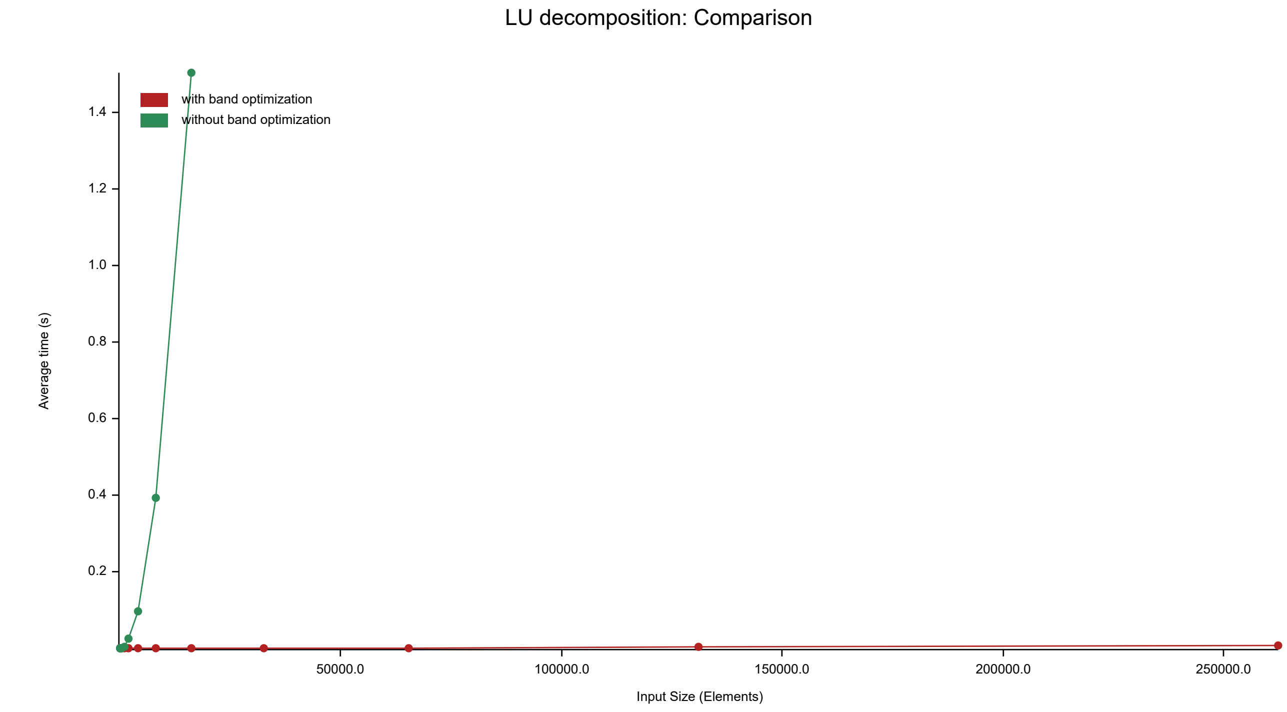
Problem polega na rozwiązaniu równania $y = A^{-1}x$ oraz obliczenia wyznacznika macierzy A , z tym że macierz A jest pasmowa. W ogólnym przypadku rozwiązanie równania miałoby złożoność obliczeniową $O(N^3)$. Używając struktury macierzy można rozwiązać to równanie ze złożonością $O(N)$.

