MODELADO MATEMÁTICO II

Universidad Industrial de Santander

TRABAJO

Profesor: Juan Carlos Basto Pineda — 15 de abril de 2019

1. Escriba una rutina en Python que reciba un número real y muestre cuál sería su representación en el estándar IEEE de punto flotante de 16, 32, o 64 bits a elección. Haga su programa tan versátil como sea posible, pudiendo recibir como entrada números enteros, decimales, positivos o negativos, y valores especiales como $\pm$infinito.

2. Considerando el estándar IEEE de 64 bits, responda las siguientes preguntas mostrando sus cálculos o explicando sus argumentos:
   - ¿Cuál es el mayor número representable?
   - ¿Cuál es el menor número positivo normalizado en dicho conjunto?
   - ¿Cuál es el mayor número positivo no normalizado?
   - ¿Cuál es el número más pequeño mayor a la unidad?
   - ¿Cuál es el *epsilon* de la máquina en este formato?

3. Considere la función $f(x) = e^{x/3} - (x+5)$. Encuentre todas las raíces de esta ecuación y explique por qué no hay más. Resuelva el problema por los diferentes métodos hasta lograr una tolerancia de 10^{-50}, y aproveche los valores en las diferentes iteraciones para ver si el orden de convergencia en cada caso es el esperado según la teoría.

4. El mismo problema anterior podría enfrentarse como un problema de punto fijo, por ejemplo cambiando la función $f(x)$ por alguna de las siguientes 3 opciones:

   a) $g(x) = e^{x/3} - 5$ *b)* $g(x) = 2x + 5 - e^{x/3}$ *c)* $g(x) = 3 \cdot ln(x+5)$

   Explique lo que pasa al enfrentar el problema de ese modo. Puede aprovechar los resultados que ya conoce del punto anterior.

5. Demuestre que el orden de convergencia del método de la Secante corresponde a la llamada sección aurea: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Demuestre cuál es el orden de convergencia del método de Newton-Raphson.

7. Elabore un cuadro comparativo con las principales características de los métodos de búsqueda de raíces.

8. Dos números, x, y, han sido almacenados como números de máquina, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, introduciendo errores de redondeo relativos δ_x, δ_y.

   a) Estime una cota del error relativo que se produce al evaluar $(x)^{2018} + (y)^{2018}$ en aritmética de máquina.
   b) Encuentre una expresión para el error relativo que se produce al realizar la operación $1 - xy$.
   c) ¿Qué ocurre en el caso anterior cuando el producto xy toma un valor cercano de la unidad?

9. Defina: *estabilidad* de un algoritmo, y *condicionamiento* de un problema.

10. Considere el siguiente cómputo: $y = tan(x) - sin(x)$, el cual se desea evaluar para valores pequeños $x \sim 0$. ¿Qué peligro existe al evaluar esta función, de acuerdo a los principios de la aritmética computacional? ¿Cómo podríamos modificar el problema para mejorar la precisión del resultado? Determine el error relativo entre el valor de y estimado de la forma original y en la forma modificada propuesta por usted, para $y = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-8}$. Comente el resultado.

11. Considere el sistema de ecuaciones $2x+y = 3$, $2x+1.001y = 0$ y observe lo que ocurre si cambiamos la segunda ecuación por $2x + 1.002y = 0$. ¿Qué se puede decir acerca del condicionamiento de este problema? Provea un criterio matemático cuantitativo para justificar su respuesta.

12. Diseñe e implemente un experimento para medir y comparar la eficiencia de los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, y descomposición LU para resolución de sistemas lineales de ecuaciones. Piense la mejor manera para que este experimento sea significativo, haciendo diferentes tests. No se vale resolver los sistemas con un comando ya listo de Python, deben diseñar e implementar sus propios módulos línea a línea.

13. A partir del criterio de convergencia para los esquemas de iteración de punto fijo, demuestre que el criterio de convergencia del método de Gauss-Seidel con n ecuaciones y n incógnitas equivale a tener una matriz diagonal-dominante.

14. Utilice el método de Gauss-Seidel a) sin relajación b) con relajación $(\lambda = 1,2)$ para resolver el siguiente sistema hasta una tolerancia de $= 0.01\,\%$. Compare la velocidad de convergencia en ambos casos. De ser necesario, reacomode las ecuaciones para lograr la convergencia.

$$\begin{aligned} 2x - 6y - z &= -38 \\ -3x - y + 7z &= -34 \\ -8x + y - 2z &= -20 \end{aligned}$$

15. Determine el condition number para un sistema descrito por la matrix de Hilbert 10-dimensional. ¿Cuántas figuras significativas se espera perder debido al mal condicionamiento del sistema? Determine la solución de este sistema cuando cada elemento del vector de respuestas b es igual a la suma de los coeficientes en la fila correspondiente (caso en el cual las 10 incógnitas deberían ser exactamente iguales a la unidad). Compare los errores resultantes con lo esperado a partir del condition number.

    Nota: Para entender mejor este ejercicio remítase al inicio del capítulo 2 de Kiusalaas y a la sección 10.3.2 del libro de Chapra.