

# Mathematik II für Informatik - Zusammenfassung

Jonas Milkovits

Last Edited: 23. August 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit</b>	<b>1</b>
1.1	Die reellen Zahlen . . . . .	1
1.2	Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten . . . . .	2
1.3	Konvergenz von Folgen . . . . .	3
1.3.1	Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele . . . . .	3
1.3.2	Konvergenzkriterien . . . . .	4
1.3.3	Teilfolgen und Häufungswerte . . . . .	5
1.4	Asymptotik . . . . .	5
1.5	Reihen . . . . .	6
1.5.1	Absolute Konvergenz . . . . .	7
1.5.2	Das Cauchy-Produkt . . . . .	7
1.6	Konvergenz in normierten Räumen . . . . .	8
1.7	Stetigkeit reeller Funktionen . . . . .	10
1.7.1	Der Grenzwertbegriff für Funktionen . . . . .	10
1.7.2	Stetigkeit . . . . .	11
1.7.3	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	12
1.8	Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	12
1.9	Potenzreihen . . . . .	13
1.10	Wichtige Funktionen . . . . .	14
1.10.1	Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	14
1.10.2	Trigonometrische Funktionen . . . . .	15
1.10.3	Die Polardarstellung komplexer Zahlen . . . . .	16
1.10.4	Hyperbolische Funktionen . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Analysis - Teil II: Differential- und Integralrechnung</b>	<b>17</b>
2.1	Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen . . . . .	17
2.1.1	Der Ableitungsbegriff . . . . .	17
2.1.2	Ableitungsregeln . . . . .	17
2.1.3	Höhere Ableitungen . . . . .	18
2.2	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	19
2.3	Extremwerte . . . . .	20
2.4	Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Partielle Ableitung . . . . .	20
2.5	Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Totale Differenzierbarkeit . . . . .	22
2.6	Extremwertprobleme in mehreren Variablen . . . . .	23
2.7	Integration in $\mathbb{R}$ . . . . .	24
2.7.1	Definition des bestimmten Integrals . . . . .	24
2.7.2	Stammfunktionen und der Hauptsatz . . . . .	25
2.8	Integrationstechniken . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>27</b>
3.1	Problemstellung und Motivation . . . . .	27
3.2	Elementare Lösungstechniken . . . . .	27
3.2.1	Getrennte Veränderliche . . . . .	27
3.2.2	Homogene Differentialgleichungen . . . . .	28
3.2.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	28

3.3	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	29
3.3.1	Lineare Systeme . . . . .	29
3.3.2	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	29
3.4	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	30
3.5	Existenz- und Eindeutigkeitsresultate . . . . .	31

# 1 Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit

## 1.1 Die reellen Zahlen

---

D	5.1.1	Die <b>Menge der reellen Zahlen</b> ist der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das Vollständigkeitsaxiom " <i>Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Supremum.</i> " erfüllt.
B		Ein Körper mit Totalordnung $\leq$ heißt <b>angeordneter Körper</b> , falls gilt: <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\forall a, b, c \in K : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c</math></li><li>• <math>\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc</math></li></ul>
D	5.1.3	Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt: <ul style="list-style-type: none"><li>a) nach <b>oben (unten) beschränkt</b>, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.</li><li>b) <b>beschränkt</b>, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.</li></ul>
S	5.1.4	Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. (Umkehrung Vollständigkeitsaxiom)
D	5.1.5	Die Funktion $ \cdot  : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $ x  = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ heißt <b>Betragsfunktion</b> und $ x $ heißt Betrag von $x$ .
S	5.1.6	<b>Rechenregeln Betragsfunktion:</b> Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: <ul style="list-style-type: none"><li>a) <math> x  \geq 0</math></li><li>b) <math> x  =  -x </math></li><li>c) <math>\pm x \leq  x </math></li><li>d) <math> xy  =  x  \cdot  y </math></li><li>e) <math> x  = 0</math> genau dann, wenn <math>x = 0</math></li><li>f) <math> x + y  \leq  x  +  y </math> (Dreiecksungleichung)</li></ul>
D	5.1.8	<b>Intervalle:</b> Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen: <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a &lt; x &lt; b\}</math> offenes Intervall</li><li>• <math>[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}</math> abgeschlossenes Intervall</li><li>• <math>(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a &lt; x \leq b\}</math> halboffenes Intervall</li><li>• <math>[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x &lt; b\}</math> halboffenes Intervall</li></ul> <b>Halbstrahlen:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}</math></li><li>• <math>(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a &lt; x\}</math></li><li>• <math>(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}</math></li><li>• <math>(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x &lt; a\}</math></li><li>• <math>(-\infty, \infty) := \mathbb{R}</math></li></ul>

