ANÁLISIS NUMÉRICO
Universidad Industrial de Santander

Tercer Trabajo

Profesor: Juan Carlos Basto Pineda 15 de marzo de 2019

La expansión acelerada del Universo

Ley de Hubble-Lemaitre

Desde hace más de un siglo es un hecho conocido que el Universo se encuentra en expansión. La principal evidencia proviene de la observación que, en media, las demás galaxias se alejan de nosotros a una velocidad (v) que es proporcional a su distancia (d):

$$v = H_0 \times d\,.$$

El parámetro de proporcionalidad, H_0, es conocido como constante de Hubble y mide la tasa de expansión del Universo hoy. Además recuerde que velocidad es distancia sobre tiempo, de donde se define el tiempo de Hubble como $t_0 = \frac{1}{H_0}$, que en primera aproximación nos da una estimación a la edad del Universo[1].
La ley de Hubble-Lemaitre fue una observación clave para descubrir la expansión del Universo, pero no piense que somos el centro de dicha expansión. De hecho, un observador en cualquier otra galaxia vería a las demás galaxias alejándose de sí según la misma ley.

Medidas de distancia y velocidad de las galaxias

Note que las cantidades mencionadas arriba, distancia y velocidad, no pueden ser medidas de forma directa en el caso de las galaxias. En realidad estas son inferidas a partir de otras cantidades que sí pueden ser observadas directamente.
En el caso de la distancia, lo que podemos medir es el brillo aparente (I_{obs}) de un objeto cuyo brillo intrínseco es conocido (I_0), como una supernova tipo IA, de forma que la disminución en su brillo nos permite calcular a qué distancia se encuentra. Esta se llama la distancia luminosidad, D_L:

$$I_{obs} = \frac{I_0}{4\pi D_L^2}\,.$$

[1] Sería el tiempo necesario para que cada galaxia se haya alejado hasta su distancia presente si siempre se hubiera alejado a la velocidad actual

En la práctica el brillo de los objetos astronómicos suele medirse en una escala logarítmica conocida como *magnitud*. El brillo verdadero del objeto define su magnitud absoluta, M, y el brillo observado en la Tierra su magnitud aparente, m. La resta de las dos magnitudes define el llamado módulo de distancia, μ, que se relaciona con D_L (medido en $parsecs$) así:

$$m - M = \mu = 5\, log_{10}(D_L) + 25\,.$$

En el caso de la velocidad, lo que medimos en realidad es el cambio en la frecuencia de la luz debido al efecto Doppler. Si una galaxia se aleja, su luz nos llega con longitudes de onda (λ_{obs}) mayores de las que realmente están siendo emitidas (λ_{em}), es decir, la luz arriba de un color más rojo que el original. En su interpretación más simple, el corrimiento al rojo de la luz, z, nos dice la velocidad a que se aleja la fuente comparada con la velocidad de la luz, c:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v}{c}\,.$$

Variaciones en la tasa de expansión del Universo

Al observar galaxias cada vez más distantes se descubrió que la ley de Hubble-Lemaitre perdía validez, lo cual se debe a que la tasa de expansión del Universo no ha sido siempre la misma [2]

Para entender el porqué debemos notar, en primer lugar, que el corrimiento al rojo asociado a la expansión no es generado en realidad por la velocidad con que se alejan las galaxias, sino debido a que a medida que la luz viaja en el espacio el propio espacio se estira, haciendo que los frentes de onda se separen. Es interesante notar que $1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}}$, lo que equivale al cociente entre el tamaño del Universo hoy y el tamaño que tenía cuando la galaxia observada emitió su luz. El corrimiento al rojo es un "*reloj*" que nos dice qué momento de la historia del Universo estamos viendo al observar una galaxia, pero es un reloj basado en la escala del Universo, no en una medida directa de tiempo.

Por otro lado, la distancia luminosidad D_L es una medida de la distancia efectivamente recorrida por la luz desde su origen hasta alcanzarnos, la cual podría ser mayor o menor para un determinado corrimiento al rojo, dependiendo de la aceleración o desaceleración de la expansión durante el tiempo que haya durado el viaje de la luz. Por lo tanto, en un Universo con una tasa de expansión variable la relación entre z y D_L no sería estrictamente lineal, explicando por qué los datos se desvían sistemáticamente de la ley de Hubble-Lemaitre a medida que el corrimiento al rojo aumenta.