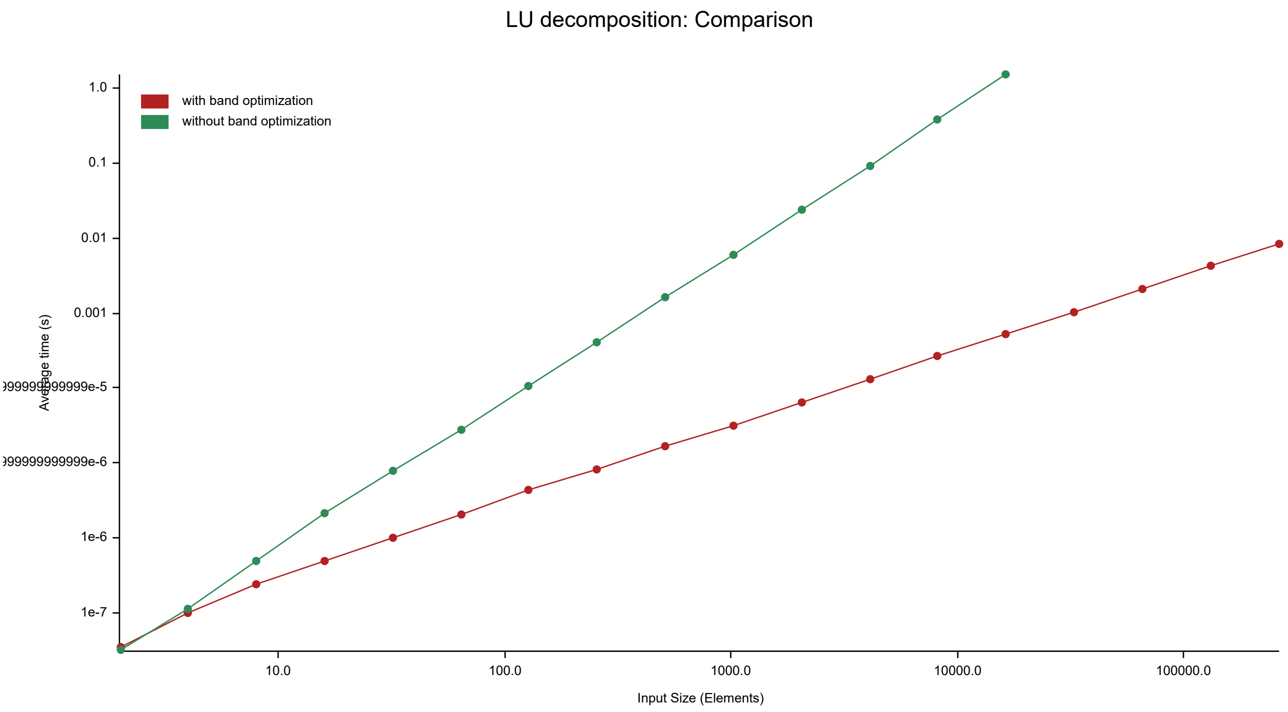
Macierz A

Macierz pasmową A można zapisać w tablicy prostokątnej `L + U + 1` na N, gdzie `L` oznacza liczbę pasem pod główną diagonalą a `U` nad nią. Macierz w zadaniu jest podana jako $A_N = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 & 0.15 & & 0 \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.15}{2^2} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N} \\ 0 & & & 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}$ z `L = 1` i `U = 2`. Przykład macierzy dla $N = 10$ jest wyświetlony przez program.

Rozkład LU

Dla ogólnej macierzy rozkład LU obliczany jest za pomocą równań $u_{k,m} = a_{k,m} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}u_{j,m}$ dla $m = k, k+1, \dots, n$ i $l_{i,k} = \frac{(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}u_{j,k})}{u_{kk}}$ for $i = k+1, k+2, \dots, n$. Dla macierzy pasmowej można te równania zoptymalizować do $u_{k,m} = a_{k,m} - \sum_{j=\max(1,k-L,m-U)}^{k-1} l_{k,j}u_{j,m}$ for $m = k, k+1, \dots, k+U \leq n$ i $l_{i,k} = \frac{(a_{i,k} - \sum_{j=\max(1,i-L,k-U)}^{k-1} l_{i,j}u_{j,k})}{u_{k,k}}$ for $i = k+1, k+2, \dots, k+L \leq n$.
Ta optymalizacja pozwala na rozkład LU macierzy w czasie liniowym:





Wykresy pokazują czas rozkładu LU w zależności od wielkości macierzy. W kolorze zielonym przedstawiona jest metoda ogólna, a na czerwono metoda zoptymalizowana dla macierzy pasmowych.

Wyznacznik

Po rozkładzie LU, obliczenie wyznacznika również można obliczyć w czasie liniowym: $\det A = \prod_{i=1}^{N} U_{i,i}$.

Dla macierzy z zadania numerycznego dla $N = 124$ wyznacznik jest równy $6141973498.857843399047852$.

Rozwiązanie równania

Używając rozkładu LU, równanie $y = A^{-1}x$ rozwiązuje się używając wyłącznie forward i back substitution: najpierw $y_m = \frac{b_m - \sum_{i=1}^{m-1} l_{m,i} y_i}{l_{m,m}}$ dla $m = 1, \ldots, n$, a później $x_m = \frac{y_m - \sum_{i=m+1}^{n} u_{m,i} x_i}{u_{m,m}}$ for $m = n, \ldots, 1$. Tutaj również można użyć struktury macierzy, otrzymując zoptymalizowane równania: $y_m = b_m - \sum_{i=\max(1,m-L)}^{m-1} l_{m,i} y_i$ dla $m = 1, \ldots, n$ i $x_m = \frac{y_m - \sum_{i=m+1}^{\min(n,m+U)} u_{m,i} x_i}{u_{m,m}}$ dla $m = n, \ldots, 1$. Otrzymany wynik przykładowy (prawdziwy dla macierzy z zadania jest bardzo duży; w całości wypisuje go program) dla macierzy o wymiarach 10×10 to

$$y_{10} = \begin{bmatrix} 0.4487008278590469 \\ 1.4132732873429976 \\ 2.1348778522322926 \\ 2.869013253466097 \\ 3.5914886842267686 \\ 4.311606217445992 \\ 5.029800647623075 \\ 5.746749942177135 \\ 6.475040195123446 \\ 7.254159967479426 \end{bmatrix}.$$