---

## 1.2 Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

D	5.2.1	<b>Ganzzahlige Potenzen:</b> Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist a) $x^n := x \cdot x \cdot x \dots \cdot x$ ( $n$ -mal $x$ ) b) $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$ , falls $x \neq 0$ c) $x^0 := 1$
S	5.2.2	<b>Existenz der Wurzel:</b> Für jedes $a \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$ gibt es genau ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ .
D	5.2.3	Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}^*$ . Die <b>eindeutige Zahl</b> $x^n \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ heißt $n$ -te <b>Wurzel</b> von $a$ und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$ . Für den wichtigsten Fall $n = 2$ gibt es die Konvention $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$ .
S	5.2.4	Es seien $q \in \mathbb{Q}$ und $m, \in \mathbb{Z}$ , sowie $n, r \in \mathbb{N}^*$ so, dass $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$ . Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ : $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{m})^p$ .
D	5.2.5	Aus der Eindeutigkeit der $n$ -ten Wurzel (5.2.4) folgt: Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist die <b>rationale Potenz</b> definiert durch: $x^q = x^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[m]{x})^n.$
B	5.2.6	<b>Rechenregeln für Potenzen (auch rational)</b> $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ gilt: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x^p x^q = x^{p+q}</math></li> <li>• <math>x^p y^p = (xy)^p</math></li> <li>• <math>(x^p)^q = x^{pq}</math></li> <li>• <math>\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}</math></li> <li>• <math>\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p</math></li> </ul>
D	5.2.7	Es sei $n \in \mathbb{N}^*$ . Dann wird die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ als $n$ <b>Fakultät</b> bezeichnet. Weiterhin definieren wir $0! := 1$ . Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ . Dann heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ <b>Binomialkoeffizient</b> " $n$ über $k$ ".
B	5.2.8	<b>Fakultät und Binomialkoeffizient</b> $n!$ ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von $n$ unterschiedlichen Dingen. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus $n$ unterscheidbaren Dingen genau $k$ auszuwählen.
S	5.2.9	Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt: <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1</math> und <math>\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}</math></li> <li><math>a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k</math></li> <li><math>(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k</math> (Binomialformel)</li> </ol>
B		Zugriff auf <b>Binomialkoeffizienten</b> für binomische Formeln durch Pascal'sches Dreieck