[2] El subíndice en H_0 significa que la ley de Hubble-Lemaitre sólamente es válida para el universo local, es decir, en el tiempo presente ($z = 0$).

Las ecuaciones de Friedmann-Lemaitre

Felizmente, la evolución de un Universo homogéneo e isotrópico en expansión se puede estudiar de forma analítica a través de las ecuaciones de Fiedmann-Lemaitre, las cuales surgen naturalmente de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, la mejor descripción que poseemos para explicar la interacción entre el tiempo, el espacio y la fuerza de la gravedad. Dichas ecuaciones permiten predecir, por ejemplo, la relación exacta entre la distancia luminosidad (en Mpc) y el corrimiento al rojo según la cantidad de materia y energía existentes en el Universo:

$$D_L(z) = \begin{cases} \frac{(1+z)c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_K|}} \sin\left(\sqrt{|\Omega_K|} I\right) & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda > 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0} I & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_K|}} \sinh\left(\sqrt{|\Omega_K|} I\right) & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda < 1 \end{cases} \tag{1}$$

En este conjunto de ecuaciones Ω_M representa el porcentaje de la energía del Universo que está compuesto por materia; Ω_Λ representa el porcentaje de la energía del Universo en forma de energía oscura, la misteriosa *quintaesencia* que proporciona la "*gravedad negativa*" para que el universo se expanda; finalmente Ω_K representa la curvatura del Universo: si es igual a 0 quiere decir que el Universo es plano, y mayor/menor a 0 corresponde con modelos de Universo abierto/cerrado, respectivamente. Aunque hay algunas componentes adicionales (radiación, neutrinos), estas 3 son las que dominan el comportamiento de la expansión, y se relacionan mediante $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$. En cuanto a la variable I, esta resulta de integrar los diferenciales de distancia recorridos por la luz en función del corrimiento al rojo, desde el momento en que fue emitida hasta hoy ($z = 0$), y está dada por:

$$I = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2}} dz \, .$$

Determinación de parámetros cosmológicos

Observe nuevamente la ec. (1) y note que, si se mide la distancia de luminosidad y los corrimientos al rojo para un conjunto numeroso de objetos, un ajuste del mejor modelo dado por la ec. (1) a los datos nos permitiría estimar los valores de Ω_M, Ω_Λ en nuestro Universo, arrojando luz sobre su cantidad de materia y energía oscura y sobre cuál ha sido la historia de su expansión (acelerada o desacelerada). Además, podríamos saber si la expansión del Universo seguirá para siempre, o si alcontrario la misma se irá frenando y el Universo comenzará a compactarse de nuevo, terminando en un "*big crunch*" (lo contrario del "*big bang*"). El primer caso ocurrirá si la energía oscura domina, y el segundo si lo hace la cantidad de materia.

Supernovas y parámetros cosmológicos

Un gran salto en la cosmología moderna se dió gracias al descubrimiento que las supernovas tipo IA son *velas estándar* [3] , es decir, todos los objetos de este tipo poseen el mismo brillo intrínseco ($M = -19,31$). Por lo tanto, al medir el brillo aparente (i.e., medido en la Tierra) de una estrella supernova, podemos calcular la distancia de luminosidad hasta la galaxia en que habita. Adicionalmente, con observaciones espectrométricas es posible conocer el corrimiento al rojo del mismo objeto, por lo cual las supernovas tipo IA ofrecen una oportunidad perfecta para determinar los valores de Ω_M y Ω_Λ, siempre y cuando se cuente con datos sobre un amplio rango de corrimientos al rojo, y en número suficiente para discriminar entre modelos cosmológicos con un alto grado de confianza estadística.
De hecho, este tipo de estudio otorgó el premio Nobel de física en 2011 a los líderes de 3 grupos de investigación por el uso de súper novas para demostrar que el Universo es plano y posee $\Omega_M = 0.28$, $\Omega_\Lambda = 0.72$. Según estas conclusiones vivimos en un Universo dominado por los efectos de la energía oscura hoy, lo que hace que la expansión del Universo se esté acelerando cada vez más y, por ahora, no existen razones para creer que se detendrá en el futuro.

