NUM5

Problem polega na rozwiązaniu równania $Ax = b$ metodą Jacobiego i Gaussa-Seidela i porównaniu tych metod.

Równanie

Macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.15 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0.15 & \dots & 0 \\ 0.15 & 1 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0.15 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz wektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N \end{bmatrix}$ są znane, i należy znaleść wartość wektora x. Kolejne iteracje obu metod przedstawia program (dla $N = 10$).

Dokładny wynik wynosi $x \approx \begin{bmatrix} 0.178015 \\ 0.381162 \\ 0.565284 \\ \dots \\ 23.232865 \\ 21.061564 \\ 33.151169 \end{bmatrix}_{124}$, a obie metody dla wszystkich badanych wektorów startowych otrzymują wynik identyczny z dowolnie małym błędem.

Jacobi i Gauss-Seidel

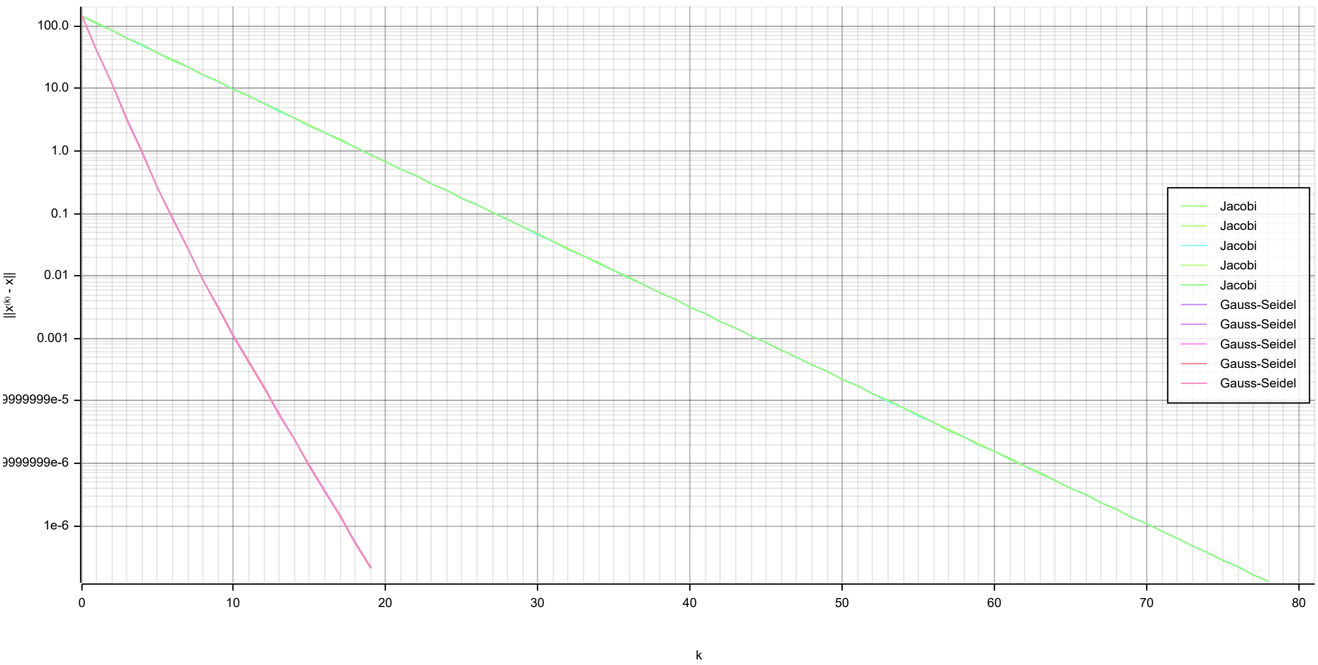
Rozwiązanie równania $Ax = b$ można przybliżyć używając iteracyjnej metody Jacobiego:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{(k)})$$

Podobnie działa również metoda Gaussa-Seidela:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)})$$

W obu metodach wektor początkowy $x^{(0)}$ może być dowolny. Rozwiązania, których błędy są pokazane na wykresach używały losowo wygenerowane wektory (gdzie każdy element $x_i^{(0)}$ jest jednomiernie losowany z przedziału $[0, 1)$).



Wykres przedstawia zależność między błędem (norma różnicy $x^{(k)}$ i dokładnego rozwiązania) i iteracją (k). Widać, że w obu metodach rozwiązanie zbliża się do dokładnego, ale w przypadku metody Gaussa-Seidela proces ten potrzebuje mniej iteracji. Wykres pokazuje dane dla dziesięciu rozwiązań równania, ale dla wszystkich wektorów rozwiązanie daną metodą zajmuje bardzo podobną ilość iteracji.