, & \text{entonces } y = & 0^3 = 0, \\ \text{si } x = 1, & \text{entonces } y = & 1^3 = 1, \\ \text{si } x = 2, & \text{entonces } y = & 2^3 = 8, \\ \text{si } x = -1, & \text{entonces } y = & (-1)^3 = -1, \\ \text{si } x = -2, & \text{entonces } y = & (-2)^3 = -8; \end{array}$$

y para algunos valores intermedios:

$$\begin{array}{llll} \text{si } x = \frac{1}{2}, & \text{entonces } y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 & = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} & = \frac{1}{8}, \\ \text{si } x = -\frac{1}{2}, & \text{entonces } y = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & = & = -\frac{1}{8}, \\ \text{si } x = \frac{1}{4}, & \text{entonces } y = \left(\frac{1}{4}\right)^3 & = \frac{1 \times 1 \times 1}{4 \times 4 \times 4} & = \frac{1}{64}. \end{array}$$

Para la representación gráfica de $\frac{1}{64}$, un trazo dibujado a lápiz sería demasiado grueso. Si nos fijamos en nuestro dibujo, parece que la curva ya se adhiere al eje x en ese punto (un estudio detallado de la derivada nos confirmaría tal comportamiento). Hemos visto que en los puntos

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2$$

debemos medir,

$$0, \quad \frac{1}{8}, \quad 1, \quad 8$$

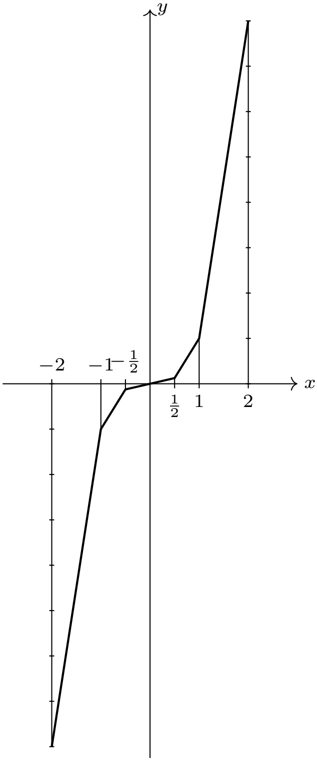
unidades hacia arriba; mientras que en los puntos

$$-\frac{1}{2}, \quad -1, \quad -2$$

tenemos que medir

$$-\frac{1}{8}, \quad -1, \quad -8$$

unidades hacia abajo.



De hecho, esta es una gráfica coherente con las predicciones de la derivada. No habrá ningún tipo de variación anormal en los puntos intermedios, pues la derivada los habría detectado. Y, por supuesto, no solo predice la gráfica aproximada, sino que también determina la dirección de la curva con total precisión en cada punto.

No es extraño que los matemáticos se hayan tomado la molestia de calcular la derivada de aquellas funciones con las que se trabajan a diario y que incluso se las sepan de memoria de tanto emplearlas.

Y si el físico saca de su caja de herramientas matemáticas una función, siempre encontrará junto a ella y a modo de libro de instrucciones, a la derivada de la función, que ya fue previamente calculada y estudiada por los matemáticos.

17. *Mucho poco vale mucho*

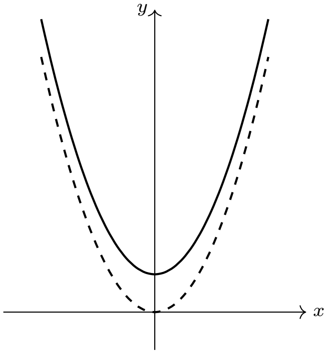
Las multiplicaciones aparecen tan frecuentemente en nuestra vida cotidiana que hemos terminando por sabernos de pe a pa las tablas de multiplicar. De este modo, también somos capaces de ver al instante los resultados de la operación inversa y sabemos así que, por ejemplo, 5 es el número que multiplicado por 4 da 20 como resultado. Los matemáticos están tan familiarizados con los cocientes diferenciales que reconocen de inmediato la derivada de cualquiera de las funciones más habituales. Si alguien nos habla de la función $2x$, nos resultará ciertamente familiar. Pero ¿dónde y cuándo fue que nos la encontramos? Efectivamente, ésa era la derivada de $y = x^2$. Por tanto, aquí también tiene perfecto sentido hablar de la operación inversa; esto es: dada una función, nos preguntamos si existe otra cuya derivada sea la dada y si existe, cuál es. Si efectivamente existe, diremos que esa función es la "integral" de la dada. Por ejemplo, la integral de $y = 2x$ es la función $y = x^2$. Y por supuesto, al igual que ocurría antes con las ecuaciones, aquí también hay trucos y reglas que nos ayudarán a adivinar la función que buscamos si es que no somos capaces de reconocerla de inmediato. Sea, por ejemplo, x^2 la función dada. Ésta se parece, y mucho, a $3x^2$, de quien ya sabemos que su derivada viene dada por $y = x^3$. En realidad, x^2, sea cual sea el valor de x, no es más que un tercio de $3x^2$. Luego tiene pinta de que su derivada será un tercio de x^3, esto es, la función

$$y = \frac{x^3}{3}.$$

Y es fácil probar que efectivamente así es.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, los trucos sirven de poco o nada; se requiere un método general. Además, el método de adivinación anterior tiene otro defecto: la derivada jamás podrá revelar, por ejemplo, que la curva de la función $y = x^2$ pasa por el punto 0; este hecho tuvimos que deducirlo de la ecuación que define a la función. ¿Cómo podemos decir entonces que la derivada determina por completo la gráfica de una función?

De hecho, tal y como veremos a continuación, no es del todo suficiente. Desplacemos nuestra parábola, por ejemplo, una unidad hacia arriba. Es evidente que empujándola hacia arriba no modificaremos su forma en absoluto; la dirección de la curva no sufre ningún tipo de alteración en ninguno de sus puntos, por lo que su derivada es la misma.



No obstante, la ecuación de la curva sí se ha visto modificada, pues la ordenada de cada punto original ha aumentado 1 unidad. Por tanto, cualquier y que antes era igual a x^2, pasa ahora a valer $x^2 + 1$. Y entonces, la ecuación de la parábola desplazada hacia arriba es

$$y = x^2 + 1.$$

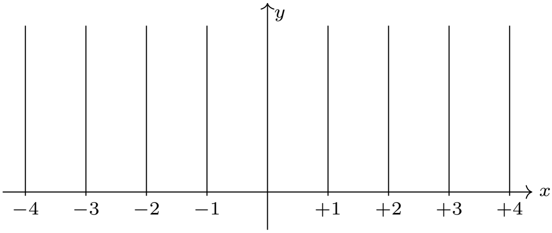
Conociendo únicamente la dirección de la curva en cada punto, es decir, conociendo solamente su derivada, no es posible saber si se trata de la función original, de la desplazada 1 unidad hacia arriba o de cualquiera de las innumerables funciones que se obtienen al empujar la parábola hacia arriba o hacia abajo. En este sentido, nuestra tarea permanece aún indefinida.

No obstante, si se especifica un solo punto de la curva que buscamos, ésta quedará completamente determinada. Por ejemplo, si el "valor inicial" indica que la curva pase por el punto 0 entonces, fijándonos exclusivamente en la derivada, deducimos que sólo puede tratarse de la parábola original. Aclararemos todos los detalles a continuación.

Mostraré en que consiste el método general empleando la parábola. Supongamos que no hemos identificado a la integral de la función $2x$ de forma inmediata. Buscamos entonces una curva de la que poco que sabemos es que *pasa por el punto* 0 y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $2x$.

Aunque el objetivo final es encontrar un método preciso, también empezaré ahora con un dibujo.

Inicialmente, dividimos el eje x en intervalos de longitud 1 y a continuación, por cada uno de los puntos que definen tal división, dibujamos una línea recta vertical para marcar luego as ordenadas que ahora desconocemos:



Sabemos que para $x = 0$ la altura de la curva es $y = 0$. Por tanto, es desde ese punto desde donde debemos comenzamos a trazar –evidentemente de forma aproximada– nuestra curva.

La idea clave del dibujo consiste en que, en cada uno de sus puntos, la curva sigue la dirección que indica la recta tangente correspondiente; esto es, que la recta tangente representa a la curva de forma aceptable si estamos suficientemente cerca del punto de tangencia. Ahora considero que la distancia entre dos líneas rectas verticales consecutivas es una distancia suficientemente pequeña. A continuación, dibujo la recta tangente correspondiente al punto 0 y supongo que es esta recta quien representa a la curva que estamos buscando a la derecha hasta la línea vertical $x = +1$ y a la izquierda hasta la línea vertical $x = -1$. Considero ahora a los puntos así alcanzados como los puntos de la curva que tienen por abscisa $x = +1$ y $x = -1$ respectivamente y partiendo de ellos, trazo las rectas tangentes correspondientes hasta encontrarme con la siguiente línea vertical. Nuevamente, considero ahora a los puntos así obtenidos como los puntos de la curva con abscisa $x = +2$ y $x = -2$ respectivamente y trazo desde ellos las rectas tangentes correspondientes hasta la siguiente línea vertical y continúo así sucesivamente. Por supuesto, cada una de las rectas tangentes debe ser trazada con la pendiente correspondiente. En el punto 0, la pendiente es

$$2x = 2 \times 0 = 0.$$

en el punto $x = 1$ es

$$2x = 2 \times 1 = 2$$

y sabemos que la función producto $2x$ crece de manera uniforme. Así pues, la pendiente de la recta tangente en puntos cuya abscisa aumenta a intervalos de igual longitud se va duplicando. Es decir, empezando en $x = 1$ y avanzando hacia la derecha, las pendientes correspondientes son: $2, 4, 6, 8, \ldots$ Mientras que si nos movemos hacia la izquierda del punto 0, las pendientes correspondientes serán: $-2, -4, -6, -8, \ldots$ De acuerdo con esto, la pendiente de la recta tangente en los puntos de abscisa

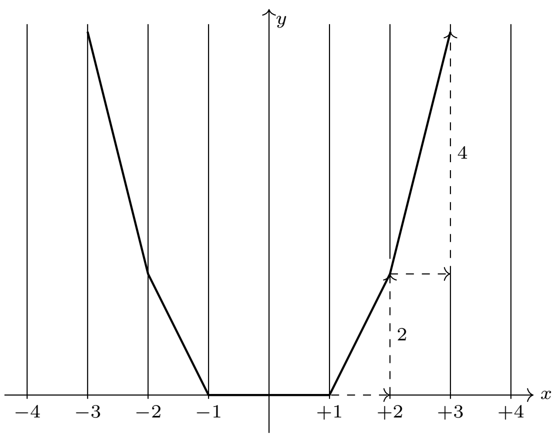
$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

es, respectivamente,

$$-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4.$$

Claro que también sabemos que una pendiente igual a 2, esto es, igual a $\frac{2}{1}$, significa que subimos 2 unidades cuando avanzamos una unidad hacia la derecha y análogamente, una pendiente igual a -2 significa que subimos 2 unidades cuando nos desplazamos una unidad hacia la izquierda. Por tanto, subimos exactamente la misma altura en los puntos $x = +1$ y $x = -1$ y en general, se deduce que la curva será simétrica, por lo que basta con obtener la mitad de la derecha y reflejarla luego en el lado izquierdo.

Ahora podemos empezar a dibujar. La pendiente nula en el punto 0 significa que la recta tangente es horizontal, por lo que avanzamos horizontalmente hasta el punto 1. Desde allí, caminamos hasta la siguiente línea vertical con pendiente $2 = \frac{2}{1}$ y al cortarnos con dicha vertical, incrementamos la pendiente de nuestro camino a $4 = \frac{4}{1}$ para continuar subiendo:



Se forma así una imagen bastante tosca de la parábola.

Comprobemos ahora la precisión de nuestros resultados. Nos limitaremos al punto $x = 3$, por lo que empezamos calculando la ordenada de la curva $y = x^2$ en dicho punto:

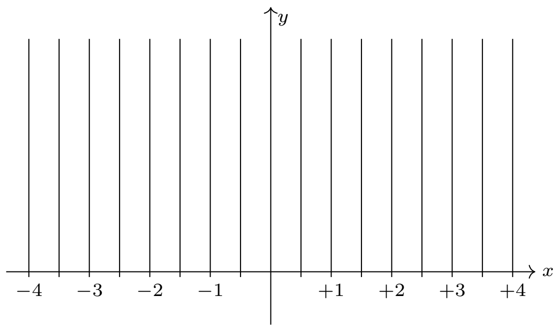
$$\text{si } x = 3 \text{ entonces, } y = 3^2 = 9.$$

Evidentemente, no deberíamos saber que se trata de la función $y = x^2$. Pero dado que ya conocemos la incógnita, aprovecharemos para medir la precisión de nuestro dibujo: para el punto de nuestra tosca gráfica que tiene por abscisa $x = 3$, comprobaremos en qué medida se desvía de 9 su ordenada.

El dibujo muestra que hemos ido subiendo gradualmente hasta la susodicha ordenada sumando las alturas que se han ganado desde el punto 0 hasta ese punto. Así pues, según nuestra gráfica:

$$y = 0 + 2 + 4 = 6 = 9 - 3.$$

Consideramos que 3 unidades es una diferencia muy abultada y en absoluto despreciable. Por tanto, añadimos más puntos de división y dibujamos ahora líneas verticales a intervalos de $\frac{1}{2}$ unidad:



La pendiente de la tangente en el punto 0 sigue siendo nula (y la recta tangente sigue siendo horizontal). En el punto $x = \frac{1}{2}$, tenemos que

$$2x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

y dado que la pendiente aumenta uniformemente en intervalos de igual longitud, ahora nos elevaremos 1 unidad en cada uno de los sucesivos puntos que marcan la división.

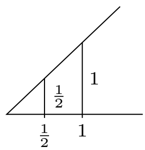
La pendiente de la recta tangente en los puntos de abscisa

$$-2\tfrac{1}{2},\ -2,\ -1\tfrac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\tfrac{1}{2},\ 2,\ 2\tfrac{1}{2}$$

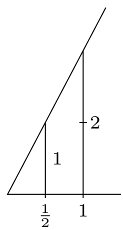
es, respectivamente,

$$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Antes de empezar con el dibujo, me gustaría comentar un detalle que debemos tener en cuenta. En el punto 0 la pendiente es nula, por lo que avanzamos horizontalmente hasta el punto $\frac{1}{2}$. Hasta ahí todo va bien. Pero en el punto $\frac{1}{2}$ la pendiente es 1, es decir, $\frac{1}{1}$, por lo que desde ese punto, tenemos que avanzar subiendo 1 unidad mientras nos desplazamos 1 unidad hacia la derecha. Pero ahora, no hemos dibujado nuestras líneas verticales separadas a intervalos de $\frac{1}{2}$ unidad con la intención de avanzar hacia la derecha de unidad en unidad como sí hacíamos antes. Debemos darnos cuenta cuenta de que si una rampa del ferrocarril tiene una pendiente igual a $\frac{1}{1}$, caminando a su lado por un camino horizontal una distancia de 1 metro, la línea férrea se eleva 1 metro, por lo que si sólo caminamos $\frac{1}{2}$ metro, la línea férrea sólo se elevará $\frac{1}{2}$ metro:



Del mismo modo, si la rampa tiene una pendiente igual a $2 = \frac{2}{1}$ y caminamos en horizontal $\frac{1}{2}$ metro en vez de 1 metro, entonces la vía no se elevará 2 metros, sino sólo 1 metro:



Por tanto, avanzando de $\frac{1}{2}$ unidad en $\frac{1}{2}$ unidad, tan sólo nos elevaremos la mitad de las pendientes previamente calculadas. Por ejemplo, si salimos de 0 y avanzamos hacia la derecha, en los puntos de abscisa

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 1\tfrac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\tfrac{1}{2}$$

no nos elevaremos

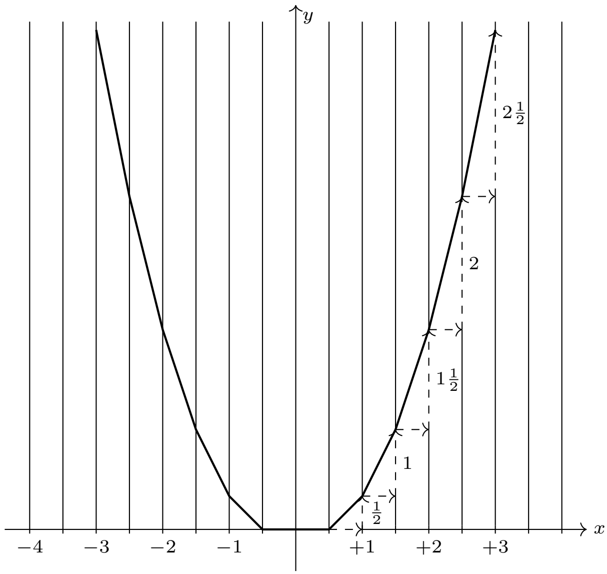
$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5$$

unidades respectivamente, sino que nos elevaremos

$$0,\ \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\times 2 = 1,\ \frac{1}{2}\times 3 = 1\tfrac{1}{2},\ \frac{1}{2}\times 4 = 2,\ \frac{1}{2}\times 5 = 2\tfrac{1}{2}$$

unidades respectivamente.

Ahora ya nada nos impide trazar nuestra gráfica:



Parece que la curva se va suavizando hacia una parábola, pero todavía exagera su forma aferrándose al eje x más de la cuenta.

Calculemos de nuevo el valor de la ordenada correspondiente al punto $x = 3$.

En esta ocasión, no tenemos que sumar las pendientes entre 0 y 3, sino la mitad de esas pendientes. Y es mejor no escribir el resultado final una vez efectuadas las cuentas

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 1\tfrac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\tfrac{1}{2},$$

sino dejarlas indicadas como

$$0, \quad \frac{1}{2} \times 1, \quad \frac{1}{2} \times 2, \quad \frac{1}{2} \times 3, \quad \frac{1}{2} \times 4, \quad \frac{1}{2} \times 5,$$

para llegar así a que:

$$y = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5$$

y puesto que $\frac{1}{2} \times 0 = 0$, podemos ignorar el primer sumando.