## 1.3 Konvergenz von Folgen

### 1.3.1 Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

D	5.3.1	<p>Es sei <math>(a_n)</math> eine Folge in <math>\mathbb{K}</math> und <math>a \in \mathbb{K}</math>. Die Folge <math>(a_n)</math> heißt <b>konvergent</b> gegen <math>a</math>, falls für jedes <math>\epsilon &gt; 0</math> ein <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> existiert mit</p> $ a_n - a  < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$ <p>In diesem Fall heißt <math>a</math> der <b>Grenzwert</b> oder Limes von <math>(a_n)</math> und wir schreiben:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$ <p>Ist <math>(a_n)</math> eine Folge in <math>\mathbb{K}</math>, die gegen kein <math>a \in \mathbb{K}</math> konvergiert, so heißt diese <b>divergent</b>.</p>
BSP	5.3.1	<p>Folge <math>(a_n) = (\frac{1}{n})_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)</math>          Sei <math>\epsilon &gt; 0</math>. Dann <math>\frac{1}{\epsilon} &lt; n_0</math> für ein <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> (beliebiges <math>n</math> immer größer).          Für alle <math>n \geq n_0</math> gilt dann:</p> $ a_n - a  =  a_n - 0  =  a_n  = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ <p><math>\Rightarrow</math> Konvergenz gegen 0</p>
B		<p>Sei <math>X</math> eine Menge. Eine <b>Folge</b> in <math>X</math> ist eine Abbildung <math>a : \mathbb{N} \rightarrow X</math>.          (Für <math>X = \mathbb{R}</math> reelle Folge, <math>X = \mathbb{C}</math> komplexe Folge)          Schreibweise: <math>a_n</math> statt <math>a(n)</math>. (<math>n</math>-tes Folgeglied)          Ganze Folge: <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> oder <math>(a_n)</math> oder <math>(a_n)_{n &gt; 0}</math></p>
B		Folgen haben maximal einen (eindeutigen) Grenzwert
B		Bezeichnung von Folgen, für die der Grenzwert 0 ist: <b>"Nullfolge"</b>
D	5.3.4	<p>Eine Folge <math>(a_n)</math> in <math>\mathbb{K}</math> heißt <b>beschränkt</b>, wenn die Menge <math>\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}</math> beschränkt in <math>\mathbb{K}</math> ist.          Ist <math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math>, so setzen wir weiter</p> $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=0}^{\infty} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=0}^{\infty} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
S	5.3.5	<p>Jede <b>konvergente Folge</b> in <math>\mathbb{K}</math> ist <b>beschränkt</b>.          Die Umkehrung dieses Satzes ist <b>falsch</b>. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.</p>
S	5.3.7	<p><b>Grenzwertsätze</b>          Es seien <math>(a_n), (b_n)</math> und <math>(c_n)</math> Folgen in <math>\mathbb{K}</math>. Dann gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Ist <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a</math>, so gilt <math>\lim_{n \rightarrow \infty}  a_n  =  a </math></li> <li>b) Gilt <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a</math> und <math>\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b</math> so gilt:             <ul style="list-style-type: none"> <li>i) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b</math></li> <li>ii) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b</math></li> <li>iii) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha a</math> für alle <math>\alpha \in \mathbb{K}</math></li> <li>iv) Ist zusätzlich <math>b_n \neq 0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> und <math>b \neq 0</math>, so ist <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}</math></li> </ul> </li> </ul> <p>Ist <math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math>, so gilt außerdem:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>c) Ist <math>a_n \leq b_n</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> und <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a</math> sowie <math>\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b</math>, so folgt <math>a \leq b</math></li> <li>d) Ist <math>a_n \leq c_n \leq b_n</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> und sind <math>(a_n)</math> und <math>(b_n)</math> konvergent mit <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a</math>, so ist auf die Folge <math>(c_n)</math> konvergent und es gilt <math>\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a</math>  <b>(Sandwich-Theorem)</b></li> </ul>
B	5.3.7	c) ist falsch mit $<$ , nur richtig mit $\leq$
BSP	5.3.9	<p>Sei <math>p \in \mathbb{N}^*</math> fest gewählt und <math>a_n = \frac{1}{n^p}</math> für <math>n \in \mathbb{N}^*</math>. Dann gilt für alle <math>n \in \mathbb{N}^*</math> die Ungleichung <math>n \leq n^p</math> und damit</p> $0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}.$ <p>Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge <math>\frac{1}{n}</math> gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7(d) auch die Folge <math>(a_n)</math> konvergent und ebenfalls eine Nullfolge.</p>
BSP	5.3.9	<p>Wir untersuchen</p> $a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3}, n \in \mathbb{N}.$ <p>Dazu kürzen wir durch Bruch durch die <b>höchste auftretende Potenz</b>:</p> $a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow \frac{1+0+0}{1+0} = 1 (n \rightarrow \infty).$ <p>Dieses Verfahren ist bei allen Polynom in <math>n</math> geteilt durch Polynom in <math>n</math> gut anwendbar.</p>

B	5.3.10	<b>Wichtige konvergente Folgen</b>
	a)	Ist $(a_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $a$ und gilt $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist für jedes $p \in \mathbb{N}^*$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ .
	b)	Die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \end{cases}$ Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $ q  < 1$ , so gilt ebenfalls $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .
	c)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}_+$ .
	d)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
	e)	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n := e$ ( $n \geq 1$ ).
		Beachte hier: Beide $n$ gleichzeitig wachsen lassen, keine trägen oder eiligere $n$ .

