

Un informe acerca del AHP Fuzzy

Jorge Rodríguez Donado

6 de junio de 2018

AHP vs FAHP

El proceso de jerarquía analítica (*Analytic Hierarchy Process*, AHP) es un método de toma de decisiones bajo certidumbre, el cual tiene en cuenta ideas, sentimientos y emociones que afectan la decisión; todo lo anterior se cuantifica para poder priorizar sobre las alternativas que se tienen a disposición y escoger la mejor. Una extensión del AHP es el AHP difuso (*Fuzzy AHP*, FAHP), el cual mantiene el mismo espíritu del AHP tradicional pero se usa para tomar decisiones bajo incertidumbre. Una de las principales diferencias entre AHP y FAHP es la forma en que se comparan las alternativas, puesto que en AHP se usa una escala discreta de 1 a 9 (certidumbre), mientras en FAHP se usan números triangulares (incertidumbre). Los números triangulares, denotados con (a, b, c) , indican el menor valor posible (a), el valor más probable (b) y el mayor valor posible (c) que puede tomar un evento difuso [6]. En la [Tabla 1](#) se encuentra la relación entre las escalas usadas en AHP y FAHP para comparar las alternativas. Comparaciones intermedias entre dos escalas adyacentes de la [Tabla 1](#) también pueden asociarse en FAHP a un número triangular.

| Definición | AHP | FAHP |
|--------------------------|-----|---------|
| Igualmente importante | 1 | (1,1,1) |
| Poco importante | 3 | (2,3,4) |
| Medianamente importante | 5 | (4,5,6) |
| Altamente importante | 7 | (6,7,8) |
| Absolutamente importante | 9 | (9,9,9) |

Tabla 1: Escalas usadas para comparar alternativas en AHP y FAHP.

Procedimiento del FAHP

Otra de las diferencias entre AHP y FAHP es la forma en que se determinan los pesos para los criterios y alternativas de decisión, ya que en AHP se tienen números racionales y en FAHP se tienen números triangulares. Existen entonces diferentes enfoques para determinar estos pesos en FAHP, como el método de la media geométrica [3], métodos de los mínimos cuadrados logarítmicos dispersos [2], método λ -máx [5], método de programación lineal por metas [7] y métodos no lineales de programación difusa [8], por citar algunos. En [1] se describen los pasos empleados por [3] para determinar los pesos de las alternativas al usar AHP, los cuales se detallan a continuación:

1. El tomador de decisiones compara los criterios o alternativas usando la asignación de las definiciones dadas en la [Tabla 1](#) para FAHP. Así, por ejemplo, si se establece que la alternativa 1 es altamente importante en comparación con la alternativa 2, este elemento en la matriz de comparación será representado por (6, 7, 8). Análogamente, la comparación entre la alternativa 2 y la alternativa 1 en la matriz de comparación será representada por $(\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8})$. Notando con d_{ij}^k la k -ésima preferencia del tomador de decisiones con respecto a la alternativa i sobre la alternativa j , con d_{ij}^k siendo un número triangular y n el número de alternativas, se tendría la k -ésima matriz de comparación, A^k :

$$A^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & d_{12}^k & \cdots & d_{1n}^k \\ d_{21}^k & d_{22}^k & \cdots & d_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}^k & d_{n2}^k & \cdots & d_{nn}^k \end{pmatrix}$$

2. Si hay más de un tomador de decisiones, las preferencias de cada uno son promediadas como se muestra a continuación:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^K \frac{d_{ij}^k}{K}$$

3. De acuerdo a las preferencias promediadas, la nueva matriz de comparación quedará así:

$$A = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

4. La media de los valores de comparación de cada alternativa estará dada de la siguiente manera:

$$r_i = \left(\left[\prod_{j=1}^n d_{ij}^a \right]^{\frac{1}{n}}, \left[\prod_{j=1}^n d_{ij}^b \right]^{\frac{1}{n}}, \left[\prod_{j=1}^n d_{ij}^c \right]^{\frac{1}{n}} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Donde d_{ij}^a , d_{ij}^b y d_{ij}^c denotan la primera, segunda y tercera componente de d_{ij} , respectivamente. Por ejemplo, si $d_{ij} = (6, 7, 8)$ entonces $d_{ij}^a = 6$, $d_{ij}^b = 7$ y $d_{ij}^c = 8$. Note que r_i es un número triangular.