Si hay que sumar la mitad de cada número, es mejor sumarlos todos primero y dividir después entre dos:

$$y = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times \frac{1}{2}.$$

De este modo, sólo tenemos que sumar los números enteros que aparecen entre paréntesis y dividir luego entre 2. La primera cuenta se puede efectuar fácilmente si recordamos el método de mi alumna Zsuzsi: cogemos el número del "medio", que en este caso es 3, y lo multiplicamos por 5, dando 15 como resultado. Por tanto, debemos quedarnos con $\frac{1}{2}$ de 15, es decir, con $\frac{15}{2}$. Sumando 3 a 15, obtenemos 18, que es divisible entre 9, por lo que

$$y = \frac{15}{2} = \frac{18}{2} - \frac{3}{2} = 9 - \frac{3}{2}.$$

La ordenada de la curva anterior difería de 9 en 3 unidades, mientras que la curva de este segundo intento sólo difiere de 9 en $\frac{3}{2}$ unidades.

Aunque nuestras gráficas a trozos se suavizan gradualmente, debido a la naturaleza imperfecta de las herramientas de dibujo, éstas tan sólo nos proporcionan resultados aproximados e imprecisos. No obstante, entremedias también nos encontramos un método para calcular la ordenada correspondiente al punto $x = 3$ que se puede refinar a voluntad. Debería ser claro que considerando intervalos de $\frac{1}{4}$ de unidad, la pendiente en el punto 0 seguirá siendo nula, pero en el punto de abscisa $x = \frac{1}{4}$ la pendiente será igual a

$$2x = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}, \quad \text{o simplificando,} \quad \frac{1}{2},$$

por lo que ahora aumentará $\frac{1}{2}$ unidad en cada una de las divisiones. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en los puntos de abscisa igual a

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 2,\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4}$$

será, respectivamente,

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{8}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{10}{2},\ \frac{11}{2}.$$

Ahora avanzamos hacia la derecha con pasos de longitud $\frac{1}{4}$ de unidad; y entonces, en cada uno de los puntos que definen la división, tan sólo nos elevaremos una cuarta parte de las pendientes anteriormente calculadas. En efecto, pues si caminamos horizontalmente $\frac{1}{4}$ de metro junto a una rampa, ésta solo se elevará una cuarta parte de lo que se elevaría si caminásemos 1 metro. Por tanto, la ordenada y correspondiente consiste en juntar todos estos cuartos hasta $x = 3$. Es decir,

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{4}\times 0 &+ \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{2}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{2} \\ &+ \frac{1}{4}\times\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{6}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{8}{2} \\ &+ \frac{1}{4}\times\frac{9}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{10}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{2} \end{aligned}$$

y puesto que $\frac{1}{4}\times 0 = 0$, podemos ignorar el primer sumando. Aquí cada sumando aparece multiplicado por $\frac{1}{4}$ o lo que es lo mismo, dividido entre 4 y además, el denominador de cada sumando también indica una división entre 2. Ya sabemos que dividiendo un número primero entre 4 y luego entre 2, obtenemos exactamente el mismo resultado que dividiendo entre $4\times 2 = 8$. Por tanto, podemos sumar los numeradores y dividir luego entre 8. Obtenemos así que

$$y = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)\times\frac{1}{8}.$$

Con tantos sumandos, el método de Zsuzsi es especialmente bienvenido: cogemos el número del "medio", que en este caso es el 6, y lo multiplicamos por 11. Eso da 66, pero todavía tenemos que dividir entre 8, llegando así finalmente a que $y = \frac{66}{8}$. Tendríamos que sumar otros 6 a 66 para obtener 72, que ya es un número divisible entre 8. En tal caso,

$$y = \frac{66}{8} = \frac{72}{8} - \frac{6}{8} = 9 - \frac{6}{8},$$

pero $\frac{6}{8}$ se puede simplificar si dividimos entre 2, luego

$$y = 9 - \frac{3}{4}.$$

Y entonces, en este refinamiento tan sólo diferimos de 9 en $\frac{3}{4}$ de unidad.

Hemos legado a este resultado sin recurrir a la gráfica, aunque bien es cierto que siempre estuvimos pensando en que ocurriría si estuviésemos dibujando. No obstante, ahora podemos continuar con este proceso sin pensar siquiera en ningún dibujo. El siguiente paso consistiría en dividir el segmento entre 0 y 3 en octavos de unidad. En los puntos que marcan las divisiones, la pendiente de la recta tangente aumentaría ahora a pasos de

$$2x = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

por lo que en los puntos que marcan la división, las pendientes de la recta tangente correspondiente vendrían dadas, una tras otra, por

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4}, \dots$$

pero todavía deberíamos multiplicar estos números por la longitud de los intervalos, que ahora es igual a $\frac{1}{8}$, y sumar luego todos esos números hasta llegar al punto $x = 3$. En tal caso, el valor obtenido sería:

$$y = 9 - \frac{3}{8}.$$

Es fácil convencerse de que este proceso puede continuarse de la misma manera de forma indefinida. La sucesión

$$3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \dots$$

converge a 0 (si dividimos 3 pasteles entre cada vez más personas, cada una de ellas recibirá una cantidad cada vez más insignificante), por lo que 9 es el número al que se aproximan *con precisión total* las ordenadas y correspondientes al punto con abscisa $x = 3$ de nuestras curvas a medida que éstas se suavizan; 9 o equivalentemente 3^2, es el valor de la función $y = x^2$ en el punto $x = 3$.

Del misma manera, se puede probar que las ordenadas en $x = 1$ de nuestras curvas convergen a $1 = 1^2$, en $x = 2$ a $4 = 2^2$, en $x = 4$ a $16 = 4^2$

y que, en general, en un punto arbitrario, las ordenadas convergen al cuadrado de la abscisa x en cuestión, es decir, a x^2. Por tanto, nuestras gráficas continuarán suavizándose indefinidamente hasta convertirse en la parábola

$$y = x^2.$$

O expresado en el lenguaje de la Teoría de funciones: dado un valor inicial, es posible reconstruir la función que tiene a

$$2x$$

por derivada.

De hecho, hemos dado con el método de precisión que estábamos buscando: hay que dividir el eje x desde el punto dado hasta el punto a examinar (en nuestro caso desde 0 hasta 3) en intervalos, multiplicar la longitud de cada intervalo por el valor de la función en el punto correspondiente que marca la división y, finalmente, sumar todos esos productos. De esta forma, se obtienen las llamadas "sumas aproximadas" y si la división se comprime cada vez más, estas sumas convergen hacia el valor de la integral en el punto examinado. Debo confesar que, en la mayoría de los casos, se trata de una ardua y difícil tarea; las operaciones inversas suele ser amargas y complicadas.

Las sumas aproximadas también pueden interpretarse como áreas. Cada uno de los sumandos de una suma aproximada no es más que un producto en el que se multiplica la longitud del intervalo por el valor de la función en uno de los extremos de dicho intervalo. Pero sabemos que podemos representar un producto como el área de un rectángulo cuyos lados adyacentes se corresponden con el tamaño de los factores. De este modo, cada sumando de la suma aproximada proporciona un rectángulo y la suma completa se representa juntando todos estos rectángulos uno a continuación de otro.

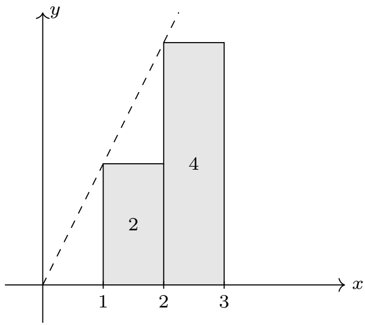
Intentémoslo. Nuestra primera suma fue

$$0 + 2 + 4.$$

En este caso, no se observan los productos porque la longitud de cada intervalo era igual a 1. No obstante, podemos escribir tal suma del siguiente modo:

$$1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times 4.$$

Y ahora, tal y como mostramos a continuación, ya podemos representar gráficamente esa suma:

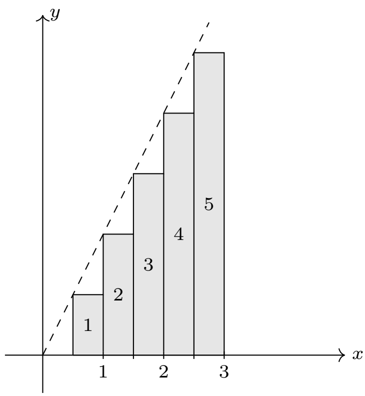


(1×0 puede pensarse como un rectángulo de altura nula cuya 1).

Nuestra segunda suma aproximada fue:

$$\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5,$$

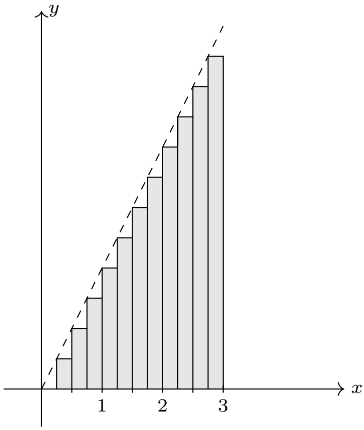
por lo que su representación gráfica es algo como esto:



Nuestra tercera suma aproximada ya constaba de 12 sumandos:

$$\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{2}$$
$$+ \frac{1}{4} \times \frac{6}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{11}{2}.$$

Y de nuevo, se puede representar fácilmente si dividimos a la mitad los intervalos considerados. No hay espacio suficiente para escribir todos los detalles, nos conformamos con el siguiente dibujo:



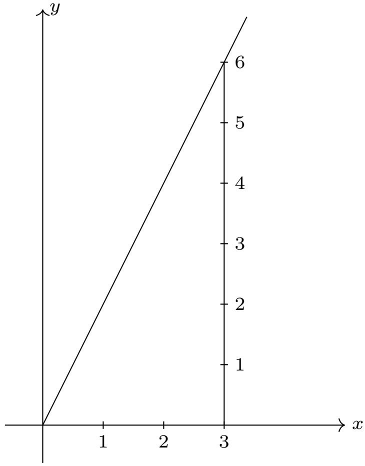
Puede verse que estas escaleras se acercan cada vez más a la superficie de un triángulo rectángulo. Me refiero al triángulo que queda debajo de la línea punteada en cada gráfica. Supongo que ya te habrás percatado de que aparece la misma línea recta en las tres gráficas: en la primera se observa claramente que su pendiente es 2 : 1 y en las dos restantes, también es fácil comprobar que ambas rectas tienen la misma pendiente. No hace mucho tiempo que te pedí que lo recordaras: la recta que pasa por el punto 0 con pendiente 2 : 1 tiene por ecuación

$$y = 2x.$$

¡Pero esa es precisamente nuestra función! Por tanto, las sumas aproximadas se acercan cada vez más al área de la figura situada debajo de la curva de la función dada. Qué lástima no haberlo sabido antes; el área de un triángulo rectángulo se calcula muy fácilmente: basta multiplicar los catetos y dividir entre 2. El cateto horizontal es el segmento que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 3$, por lo que su longitud es de 3 unidades; para calcular la longitud del cateto vertical basta observar que

$$\text{si } x = 3, \text{ entonces } y = 2x = 2 \times 3 = 6,$$

por lo que su longitud es de 6 unidades.

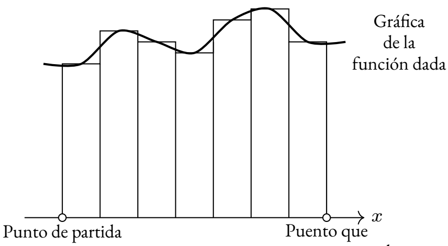


Por tanto, el área del triángulo es igual a

$$\frac{3 \times 6}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ unidades de área}$$

y esto coincide con el resultado que obtuvimos antes de forma tan laboriosa.

De este modo, el cálculo de áreas puede ayudarnos a calcular integrales. No se trata de una coincidencia: si no estamos ante una función excesivamente rebelde y oscilante (como la función de Dirichlet, que salta constantemente entre 0 y 1 provocando así que sus sumas aproximadas ni tan siquiera amaguen con converger), sino ante una función más normal, las sumas aproximadas siempre se podrán representar como el área cierta figura tipo escalera

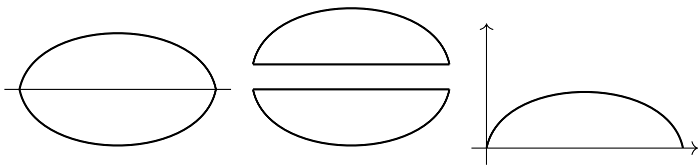


y esas áreas aproximan el área bajo la curva de la función desde el punto de partida hasta el punto examinado con la precisión del "ejemplo del chocolate" si la división se hace cada vez más densa. En otras palabras: el área bajo la curva y la integral son un mismo concepto, solo que expresado de dos formas distintas.

En ocasiones, se invierten los papeles y empleamos integrales para calcular áreas.

Podemos calcular el área de un triángulo rectángulo fácilmente y sabemos que cualquier triángulo puede dividirse en triángulos rectángulos y que cualquier polígono puede dividirse en triángulos. Por tanto, calcular el área de una figura delimitada por líneas rectas no es ningún problema. Y también hemos aceptado y entendido que, efectivamente, podemos calcular el área de un círculo rellenándolo con triángulos cada vez más densos. Pero, en general, ¿cómo se calcula el área de una figura delimitada por una curva?

Estas figuras planas se pueden dividir mediante líneas rectas de manera que podemos colocar cada una de sus piezas con su lado recto a lo largo del eje x:



y luego calculamos el área de cada una de esas piezas por separado. El cálculo del área de cada una de esas figuras que se encuentran debajo de cierta curva ya es un problema de cálculo integral. Podríamos encontrarnos con una integral fácil de adivinar, y en ese caso, podremos decir en un instante cual es el valor del área correspondiente.

Hemos averiguado que la integral de x^2 es la función

$$y = \frac{x^3}{3},$$

o mejor dicho, que, de entre todas las funciones que se pueden considerar como integrales, esta es la única que pasa por el punto 0, porque

$$\text{si } \ x = 0, \ \ \text{entonces } \ \frac{x^3}{3} = \frac{0^3}{3} = 0.$$

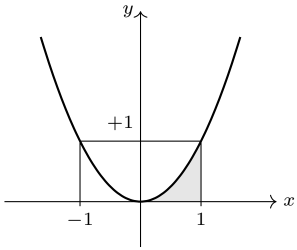
A partir de esto, podemos calcular inmediatamente el área bajo la parábola

$$y = x^2.$$

Por ejemplo, hasta el punto de abscisa $x = 1$, tal área es igual al valor de la integral en $x = 1$; esto es,

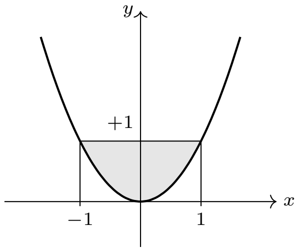
$$\frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} \text{ unidades de área.}$$

En consecuencia, el área sombreada, que en apariencia sólo ocupa una parte del cuadrado unitario, es exactamente un tercio de tal cuadrado:

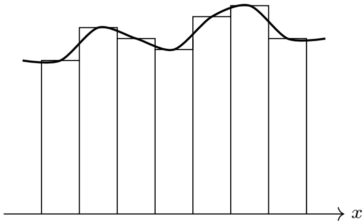


¿Pero a quién le importa cuál es el área que queda *fuera* de la parábola? En efecto, conocer esa área no parece muy interesante, pero a partir de ella podemos calcular el área interior de la figura delimitada brazos de la parábola hasta cualquier altura. Por ejemplo, si queda fuera de la parábola un tercio del cuadrado unitario, dentro quedarán dos tercios y si sumamos a esto su imagen reflejada a la izquierda, el área de la figura sombreada de la siguiente gráfica será igual a

$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ unidades de área.}$$



Me gustaría que te fijases de nuevo en la multitud de rectángulos diminutos que nos permiten aproximar aproximar el área:



A medida que la división se hace más densa, los rectángulos se hacen más delgados y el área de cada uno de ellos converge, necesariamente, a 0; basta recordar el ya famoso pastel que repartimos entre cada vez más personas. Estas pequeñas y alargadas tiras, aunque se hacen cada vez más delgadas, acercándose así a un espesor nulo, al considerarlas todas juntas se aproximan a cierta área distinta de 0 que no será necesariamente pequeña. Por ejemplo, el área del triángulo de antes era igual 9. Y esto no debe sorprendernos, pues si el número de rectángulos se multiplica en la misma medida que se estrechan, y si se mantienen unidos, todos juntos valen por mucho. La sedimentación de finas capas de arena durante un largo periodo de tiempo acaba enterrando las pirámides y en ocasiones, cuando mucha gente humilde piensa o hace algo y se mantienen unidos, el mundo cambia súbitamente. Se dice entonces que esos pequeños efectos pequeños están “integrados”.

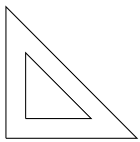
PARTE III

AUTOCRÍTICA DE LA RAZÓN PURA

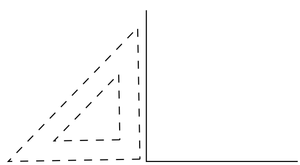
18. Y, sin embargo, existe una amplia gama de matemáticas

Es difícil dar con un matemático de renombre a quien no se le haya acercado, en al menos una ocasión, un extraño que desea confiarle un valiosísimo manuscrito en el que se "logra" la cuadratura del círculo, pero ¿de qué se trata esto realmente?

Si alguien dice: "conocía la longitud de los dos catetos de un triángulo rectángulo y partiendo de esos datos, construí el triángulo", surge entonces de inmediato la siguiente pregunta: "¿qué herramientas has empleado?". Supongamos que ha empleado una escuadra de madera o plástico de las que se compran en una papelería



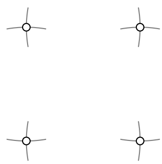
arrastrando el lápiz a lo largo de sus catetos. Pero bueno, confiar en la precisión de estas herramientas no es más que una imprudencia. "Gira la escuadra y colócala junto al ángulo recto que acabas de dibujar y trata de dibujar ahora algunas líneas rectas". En la mayoría de las ocasiones, el resultado no es admisible



Efectivamente, la escuadra no tiene un ángulo exactamente recto.