BSP	5.3.12	$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ , $n \in \mathbb{N}$ (Differenz von zwei divergenten Folgen) Trick: Erweiterung mit der Summe von Wurzeln bei Differenzen von Wurzeln $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}$ Sandwich: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ .
-----	--------	--

BSP	5.3.12	<b>Geometrische Summenformel:</b> $a_n := \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n, n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-q},  q  < 1.$
-----	--------	--

D	5.3.13	<b>Bestimmte Divergenz:</b> Eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ <b>divergiert bestimmt nach</b> $\infty(-\infty)$ und wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty(-\infty)$ , wenn es für jedes $C \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq C(a_n \leq -C)$ für alle $n \leq n_0$ gilt.
---	--------	---

### 1.3.2 Konvergenzkriterien

D	5.3.14	Eine reelle Folge $(a_n)$ heißt: a) <b>monoton wachsend</b> , wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. b) <b>monoton fallend</b> , wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. c) <b>monoton</b> , wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.
---	--------	--

S	5.3.15	<b>Monotonie Kriterium</b> Ist die reelle Folge $(a_n)$ nach oben (nach unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist $(a_n)$ <b>konvergent</b> und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ (bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n)$
---	--------	---

BSP	5.3.16	Betrachtung einer rekursiv definierten Folge $a_0 := \sqrt[3]{6} \text{ und } a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}, n \in \mathbb{N}$ Damit folgt: $a_1 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}, a_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}$ Solche Folgen entstehen oft bei iterativen Näherungsverfahren. Behauptung: $(a_n)$ nach oben beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ Konvergenz Beweis: Induktion
-----	--------	--

B		Monotonieverhalten, deswegen hier nur in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{C}$ (keine Ordnung)
---	--	---

D	5.3.18	Folge $(a_n)$ in $\mathbb{K}$ heißt <b>Cauchy-Folge</b> , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $ a_n - a_m  < \epsilon, \text{ für alle } n, m \geq n_0$
---	--------	--

S	5.3.19	Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist eine <b>Cauchy-Folge</b> .
---	--------	---

S	5.3.20	<b>Cauchy-Kriterium</b> Eine Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
---	--------	---

B		Beide hier gesehenen Konvergenzkriterien funktionieren ohne vorherige Behauptung über den Grenzwert
---	--	---

### 1.3.3 Teilfolgen und Häufungswerte

D	5.3.22	Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ . Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} :  a_n - a  < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente hat.
B		Jeder Grenzwert ist auch Häufungswert.
B		Häufungswert von $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ : 1, -1 (aber keine Grenzwerte)
B		Häufungswert von $(i^n)$ : 1, i, -1, -i
D	5.3.23	Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ . Ist $\{n_1, n_2, n_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge von Indizes mit $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ , so heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)$ .
B		Keine Teilfolgen: $(a_0, a_0, a_2, a_2, \dots)$ (keine doppelten Elemente) $(a_2, a_3, a_0, \dots)$ (nicht umsortieren)
S	5.3.24	Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ . Dann gilt a) Ein $\alpha \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Häufungswert von $(a_n)$ , wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})$ von $(a_n)$ existiert, die gegen $\alpha$ konvergiert. b) Ist $(a_n)$ konvergent mit Grenzwert $\alpha$ , so konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)$ gegen $\alpha$ . c) Ist $(a_n)$ konvergent, so hat $(a_n)$ genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