[3] En realidad no son velas estándar sino velas *estandarizables*, sus brillos se pueden igualar tras aplicar una pequeña corrección individual

Más cosmología

En esta sección se hará una profundización de los conceptos descritos anteriormente en forma simplificada.
En primer lugar introduzcamos el factor de escala, a, el cual mide el tamaño relativo del Universo en cualquier momento del pasado, respecto a su tamaño hoy. Este factor depende del redshift así: $1 + z = \frac{1}{a}$. Por ejemplo, en $z = 1$ tenemos $a = 0.5$, lo cual quiere decir que el Universo tenía la mitad de su tamaño actual. El tiempo presente se caracteriza por $z = 0$, $a = 1$.
En términos del factor de escala, la ecuación fundamental que rige la evolución de un Universo en expansión (su historia de aceleración/desaceleración) es:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - K\frac{c}{a^2}\,.$$

NOTA: Aun estoy escribiendo esta sección para poder agregar los puntos más interesantes al trabajo.

Ejercicios

1. En el Universo local las velocidades de recesión de las galaxias se miden en km s^{-1} y sus distancias en Mpc (megaparsecs). Procure la definición de parsec (pc) y calcule el tiempo que le toma a la luz recorrer las siguientes distancias hasta la Tierra [4].

	Distancia	Tiempo-luz
Desde el Sol	150×10^6 km	
Desde el centro de la Vía Láctea	7.9 kpc	
Desde la gran nube de magallanes	50 kpc	
Desde la galaxia NGC 4649	14 Mpc	
Desde el cúmulo de galaxias de Pegaso	53 Mpc	
Desde el cúmulo de Leo	113 Mpc	

Figura 1: Cúmulo de galaxias de Pegaso. Astrophotography by Jim Thommes

2. Encuentre una expresión analítica para la pendiente de la recta que mejor se ajusta a un conjunto de datos (x_i, y_i) y que pasa por el origen.

3. Utilice los mismos datos que Hubble en 1929 para determinar la constante H_0. Muestre en un gráfico los datos de velocidad y distancia reportados en la tabla 1 de (Hubble, 1929) junto a la recta ajustada con la fórmula determinada en el punto anterior. Reporte H_0 en unidades de km s^{-1}/Mpc.

[4] La distancia hasta las galaxias y cúmulos de galaxias en la tabla ya había sido estimada por Hubble y Humason hacia 1930, pero los valores aceptados hoy son diferentes ya que disponemos de mejores técnicas e instrumentos de medición.

4. A partir del ajuste hecho determine el tiempo de Hubble inferido en 1929. ¿Qué podría decirse del hecho que entonces ya era conocida la edad de algunos aglomerados de estrellas, siendo del orden de 9000 millones de años?

5. Obtenga la compilación de datos de supernovas del *Supernova Cosmology Project* [5]. Suponiendo que el corrimiento al rojo fuera una medida de la velocidad de recesión, explore la relación entre velocidad y distancia para las supernovas. ¿Hasta qué distancia es válida la ley de Hubble-Lemaitre? Realice un ajuste lineal hasta ese límite, esta vez teniendo en cuenta el error en las mediciones [6]. Compare el valor de H_0 obtenido con el rango de valores aceptado/discutido por la cosmología en la actualidad, de 64 km s^{-1}/Mpc a 74 km s^{-1}/Mpc.

6. De las definiciones dadas en el texto se puede ver que la ley de Hubble implicaría la siguiente relación entre el módulo de distancia y el corrimiento al rojo: $\mu = 5\log_{10}(z\frac{c}{H_0}) + 25$. Tratando a H_0 como el único parámetro libre en esta fórmula, realice un ajuste con scipy.optimize.leastsq hasta el límite escogido en el punto anterior y verifique si los resultados coinciden.

Ahora vamos a abandonar la ley de Hubble-Lemaitre, que solo aplica localmente,
por la dependencia exacta entre distancia y corrimiento al rojo predicha por la Cosmología.