Los antiguos griegos seleccionaron cuidadosamente las herramientas que se podrían emplear en sus construcciones. La regla sólo se podía emplear para trazar líneas rectas a largo de ella (pero nunca para dibujar un ángulo recto) e incluso esto era un tanto peliagudo, pues rara vez es posible fabricar una regla cuyo borde sea perfectamente recto. Para dibujar una circunferencia disponemos de una herramienta mucho más precisa; no es necesario ningún círculo de plástico o madera sobre cuyo canto arrastrar nuestro lápiz, basta con girar un compás para dar forma a la circunferencia nosotros mismos. Si los brazos del compás no están flojos, fijando el extremo con punta en un punto del papel, el otro extremo se desplazará a una distancia constante de ese punto, por lo que al girar el compás, el lápiz describirá una verdadera circunferencia.

Los antiguos griegos no permitían el uso de ningún otro instrumento para sus construcciones geométricas más que la regla y el compás. Y por supuesto, las construcciones eran más fiables cuanto más dependían en exclusiva del compás y no del uso de la regla. Siglos más tarde, resultó que se puede prescindir por completo de la regla: todas las construcciones que se pueden realizar con regla y compás también se pueden realizar empleando única y exclusivamente el compás. Es evidente que con un compás no podemos trazar líneas rectas, por lo que en construcciones en las que sólo se emplea el compás, se representa a –por ejemplo– un cuadrado mediante sus cuatro vértices:



e intuimos perfectamente la figura en cuestión a partir de esos puntos.

Nos ceñiremos entonces al uso de regla y compás y en tal caso, la siguiente pregunta surge de modo natural: ¿qué construcciones se pueden realizar empleando solamente estos dos instrumentos?

El problema de la cuadratura del círculo también pertenece a esta categoría de problemas. Se da un círculo y se pide construir un cuadrado con la misma área que dicho círculo.

Ya sabemos que el área del círculo se puede determinar con total precisión mediante figuras delimitadas por líneas rectas que se acercan cada vez más y de forma indefinida al propio círculo. Por ejemplo, si hemos dibujado un círculo cuyo radio mide una unidad, obtenemos un número irracional concreto como medida de su área; este número comienza así:

$$3.141592\ldots$$

y se puede calcular su expansión decimal hasta la posición que se nos antoje. Este número irracional juega un papel tan importante en Matemáticas que incluso se le ha dado un nombre propio. Es conocido desde la escuela; es el número

$$\pi.$$

Pero si conocemos el área del círculo de radio unidad con tanta precisión como deseemos, por supuesto que podemos decir cuál es el cuadrado cuya área es ese mismo número. Calculamos el área de un cuadrado elevando al cuadrado la longitud de uno de sus lados y claro que existe un número cuyo cuadrado es igual a π: es justamente aquél al que denotamos por $\sqrt{\pi}$. Por tanto, el cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$ es la solución del problema.

Oh, pero el problema no era si existía tal cuadrado, sino si podía construirse con precisión usando solamente una regla y un compás.

El hecho de que $\sqrt{\pi}$ sea un número irracional no es necesariamente un obstáculo para su constructibilidad. Ya dibujamos un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cuando duplicamos el tamaño de aquel estanque y el argumento allí esbozado puede transformarse fácilmente en una construcción exacta con regla y compás. ¿No se podría construir entonces $\sqrt{\pi}$ de algún modo empleando únicamente regla y compás?

Durante muchos siglos, la mera experimentación no condujo a ningún éxito. Finalmente, se alcanzó la solución cuando se tradujo el problema geométrico al lenguaje del Álgebra.

¿Qué figuras se pueden dibujar con una regla y un compás? Líneas rectas y circunferencias. Pero ya sabemos que en el lenguaje del Álgebra una línea recta se expresa mediante una ecuación de primer grado y una circunferencia mediante cierta ecuación de segundo grado. Por tanto, toda construcción geométrica que pueda realizarse con regla y compás se basa en las soluciones comunes a dichas ecuaciones.

Ahora bien, los matemáticos han logrado demostrar que $\sqrt{\pi}$ (y también el propio π) no puede obtenerse como solución de ninguna de esas ecuaciones;

es más: π no puede ser la solución de ninguna ecuación de cualquier grado, salvo que le colemos directamente en la ecuación (por ejemplo, en la ecuación

$$x - \pi = 0$$

tendríamos que

$$x = \pi$$

pasando π a la derecha sumando). Decimos entonces que π no es un número "algebraico", sino que es un número "trascendente".

De acuerdo con esto, la cuadratura del círculo es un problema irresoluble. Y así, una vez más, las matemáticas han logrado demostrar de forma brillante su propia incapacidad para resolver un problema particular con medios limitados.

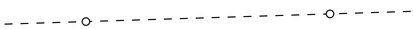
Además, del descubrimiento de la existencia de números "trascendentes", que son aquéllos que no pueden aparecer como solución de ningún tipo de ecuación algebraica (se puede probar que $e = 2.71\ldots$, la base de los logaritmos naturales, también es uno de estos números e incluso que la mayor parte de los números irracionales son "trascendentes"), me gustaría enfatizar en relación con lo anterior la importancia de la pureza del método, cuestión a la que los antiguos griegos prestaron tanta atención. Para ellos, lo importante no era si se puede construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado (a finales del siglo XIX se construyó un mecanismo que nos permite obtener de forma mecánica y con bastante precisión ese cuadrado), sino si es posible construir dicho cuadrado con total precisión únicamente con regla y compás. En este sentido, la respuesta negativa es clara y definitiva de una vez por todas para todos los matemáticos. Sólo algunos pobres ignorantes se niegan a querer entenderlo mientras estimulan su pobre imaginación con fantasiosas expresiones como la "cuadratura del círculo".

La pureza de los métodos o, en otras palabras, la formulación clara de las condiciones de partida es la razón por la que los matemáticos –a diferencia de lo que ocurre en otras disciplinas– se entienden tan bien entre sí. Los matemáticos de todos los tiempos y de todos las regiones se entienden perfectamente. Los matemáticos tienen fama de ser gentes difíciles de entender, pero quizás nadie formule sus mensajes y enunciados con tanta consideración y detalle hacia otras personas como hace el matemático. Por supuesto, existe tanto apego subjetivo a los objetos y conceptos matemáticos como a cualquier otro objeto. Por ejemplo, las palabras "punto" o "línea recta" pueden significar algo muy distinto en la imaginación de cada persona. Uno de mis profesores comenzó su primera lección sorprendiendo a una compañera con esta inesperada pregunta: "¿ha visto alguna vez un punto, señorita?". "No, nunca", respondió mi compañera. "¿Y ha dibujado alguna vez un punto?", ésa fue la siguiente pregunta. "Sí, lo hice" fue ahora su respuesta, pero añadió rápidamente: "mejor dicho: aunque lo intenté muchas veces, nunca lo conseguí" (creo que nuestro profesor se encariñó de por vida con nuestra clase debido a esta respuesta). Ese depósito de grafito o de tiza que dibujas y que parece una montaña a la vista de una lupa no es un punto en absoluto. Pero todos tenemos una idea de lo que significa un punto y es justamente eso lo que plasmamos sobre el papel cuando intentamos dibujarlo. Las ideas sobre las líneas rectas todavía pueden ser más subjetivas. Una línea recta no es, ni mucho menos, una simple línea: los niños pequeños y los pueblos primitivos nunca trazan líneas rectas; de manera espontáneamente siempre dibujamos arcos o curvas torcidas. Para trazar una línea recta es necesaria mucha disciplina. Debido a las diferentes ideas que uno puede tener de los objetos matemáticos, cuando un matemático prueba algo sobre puntos y líneas rectas, se lo comunica a sus compañeros del siguiente modo: "No sé cómo se imaginan ustedes las figuras y conceptos geométricos. Pero mi idea de ellos consiste en que a través de dos puntos, sean cuales sean, siempre puedo trazar una línea recta. ¿Concuerda esto con sus ideas?". Si la respuesta es afirmativa, entonces continúa diciendo: "He probado cierto hecho sin emplear ninguna propiedad de los puntos o de las líneas rectas mas que aquéllas con las que todos estamos de acuerdo. Así que ahora ustedes pueden pensar en sus puntos y líneas rectas, comprenderán lo que yo afirme".

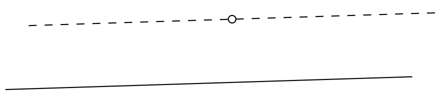
Las Matemáticas no sueñan con afirmar verdades absolutas. Los teoremas matemáticos siempre se expresan de forma más humilde: "si…, entonces…". "Si sólo usamos regla y compás, no lograremos la cuadratura del círculo". "Si entendemos esto y aquello por puntos y líneas rectas, entonces tenemos los siguientes teoremas".

Es cierto que en la escuela no estamos acostumbrados a este tipo de enunciados y que en los capítulos anteriores tampoco hemos formulado los teoremas y resultados siguiendo este estilo. Aquellos que desean comunicarnos conocimientos hacen bien en no presentarnos los resultados ya listos directamente, sino partiendo de su origen y a medida que éstos fueron surgiendo. Y en ocasiones, en el fragor creativo del desarrollo, las condiciones e hipótesis exactas aún no son claras. Pero a las grandes eras constructivas suelen seguirle épocas de profunda crítica. Una vez recorrido el camino, los matemáticos miran hacia atrás e intentan identificar y comprender la esencia de los grandes resultados.

Euclides fue un gran sistematizador y en este campo, sus trabajos geométricos fueron el patrón durante siglos. Primero enumera los conceptos básicos y las propiedades y relaciones elementales que se dan entre éstos (son lo que todavía hoy se llaman axiomas). Las demostraciones que siguen después tan sólo son válidas para aquellas personas que se imaginan los puntos, las líneas rectas y los planos de tal modo que pueden aceptar como verdaderos los correspondientes axiomas. Es por esto que los axiomas deben ser cuidadosamente seleccionados; son declaraciones con las que coinciden todas las opiniones. Entre ellos se encuentra, por ejemplo, la afirmación de que, dados dos puntos, siempre podemos trazar una única línea recta pasando por ellos:



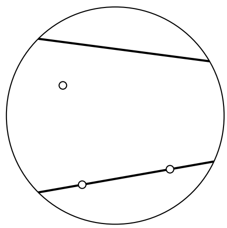
Su trabajo tiene dos mil años de historia y durante este tiempo sólo ha habido cierta controversia en torno a uno de sus axiomas. Es el famoso axioma de las paralelas: por un punto exterior a una línea recta sólo se puede trazar una única línea recta que, por mucho que nos alejemos, no interseca nunca a la primera:



Esta línea recta se dice que es la paralela a la dada. Volveré sobre esto más adelante.

En primer lugar, sin embargo, me gustaría señalar otra característica del método axiomático. Y es que si la prueba de los teoremas es tal que cualquiera puede dar rienda suelta a su imaginación en lo que respecta a sus ideas sobre puntos, líneas rectas y planos, bajo la única condición de que se satisfagan las relaciones postuladas en los axiomas, nada importa entonces que estemos pensando en puntos, líneas rectas o planos; porque, en realidad, bien podría suceder que existan otros objetos que también satisfagan las condiciones de los axiomas y en ese caso, la demostración nos conduciría a un teorema igualmente válido y verdadero para esos objetos. Nuevamente, estamos ante una especie de “digo una cosa y se convierte en dos cosas”, situación con la que ya nos encontramos cuando hablamos de la “dualidad”: los enunciados en cuestión seguirían siendo ciertos incluso si hubiera una persona tan excéntrica como para pensar en una línea recta cuando hablamos de un punto y en un punto cuando hablamos de una línea recta (recuerda el ejemplo allí mencionado: tres puntos determinan un triángulo si no se encuentran sobre una misma línea recta; tres líneas rectas determinan un triángulo si no se cortan en un mismo punto).

Por ejemplo, si alguien sólo entiende por un punto aquellos puntos que caen en el interior de determinado círculo (excluyendo además los puntos del borde) y por línea recta únicamente los trozos de línea recta que caen dentro de este círculo,

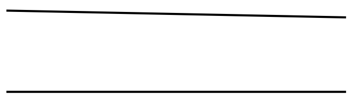


entonces sigue siendo cierto que en ese reducido mundo sólo podemos dibujar una única línea recta (es decir, el segmento de línea recta que llega hasta el borde del círculo) que pase por dos puntos (es decir, a través de dos puntos del interior del círculo). Por tanto, cualquier teorema sobre puntos y líneas rectas que se pruebe sobre la base de este axioma también será verdadero este mundo tan acotado.

Volvamos ahora al axioma de las paralelas. Creo que cualquiera que lo haya pensado un rato asumirá que sólo se puede trazar una línea recta paralela a otra línea recta dada a través de cierto punto exterior y, muy probablemente, no observará nada problemático en tal afirmación. De hecho, la imaginación de la mayoría de la gente acepta el axioma de las paralelas sin cuestionarlo en absoluto.

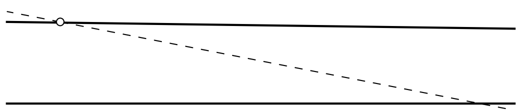
No obstante, me gustaría contarte lo que me sucedió cuando enseñaba matemáticas en el primer curso en una escuela de primaria (niñas de diez años).

Cada estudiante tenía un cuadrado en la mano y la tarea consistía en que dijeran qué observaban en relación con los lados del cuadrado. Pronto mencionaron la palabra “paralelos”; ya habían escuchado esa palabra con anterioridad. Les pregunté entonces qué querían decir con paralelos. Una niña dijo que los lados paralelos son aquellos que tienen la misma dirección, otra que las líneas paralelas siempre se mantienen a la misma distancia entre sí y una tercera comentó que, por mucho que las prologásemos, nunca se encontrarían. “Todo lo que decís es correcto”, les dije. “Podríamos emplear cualquiera de vuestras explicaciones como la característica específica de ser paralelos, que las restantes se deducirían a partir de la escogida”. La estudiante de pensamiento más profundo, la pequeña Anne, se puso de pie en su pupitre y dijo: “no me parece buena idea aceptar como característica que nunca se encuentren, porque puedo imaginarme dos líneas rectas que sin mantenerse a la misma distancia entre sí, sino acercándose entre sí, nunca se cortan”. A continuación, dibujó una figura en la pizarra para explicarnos a qué se refería:



Tuve que aceptar que esa era la percepción real de Anne.

El problema es que cosas como ésta no se pueden comprobar experimentalmente. Si inclino levemente la recta paralela hacia abajo,



prolongando ambas líneas rectas lo suficiente, todavía observo donde se corta con la línea recta original. Pero si la inclino cada vez menos, la línea recta habrá girado hacia abajo $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, \ \ldots$ del ángulo inicial y continuando con esta sucesión indefinidamente, ¿cómo sé que jamás alcanzaré un grado de inclinación extremadamente pequeño de modo que la línea recta inclinada no corte a la línea recta inferior? Después de todo, en verdad, no llegaré nunca *al final* de esa sucesión infinita.

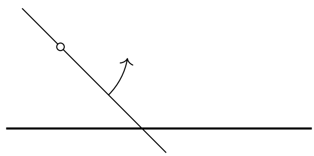
Ya nos hemos encontrado con curvas que se acercan cada vez más a una línea recta sin llegar nunca a alcanzarla: cualquier rama de la hipérbola se comporta de ese modo.

Así que no es tan sorprendente que haya personas que también se imaginan el enfoque rectilíneo de esa manera. Nuestras ideas e imaginaciones van acompañadas de nuestro mundo emocional. Por tanto, entiendo perfectamente que, por ejemplo, para alguien que lleva mucho tiempo separado de un ser querido, se defina con nitidez la imagen de un acercamiento ilimitado pero sin una posibilidad real de encuentro.

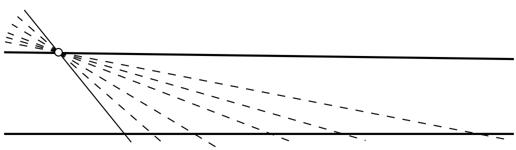
Sea como fuere, desde los tiempos de Euclides siempre ha habido personas con la misma perspectiva que mi alumna Anne. Es muy probable que no confiasen mucho en las conclusiones de su imaginación, porque la inmensa mayoría estaba en su contra; pero, en cualquier caso, se atrevieron a negar que el axioma de las paralelas fuese tan evidente como los demás principios. Estas personas razonarían del siguiente modo: "¿por qué no lo demuestran empleando los axiomas que sí aceptamos? En ese caso, los aceptaríamos sin problema".

Durante varios siglos, los matemáticos intentaron deducir el axioma de las paralelas a partir de los otros axiomas, pero fue en vano.

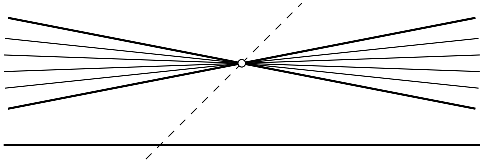
El matemático húngaro János Bolyai fue uno de los primeros que se atrevió a defender abiertamente la posición contraria y dijo: "No es posible probar el axioma de las paralelas porque no es cierto. Yo veo la cuestión de este modo: si pasando por el punto exterior a la línea recta dada trazas otra línea recta que se corta con la primera y comienzas a girarla



cortará a la línea recta dada en un punto cada vez más distante hasta que, de repente, se separa de ella:



Esta línea recta todavía está ligeramente inclinada hacia la línea recta originalmente dada y por supuesto, si todavía la giro un poco más, tampoco se cortará con la línea recta inferior hasta que alcance cierto grado de inclinación hacia el otro lado:



Por tanto, existen dos líneas rectas pasando por el punto exterior de modo que ninguna de las infinitas rectas que se encuentran entre ellas se corta con la línea recta dada. Que se unan a mí todos aquellos que así lo vean, ¡construiremos nuestra propia geometría!"

Así pues, Bolyai tomó la negación del axioma de las paralelas como condición básica y manteniendo todos los demás axiomas euclidianos, se dedicó a investigar qué teoremas sobre puntos, líneas rectas y planos podrían deducirse a partir de esas condiciones. Es así cómo se construye la Geometría de Bolyai [1], que difiere notablemente en muchos aspectos de la Geometría euclidiana. Es cuestión de gustos decidir cuál de las dos aceptamos.

No resta ningún valor a los trabajos de Bolyai –aunque el pobre quedó completamente destrozado– que otros matemáticos también descubrieran la posibilidad de esta geometría justo al mismo tiempo que él; el matemático ruso Nikolai Lobachevsky escribió sobre el mismo descubrimiento. Es un fenómeno muy común: el tiempo madura lentamente este o aquel problema y luego, en distintos puntos de la Tierra y al mismo tiempo, aparecen matemáticos que, independientemente unos de otros, lo comprenden perfectamente.