### 1.4 Asymptotik

D	5.4.1	a) Wir bezeichnen mit $F_+ := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ b) Es sei $(b_n) \in F_+$ . Dann definieren wir die Landau-Symbole durch • $O(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \frac{a_n}{b_n} \text{ beschränkt}\}$ ( $b_n$ größer gleich $a_n$ ) • $o(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\}$ ( $b_n$ echt größer als $a_n$ )
B	5.4.2	a) $\asymp$ -Zeichen wird hier nicht im bekannten mathematischen Sinne verwendet $\Rightarrow$ Kompromiss Notation $a_n \in O(b_n)$ b) Es gilt immer $o(b_n) \subseteq O(b_n)$ . c) $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow a_n \in O(b_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$ : Folge $a_n$ wächst höchstens so schnell wie ein Vielfaches von $b_n$
S	5.4.5	Es seien $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n) \in F_+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . Dann gilt: a) Sind $a_n, b_n \in O(c_n)$ , so ist auch $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$ b) Gilt $a_n \in O(b_n)$ und $c_n \in O(d_n)$ , so ist $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ c) Aus $a_n \in O(b_n)$ und $b_n \in O(c_n)$ folgt $a_n \in O(c_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$ genau dann, wenn $\frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$ e) Diese Aussagen gelten auch alle mit Klein-O anstatt Groß-O
B		Exponentielle Algorithmen sind viel schlechter als polynomiale.

Landau-Symbol	Bezeichnung	Bemerkung
$O(1)$	beschränkt	
$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a > 1$
$O(n)$	linear	
$O(n \log_a(n))$	„n log n“	$a > 1$
$O(n^2)$	quadratisch	
$O(n^3)$	kubisch	
$O(n^k)$	polynomial	$k \in \mathbb{N}^*$
$O(a^n)$	exponentiell	$a > 1$

## 1.5 Reihen

D	5.5.1	<p>Es sei <math>(a_n)</math> eine Folge in <math>\mathbb{K}</math>. Dann heißt</p> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ <p>die <b>Reihe</b> über <math>(a_n)</math>.</p> <p>Für jedes <math>k \in \mathbb{N}</math> heißt dann <math>s_k = \sum_{n=0}^k a_n</math> die <math>k</math>-te Teilsumme oder <b>Partialsumme</b> der Reihe.</p> <p>Ist die Folge <math>(s_k)_{k \in \mathbb{N}}</math> konvergent, so nennen wir die Reihe <b>konvergent</b> mit dem Reihenwert:</p> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n$ <p>Ist <math>(s_k)</math> divergent, so nennen wir auch die Reihe divergent.</p>
S	5.5.3	<p>Seien <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> und <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math> zwei konvergente Reihen in <math>\mathbb{K}</math> und <math>\alpha, \beta \in \mathbb{K}</math>. Dann ist auch <math>\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)</math> konvergent und es gilt</p> $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
S	5.5.4	Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .
S	5.5.5	Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ , so ist $(a_n)$ eine <b>Nullfolge</b> in $\mathbb{K}$ .
B	5.5.5	Gilt nicht umgekehrt. Nullfolge ist eine Voraussetzung für eine konvergente Reihe, aber keine Garantie.
S	5.5.6	<p>Es sei <math>(a_n)</math> eine Folge in <math>\mathbb{K}</math> und <math>s_k := \sum_{n=0}^k a_n</math>, <math>k \in \mathbb{N}</math> Dann gilt:</p> <p>a) <b>Monotonie Kriterium</b></p> <p>Ist <math>a_n \geq 0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> und <math>(s_k)_{k \in \mathbb{N}}</math> nach oben beschränkt, so ist <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> konvergent.</p> <p>b) <b>Cauchy-Kriterium</b></p> <p>Die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> ist genau dann konvergent, wenn für jedes <math>\epsilon &gt; 0</math> ein <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> existiert mit</p> $ \sum_{n=l+1}^k a_n  < \epsilon \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k > l \geq n_0.$
S	5.5.7	<p><b>Leibniz-Kriterium</b></p> <p>Es sei <math>(a_n)</math> eine monoton fallende Folge in <math>\mathbb{R}</math> mit <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0</math>. Dann ist die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n</math> konvergent.</p>
BSP		<p><b>Reihen:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}</math>, <math> q  &lt; 1</math> (<i>Geometrische Reihe</i>)</li> <li>• <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1</math></li> <li>• <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \text{divergent}</math> (<i>Harmonische Reihe</i>)</li> <li>• <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e</math></li> <li>• <math>\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)</math> (<i>alternierende harmonische Reihe</i>) (Leibniz-Kriterium)</li> <li>• <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}</math> : konvergent, wenn <math>\alpha &gt; 1</math>, sonst divergent</li> </ul>



