NUM4

Problem polega na rozwiązaniu równania $Ax = b$ dla macierzy A o specyficznej strukturze - A ma strukturę przypominającą macierz pasmową (z jednym pasmem nad główną diagonalą), ale zamiast 0 na pozostałych pozycjach, A ma 1. W ogólnym przypadku rozwiązanie równania miałoby złożoność obliczeniową $O(N^3)$. Wykorzystując strukturę macierzy, można rozwiązać to równanie w czasie $O(N)$.

Macierz A

Macierz $A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 12 & 8 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 8 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 12 \end{bmatrix}$ można rozłożyć według wzoru $A = A' + uu^T$ na macierz pasmową $A' = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 11 & 7 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 11 \end{bmatrix}$ i wektor $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$.

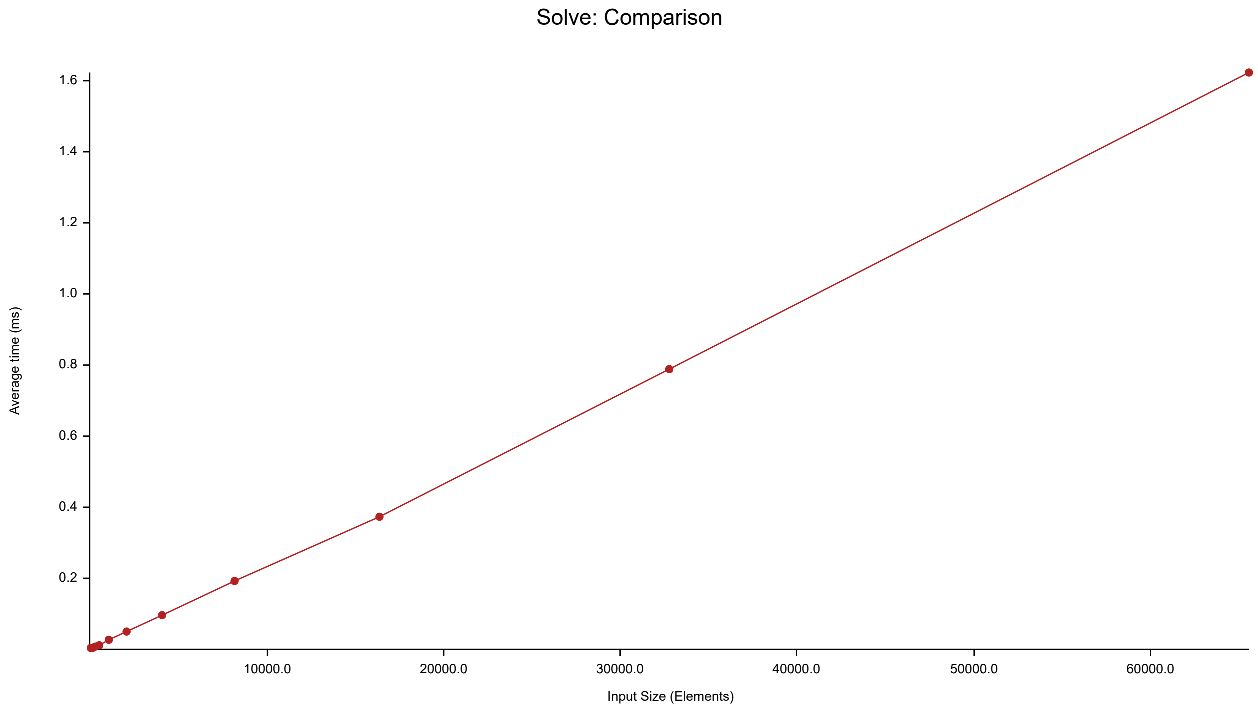
Sherman-Morrison

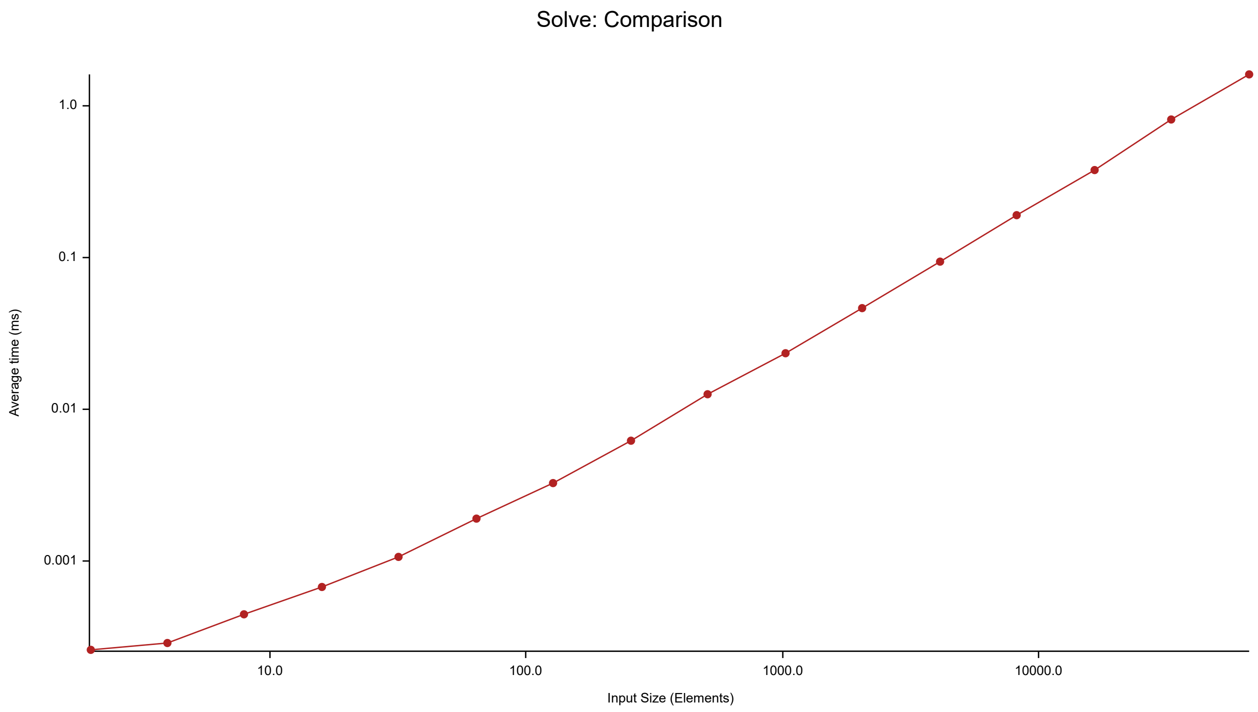
Dla macierzy A można zastosować wzór Shermana-Morrisona $(A' + uv^T)^{-1} = A'^{-1} - \frac{A'^{-1}uv^TA'^{-1}}{1+v^TA'^{-1}u}$ z $u = v$. Używając tego wzoru można rozwiązać równanie wykonując kolejne kroki:

1. Rozkład $A' = LU$
2. Rozwiązanie równania $LU\vec{y} = \vec{b}$
3. Rozwiązanie równania $LU\vec{z} = \vec{u}$
4. Obliczenie $\vec{x} = \vec{y} - \frac{\vec{z}\vec{u}^T\vec{y}}{1+\vec{u}^T\vec{z}}$, gdzie:
   - $\vec{z}\vec{u}^T\vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{y}_i\right)\vec{z}$
   - $\vec{u}^T\vec{z} = \sum_{i=1}^{N} \vec{z}_i$

Rozwiązanie równania

Dzięki pasmowej strukturze A', przy zastosowaniu powyższych wzorów można rozwiązać równanie w czasie liniowym:





Wykresy pokazują czas rozwiązania równania w zależności od wielkości macierzy. Z pierwszego wykresu widać, że czas wykonania jest proporcjonalny do wielkości macierzy (N). Drugi wykres dodatkowo pokazuje, że obliczenia mają pewien stały koszt niezależny od wielkości macierzy w dodatku do wyżej wymienionego kosztu liniowego.

Otrzymany wynik przykładowy (prawdziwy dla macierzy z zadania jest bardzo duży, w całości wypisuje go program) dla $N = 10$ to $x_{10} \approx \begin{bmatrix} 0.17423 \\ 0.17917 \\ 0.17141 \\ 0.18360 \\ 0.16445 \\ 0.19453 \\ 0.14726 \\ 0.22155 \\ 0.10482 \\ 0.28825 \end{bmatrix}$.