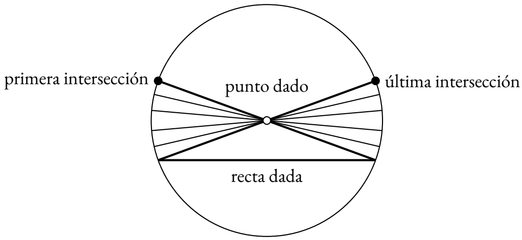
Pero todavía hay algo que no está claro. ¿Y si fuese posible probar el axioma de las paralelas? De ser así, la geometría de Bolyai se fundamentaría en una suposición falsa de la que, más tarde o más temprano, saldrían a la luz una multitud de contradicciones.

Afortunadamente, tenemos una respuesta reconfortante para esta cuestión: desde el punto de vista de la veracidad, las geometrías de Euclides y Bol-

[1] Nota de los traductores: en la actualidad, es más común referirse a la Geometría de Bolyai como Geometría hiperbólica.

yai son tan fiables la una como la otra. Si la Geometría de Bolyai condujese a una contradicción, la Geometría de Euclides también sería contradictoria.

Sabemos esto porque es posible construir un modelo de la Geometría de Bolyai completamente contenido en la Geometría Euclidiana tal y como ya he descrito cuando mencioné aquel reducido mundo cuyos puntos y líneas rectas quedaban atrapadas dentro de un círculo de la Geometría Euclidiana. Allí probé que estos puntos y líneas rectas también satisfacen una de las condiciones básicas de Euclides, pero en realidad, se puede demostrar que satisfacen todas las condiciones básicas euclidianas (siempre y cuando redactemos adecuadamente el principio de congruencia) con la excepción del axioma de las paralelas, que ha sido sustituido por supuesto básico de Bolyai.



Las líneas rectas principales son aquellas que van desde el punto exterior a la línea recta dada hasta los extremos de esta línea en la frontera del círculo, esto es, en la circunferencia. Las líneas rectas situadas entre éstas (o, mejor dicho, los segmentos de recta que quedan dentro del círculo) no se cortan (dentro del círculo) con la línea recta dada incluso según Euclides. Por tanto, el axioma de Bolyai no puede contradecir a los restantes axiomas euclidianos; pues aquí, en este mundo tan reducido y limitado, encajan todos perfectamente.

Ya nos hemos encontrado con dos geometrías igualmente válidas y nada nos impide aumentar todavía más esta pluralidad. De hecho, ahora podríamos continuar con este juego prescindiendo de cualquier tipo de percepción, punto de vista u opinión: simplemente, podemos sustituir cualquier axioma que no se pueda probar a partir de los restantes por su negación e investigamos luego qué proposiciones se pueden deducir a partir de esas condiciones. E incluso podríamos partir de axiomas completamente diferentes, pues no parece muy coherente ceñirse exclusivamente a axiomas abstraídos de la percepción y la experiencia una vez que la Geometría de Bolyai ya ha mostrado cuán inestable es ese terreno. Por tanto, dos personas pueden llegar a resultados completamente diferentes pero ambos igualmente válidos si cada una de ellas atiende a su propio punto de vista.

De esta manera, se construye una amplia gama de geometrías. Y esto ya no es un simple juego, pues la Física Moderna es capaz de explicar numerosos fenómenos de la realidad empleando geometrías que han sido construidas de manera abstracta.

La percepción humana no es inmutable; los avances de la ciencia la moldean a diario. Desde que se descubrió que la Tierra no era un disco circular plano, tuvimos que acostumbrarnos al hecho de que nuestros amigos de las antípodas caminan sobre la tierra boca abajo según la vieja teoría; la forma en que vemos las cosas ha cambiado enormemente. Si los resultados de la Teoría de la relatividad de la Física actual resultan duraderos y pasan a la cultura y conciencia popular, es muy probable que pasado un tiempo las personas con percepción euclidiana dejen de ser una mayoría tan abrumadora como en la actualidad y una de esas geometrías que hoy tan sólo nos parece un juguete abstracto podría convertirse en la geometría de la realidad.

Posdata sobre la cuarta dimensión

Me gustaría volver a la palabra "modelo". Dentro de la Geometría de Euclides pudimos construir un "modelo" para la Geometría de Bolyai cercando una parte del plano mediante un círculo; e identificamos así cada figura de la Geometría de Bolyai con un objeto dentro de ese círculo y cada teorema de la Geometría de Bolyai con un teorema de la Geometría de Euclides que es demostrable dentro de ese círculo. Ya nos encontramos con este entrelazamiento de dos ramas de las Matemáticas cuando hablamos de un modelo para la Geometría en el Álgebra: los puntos del plano se correspondían con pares de números y las líneas rectas con ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, por lo que delimitamos así una parte del Álgebra en la que cada figura geométrica representa una expresión algebraica y cada teorema geométrico un teorema algebraico. De este modo, podemos obtener resultados geométricos empleando métodos algebraicos y también a la inversa, pues podemos deducir propiedades algebraicas de una función a partir de las propiedades geométricas de su gráfica.

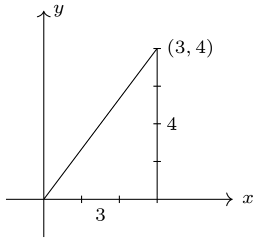
Todo esto ocurría en el plano, pero se puede trasladar fácilmente al espacio tridimensional. En el espacio, un punto está determinado por una terna de números (si aquel nido de pájaros estuviese en la copa de un árbol, para determinar su posición exacta también habría que decir a qué altura está, o lo que es lo mismo, cómo debe de ser la escalera con la que debemos cargar si es que queremos llegar hasta él). En consecuencia, las ecuaciones con tres incógnitas se corresponden con figuras en el espacio. Lo habitual es denotar a estas tres incógnitas por x, y y z. Si consideramos una ecuación como por ejemplo

$$z = 3x + 2y,$$

vemos inmediatamente que el valor de z depende tanto de la elección x como de la elección de y. Se trata de una función de dos variables (nos encontramos con este tipo funciones a diario; por ejemplo, el monto total de la prima de un seguro de vida depende tanto del período de vigencia de la póliza, como de la cuantía del capital asegurado). Por tanto, todo lo que probemos sobre figuras geométricas tridimensionales tendrá su repercusión sobre las funciones de dos variables.

Ahora bien, saltar del plano al espacio no implica que tengamos que empezar desde el principio. Muchas de las proposiciones válidas en el plano se pueden generalizar muy fácilmente al espacio tridimensional. En el plano, para calcular la distancia entre el punto 0 y, por ejemplo, el punto $(3, 4)$, procedemos de este modo:

Y la distancia que buscamos es entonces la longitud de la hipotenusa del



triángulo rectángulo cuyos catetos son las coordenadas del punto en cuestión. En consecuencia, por el Teorema de Pitágoras, su cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Y entonces, tal distancia es igual a:

$$\sqrt{3^2 + 4^2}.$$

Se puede probar muy fácilmente que el punto del espacio tridimensional determinado por la terna $(3, 4, 5)$ está a una distancia igual a

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \text{ del punto } 0 = (0, 0, 0).$$

Muy a menudo, las generalizaciones del plano al espacio tridimensional son tan fáciles como la anterior y como consecuencia, una gran cantidad de teoremas sobre las funciones de una variable pueden generalizarse fácilmente para funciones de dos variables.

No obstante, es muy probable que también nos encontremos con funciones de $3, 4, 5, \ldots$ o cualquier número de variables. Aunque podemos pasar del plano bidimensional al espacio tridimensional, no podemos ir más allá de las tres dimensiones; no hay espacio tetradimensional al que saltar. Sin embargo, el modelo algebraico nos permite comportarnos como si existiera tal espacio. Por ejemplo, si consideramos a $(3, 4, 5, 6)$ como un punto del espacio tetradimensional, el número

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}$$

puede ser la distancia entre ese punto y el punto 0. Procedamos pues con estos grupos de cuatro números de forma completamente análoga a como ya hicimos con los grupos de números correspondientes a puntos reales del espacio, el plano o la recta y veamos qué teoremas se pueden deducir a partir de ellos para las funciones de tres variables. Se puede comprobar que los resultados así obtenidos partiendo de algo ficticio son realmente verdaderos. Por tanto, merece la pena fingir que también existe una cuarta dimensión.

Del mismo modo, se pueden introducir espacios abstractos de $5, 6, 7, \ldots$ e incluso un número infinito de dimensiones. El modelo siempre sigue siendo el espacio conocido y el propósito y la utilidad de estos espacios es el estudio de las funciones.

Ya estamos familiarizados con la formación de este tipo de conceptos: los puntos de los espacios de varias dimensiones no son más que elementos ideales. Vienen en nuestra ayuda desde un mundo imaginario y, si así lo deseamos, desaparecerán de nuevo, dejando tras de sí sólidos resultados que siguen siendo válidos incluso sin la implicación de estos objetos imaginarios.

19. *El edificio se tambalea*

UNA de las tareas de los grandes tiempos de crítica es diseccionar la esencia última de los resultados ya probados y arrojar luz sobre las hipótesis y condiciones básicas de los teoremas; en una palabra: axiomatizar. Un sistema de axiomas delimita una determinada rama de las matemáticas; pues consideraremos todo lo que se puede deducir de un mismo sistema de axiomas como un área relacionada.

Pero cuando miramos el camino que hemos recorrido, nos percatamos de que ciertas ideas aparecen aquí y allá; es decir, hay ideas que después de un primer intento de sistematización, no se circunscriben a una rama concreta de las matemáticas, sino que aparecen en varias de ramas diferentes. Nos encontramos entonces con una segunda tarea, a saber, identificar y convertir en objetos de una investigación específica e independiente aquellos elementos que aparecen en diferentes ramas de las Matemáticas.

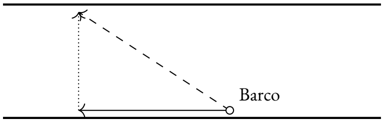
Recordemos, por ejemplo, que en el caso de los números racionales, siempre que efectuamos multiplicaciones o divisiones entre ellos (con la excepción de la división entre cero), obtendremos como resultado otro número racional. De ahí que los números racionales –excluyendo por un momento al cero– forman, por así decirlo, un grupo cerrado respecto de la multiplicación y la división. Los números enteros no tienen este comportamiento tan exclusivo, pues al dividir entre números enteros nos salimos claramente fuera del conjunto de números original. Sin embargo, en relación con la suma y la resta, los números enteros y los números racionales concuerdan en el sentido de que ambos conjuntos forman un grupo cerrado respecto de la suma y la resta; me refiero, evidentemente, a los números enteros positivos y negativos. Números para los que estas operaciones no se salen del conjunto correspondiente, sin necesidad ni siquiera de excluir ahora al cero.

A decir verdad, para formar un grupo cerrado en relación con ciertas operaciones, no se necesitan tantos números. Si sólo consideramos estos dos números:

$$+1 \text{ y } -1,$$

ya se ve a simple vista que, por muchas veces que multipliquemos o dividamos, el resultado nunca será nada distinto de $+1$ o -1.

Esta creación de nuevos entes y conceptos no se limita a las operaciones aritméticas. Permíteme recordarte los vectores, pues en relación con aquella suma tan extraña, también forman un grupo cerrado. La resultante de dos vectores es a su vez un nuevo vector:



Esta operación tan sólo es una adición en cierto sentido figurado; se trata, en realidad, de la composición de dos movimientos o fuerzas.

La lista de ejemplos podría prolongarse durante mucho tiempo.

La investigación independiente del concepto de "grupo" –que tal y como acabamos de ver aparece en lugares bien distintos–, esto es, la Teoría de Grupos, ha resultado extremadamente fructífera. Es el núcleo del Álgebra moderna y la Física contemporánea también la utiliza, pues cada una de las diferentes geometrías puede entenderse incluso como la teoría de cierto grupo.

Los grupos no son más que "conjuntos" con ciertas propiedades particulares y ése, el de "conjunto", es el concepto con el que nos encontramos a cada paso en todas las áreas de las Matemáticas. Siempre que hablamos de Matemáticas, es casi inevitable hablar de conjuntos y de puntos, ya sean éstos conjuntos de números o conjuntos de funciones de cierta clase.

Este concepto fue objeto de una exhaustiva investigación por parte de Georg Cantor. La conocida como "Teoría de conjuntos" se debe, en gran parte, a este matemático de origen ruso.

Retrocedamos un poco. Ya hemos hablado largo y tendido sobre el conjunto de los números racionales y sobre el conjunto de puntos que se corresponden con él en la línea recta numérica; deberías recordar que todo punto de ese conjunto es un "punto de acumulación". Este concepto es muy importante en la Teoría de conjuntos de puntos: decimos que un punto es un punto de acumulación de un conjunto si hay puntos del conjunto en todas sus proximidades.

Ya hemos visto algunos de los métodos empleados en la Teoría de conjuntos. Refresquemos nuestros recuerdos con otro ejemplo.

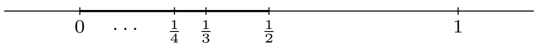
Aunque hay infinitos números naturales:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

éstos no se acumulan en ninguna parte, pues avanzan siempre a pasos de longitud la unidad. Pero si comprimimos una cantidad infinita de números en un intervalo de longitud finita, como ocurre por ejemplo con los números de la sucesión

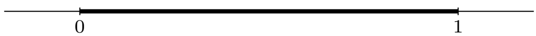
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}, \ldots$$

cuyos términos caen todos dentro del intervalo de extremos 0 y 1



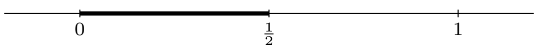
entonces sí debe haber algún punto de acumulación en ese intervalo.

En general, este hecho se demuestra así: supongamos que todos los puntos de un conjunto infinito se encuentran entre 0 y 1,

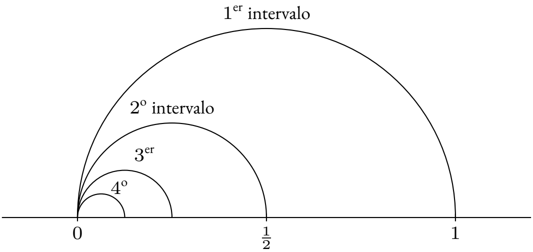


siendo completamente indiferente donde se encuentren exactamente. Si dividimos este intervalo a la mitad, al menos una de sus mitades todavía contiene un número infinito de puntos del conjunto, pues si hubiese un número finito de puntos en ambas mitades, pongamos que 1 millón en una de las mitades y 10 millones en la otra, habría entonces un total de 11 millones de números, una cantidad bastante grande, pero claramente finita. Más concretamente, en nuestro ejemplo inicial, hay un número infinito de puntos en la mitad izquierda del intervalo.

Ahora, en lugar de mirar para el intervalo original, veamos sólo la mitad en la que hay una cantidad infinita de puntos (o cualquier mitad si es que ambas contienen una cantidad infinita de puntos). En nuestro caso, el intervalo a considerar es:



Repetimos ahora el argumento anterior sobre este intervalo y tomamos entonces una de sus mitades, es decir, la mitad en la que todavía hay una cantidad infinita de puntos del conjunto. Esta reducción a la mitad puede continuar indefinidamente y nos conduce a intervalos cada vez más pequeños y encajados entre sí. En nuestro ejemplo obtendríamos los siguientes intervalos:



Es fácil ver que las longitudes de estos intervalos convergen a cero. Recordemos de nuevo esos divertidos paquetes que constan de un envoltorio tras otro y en los que en el fondo común a todos esos envoltorios no hay más que un simple papel arrugado. Aquí también podemos ver que sólo hay un punto común a todos los intervalos. Ese punto será, sin duda alguna, un punto de acumulación del conjunto, porque cualquier proximidad de tal punto, por muy pequeña que ésta sea, contendrá en su interior a alguno de nuestros intervalos y cada uno de éstos contiene a su vez no sólo uno, sino infinitos puntos del conjunto.

Hemos alcanzado un nivel de conocimiento tan elevado que ya podemos responder a la pregunta de cómo un matemático atrapa a un león. El método del físico experimental para atrapar leones es bien conocido; cualquier principiante puede entenderlo y aplicarlo; el físico experimental vierte todo el Sahara en un colador: lo que cae es el Sahara y lo que queda en el colador el león. El matemático, por otro lado, procede metódicamente de la siguiente manera.

Empieza diciendo que hay que distinguir dos casos:

Caso I. El león está descansando.

Primero debemos preparar una especie de jaula que esté abierta por la parte inferior y que sea más grande que el león. Luego dividimos el Sahara en dos partes iguales. El león estará en, cuando menos, una de las dos mitades (pues si está en el límite, estará en ambas partes). Ahora echamos un vistazo a ese medio Sahara. Si lo cortamos por la mitad, el león estará descansando en al menos una de esas mitades. Continuando con este proceso, obtenemos áreas cada vez más pequeñas y encajonadas entre sí. Tarde o temprano, una de estas áreas será más pequeña que la base de nuestra jaula; y en esa área está el león. Si colocamos la jaula sobre esa pequeña área, habremos atrapado al león.

Caso II. El león se mueve.

Entonces este método no es aplicable.

Punto.

Hasta aquí la Teoría de conjuntos de puntos.

Ya hemos aprendido que las demostraciones de la Teoría de conjuntos no sólo son válidas para conjuntos de puntos. Por ejemplo, el método de emparejamiento empleado para probar que el conjunto de los números naturales es tan numeroso como el conjunto de los números racionales –mientras que el conjunto de los números irracionales sí es más numeroso que los números racionales– también se puede aplicar a cualquier otro conjunto; si mal no recuerdo, pasamos de un grupo de damas y caballeros bailando a estas multitudes más abstractas menos alegres. Cualquier cosa que digamos sobre la cantidad de elementos de un conjunto puede ser igualmente válida para parejas de baile, números reales o incluso, para el conjunto de todas las oraciones que puedo escribir en húngaro. Cantor estudió los conjuntos desde ese punto de vista, es decir, en términos muy generales. Demostró un montón de hermosos teoremas sobre el "tamaño", o cardinal, de los conjuntos infinitos; esto es, sobre la extensión del concepto de número finito a número infinito. Mostró que, por ejemplo, no sólo hay dos cardinales diferentes –el de los números naturales y el de los números reales–, sino que en realidad, no existe ningún conjunto, por muy grande que éste sea, que no sea trascendido por otro conjunto de todavía mayor cardinal. El poeta húngaro Mihály Babits llamó a estos cardinales que se elevan cada vez más alto "las imponentes almenas del Infinito". Siguiendo el ejemplo de las operaciones con números finitos, Cantor también introdujo para estos números ciertas operaciones –sumas y multiplicaciones– y reglas de cálculo. Este es, en verdad, el gran juego: jugar con el infinito. Parecía entonces que el espíritu humano había alcanzado las mayores cimas que podía divisar.