### 1.5.1 Absolute Konvergenz

D	5.5.9	Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt <b>absolut konvergent</b> , wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}  a_n $ in $\mathbb{K}$ konvergiert. (Summanden werden schnell genug klein, vorzeichenunabhängig)
S	5.5.10	Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist auch konvergent in $\mathbb{K}$ und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung $ \sum_{n=0}^{\infty} a_n  \leq \sum_{n=0}^{\infty}  a_n $
B	5.5.10	Gilt nicht umgekehrt (alternierende harmonische Reihe)
B	5.5.10	Absolute Konvergenz: Reihenwert ist unabhängig von der Summationsreihenfolge
S	5.5.12	Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ reelle Folgen und $n_o \in \mathbb{N}$ . <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Majorantenkriterium</b> Ist <math> a_n  \leq b_n</math> für alle <math>n \geq n_o</math> und konvergiert die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math>, so ist <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> absolut konvergent.</li> <li>• <b>Minorantenkriterium</b> Ist <math>a_n \geq b_n \geq 0</math> für alle <math>n \geq n_o</math> und divergiert die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} b_n</math>, so divergiert auch die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math>.</li> </ul>
B	5.5.12	Die Vergleichsfolge heißt jeweils konvergente Majorante bzw. divergente Minorante.
S	5.5.16	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ . <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <b>Wurzelkriterium</b> Existiert der Grenzwert <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }</math>, so ist die Reihe <ul style="list-style-type: none"> <li>• absolut konvergent, wenn <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } &lt; 1</math> ist</li> <li>• divergent, wenn <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } &gt; 1</math> ist</li> </ul> </li> <li>b) <b>Quotientenkriterium</b> Ist <math>a_n \neq 0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> und existiert der Grenzwert <math>\lim_{n \rightarrow \infty}  \frac{a_{n+1}}{a_n} </math>, so ist die Reihe <ul style="list-style-type: none"> <li>• absolut konvergent, wenn <math>\lim_{n \rightarrow \infty}  \frac{a_{n+1}}{a_n}  &lt; 1</math> ist</li> <li>• divergent, wenn <math>\lim_{n \rightarrow \infty}  \frac{a_{n+1}}{a_n}  &gt; 1</math> ist</li> </ul> </li> </ol>
B	5.5.16	Liefert Wurzel-/Quotientenkriterium genau Eins, kann man daraus keine Aussage ableiten

### 1.5.2 Das Cauchy-Produkt

S	5.5.19	Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei <b>absolut konvergente Folgen</b> in $\mathbb{K}$ . Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ <b>absolut</b> und es gilt für die Reihenwerte: $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ heißt <b>Cauchy-Produkt</b> der beiden Reihen.
S	5.5.20	Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z+w) = E(z)E(w)$ .
D	5.5.21	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z := E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