7. La ec. (1) demanda evaluar, por cada supernova: $I = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3+\Omega_\Lambda+\Omega_K(1+z)^2}}dz$,

   la cual en muchos casos no tiene solución analítica y debe ser enfrentada numéricamente, por ejemplo con np.trapz. Aprovechando que en esta función podemos especificar el número de intervalos, comenzaremos por hacer un estudio numérico sobre el valor óptimo de tal parámetro. Ya que la mayor supernova está en $z = 1.4$, integre hasta ese límite con los parámetros $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$, utilizando 2^k divisiones, con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Establezca el valor óptimo de divisiones como aquel para el cual la integral varía en menos de 0.01 % respecto al caso anterior. Repita para $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$.

8. **Comparación de modelos**. En los primeros momentos de la Cosmología moderna no se creía en la existencia de la energía oscura, y la pregunta más importante era si la cantidad de materia sería suficiente para frenar la expansión. El caso límite se da cuando el Universo es plano con $\Omega_M = 1$, y el Universo se expande cada vez más lentamente, pero sin detenerse. Universos con $\Omega_M > 1$ serán *cerrados*, volviendo a

[5] Es la que dice *Union2.1 Compilation Magnitude vs. Redshift Table (for your own cosmology fitter)*. En la tabla de datos nos interesan 3 columnas: la segunda, con los corrimientos al rojo de las galaxias en que se observó cada supernova; la tercera, con el módulo de distancia inferido para cada una; la tercera, reportando el error en dicha medida. Este error incluye efectos estadísticos y sistemáticos, y vamos a tratarlo como la incertidumbre 1-*sigma* de cada medición, suponiendo que pertenecen a una distribución gaussiana.

[6] Use los pesos como $1/\sigma$, y tenga en cuenta la fórmula de propagación del error: $y = y(x) \rightarrow \sigma_y = \frac{dy}{dx}\sigma_x$

colapsar sobre sí mismos por acción de la gravedad [7] , mientras que Universos con $\Omega_M < 1$ serán *abiertos* y se expandirán para siempre de forma acelerada. Grafique la relación μ Vs. z para todo el conjunto de supernovas observadas, y superponga los modelos correspondientes a $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$, $(0.2, 0)$, $(2, 0)$, $(0.3, 0.7)$. [8] A juzgar por su gráfico, ¿Cuáles de estos modelos proveen buenos o malos ajustes a los datos? Calcule el residuo cuadrático χ^2 de cada modelo y compare.

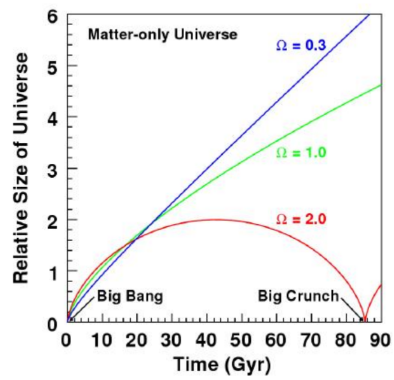

Figura 2: Evolución del tamaño del Universo en modelos sin energía oscura.

[7] A esto se le llamó un *Big Crunch*, es decir, lo contrario del *Big Bang*.

[8] Este último modelo es llamado ΛCDM, implica que el Universo es dominado por la energía oscura y en segundo lugar por la materia, y que se expandirá para siempre aceleradamente. Numerosos experimentos han mostrado que es el modelo que mejor coincide con nuestro Universo, incluído el análisis de supernovas.

9. A continuación vamos a explorar el espacio de parámetros $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ en busca de la combinación que mejor explica los datos. Para esto podemos utilizar scipy.optimize.leastsq, definiendo la función de error como

$$Errorfunction = \sum \left(\frac{\mu_i - \mu_{model}(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z_i)}{\sigma_i} \right)^2,$$

donde la suma es sobre todas las supernovas registradas. Vamos a limitar nuestra búsqueda al intervalo $[0, 1]$ para cada uno de los parámetros Ω_M, Ω_Λ. Una forma de lograr esto es con un condicional if en la función de error, que retorne un error gigantesco si alguno de los parámetros se sale del intervalo deseado. Una vez que su rutina de minimización esté funcionando, pruébela comenzando desde diferentes puntos de partida, a ver si todas las veces converge a la misma solución. En otro caso, compare los χ^2 obtenidos para discriminar entre modelos cuál es el mejor. ¿Sus resultados están cerca del modelo ΛCDM?

NOTA:

En los puntos 9 y 10, al evaluar la ecuación (1) utilice $H_0 = 73.5$ km s^{-1}/Mpc.