Y entonces el edificio comenzó a tambalearse.

En matemáticas, esa ciencia que se creía segura hasta el punto de llegar incluso a aburrir, las contradicciones surgieron a finales del pasado siglo XIX. Y ocurrió justo allí donde se habían alcanzado las mayores cotas, en la Teoría de conjuntos, donde salió a la luz el talón de Aquiles de las Matemáticas.

De entre todas las contradicciones, quisiera citar una de las más graves, la conocida como antinomia de Bertrand Russell. Comencemos enunciándola como se la conoce generalmente, que es en su forma más jocosa.

El barbero de un ejército se puede definir de la siguiente manera: es el miembro del ejército que está obligado a afeitar a todos los soldados de su tropa que no se afeitan, por lo que, para ahorrar tiempo, tiene prohibido afeitar a quienes se afeitan ellos mismos. La pregunta ahora es si este soldado tiene que afeitarse o no.

Si se afeita, es de los que se afeita solo, pero entonces tendría prohibido afeitarse.

Si no se afeita, es de los que no se afeitan y su obligación es afeitar a estos soldados.

¿Qué debe hacer?

En esta broma, por supuesto, la redacción ya es imprecisa. Veamos pues el ejemplo más serio.

Por lo general, un conjunto no es un elemento de sí mismo. Por ejemplo, los elementos del conjunto de los números naturales no son conjuntos, sino números, por lo que el conjunto en sí, al ser un conjunto, no está entre sus propios elementos.

Sin embargo, puede suceder que los elementos de un conjunto también incluyan conjuntos. Imagina, por ejemplo, todos los conjuntos posibles de números y consideremos a la familia de todos estos conjuntos como un único conjunto. Un elemento de este conjunto es, por ejemplo, el conjunto de los números naturales, otro elemento podría ser el conjunto de todos los números menores que 10 y así muchos más. Cada uno de sus elementos es un conjunto. Sin embargo, él mismo no está entre sus propios elementos, pues sus elementos son conjuntos que no consisten en más que números, mientras que el conjunto en sí mismo no consiste en más que conjuntos de números.

Ahora bien, si juntamos todos los conjuntos imaginables en un único conjunto, entonces ya tenemos un ejemplo de un conjunto que es, en sí mismo, uno de sus propios elementos. Evidentemente, pues todo el conjunto total es un conjunto y todo conjunto debe ser alguno de sus propios elementos.

Si tienes la sensación de que pensar en esto ya es agotador, puedes omitirlo; no lo emplearemos en nada de lo que sigue. Basta con adoptar el punto de vista de que en los conjuntos ordinarios no ocurren tales rarezas. Así pues, diremos que un conjunto es "decente" si no figura entre sus propios elementos, y nada nos importa si existe otro tipo de conjuntos. Imaginemos entonces a todos los conjuntos "decentes" agrupados en un único conjunto.

Pero, ¿será "decente" ese conjunto?

Si es "decente", entonces, como cualquier conjunto "decente", es uno de sus propios elementos. ¡Pero ese no es un comportamiento "decente"!

Si no es "decente" no puede figurar entre los elementos del conjunto porque todos ellos son conjuntos "decente". ¡Pero eso es justamente lo que significa ser "decente"!

Por tanto, si es "decente" es "indecente" y si es "indecente" es "decente". En cualquier caso, llegamos siempre a una contradicción.

Y esto no se puede evitar.

Tampoco aporta gran cosa decir que la Teoría de conjuntos surgió prematuramente; dejemos este asunto y regresemos a ramas más humildes pero más seguras de las matemáticas. Después de todo, es bien sabido cómo fue que llegamos hasta la Teoría de conjuntos: sus ideas y conceptos aparecían en todas las ramas de las matemáticas. Por tanto, si la Teoría de conjuntos es defectuosa, ninguna rama puede considerarse invulnerable.

Las repercusiones de tal conmoción llegan hasta nuestros días.

Los matemáticos adoptan la típica actitud ante un peligro persistente. La mayoría ni tan siquiera quiere pensar en ello, cada uno a su trabajo y si a alguien se le ocurre mencionar el peligro, protestarán irritados.

Pero unos cuantos intentan salvar la situación.

Por supuesto, al principio se buscaba el error en la antinomia de Russell. El propio Russell opinaba que la definición del conjunto que aparece en la antinomia era incorrecta, pues contenía una especie de "círculo vicioso" porque el conjunto a definir está incluido en la propia definición. Sólo podríamos juntar todos los conjuntos "decentes" en un único conjunto si ya se hubiera aclarado antes la "decencia" del conjunto así generado, por lo que sabríamos de antemano si ese conjunto puede ser aceptado como elemento.

Desafortunadamente, nos encontramos estos "círculos viciosos" en todas las ramas de las matemáticas y con mucha frecuencia. Por ejemplo, ya en el caso de los números naturales, es habitual dar definiciones como esta: "consideremos el número más pequeño que satisface tal y cual propiedad". El número en sí juega un papel en su propia definición: sólo se puede distinguir el número más pequeño entre *todos* los números con esas propiedades y él mismo es uno de ésos.

El intento de rescate más radical es el de los intuicionistas (el término "intuicionismo" no es precisamente el más afortunado; no hablemos de su significado). Esta tendencia es más antigua que las propias antinomias, pero no cabe duda de que las antinomias le dieron un nuevo ímpetu. El nuevo intuicionismo está íntimamente ligado a Brouwer, quien rechaza las Matemáticas tal y como habían sido concebidas hasta aquel momento y trata de construirlas de nuevo sobre unos nuevos cimientos más firmes y seguros. Sólo acepta aquello que puede construir de algún modo; ya que a su modo de ver, una vez que hemos construido algo, es innegable que ahí está y ninguna antinomia podrá provocar dudas sobre su existencia. También rechaza las "pruebas de mera existencia" como, por ejemplo, la demostración del Teorema fundamental del Álgebra porque ésta no proporciona ningún método para la construcción de las raíces de una ecuación. No quiere ni mencionar al "infinito real" pues, en realidad, aunque podamos continuar un proceso indefinidamente, sólo es posible construir un conjunto finito de elementos de un conjunto. Según él, un conjunto infinito tan sólo sería "potencialmente infinito": siempre estaría en una etapa de formación y nunca podría considerarse cerrado o terminado.

Sólo quedan pues las ruinas de la Matemática clásica, y lo poco que ha sobrevivido es ahora terriblemente intrincado por la necesidad constante de llevar a cabo construcciones efectivas.

Sólo la de David Hilbert puede ser considerada como una verdadera operación de rescate. Su importancia creció más allá de la mera prevención de peligros: de ella surgió una nueva y fructífera rama de las matemáticas de la que hablaremos en los capítulos venideros.

20. *Las fórmulas se liberan*

Uno no debería creer que la Teoría de conjuntos todavía lleva hoy consigo la carga de las antinomias. Cuando llegó el momento de impulsar la "ingenua" Teoría de conjuntos original y de establecer para ella un sistema axiomático (hecho que ocurrió de manera muy urgente debido a las contradicciones), los matemáticos se aseguraron de que el concepto de conjunto estuviera suficientemente claro mediante las condiciones fundamentales de la nueva teoría. Así, todo lo valioso de la Teoría de conjuntos original permaneció dentro, mientras que los conjuntos más problemáticos fueron expulsados. Pero esta medida parece muy artificiosa; tal y como dijo Poincaré: "hemos construido una cerca alrededor del rebaño para proteger a las ovejas de los lobos, pero en absoluto sabemos si ha quedado algún lobo escondido dentro del cercado. No hay garantía contra nuevas contradicciones; podrían aparecer en cualquier momento".

Hilbert, uno de los mejores matemáticos de los últimos tiempos, se propuso el objetivo en los últimos veinte años de su vida de comprobar todos los escondites dentro del cerco delimitado por los axiomas. Reconoció que la preocupación por las definiciones que involucran círculos viciosos, las "pruebas de mera existencia" y el "infinito real" están más que justificadas, pues en todos estos conceptos acecha oculto el peligro. Pero entonces, ¿por qué trabajamos con conceptos "transfinitos" y que parecen trascender más allá de nuestra comprensión finita? Tenemos una buena razón para hacerlo y no renunciaremos a ellos a menos que exista una razón convincente e imperiosa, pues son ellos quienes posibilitan el desarrollo de las grandes teorías comprensivas que nos permiten esclarecer las distintas conexiones entre áreas bien remotas o lejanas. Esto se ve claramente en las Matemáticas de los intuicionistas, que se dividen en una multitud de pequeñas piezas trituradas y fragmentadas. Por tanto, no estamos dispuestos a renunciar a los peligrosos conceptos porque son éstos los que hacen de las Matemáticas un único e imponente edificio.

Las herramientas transfinitas desempeñan el mismo rol en la Lógica que la línea en el infinito o "i" en las matemáticas; esto es, pueden considerarse como los "elementos ideales" de la Lógica. Y debes tratarlos como objetos ideales: introdúcelos cuando te resulten útiles (¡y vaya que si han sido útiles!), pero examínalos también con sumo cuidado, pues podrían entrar en conflicto con alguna de nuestras antiguas reglas. En consecuencia, la tarea que aún queda pendiente en esta área es la investigación de la consistencia de los métodos transfinitos.

Con este objetivo en mente, Hilbert se propuso hacer de la lógica empleada en Matemáticas a la hora de establecer deducciones y demostraciones el tema de una verdadera investigación matemática. Una condición previa para este examen era la limpieza de los argumentos respecto de cualquier tipo vaguedad que pueda aferrarse a ellos mediante las imprecisas e inexactas expresiones lingüísticas que ocultan la forma pura y libre de toda ambigüedad de esos argumentos.

Los números sólo podían convertirse en objeto de estudio serio y detallado si ya no se hablaba de 5 dedos, 5 manzanas o 5 frases, sino de la forma pura y común a todos esos objetos: a eso se le llamó número y en este caso, fue denotado por el signo 5. Si queremos incluir los enunciados y proposiciones dentro del alcance de la investigación, también debemos ignorar su contenido. Por ejemplo, de enunciados como: ”$2 \times 2 = 4$”, “siempre se puede trazar una línea recta pasando por dos puntos” o “la nieve es blanca” sólo nos interesa lo que todos ellos tienen en común: que son verdaderos. Y, por supuesto, también podemos introducir un nuevo signo para esto, por ejemplo: 👍.

El valor lógico común de los enunciados: “$2 \times 2 = 5$”, “dos líneas rectas se encuentran en dos puntos” y “la nieve es negra” es que todos son falsos. El signo para esto podría ser éste: 👎 (como en el circo de los antiguos romanos; los primeros enunciados son absueltos, pero los segundos no).

En Matemáticas sólo nos interesan los enunciados que toman uno u otro de estos dos valores lógicos (o, en otras palabras, los que son verdaderos o falsos).

Por tanto, está a punto de surgir una aritmética mucho más simple que la de los números naturales. Mientras que allí había infinitas posibilidades, aquí tan sólo disponemos de dos posibles valores, hecho que simplificará notablemente cualquier tipo de tabla de cálculo.

Debido a que se trata de una cuestión de aritmética, también aparecerán cierto tipo de operaciones lógicas, que no serán más que las distintas conexiones entre enunciados individuales con las que nos encontramos a diario en Matemáticas.

Todo matemático puede descubrir de manera muy sencilla cuáles son esas conexiones aunque no hable todas las lenguas del mundo. Lo único que debe hacer es coger un libro de matemáticas en un idioma extranjero y tomar nota de las palabras que tiene que consultar en el diccionario mientras lo lee. Se sorprenderá al descubrir que una vez que haya aprendido las expresiones:

"no", "y", "o", "si…, entonces…", "si y sólo si",
"todo", "existe…", "el único que…",…

después de un rato, ya no será consciente de estar leyendo en un idioma extranjero, pues entenderá prácticamente todo con cierta fluidez. Las fórmulas matemáticas son internacionales y el texto que las acompaña sólo sirve para resaltar y enfatizar, por lo que no es absolutamente indispensable. Por otra parte, las conexiones lógicas realmente necesarias ya se encuentran entre las pocas palabras anteriormente enumeradas.

¿Cuál es, por ejemplo, la tabla de multiplicar de la palabra "no"? Es muy fácil: la negación de un enunciado verdadero (por ejemplo, "2×2 no es igual a 4") es claramente falsa, mientras que la negación de un enunciado falso es evidentemente cierta (por ejemplo, "2×2 no es igual a 5"). Por tanto, la tabla para "no" es la siguiente:

no 👍 = 👎

no 👎 = 👍

Es habitual abreviar la palabra "no" con el siguiente signo $\neg$. Por ejemplo, $\neg\ 2 \times 2 = 5$ es la negación de que $2 \times 2 = 5$. Con esta notación, la tabla para "no" es la siguiente:

$\neg$ 👍 = 👎

$\neg$ 👎 = 👍

También es muy fácil la tabla de multiplicar correspondiente a la operación lógica "y". Si dos enunciados son verdaderos y los conectamos con un "y", obtenemos un nuevo enunciado verdadero. Por ejemplo, "$2 \times 2 = 4$ y puedes trazar una línea recta pasando de dos puntos" es claramente cierto. Por tanto,

👍 y 👍 = 👍.

Pero, por otra parte, si uno de los enunciados conectados es falso, ya se estropea todo: "$2 \times 2 = 4$ y $2 \times 3 = 7$" es un enunciado falso, aunque tiene una parte verdadera. La combinación de dos enunciados falsos mediante "y" es, por supuesto, aún más falso. Por tanto, la tabla de multiplicar se completa del siguiente modo:

👍 y 👎 = 👎

👎 y 👍 = 👎

👎 y 👎 = 👎

Con esto hemos agotado todas las posibilidades y obtenemos entonces una bonita tabla de multiplicar finita, ¡mucho más simple que cualquier tabla de multiplicar usual!

¿Y qué podemos decir de la tabla de multiplicar "o"? Primero tenemos que aclarar qué entendemos por "o" porque las expresiones lingüísticas pueden ser bastante ambiguas:

> *O estamos locos y a todos nos destruye la maldad*
> *o esta fe que proclamamos será pronto realidad.*
>
> *Endre Ady*

Sucederá una de las opciones, pero ambas de ninguna manera: son mutuamente excluyentes.

"Si dividimos el Sahara en dos mitades, el león se encuentra en una u otra mitad", en cualquier mitad, por supuesto, pero también es posible que se encuentre en ambas mitades (cuando está en la frontera).

"O hablas o comes"; son dos situaciones mutuamente excluyentes, pero no tiene por qué darse ninguna de ésas. Puedes hacer otra cosa con la boca, como ni tan siquiera abrirla.

En Matemáticas, la palabra "o" se emplea generalmente en el segundo sentido. Esto es, los enunciados conectadas con un "o" se consideran verdaderos si al menos uno de ellos es verdadero, por lo que también se permite que ambos sean ciertos. Por lo tanto, sólo se excluye el caso en el que ninguno de los enunciados es verdadero. Así pues, la tabla de multiplicar de "o" es:

👍 o 👍 = 👍

👍 o 👎 = 👍

👎 o 👍 = 👍

👎 o 👎 = 👎

Dada la tabla, podemos considerar a ésta como definición de la operación lógica "o", pues está completamente libre de toda vaguedad lingüística: esta conexión ya sólo puede entenderse de una única manera. Los otros dos "o", esto es, cualquiera de los otros dos sentidos de esta palabra, también pueden definirse con la misma exactitud empleando nuestro "o".

Evidentemente, aquí también hay "reglas de cálculo". Por ejemplo, al igual que ocurre con los factores de un producto, en las operaciones "y" y "o", el orden de los enunciados es intercambiable.

Aunque las pocas posibilidades que surgen de los dos valores lógicos se agotarían bastante pronto, no quiero finiquitar este tema por completo.

Prefiero dar un ejemplo de cómo efectuar esta "aritmética". Sabemos que para multiplicar potencias de una misma base basta con sumar los exponentes y así, reducimos una multiplicación a una suma. ¿No existe una relación similar entre operaciones lógicas?

Tomemos un ejemplo de una de mis novelas policíacas favoritas. Intentemos averiguar quién es el culpable a partir de los siguientes hechos:

> En un juicio por un asesinato hay dos sospechosos: Péter y Pál. Se interroga a cuatro testigos.
>
> El primer testigo declara lo siguiente:
> "Todo lo que sé es que Péter es inocente".
>
> El segundo:
> "Todo lo que sé es que Pál es inocente".
>
> El tercero:
> "Sé que al menos una de las dos primeras afirmaciones es cierta".
>
> Y finalmente, el cuarto:
> "Puedo decir con total certeza que el tercer testigo miente".

Una vez examinadas las distintas pruebas, se confirma que el cuarto testigo no miente. ¿Quién es el asesino?

Analicemos la situación retrocediendo gradualmente: si la cuarta declaración es cierta, el tercer testigo testificó falsamente, luego no es cierto que una de las dos primeras declaraciones sea verdadera, es decir, ambas son falsas. Por tanto, ni Péter es inocente, ni Pál es inocente; son cómplices.

Pero intentemos llegar al núcleo lógico del argumento.

Aunque conocemos las declaraciones de los sospechosos, su valor lógico debe considerarse como desconocido, pues no sabemos si son ciertas o falsas.

Denotemos los valores lógicos de las dos primeras declaraciones por x e y. El tercer testigo afirmó que entre estas dos declaraciones hay al menos una que es cierta y dado que nuestra operación "o" expresa precisamente este tipo de "al menos", tendríamos que

$$x \text{ o } y$$

es un enunciado verdadero. El cuarto testigo negó esto y el signo para la negación es $\neg$. Por tanto, según su testimonio, la verdad es que

$$\neg\,(x \text{ o } y).$$

A poco que reflexionemos detenidamente, llegaremos a la conclusión de que esto es sinónimo de decir que la verdad es la negación la primera y la segunda declaración. Por tanto, lo cierto es que

$$\neg\, x \text{ y } \neg\, y.$$

La clave del argumento anterior es que, independientemente de si x e y son enunciados verdaderos o falsos, la proposición

$$\neg\,(x \text{ o } y)$$

equivale a la proposición

$$\neg\, x \text{ y } \neg\, y,$$

por lo que podemos pasar de enunciados "o" a enunciados "y" y viceversa.