## 1.6 Konvergenz in normierten Räumen

		<p>a) Eine Folge <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> in <math>V</math> heißt <b>konvergent</b> gegen ein <math>a \in V</math>, wenn für jedes <math>\epsilon &gt; 0</math> ein <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> existiert, so dass</p> $\ a_n - a\ _V < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$ <p>Die Folge heißt <b>divergent</b>, wenn sie nicht konvergent ist.</p>
D	5.6.1	<p>b) Eine Folge heißt <b>Cauchy-Folge</b>, wenn es für jedes <math>\epsilon &gt; 0</math> ein <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> gibt mit</p> $\ a_n - a_m\ _V < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0$ <p>c) Eine Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> in <math>V</math> heißt <b>konvergent</b> mit Reihenwert <math>s \in V</math>, wenn die Folge der Partialsummen <math>s_k := \sum_{n=0}^k a_n</math>, <math>k \in \mathbb{N}</math>, in <math>V</math> gegen <math>s</math> konvergiert. Konvergiert die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} \ a_n\ _V</math> in <math>\mathbb{R}</math> so heißt die Reihe <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n</math> <b>absolut konvergent</b>. Ist die Reihe nicht konvergent, so nennt man sie <b>divergent</b>.</p>
B	5.6.1	Genau dasselbe wie vorher, wir ersetzen nur den Betrag durch die jeweilige Norm
B	5.6.1	<b>Cauchy-Folge:</b> Abstand von je zwei Folgengliedern
B		<b>2-Norm:</b> $\ x\ _2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
D	5.6.2	Eine Menge $M \subseteq V$ heißt beschränkt, falls es ein $\geq 0$ gibt, so dass $\ x\ _V \leq C$ für alle $x \in M$ gilt.
BSP	5.6.3	<p><math>V = \mathbb{R}^3</math>, 1-Norm: <math>\ x\ _1 = \sum_{i=1}^3  x_i </math>, <math>a_n := (1, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})^T</math>, <math>n \in \mathbb{N}^*</math> Hier gilt <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (1, 0, 1)^T</math>. Zeige: Abstand von <math>a_n</math> zu Grenzwert beliebig klein: <math>\ a_n - (1, 0, 1)^T\ _1 =  0  +  \frac{1}{n}  +  \frac{n-1}{n} - 1  = \frac{2}{n}</math> (Abstand geht gegen 0) Sei <math>\epsilon &gt; 0</math>. Dann existiert <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> mit <math>n_0 &gt; \frac{2}{\epsilon}</math>. Für alle <math>n \geq n_0</math> gilt: <math>\ a_n - (1, 0, 1)^T\ _1 = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon</math></p>
S	5.6.5	<p>Es sei <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d})^T)_{n \in \mathbb{N}}</math> eine Folge in <math>\mathbb{R}^d</math> mit der 2-Norm. Dann ist <math>(a_n)</math> in <math>\mathbb{R}^d</math> genau dann <b>konvergent</b>, wenn für jedes <math>j \in \{1, 2, \dots, d\}</math> die Koordinatenfolge <math>(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}</math> in <math>\mathbb{R}</math> <b>konvergent</b> ist. In diesem Fall ist</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \dots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,2} \\ \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,d} \end{pmatrix}.$ <p>Falls eine Komponente im Vektor divergiert, divergiert die ganze Folge.</p>
B	5.6.5	<p>Der Satz gilt im endlichen Raum für alle Normen. Wenn eine Folge bezüglich einer Norm konvergiert, dann auch bzgl jeder anderen. Grenzwerte bleiben gleich.</p>
D	5.6.8	<p>a) Es seien <math>x_0 \in V</math> und <math>r \in (0, \infty)</math>. Dann heißt die Menge <math>B_r(x_0) := \{x \in V : \ x - x_0\ _V &lt; r\}</math> (<b>offene</b>) <b>Kugel</b> um <math>x_0</math> (Mittelpunkt) mit Radius <math>r</math>. b) Eine Menge <math>M \subseteq V</math> heißt <b>offen</b>, falls es für jeden Punkt <math>x_0 \in M</math> einen Radius <math>r &gt; 0</math> gibt, so dass <math>B_r(x_0) \subseteq M</math> gilt. c) Eine Menge <math>M \subseteq V</math> heißt <b>abgeschlossen</b>, wenn die Menge <math>M^c = V \setminus M</math> offen ist. d) Es sei <math>M \subseteq V</math>. Ein Punkt <math>x_0 \in M</math> heißt <b>innerer Punkt</b> von <math>M</math>, falls es ein <math>r &gt; 0</math> gibt, so dass <math>B_r(x_0) \subseteq M</math> ist. Man nennt <math>M^o := \{x \in M : x \text{ innerer Punkt von } M\}</math> das <b>Innere von } M.</b></p>
B	5.6.8	<p>Menge <b>abgeschlossen</b>: Rand gehört zur Menge Menge <b>offen</b>: Rand gehört nicht zur Menge Die meisten Menge sind weder offen noch abgeschlossen, keine Umkehrschlüsse!</p>
S	5.6.11	Eine Teilmenge $M$ von $V$ ist genau dann <b>abgeschlossen</b> , wenn für jede Folge in $M$ , die in $V$ konvergiert, der Grenzwert ein Element aus $M$ ist.
D	5.6.13	Ist $V$ ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so heißt eine Teilmenge $M \subseteq V$ <b>kompakt</b> , wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