5. Se realizan los siguientes pasos intermedios:

- a. Se calcula el vector suma, R , de cada r_i :

$$R = \left(\sum_{i=1}^n r_i^a, \sum_{i=1}^n r_i^b, \sum_{i=1}^n r_i^c \right)$$

- b. Se calcula el inverso multiplicativo del vector suma, R^{-1} y se ordena de menor a mayor:

$$R^{-1} = \left(\frac{1}{R^a}, \frac{1}{R^b}, \frac{1}{R^c} \right), \quad \text{suponiendo que } R^a \geq R^b \geq R^c$$

- c. Se calcula el peso difuso de la alternativa i , w_i , multiplicando cada r_i con R^{-1} :

$$w_i = (r_i^a \times (R^{-1})^a, r_i^b \times (R^{-1})^b, r_i^c \times (R^{-1})^c)$$

6. Dado que w_i sigue siendo un número triangular, se hace necesario volverlos números racionales. Para ello se usa el método del centro de área [4]:

$$M_i = \frac{w_i^a + w_i^b + w_i^c}{3}$$

7. Se normaliza M_i :

$$N_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

Aplicaciones

Siguiendo los siete pasos anterior se hallan los pesos normalizados para los criterios y alternativas. De aquí en adelante FAHP se convierte en el tradicional AHP: se calculan los pesos compuestos de cada alternativa con cada criterio y la alternativa con mayor peso compuesto es escogida. FAHP cuenta con un gran campo de aplicaciones, similares a las de AHP, tales como selección de personal, selección de trabajo, etc. En [1] se encuentra un ejemplo del uso de FAHP para escoger un proveedor para una compañía de engranajes que sigue el procedimiento expuesto anteriormente.

Referencias

- [1] Mustafa Batuhan Ayhan. «A Fuzzy AHP Approach for Supplier Selection Problem: A Case Study in a Gear Motor Company». En: *CoRR* abs/1311.2886 (2013). URL: <http://arxiv.org/abs/1311.2886>.
- [2] C.G.E. Boender, J.G. de Graan y F.A. Lootsma. «Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons». En: *Fuzzy Sets and Systems* 29.2 (1989), págs. 133-143. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(89\)90187-5](https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90187-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011489901875>.
- [3] J.J. Buckley. «Fuzzy hierarchical analysis». En: *Fuzzy Sets and Systems* 17.3 (1985), págs. 233-247. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(85\)90090-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(85)90090-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011485900909>.
- [4] Shih-Wei Chou y Yu-Chieh Chang. «The implementation factors that influence the ERP (enterprise resource planning) benefits». En: *Decision Support Systems* 46.1 (2008), págs. 149-157. ISSN: 0167-9236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dss.2008.06.003>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167923608001176>.
- [5] Robert Csutora y James J. Buckley. «Fuzzy hierarchical analysis: the Lambda-Max method». En: *Fuzzy Sets and Systems* 120.2 (2001), págs. 181-195. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00155-4](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00155-4). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011499001554>.
- [6] Cengiz Kahraman, Ufuk Cebeci y Da Ruan. «Multi-attribute comparison of catering service companies using fuzzy AHP: The case of Turkey». En: *International Journal of Production Economics* 87.2 (2004), págs. 171-184. ISSN: 0925-5273. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(03\)00099-9](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(03)00099-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527303000999>.
- [7] Ying-Ming Wang y Kwai-Sang Chin. «A linear goal programming priority method for fuzzy analytic hierarchy process and its applications in new product screening». En: *International Journal of Approximate Reasoning* 49.2 (2008). Special Section on Probabilistic Rough Sets and Special Section on PGM'06, págs. 451-465. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2008.04.004>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888613X08000789>.
- [8] Ying-Ming Wang y Kwai-Sang Chin. «Fuzzy analytic hierarchy process: A logarithmic fuzzy preference programming methodology». En: *International Journal of Approximate Reasoning* 52.4 (2011), págs. 541-553. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2010.12.004>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888613X10001611>.