En general, el camino que conduce a este tipo equivalencias no es ni trivial ni divertido. Sin embargo, su veracidad se puede comprobar mecánicamente si sustituimos x e y por los distintos valores posibles de 👍 y 👎 y comprobamos si coincide el valor de ambas proposiciones. En total, hay cuatro posibilidades:

I x e y tienen el valor 👍,

II x tiene el valor 👍, pero y tiene el valor 👎,

III x tiene el valor 👎, pero y tiene el valor 👍,

IV x e y tienen el valor 👎.

Comprobemos qué ocurre en el primer caso. ¿Cuál es el valor de la proposición

$$\neg\,(x \text{ o } y)$$

si tanto x como y tienen el valor 👍? De acuerdo con la tabla para "o" (no te molestes en pensarlo, consulta la tabla)

👍 o 👍 = 👍,

por lo que en este caso,

x o $y =$ 👍

y estamos entonces ante una proposición

$\neg$ 👍,

por lo que de acuerdo con la tabla para ’no’, su valor es

👎.

Y ahora, ¿cuál es el valor lógico de la proposición

$\neg\, x$ y $\neg\, y$

si tanto x como y tienen como valor lógico 👍? En este caso,

$\neg\, x = \neg$ 👍 $=$ 👎 y $\neg\, y = \neg$ 👍 $=$ 👎,

por lo que estamos ante una proposición

👎 y 👎,

que de acuerdo con la tabla para “y”, también toma el valor

👎.

En los tres casos restantes se prueba de forma que el valor lógico de ambos enunciados también coincide.

Incluso podemos hacer Álgebra: dado cierto enunciado, se efectúan sobre él todo tipo de operaciones lógicas hasta terminar diciendo si llegamos a algo cierto o falso; a continuación, se nos pide adivinar la veracidad o falsedad del enunciado original. El siguiente juego es particularmente importante:

> “Piensa en un enunciado y conéctalo mediante “o” con su propia negación. No me cuentes nada; esa proposición es verdadera”.

Podemos escribir esto de la siguiente manera: sea x el valor lógico del enunciado pensado, su negación es $\neg\, x$, la conexión entre ambas mediante “o’ se escribe como

x o $\neg\, x$,

y se afirma que su valor lógico es 👍 independientemente de si x es 👍 o 👎. Probémoslo.

Si el valor de x es 👍, teniendo en cuenta la tabla de multiplicar de “no”:

$\neg\, x = \neg$ 👍 $=$ 👎,

por lo que estamos ante un enunciado del tipo

👍 o 👎.

Y en consecuencia, su valor lógico es 👍.

Por otra parte, si el valor de x es 👎, aplicando de nuevo la tabla de multiplicar de “no”,

$$\neg\, x = \neg\ 👎 = 👍,$$

por lo que estamos ante un enunciado del tipo

👎 o 👍

y, de nuevo, su valor lógico es 👍.

Por lo tanto, existen relaciones entre enunciados que, independientemente del contenido de las declaraciones involucradas y sus respectivos valores lógicos, son siempre verdaderas. Son verdaderas sólo por su estructura lógica; reciben el nombre de identidades lógicas o tautologías. Y son precisamente estas afirmaciones las que juegan un papel crucial en las Matemáticas.

Podemos seguir jugando de tal manera que no se desconozca todo el enunciado, sino únicamente el sujeto. Por ejemplo: “he pensado un número y afirmo que es par. Ahora estoy efectuando todo tipo de operaciones lógicas a esa declaración”. Podemos escribir tal enunciado de la siguiente manera:

x es par.

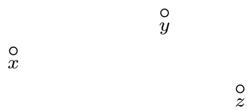
Que tal afirmación sea falsa o verdadera depende, evidentemente, de cuál sea el número x en cuestión. Por ejemplo: si $x = 4$, entonces es cierta; pero si $x = 7$ es falsa. Se trata pues de un enunciado cuyo valor lógico depende o es función de x y llegamos así a la Teoría de funciones de la Lógica.

No hay ninguna razón que nos impida hablar de funciones lógicas de varias variables: “he pensado en tres puntos y afirmo que se encuentran en una misma línea recta”. Podemos escribir este enunciado del siguiente modo:

$x,\ y,\ z$ son tres puntos colineales.

Evidentemente, su valor lógico depende de la elección de los puntos x, y y z. Si elegimos tres puntos de esta manera,

entonces es verdad; pero si los elegimos así



será un enunciado falso. Aquí debemos señalar que las incógnitas no se pueden elegir de forma completamente arbitraria. En nuestro primer ejemplo, x tiene que ser un número natural y en el segundo ejemplo, x, y y z tienen que ser necesariamente tres puntos del plano o del espacio. Pero este ya era el caso de las funciones matemáticas usuales: si recuerdas, allí también había que especificar cuál era conjunto donde se podían seleccionar las incógnitas. Este conjunto es el "dominio" de la función.

Y ahora entran en juego las operaciones peligrosas: aquéllas que sólo se aplican sobre las funciones lógicas. Un ejemplo es la palabra "todos". Si la aplicamos a nuestra primera función lógica, obtenemos:

$$\text{para todo } x, x \text{ es par}$$

(por supuesto, se entiende que x ha sido elegido entre los números naturales). Ciertamente obtenemos un enunciado, aunque claramente falso, pues es inmediato dar un contraejemplo; por ejemplo, 5 no es par. Por tanto,

"para todo x, x es par" $=$ 👎.

Sin embargo, si aplicamos a nuestra función la palabra "existe", entonces obtenemos un enunciado verdadero:

"existe un x para el que x es par";

es decir,

"existe un x para el que x es par" $=$ 👍.

Vemos entonces que las palabras "todo" o "existe" significan operaciones lógicas que se pueden aplicar a funciones lógicas y dan como resultado nuevas proposiciones con valores lógicos perfectamente definidos. En nuestro ejemplo, el valor lógico del enunciado que comienza con "para todo" es 👎 –es inequívoco e independientemente de x– y el enunciado que comienza con "existe" toma claramente el valor lógico 👍.

Estas nuevas operaciones traen los elementos transfinitos a la Lógica. "Esto (lo que sea) es cierto para *todos* los elementos del dominio". Si el dominio es infinito, como es el caso de los números naturales o el conjunto de los puntos del plano, entonces estaremos hablando del infinito como si éste estuviera terminado, completado y en nuestras manos. "Existe tal x en un dominio infinito", como si uno pudiera vagar buscando dicho x por ese dominio infinito. Los enunciados anteriores son: el primero una afirmación sobre el "infinito real" y el segundo una "declaración de mera existencia". Los enunciados del tipo "existe un" afirman algo sobre un elemento sin identificar cuál es ese elemento. De esta manera, los "elementos ideales" entran en la Lógica y sólo adquieren plenos derechos una vez probada su ausencia de contradicción.

Los enunciados de la Teoría de funciones lógicas pueden formularse de forma tan exacta como la identidad

$$x \text{ o } \neg x.$$

Para eliminar cualquier tipo de ambigüedad lingüística que todavía pudiera quedar adherida a los enunciados puramente lógicos, es mejor emplear signos y no palabras o expresiones imprecisas como las utilizadas anteriormente; recuerda que ya sustituimos “no” por ¬. Nacen así los libros de Lógica simbólica que son comprensibles casi que internacionalmente y en los que, página tras página, no aparece ni una sola palabra, sino secuencias de signos. Y así como el músico escucha la música cuando lee la partitura, el especialista descifra las Matemáticas cuando lee estos signos.

Fue Leibniz quien inició la construcción y desarrollo de un lenguaje puro e inequívoco basado únicamente en el uso de fórmulas. Este lenguaje fue mejorado más tarde por multitud de matemáticos, hasta que finalmente, Hilbert y su colega Bernays lo perfeccionaron para convertirlo en la fina y flexible herramienta que hoy dota de tal grado de precisión y rigor a las deducciones matemáticas como para ser considerado en sí mismo, como un objeto más de investigación matemática.

21. *Ante el Tribunal de Súper–Matemáticas*

AHORA es el momento de escoger una rama bien definida de las Matemáticas y examinar si puede haber contradicciones en ella.

Ya sabemos cómo se lleva a cabo la delimitación de cierta área de conocimiento: hay que identificar las hipótesis fundamentales de los teoremas más relevantes –esto es, los axiomas– y luego podremos decir que tal rama consiste en todo aquello que se pueda probar a partir de esos axiomas.

Por su parte, los axiomas se pueden escribir empleando el lenguaje de la Lógica simbólica, por lo que consistirán en una cadena de signos matemáticos y lógicos, evitando así el uso de cualquier palabra ambigua o imprecisa.

Queda por investigar qué significa que algo se pueda deducir a partir de los axiomas. Es decir, todavía tenemos que formular de forma clara y precisa cada uno de los pasos del proceso deductivo.

Cuando deducimos la exactitud de un enunciado a partir de la exactitud de otro y percibimos esta conclusión mediante nuestra notación simbólica, lo único que hacemos es pasar de una cadena de signos a otra. Recordemos por un momento la resolución de ecuaciones, pues allí también procedíamos de forma similar. Por ejemplo, es conveniente pasar de la cadena de signos

$$\frac{5x}{2} + 3 = 18$$

a esta nueva cadena:

$$\frac{5x}{2} = 15.$$

Primero pensamos esto en términos del contenido de cada uno de los enunciados: dijimos que si un número se convierte en 18 después de sumarle 3, es porque ese número es igual a 15. Más tarde, sin embargo, nos dimos cuenta de que *formalmente* ambas cadenas sólo se diferencian en que en el izquierdo de la primera cadena hay un 3 sumando que falta en la segunda, mientras que el número de la derecha de esta segunda cadena es 3 unidades más pequeño que el de la primera. Dedujimos entonces una regla puramente *formal*: se puede pasar un sumando de un lado de la ecuación al otro lado como sustraendo. Posteriormente, aplicamos esta regla de manera automática: es decir, ignorando totalmente el contenido. Por tanto, aquella conclusión basada inicialmente en el contenido terminó convirtiéndose en no más que una simple "regla del juego" mecánica: "puedes cambiar ciertos signos de aquí para allá de cierta manera". Ocurre entonces como con el ajedrez: puedes mover el rey una casilla en cualquier dirección.

En general, esto es lo que también podremos hacer cuando obtengamos nuevas deducciones a partir de los axiomas: observaremos en nuestras cadenas de signos qué cambio formal se corresponde con la deducción en cuestión y después aplicaremos ese cambio ignorando totalmente todo aquello relacionado con los contenidos.

A la vista de lo anterior, podríamos olvidar por completo de qué trata nuestra rama de conocimiento particular y decir simplemente que tenemos unas cuantas cadenas de signos sin contenido alguno (a las que llamaremos axiomas) y unas reglas de juego que nos indican qué cadenas se pueden obtener a partir de una cadena dada. De este modo, en manos del matemático, el sistema de proposiciones y demostraciones se vuelve tan dócil y flexible como los propios números, por lo que es posible aplicar sobre él todos los procedimientos matemáticos ya conocidos.

Sin embargo, estos procedimientos no deben aplicarse mecánicamente o siguiendo simplemente las reglas del juego. Cada paso debe ser analizado concienzudamente: ¿estamos ante una deducción legítima y segura o se ha colado algún peligroso elemento por la puerta trasera? No conviene perder nunca de vista nuestro objetivo: queremos demostrar que el uso de elementos transfinitos está plenamente justificado esa área de conocimiento, pero tal justificación tendrá nulo valor si se ha llevado a cabo empleando elementos igual de peligrosos. Nuestras herramientas y medios deben mantenerse tan puros y precisos como para que ni tan siquiera el intuicionista más intransigente tenga nada que objetar.

Aquí es donde se dividen las matemáticas por la mitad: por un lado, en sistemas completamente formales con no más que reglas en lugar de conclusiones y por otro, en una especie de Supermatemáticas –también llamadas Metamatemáticas– que estudian cuidadosamente el contenido de cada uno de los pasos que da utilizando sólo deducciones libres de toda duda. En cierto modo, la Metamatemática examina los sistemas formales desde arriba y su propósito es estudiar la consistencia de la rama de conocimiento bajo consideración.

Pero si estamos investigando si podemos llegar a una contradicción en base a nuestras reglas, ¿no sería necesario examinar también el contenido de cada uno de los axiomas? Parece natural pensar que es el contenido de las oraciones, y no tanto su forma, quien nos conduciría a una contradicción.

Esta preocupación puede remediarse observando que basta con limitarse a una sola contradicción. Por ejemplo, si suponemos que los números naturales pertenecen al sistema, la siguiente:

$$1 = 2.$$

Esta simple cadena de símbolos se puede entender como una mera sucesión de signos: observamos que la sucesión formada por un 1, el símbolo $=$ y un 2 indica una contradicción. No necesitamos más: todos conocemos pruebas jocosas de que $1 = 2$ y ya mencioné en algún momento que una vez colada una declaración contradictoria, entonces podemos probar cualquier cosa, y en particular que $1 = 2$. Por tanto, para estar completamente seguros de que en nuestro sistema no se esconde contradicción alguna, basta probar que la fórmula $1 = 2$ no es deducible.

Formulada con precisión, la tarea de la Metamatemática consiste, por tanto, en mostrar que partiendo de los axiomas del sistema y empleando las reglas de juego dadas, no es posible llegar a la cadena de signos $1 = 2$.

En unos cuantos casos simples, fue el mismo Hilbert quien dio un ejemplo de tales pruebas de consistencia y, posteriormente, sus discípulos generalizarían tal procedimiento para otros sistemas. Sin embargo, el pionero en este campo, por delante incluso del mismísimo Hilbert, fue Gyula König, quien introdujo en Hungría casi todas las ramas de las matemáticas modernas.

Ahora estaba todo listo para poner una amplia y extensa rama del conocimiento al alcance de esta investigación. Por supuesto, tal y como era previsible, la primera en ofrecerse fue la rama de los números naturales. Todo parecía indicar que sólo habría que juntar un poco de fuerzas para extender las ideas de Hilbert a toda la Teoría de números, incluyendo por supuesto, a todos los peligrosos conceptos que ésta contenía.

Pero entonces sucedió algo más: la "Teoría de la demostración" de Hilbert, esta nueva área del conocimiento que crecía lenta y cuidadosamente, fue sacudida por una tormenta.

Un joven matemático vienés, Kurt Gödel, demostró –empleando exclusivamente métodos de la Teoría de la demostración (hablaremos sobre cómo los utilizó en el último capítulo)– que no es posible probar la ausencia de contradicción en la Teoría de números si sólo empleamos herramientas que se pueden describir formalmente dentro del propio sistema.

Por supuesto, la Metamatemática no utiliza ningún medio formal: siempre tiene que saber lo que hace conscientemente, nunca mecánicamente. Pero de esto, en principio, tampoco se sigue que no se puedan establecer reglas de juego mecánicas y formales a partir de sus *conclusiones*. De hecho, esto sí es posible para cualquier persona que, ajena a los verdaderos propósitos de la Metamatemática, sólo desee jugar un poco con esas ideas. Y para hacerlo, no es necesario ser János von Neumann, de quien se hizo famoso el siguiente dicho: "la mayoría de los matemáticos prueban cosas que ya saben, von Neumann lo que se le antoja" (también es conocido por, supuestamente, haber afirmado durante un congreso en Bolonia que la formalización de la Metamatemática carecía de interés, pero que la haría él mismo en cualquier momento por una caja de bombones). *Si* formalizásemos la Metamatemática, parecería entonces evidente que sus cuidadosas conclusiones, que evitan en todo momento cualquier elemento peligroso, podrían formalizarse en un marco mucho más pequeño y limitado que la rama del conocimiento considerada junto con sus elementos transfinitos. Pero ése no es el caso: el resultado de Gödel nos dice que la consistencia de un sistema sólo puede probarse empleando métodos que van más allá de los límites del sistema en cuestión. Pero, ¿a quién le convencerá una justificación de los elementos peligrosos que ha sido obtenida mediante métodos de un ámbito aún más amplio que el sistema a estudiar? Parecía que este descubrimiento era la sentencia de la Teoría de la demostración; ya podíamos soltar el bolígrafo y rendirnos.

El propio Hilbert no lo creyó ni por un momento. Estaba convencido de que había una salida: tenía que haber algún método deductivo que aun escapándose de los límites del sistema sometido a estudio, se basase, sin embargo, en alguna facultad concreta de nuestro entendimiento finito para que así también pueda ser aceptada por los intuicionistas.

La búsqueda se inició de inmediato y tuvo éxito: Gerhard Gentzen, un estudiante de Hilbert, encontró los medios apropiados para la Metamatemática: la "inducción transfinita". Y de hecho, con ayuda de esta novedosa herramienta, logró probar la consistencia de la Teoría de números. Así pues, la manada de los números naturales ya podía crecer y vivir en paz; no aparecerá ningún lobo entre ellos.

"Inducción transfinita" suena como muy serio y peligroso, pero tan sólo se trata del inofensivo argumento que comentamos a continuación.

Comenzando en cualquier término de la sucesión de los números naturales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

y caminando ahora hacia atrás a pasos de cualquier longitud, es evidente que sólo podemos dar un número finito de pasos. Incluso comenzando en 1 millón y retrocediendo a pasos de longitud 1 unidad, llegaríamos a 1 después de un millón de pasos.

Ahora colocamos la sucesión de los números naturales de modo que, por ejemplo, aparezcan primero los números impares y luego los números pares:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots$$

Si retrocedemos desde cualquier número en este orden, es decir, si eligiendo números cada vez más próximos al principio, después de un número finito de pasos este camino también termina. En efecto, pues si comenzamos con un número impar, es tan evidente como en la sucesión original. Y si partimos de un número par, también vemos que, yendo hacia atrás, más tarde o más temprano, se acabarán los números pares, por lo que tendremos que saltar a un número impar y a partir de ese momento, por muy grande que sea el número impar al que saltemos, ya nos estaremos moviendo en una única sucesión y estamos, por tanto, en una situación análoga a la original.

Es evidentemente que podemos reordenar la sucesión de los números naturales de forma mucho más complicada. Por ejemplo, podríamos separarlos en tres grupos del siguiente modo: primero se escriben los números divisibles entre 3, luego aquéllos que son 1 unidad mayores que ésos y finalmente los que son 2 unidades mayores (también incluiremos a 0 por aquello de ser más ordenados):

$$0,\ 3,\ 6,\ 9, \ldots\ 1,\ 4,\ 7,\ 10, \ldots\ 2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$$

Si comenzamos a retroceder desde un número del tercer grupo, caeremos en el segundo grupo después de un número finito de pasos y desde ese instante, nos encontraremos en la misma situación que en el caso que acabamos de comentar.

Pero también podemos considerar un número infinito de grupos. Basta colocar, por ejemplo, primero los números impares, luego los que sólo son divisibles entre la primera potencia de 2 (que es $2^1 = 2$), después los divisibles entre la segunda potencia de 2 (que es $2^2 = 4$), luego los divisibles entre la tercera potencia de 2 (que es $2^3 = 8$) y así sucesivamente:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ldots\ 4,\ 12,\ 20,\ 28,\ldots$$
$$8,\ 24,\ 40,\ 56,\ldots$$

No debemos alarmarnos por tener un número infinito de grupos; en cuanto escojamos un número, éste pertenecerá a uno de los grupos y, evidentemente, tal grupo sólo estará precedido de un número finito de grupos.

En todos estos casos, caminar hacia atrás equivale a pasar de una disposición más compleja a otra más simple. Y además, resulta que si partimos de una disposición complicada de la sucesión de los números naturales y avanzamos en cada ocasión hacia disposiciones cada vez más simples, entonces llegaremos a una disposición simple y sin ningún tipo de complicación en un número finito de pasos.

Lo que utiliza Gentzen en su prueba es que aun partiendo de determinada disposición –que es, en realidad, mucho más compleja que cualquiera de las que acabamos de mencionar– tan sólo es posible caminar hacia atrás un número finito de pasos. Y esta es una afirmación fácilmente concebible por nuestro pensamiento finito que, sin embargo, se escapa de los límites del sistema en consideración.

Pero, ¿cómo se emplea este resultado en una prueba de consistencia?

El argumento de una demostración de consistencia siempre es el siguiente: supongamos que alguien afirma haber llegado hasta una contradicción partiendo de los axiomas del sistema. Entrega una deducción que empezando con los axiomas, avanza mediante la aplicación de, supuestamente, sólo las reglas de juego permitidas y termina finalmente afirmando que $1 = 2$. Nuestro trabajo consiste en demostrar que la demostración es falaz o defectuosa; es decir, tenemos que encontrar el fallo que hay en ella.

Si no ha aparecido ningún elemento peligroso en la deducción presentada, es evidente que podremos identificar el error del argumento. Si el punto de partida es correcto y los métodos de deducción aplicados son indiscutibles, sólo es posible llegar a $1 = 2$ cometiendo algún error.

Sin embargo, si en la prueba aparece algún elemento transfinito, lo que acabamos de decir ya no es cierto: la contradicción podría haber sido causada por un elemento transfinito.

Pero la conclusión de la demostración es que $1 = 2$. Y en esto no hay ni rastro de ningún concepto o idea transfinita. Por tanto, si algún elemento ideal ha jugado cierto papel en la prueba, lo único que podría haber sucedido es que, manteniendo sus viejas costumbres, apareciera, surtiera cierto efecto y terminara por esfumarse. ¿Y no podría obtenerse la demostración sin su ayuda del mismo modo que obtenemos ciertas fórmulas trigonométricas con y sin la ayuda de "i"?

Si sólo aparece un elemento peligroso o incluso si sólo aparecen algunos de ellos pero de forma completamente independiente unos de otros, entonces sí. Hilbert demostró que tal tipo de pruebas se pueden transformar en demostraciones completamente inofensivas en las que encontraríamos el error de inmediato.

Desafortunadamente, al igual que ocurre con los seres incorpóreos de nuestra imaginación, los elementos ideales también pueden solaparse formando complejas e intrincadas estructuras. Y en una prueba así de enredada, los elementos transfinitos ya no se pueden eliminar tan fácilmente.

Gentzen se percató de que los enredos de las demostraciones estaban en analogía con las complicadas maneras en que podemos presentar la sucesión de los números naturales. Si se aplica el método de Hilbert a una demostración compleja e intrincada, los elementos transfinitos no desaparecen, pero la demostración se convirtirá en una deducción cuyo hilo argumental se corresponde ahora con una disposición más simple de la sucesión de los números naturales. Y sucede exactamente lo mismo si se aplica de nuevo el procedimiento de Hilbert a esta otra demostración ya de inicio más simple. No obstante, avanzando hacia disposiciones cada vez más simples, después de cierto número finito de pasos, habremos llegado a una sucesión sin ningún tipo de complicación. Por tanto, aplicando las ideas de Hilbert cierta cantidad finita de veces, habremos llegado a una prueba sin complicación alguna, esto es, a una prueba libre de todo elemento transfinito y en la que ya se puede encontrar el error sin ninguna dificultad.

Se trata de un hermoso razonamiento puramente matemático y el resultado que afirma es de gran importancia, pues restaura nuestra confianza en los antiguos métodos de la Teoría de números. Sin embargo, la mayoría de los matemáticos, aquéllos que ni tan siquiera quieren oír hablar de estos peligros, sienten cierta repulsión hacia la Teoría de la demostración; la ven como algo que les es completamente ajeno y más propio de la Filosofía que de las Matemáticas. Pues sólo reconocen la legitimidad de una nueva rama de las

Matemáticas si ésta también se puede aplicar de forma creativa y fructífera en otras áreas de las Matemáticas. Hilbert intentó convencerles de las bondades y utilidades de la Teoría de la demostración sometiendo a la Hipótesis del continuo de la Teoría de conjuntos –que era por aquel entonces el problema más conocido y grandioso— a los métodos de la Teoría de la demostración.

A continuación explicaré en qué consiste tal problema. Si ordenamos los números naturales fijándonos en su magnitud, obtenemos un orden completo; esto es, cada número natural tiene un sucesor inmediato. Por ejemplo, al 3 le sigue el 4 y al 12 el 13. Pero ya no ocurre lo mismo si hablamos de las fracciones: dada una fracción, no existe su sucesor, pues siempre podemos escoger una fracción tan próxima a la dada como deseemos. Y esto todavía es más evidente cuando consideramos la totalidad de los números reales, que se extienden de forma completamente enmarañada y continua a lo largo de la línea recta numérica. Ésta la razón por la que empleamos la palabra "continuo" para referirnos a la totalidad o cardinalidad del conjunto de los números reales.

Y ahora, en el ámbito de los cardinales introducidos por Cantor, también se puede plantear la cuestión de si todo cardinal tiene un sucesor inmediato. La respuesta es que sí; por lo que, desde este punto de vista, los cardinales infinitos se comportan como los números naturales. El cardinal infinito más pequeño es el de los números naturales, pero ¿cuál es su sucesor? Sabemos que el continuo –esto es, el cardinal de los números reales– es mayor. Pero, ¿es el sucesor inmediato o hay algún cardinal entremedias? Se han realizado multitud de investigaciones en relación con esta pregunta y entre los matemáticos se ha ido desarrollando, poco a poco, la conjetura de que el continuo es el número transfinito que viene justo después del cardinal de los números naturales. Es la conocida como "Hipótesis del continuo" o también, tal y como dicen aquéllos que creen creen fervientemente en ella, el "Teorema del continuo". No obstante, nadie ha llegado a una conclusión clara todavía.

Recientemente, Gödel (basándose en las ideas previas de Hilbert) ha empleado la Teoría de la demostración para probar que asumir la Hipótesis del continuo como algo verdadero no conduce a ninguna contradicción en la Teoría de conjuntos. Por tanto, la Hipótesis del continuo es, o bien independiente de los axiomas de la Teoría de conjuntos, o bien deducible a partir de esos axiomas; por lo que, en cualquier caso, podemos invocarla con cierta tranquilidad en nuestras pruebas: sabemos que no dará lugar a contradicciones. La demostración de este hecho es similar a la de la consistencia de la Geometría de Bolyai: Gödel construyó un "modelo" en la Teoría de conjuntos en el que son compatibles los axiomas de la propia Teoría de conjuntos y el Teorema de continuo [1].

Hilbert podía dirigirse ahora a los escépticos de la Teoría de la demostración para decirles, con razón, que "por sus frutos se reconoce al árbol".

Posdata sobre la aproximación al infinito

La consistencia de la Teoría de números naturales está ahora asegurada y la prueba que así lo justifica puede convertirse fácilmente en la prueba de consistencia de otros conjuntos numerables como, por ejemplo, el conjunto de los números enteros o el conjunto de los números racionales.

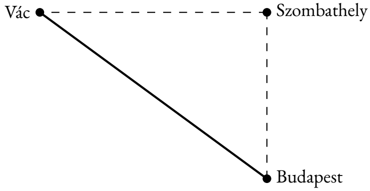
Pero aún queda pendiente el conjunto de los números reales, donde nos encontraremos con nuevas dificultades.

Los números irracionales fueron capturados mediante aproximaciones cada vez más precisas, encerrándolos así en intervalos cada vez más pequeños y estrechos. Por lo tanto, esto ya no es algo de Teoría de números, sino de Análisis. Aquí los procesos infinitos aparecen permanentemente y esto trae consigo un nuevo tipo de elementos peligrosos.

Cuando mencioné por primera vez este tipo de ideas, tuve la precaución de enunciar con honestidad la peligrosa frase de la que depende por completo el éxito o el fracaso del Análisis. Tal frase decía así: "*nuestra intuición nos dice* que incluso continuando con la construcción de intervalos encajados y cada vez más estrechos indefinidamente, ese algo en que acaban encogiéndose es la parte común a todos ellos". Pero, ¿cómo se atreve nuestra intuición a afirmar algo sobre un proceso infinito? ¿Acaso ya hemos olvidado de nuevo que no tenemos derecho a transferir nuestras experiencias de lo finito a lo infinito? Veamos un ejemplo más que también nos hará reflexionar sobre este asunto.

No es necesario ser matemático para darse cuenta de que la distancia más corta entre dos puntos es la del camino recto. Si alguien viaja directamente de Budapest a Vác, llegará mucho antes que si lo hace pasando por Szombathely:

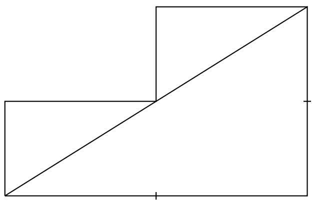
[1] Nota de los traductores: El matemático estadounidense de origen polaco Paul Cohen demostró en 1962 que la Hipótesis del continuo es *independiente* de los axiomas de la Teoría de conjuntos.



Y de esto se deduce inmediatamente que la suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el tercer lado.

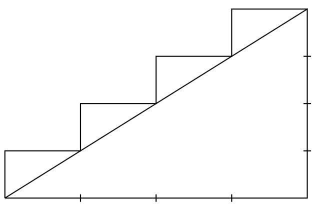
Bien, pues a continuación probaré que la suma de los dos catetos de un triángulo rectángulo es exactamente igual a la hipotenusa. Obviamente, esto es una tontería; pero es del tipo de cosas que uno puede hacer si aplica la intuición a los procesos infinitos.

Dibujemos una escalera sobre la hipotenusa de modo que las aristas de sus peldaños sean paralelas a los catetos del triángulo:



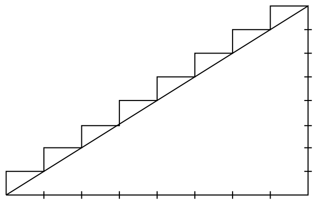
Es evidente que los dos trozos verticales juntos son tan largos como el cateto vertical y que el cateto horizontal es tan largo como los dos trozos horizontales juntos. Por tanto, la longitud total de los segmentos que forman la escalera es igual a la suma de los catetos.

Ocurre exactamente lo mismo para una escalera de cuatro escalones:



Los trozos horizontales suman la longitud del cateto horizontal y los verticales la del cateto vertical.

Y si continuamos dividiendo la hipotenusa en más escalones,



sigue siendo cierto que la longitud total de las aristas de la escalera es igual a la suma de los catetos. Por otra parte, a medida que hacemos cada vez más escalones, se hace cada vez más difícil distinguir la escalera de la propia hipotenusa, por lo que "nuestra percepción nos dice" que si continuamos con la subdivisión indefinidamente, la escalera se fusionará con la hipotenusa y en consecuencia, la hipotenusa debe ser igual a la suma de los dos catetos.

Después de esto, deberíamos reflexionar muy seriamente sobre la fiabilidad de nuestra intuición cuando se proyecta hacia el infinito.

Sin embargo, el ser o no ser del Análisis depende de esa frase tan peliaguda. O nos la creemos sin ningún fundamento, simplemente porque queremos creerla, o no nos queda más remedio que recurrir a los métodos de la Teoría de la demostración para investigar si tal afirmación no conduce a contradicciones.

Estos nuevos elementos transfinitos también entran a formar parte del sistema de axiomas del Análisis. Y admitiéndolos, el área de conocimiento delimitada por éstos ya será tan extensa que no sólo incluirá la inducción transfinita empleada por Gentzen, sino también otros casos mucho más complejos. Sin embargo, el Teorema de Gödel sigue siendo cierto: no se puede probar la consistencia del sistema mediante métodos que pueden formalizarse dentro del propio sistema. Por tanto, ya no es de esperar que las herramientas empleadas hasta este momento sean suficientes para probar la coherencia del Análisis; hay que buscar nuevos métodos más precisos y refinados que todos los anteriores. Esta cuestión sigue siendo un área de investigación abierta hasta el día de hoy.

22. ¿Qué no saben las matemáticas?

La demostración de la ausencia de contradicciones en la Teoría de números puso de manifiesto una de las imperfecciones de la axiomatización. La inducción transfinita allí empleada puede formularse en el lenguaje de los números naturales y es un procedimiento fácilmente concebible por una mente finita. Sin embargo, transciende al sistema delimitado por los axiomas de la Teoría de números naturales.

Éste no es un fenómeno aislado: no existe ningún sistema axiomático capaz de caracterizar exactamente aquello que pretende delimitar; siempre habrá algo que se le escape y, por otro lado, siempre incluye algo inesperado. Un sistema axiomático capta una serie de cosas, pero en realidad sólo contiene una parte de ellas.

Que un sistema axiomático abarca mucho fue probado por el matemático noruego Thoralf Skolem.

Aunque con nuestros axiomas sólo pretendamos captar la sucesión de los números naturales en su orden habitual, queramos o no, los ordenamientos más complejos de dicha sucesión también se introducirán irremediablemente en el sistema. No es posible separar unos de otros.

Por otra parte, si queremos delimitar axiomáticamente un dominio no numerable –como es el caso, por ejemplo, de los números reales–, siempre habrá un conjunto numerable inmiscuido en él que cumple las condiciones de todos los axiomas.

Que los sistemas axiomáticos siempre se dejan algo fuera fue revelado a partir de un sorprendente descubrimiento de Gödel: existen problemas indecidibles en cualquier sistema axiomático que contenga a la Teoría de números.

Pero, ¿qué se supone que significa esto realmente?

Hay muchos problemas matemáticos que todavía no han sido resueltos. Ya he mencionado alguno. Lo hice, por ejemplo, cuando te hablé de los números primos “gemelos” (como 11 y 13 o 29 y 31): ¿hay infinitos números primos gemelos? La conjetura de Goldbach tampoco ha sido resuelta. Se ha observado que:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Esto es, parece que los números pares, excepto el 2, se pueden escribir como suma de dos números primos, y en ocasiones incluso de más de una forma. De hecho, esto es cierto para todos los números pares que han sido examinados hasta el momento. Sin embargo, a día de hoy, la veracidad de tal hecho para todo número par no es más que una mera conjetura.

La conjetura de Fermat es la más famosa y conocida. Sabemos que

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

o equivalentemente, que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

y además de éste, hay más ejemplos de ternas de números enteros en las que la suma de los cuadrados de los dos primeros números es igual al cuadrado del tercero. Garabateando en el margen de un libro, Fermat anotó que había encontrado una prueba de que una relación análoga a ésta pero con exponentes mayores que 2 ya no es posible, pero lamentaba también no disponer de espacio suficiente en dicho margen para escribir los detalles. En otras palabras, anotó que es imposible encontrar tres números enteros, x, y y z para los que

$$x^3 + y^3 = z^3$$
$$\text{o } x^4 + y^4 = z^4$$
$$\text{o } x^5 + y^5 = z^5$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Fermat murió hace ya bastante tiempo. Y aunque han sido muchos los matemáticos que han intentado reconstruir su demostración, ninguno ha tenido éxito hasta el día de hoy [1]. Estos esfuerzos infructuosos por encontrar una prueba, que supuestamente alguien ya tuvo entre sus manos despertaron tal interés por este problema tan poco interesante que incluso hubo quien dejó por testamento una gran fortuna para quien lo resolviera. Y así, no es de extrañar que despertara la imaginación de los ignorantes tanto o más que la cuadratura del círculo. Afortunadamente, el espíritu empresarial ya se ha

[1] Nota de los traductores: La conjetura Fermat, también llamada Último Teorema de Fermat, fue probada en 1995 por el matemático inglés Andrew Wiles.

atenuado notablemente una vez que el dinero prometido ha perdido gran parte de su valor.

No obstante, este problema ha tenido un efecto estimulante en las Matemáticas; pues con la intención de hacerlo más accesible, se introdujeron nuevos elementos ideales –los conocidos como "ideales"– que luego resultaron de gran utilidad en las ramas más importantes del Álgebra. Pero, aun así, la conjetura de Fermat sólo ha sido probada para algunos exponentes particulares; en su generalidad, todavía carece de respuesta. Lo más probable es que Fermat cometiera algún error en su prueba o que encontrara, simplemente, una prueba para cierto caso especial.

Pero también hay problemas en Matemáticas para los que se ha demostrado su irresolubilidad si nos restringimos a ciertos métodos y herramientas concretas. Éstos son, por tanto, problemas ajenos a toda discusión y completamente resueltos, pero en sentido negativo. Problemas de este estilo son, por ejemplo, la solución general de una ecuación de quinto grado y la cuadratura del círculo. La trisección de un ángulo o la duplicación de un cubo también pertenecen a esta categoría de problemas. Se ha probado que ambas tareas son irrealizables empleando únicamente regla y compás. Con estas herramientas podemos dividir cualquier ángulo a la mitad, pero ya no podemos dividirlo en tres ángulos de igual amplitud. La duplicación del cubo es el análogo tridimensional de la duplicación de nuestro estanque de peces. Mientras que en plano pudimos construir el lado del cuadrado grande con regla y compás, en el espacio tridimensional ya no es posible construir la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de uno dado empleando sólo esas herramientas. Esta tarea también es conocida como el problema de Delos, ya que, supuestamente, los dioses exigieron al pueblo de Delos que duplicase el tamaño de su altar en forma de cubo para librarles de una calamitosa pandemia. Toda la buena voluntad de los fieles fue insuficiente. Fue Platón quien consoló a los habitantes de Delos: los dioses se habrían mofado de su negligente educación e ignorancia para indicarles las virtudes del estudio y cuidado de la Geometría.

Sin embargo, el teorema de Gödel no trata sobre problemas que todavía no han sido resueltos o cuya irresolubilidad ya ha sido probada, sino sobre problemas que son indecidibles dentro del sistema axiomático correspondiente.

Ahora quisiera dar un esbozo general del argumento de Gödel.

Supongamos que tenemos un sistema axiomático consistente para los números naturales o, lo que es lo mismo, para la Teoría de números. En esos axiomas habríamos incluido todo lo que pudiera ser necesario en esta área de las Matemáticas y, por supuesto, también nos habríamos cerciorado de que no hubiera ninguna contradicción. Además, habríamos escrito todo en el lenguaje de la lógica simbólica, por lo que cada enunciado no sería más que una cadena de signos.

En tal caso, así como antes asociábamos un par de números a cada punto del plano, ahora podemos asociar un número a cada una de esas cadenas de caracteres. Para ello, procederemos tal y como indicamos a continuación. Dado que tenemos una cantidad finita de signos lógicos y matemáticos, asociaremos a cada uno de éstos uno de los primeros números primos (aquí consideraré a 1 como número primo). Así pues, por ejemplo, el signo 1 se correspondería con el propio número 1 y hecho esto, ya no son necesarios más signos para los demás números, pues podemos escribir a 2 como $1 + 1$, a 3 como $1 + 1 + 1$ y así sucesivamente; al signo "$=$" le asociamos el segundo número primo, que es el 2; al signo de "negación", es decir, a "$\neg$" le asociamos tercer número primo, que es el 3; al signo "$+$" le asociamos el cuarto número primo, que es el 5 y así sucesivamente. Nada importa aquí el orden que escojamos para nuestros signos. Supongamos que 17 es el número primo que se corresponde con nuestro último símbolo. Ahora, a partir del 19, los siguientes números primos se asociarán con las letras x, y, $z, \ldots$ que denotarán a los valores desconocidos que aparecen en los enunciados del sistema. Por ejemplo, x se corresponde con 19, y con 23 y así sucesivamente.

Obtenemos de este modo una especie de "diccionario":

$$\begin{array}{rcl}
1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\
\neg & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 19 \\
y & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

a partir del cual vemos de inmediato que, por ejemplo, la fórmula $1 = 1$ se corresponden con la terna de números $1, 2, 1$.

Veamos ahora como pasar de la terna $1, 2, 1$ a un único número. Esto es relativamente fácil de hacer e incluso disponemos de varias opciones. Una de ellas podría consistir, por ejemplo, en sumar los tres números; obtendríamos así, en nuestro caso, el número 4. Todo correcto, pero el problema es que este 4 se ha tragado los otros números: sólo a partir de él es imposible saber de qué números se compuso y en qué orden. Por ejemplo, 4 podría provenir tranquilamente de

$$1+3 \ \text{ o } \ 3+1 \ \text{ o } \ 2+2 \ \text{ o } \ 1+1+1+1 \ \text{ o } \ 2+1+1$$

y no sólo de

$$1+2+1.$$

¡Lo que quiero es un número que me permita identificar exactamente cada una de las partes que lo componen! Y por supuesto que hay una forma de obtener tal número: consiste en multiplicar los tres primeros números primos, que son:

$$2, \ \ 3 \ \text{ y } \ 5,$$

elevando previamente cada uno de ellos a la potencia respectiva que es indicada por cada uno de los números que forman nuestra terna:

$$1, \ \ 2 \ \text{ y } \ 1.$$

Es así como se obtiene el siguiente producto:

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90,$$

por lo que de ahora en adelante, asociaremos la fórmula

$$1 = 1$$

con el número

$$90.$$

Partiendo únicamente de un número, es fácil identificar cuál es la fórmula que se le ha asignado; lo único que hay que hacer es descomponer el número en factores primos ordenados:

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \end{aligned}$$

por lo que los números primos

$$1, \ \ 2 \ \text{ y } \ 1$$

aparecen de nuevo como exponentes y, según nuestro “diccionario”, a ellos están asociados los signos

$$1, \ \ = \ \ \text{y } \ 1,$$

por lo que partiendo de 90, identificamos correctamente la fórmula correspondiente; que es, en este caso,

$$1 = 1.$$

Cada enunciado del sistema se corresponde entonces con un número. Y entonces, a cada demostración se le puede asignar un número empleando el mismo procedimiento. Desde un punto de vista puramente formal, una demostración no es más que una cadena de enunciados (en la que cada enunciado es una consecuencia del anterior) y ya hemos asignado un número a cada enunciado, por lo que si una prueba consta de, por ejemplo, tres enunciados, se corresponderá entonces con tres números, pero a su vez, estos tres números se pueden convertir en un único número empleando el método anteriormente mencionado de modo que podremos identificar sus componentes en cualquier momento; todo lo que tenemos que hacer es descomponerlo en factores primos ordenados.

Supongamos que ha aparecido un número espantosamente grande en alguna de las asignaciones y supongamos también que hemos tenido la paciencia suficiente como para descomponerlo en factores primos, obteniendo entonces

$$2^{90\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \times 3^{90}$$

Observamos en primer lugar que los exponentes no son números primos. Por lo tanto, el número dado no se corresponde con un simple enunciado, sino con una cadena de enunciados, esto es, con una demostración. Además, sabemos que tal prueba consta de un total de dos declaraciones, que no son más que aquellas que se corresponden con los números

$$90\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ y } 90.$$

Descomponiendo estos dos números en sus correspondientes factores primos ordenados, recuperaremos los enunciados correspondientes. En el primer número hay diecinueve ceros, por lo que tal número es igual a

$$9 \times 10^{19} = 3^2 \times 10^{19} = 3^2 \times 2^{19} \times 5^{19}$$

al ser $10 = 2 \times 5$. Por tanto, ordenando las bases de menor a mayor, obtendríamos

$$2^{19} \times 3^2 \times 5^{19},$$

por lo que la terna asociada al enunciado es la siguiente:

$$19, \; 2, \; 19.$$

Por otra parte, la descomposición en números primos del segundo número es bien conocida:

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1,$$

por lo que la terna asociada a la segunda declaración es la siguiente:

$$1,\ 2,\ 1.$$

Y recordando de nuevo el "diccionario":

$$\begin{array}{rcl}
1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\
\neg & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 19 \\
y & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

vemos claramente que la terna

$$19,\ 2,\ 19,$$

se corresponde con la fórmula

$$x = x,$$

mientras que la terna

$$1,\ 2,\ 1$$

se corresponden con la fórmula

$$1 = 1.$$

Por lo tanto, lo que dice esta prueba es que si para cualquier x arbitrario tenemos que

$$x = x,$$

entonces

$$1 = 1.$$

Esta es una demostración muy pobre y, sin embargo, el número que se corresponde con ella ya es de tamaño astronómico, por lo que bien podemos imaginarnos cuán dantesco será el número asociado a una demostración de cierta relevancia. No obstante, lo esencial es que sabemos a ciencia cierta que le corresponderá cierto número perfectamente definido y que se puede reconstruir tal prueba a partir de ese número (aunque quizás no durante una vida humana).

Por tanto, podemos traducir fórmulas y pruebas a números naturales. Pero, ¿para qué sirve todo esto?

La Metamatemática examina el sistema desde el exterior; sus enunciados y afirmaciones se refieren a fórmulas o demostraciones sobre tal o cual fórmula en el sistema. Ahora bien, estas afirmaciones pueden transformarse empleando nuestro "diccionario" de manera que hablen de números naturales cuya descomposición en factores primos es tal o cual.

Por ejemplo, a medida que la Metamatemática examina las fórmulas del sistema que se pueden expresar empleando los signos del sistema, es posible que descubra que las cadenas de signos

$$1 = 1$$

y

$$\neg\,(1 = 1)$$

deben tratarse con cautela porque una es la negación de la otra. Ya hemos visto que la fórmula

$$1 = 1$$

se corresponde con el número

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90.$$

Por otra parte, según el "diccionario" (obviando que los paréntesis también son signos que, en realidad, deberían haber sido emparejados con ciertos números)

$$\begin{array}{rl} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 \\ = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2 \\ \neg & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 5 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

la fórmula

$$\neg\,(1 = 1)$$

se corresponden con el cuarteto

$$3,\ 1,\ 2,\ 1$$

y puesto que los cuatro primeros números primos son:

$$2,\ 3,\ 5\ \text{y}\ 7$$

el número natural asignado a dicho enunciado es igual a

$$2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1.$$

Efectuemos los productos:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 10 \times 10 \times 2 \times 3 \times 7 \\ &= 100 \times 42 = 4\,200 \end{aligned}$$

y escribamos ambas descomposiciones en factores primos una junto a la otra:

$$\begin{aligned} 90 &= \qquad 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \\ 4\,200 &= 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1. \end{aligned}$$

Por tanto, la afirmación metamatemática *"las sucesiones de signos de las fórmulas*

$$1 = 1 \text{ } \textit{y} \text{ } \neg(1 = 1)$$

expresan lo contrario la una de la otra" se traduce diciendo que *"*90 *y* $4\,200$ *son dos números tales que la descomposición en números primos de este último comienza con* 2^3 *pero los exponentes de los siguientes números primos coinciden con los exponentes de la descomposición en números primos de* 90*"*.

En esta última frase ya no hay ni rastro de Metamatemáticas, se trata una afirmación puramente teórica sobre números naturales. Pero el sistema axiomático bajo consideración sirve precisamente para formular enunciados sobre números naturales. Por lo tanto, podemos escribir esa frase empleando únicamente los signos del sistema, de modo que no quede en ella ni una sola palabra, convirtiéndose así en una de esas grises y ordinarias cadenas de signos que están libres de toda ambigüedad. Sin embargo, tal cadena sí que es ambigua. En efecto, pues podemos leer en ella dos cosas bien distintas: está, por una parte, el texto sobre Teoría de números que captamos al sustituir cada signo por su significado original, pero también está, por otra parte, aquello que dice la afirmación metamatemática que contiene.

Mientras jugaba con estas cadenas de signos ambiguas, Gödel se encontró con cierto número, supongamos que fue con 8 mil millones. Sabemos como se forma este número a partir de factores primos, pero una vida humana no sería suficiente para hacer todos los cálculos. No obstante, Gödel observó que para este número ocurre lo siguiente: si empleamos los signos del sistema del mismo modo que hicimos en el caso de la oración que acabamos de discutir pero para escribir ahora el enunciado metamatemático:

"la fórmula correspondiente a 8 *mil millones no es demostrable en el sistema"*

y nos preguntamos qué número se asigna a tal fórmula según el diccionario, nos sorprenderemos al saber que ese número es, exactamente, 8 mil millones. Por lo que "la fórmula asignada al número 8 mil millones" es esa misma fórmula. Por lo tanto, en uno de sus dos sentidos el enunciado dice lo siguiente:

"no soy demostrable".

Debe quedar claro que esto no es un juego de palabras ni ningún tipo de sofisma. Tenemos ante nosotros una fórmula gris ordinaria, una cadena de signos como cualquier otra. Pero cuando descubrimos con ayuda de nuestro "diccionario" la connotación metamatemática que se ha colado en tal sucesión de signos, nos percatamos de que tararea inocentemente la siguiente cantinela:

"no soy demostrable".

No es de extrañar que una fórmula como esta sea indecidible en el sistema axiomático; nada importa cuán inocente sea el enunciado sobre Teoría de números que exprese en su otro sentido.

Si fuese demostrable, contradeciría aquello que ella misma afirma en su sentido metamatemático, esto es, que no es demostrable.

Por el contrario, si fuese refutable, tal refutación confirmaría el enunciado metamatemático que contiene, esto es, que no es demostrable. Pero en tal caso, esa refutación sería su prueba.

Por tanto, no se puede probar ni refutar: es indecidible.

Quiero enfatizarlo otra vez: ignorando el "diccionario", esta cadena de signos no es más que una fórmula triste y ordinaria del sistema; podría indicar tranquilamente una inocente afirmación sobre sumas y productos. No obstante, Gödel demostró que existen fórmulas indecidibles en cualquier sistema axiomático. Así pues, podría suceder que, por ejemplo, la conjetura de Goldbach fuese una afirmación de este estilo. Es decir, es posible que todavía no haya sido resuelta porque si establecemos un sistema de axiomas a partir de los medios con los que se ha experimentado hasta ahora, la expresión formal de la propia conjetura podría estar tarareando según el "diccionario" la siguiente cantinela:

"no soy demostrable dentro del sistema".

Ocurre exactamente lo mismo con cualquier problema que todavía no haya sido resuelto; todo matemático debe considerar esta posibilidad.

Todavía podría plantearse la siguiente objeción: todo esto no es más que una deficiencia de los sistemas axiomáticos. Es de suponer que los "problemas de Gödel" podrían resolverse si uno no se limita a un sistema axiomático particular. Pero el matemático estadounidense Alonzo Church construyó en 1931 un problema que no puede resolverse mediante ninguna de las consideraciones matemáticas imaginables a día de hoy, independientemente de si nuestras conclusiones pueden limitarse al marco de algún sistema de axiomas o no.

Aquí es donde debo dejar de escribir: hemos llegado a los límites del pensamiento matemático actual. Esta época es una época de toma de conciencia; y las matemáticas también hacen su pequeña aportación: ella misma ha revelado los límites de sus propias habilidades.

Pero, ¿son éstos los obstáculos definitivos? Hasta ahora, en la historia de las Matemáticas siempre ha habido una salida para cada callejón sin salida. No obstante, hay un punto de la demostración de Church sobre el que convendría reflexionar: y es que tuvo que definir con exactitud qué entendemos por "consideración matemática imaginable a día de hoy" para poder aplicar luego a ese concepto los procedimientos de las Matemáticas. Pero tan pronto como se define algo, se delimita a ese algo y ninguna valla es tan estrecha como para impedir el paso de los problemas indecidibles, que se cuelan nuevamente.

Aunque ahora no entendamos ni veamos cómo, los futuros desarrollos de las Matemáticas ampliarán su horizonte conceptual. La eterna lección consiste entonces en que las Matemáticas no son una disciplina estática y cerrada, sino que están vivas y en constante desarrollo. Por más que queramos forzarlas para que adopten cierta forma, al verse acorraladas, siempre encuentran la salida y se escapan al exterior para renacer nuevamente.

Después de usar

Si quieres consultar de nuevo alguna página, por ejemplo, aquella en donde hablamos de la integral, sólo encontrarás un título en el Índice que dice: "Mucho poco vale mucho". Así que indicaré a continuación los conceptos matemáticos que se encuentran en cada capítulo (¡no permitas que esto te desanime!).

PARTE I

1 Sumas, multiplicación y exponenciación.

2 El volumen del cubo. Representación gráfica de funciones.

3 Sistemas de números. Reglas de divisibilidad.

4 Progresiones aritméticas. Área del rectángulo y el triángulo.

5 Diagonales de polígonos convexos. Combinaciones de dos elementos. La fórmula.
Posdata: Topología. Congruencia y semejanza. Sólidos regulares.

6 Combinatoria. Inducción matemática. Cuadrado de una suma de dos sumandos.

7 Descomposición en números primos. Distribución de los números primos. Teorema de los números primos.

8 Ecuaciones. La irresolubilidad de la ecuación de quinto grado. Teoría de Galois.

PARTE II

9 Números negativos. Vectores. Principio de permanencia.

10 Operaciones con fracciones. Media aritmética. Conjuntos densos en todas partes. El cardinal de los números racionales.

11 Conversión de fracciones a números decimales y viceversa. Series infinitas.

12 Números irracionales. Teorema de Pitágoras. El cardinal de los números reales.

13 Tablas de logaritmos. Generalización del concepto de potencia. Curvas suaves. Hipérbolas. El cero como divisor.

14 El concepto de función. Geometría analítica.
Posdata: (a) Funciones circulares (senos y cosenos). Aproximación de funciones periódicas.
(b) Geometría proyectiva. Invariantes.

15 La recta infinitamente distante. Números complejos. Relación entre las funciones circulares y la función exponencial. El Teorema fundamental del Álgebra. Expansión de una función en series de potencias.

16 La dirección de la tangente. La derivada. Máximos y mínimos.

17 Integrales definidas e indefinidas. Cálculo de áreas.

PARTE III

18 La cuadratura del círculo. Números trascendentes. Los axiomas de Euclides. Geometría de Bolyai. Diferentes geometrías.
Posdata: La cuarta dimensión.

19 Teoría de grupos. Teoría de conjuntos. Antinomias. Intuicionismo.

20 Lógica simbólica.

21 Teoría de la demostración. Metamatemáticas. Prueba de consistencia de la Teoría de números. Hipótesis del continuo.
Posdata: La axiomatización del Análisis matemático.

22 Problemas indecidibles y problemas indecidibles empleando ciertos medios dados. La cuestión de lo indecidible.

This is easily the best book on mathematics for everyman that I have ever seen. The author is both a highly creative mathematician and an experienced teacher of young children, and this happy combination, allied to a gift for lucid exposition has produced a delightful book…

Reuben Louis Goodstein, 1962.

This book is a popular account of modern mathematical ideas. The author states that her purpose is to reach that very large section of the population which always wanted to find out what modern mathematics was like, but thought that it was too difficult to understand. She attempts to give a clear picture of as many advanced concepts as possible without sacrificing rigour. The author's humour makes every page enjoyable. The author seems to have found a perfect compromise between rigour and clarity.

John Kemeny, 1948.

This is a delightful book, and the mathematician as well as the layperson could profit from reading it.

Philip Peak, 1977.

Ejemplar gratuito

9 788409 309160