D	5.6.15	Es sei $(a_n)$ eine Folge in $(V, \ \cdot\ _V)$ . a) Ein $a \in V$ heißt <b>Häufungswert</b> von $(a_n)$ falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \ a_n - a\ _V < \epsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\epsilon(a)\}$ unendlich viele Elemente hat. b) Ist $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , so heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine <b>Teilfolge</b> von $(a_n)$ .
S	5.6.17	<b>Satz von Bolzano-Weierstraß</b> Sei $(V, \ \cdot\ _V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum und $M \subseteq V$ kompakt. Dann besitzt jede Folge in $M$ eine <b>konvergente Teilfolge mit Grenzwert in <math>M</math></b> .
B	5.6.17	Ist $(V, \ \cdot\ _V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum, so besitzt jede beschränkte Folge in $V$ mindestens einen Häufungswert. (Unendliche viele Punkte in einer beschränkten Menge müssen irgendwo klumpen)
D	5.6.19	Ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(V, \ \cdot\ _V)$ heißt <b>vollständig</b> , wenn jede Cauchy-Folge in $V$ konvergiert. Ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum wird auch <b>Banachraum</b> genannt. Wird die Norm $\ \cdot\ _V$ außerdem durch ein Skalarprodukt auf $V$ induziert, so nennt man $V$ <b>Hilbertraum</b> .
B	5.6.19	Standardvektorraum $\mathbb{R}^d$ ist für jedes $d \in \mathbb{N}^*$ mit jeder Norm ein <b>Banachraum</b> . Wählt man außerdem die durch das Skalarprodukt induzierte 2-Norm, so ist $(\mathbb{R}^d, \ \cdot\ _2)$ ein <b>Hilbertraum</b> .
B		Normierter Raum: $V =$ normierter Vektorraum mit Norm $\ \cdot\ _V$ (ermöglicht Abstandsmessung) Hier als Vorstellung $\mathbb{R}^3$ mit Standard(2)-Norm (normaler Abstand im Raum)
S	5.6.22	<b>Banach'scher Fixpunktsatz</b> Es sei $(V, \ \cdot\ _V)$ ein Banachraum $M \subseteq V$ abgeschlossen und $f : M \rightarrow M$ eine Funktion. Weiter existiere ein $q \in (0, 1)$ , so dass $\ f(x) - f(y)\ _V \leq q\ x - y\ _V, \text{ für alle } x, y \in M$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen: a) Es gibt genau ein $v \in M$ mit $f(v) = v$ . (d.h. $f$ hat genau einen Fixpunkt in $M$ ) b) Für jedes $x_0 \in M$ konvergiert die Folge $(x_n)$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ , $n \in \mathbb{N}$ , gegen $v$ und es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ : $\ x_n - v\ _V \leq \frac{q^n}{1-q} \ x_1 - x_0\ _V \text{ (A-priori-Abschätzung)}$ $\ x_n - v\ _V \leq \frac{q}{1-q} \ x_n - x_{n-1}\ _V \text{ (A-posterior-Abschätzung)}$

## 1.7 Stetigkeit reeller Funktionen

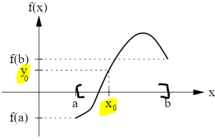
### 1.7.1 Der Grenzwertbegriff für Funktionen

D	5.7.1	<p>Es sei <math>D \subseteq \mathbb{R}</math> eine Menge, <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Funktion und <math>x_0 \in \mathbb{R}</math></p> <p>a) Wir nennen <math>x_0</math> einen <b>Häufungspunkt</b> von <math>D</math>, falls es eine Folge <math>(a_n)</math> in <math>D</math> mit <math>a_n \neq x_0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> gibt, die gegen <math>x_0</math> konvergiert.</p> <p>b) Ist <math>x_0</math> ein Häufungspunkt von <math>D</math>, so sagen wir, dass <math>f</math> für <math>x</math> gegen <math>x_0</math> den Grenzwert <math>y</math> hat, wenn für jede Folge <math>(a_n)</math> in <math>D</math>, die gegen <math>x_0</math> konvergiert und für die <math>a_n \neq x_0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> gilt, die Folge <math>(f(a_n))</math> gegen <math>y</math> konvergiert. Wir schreiben dafür: <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y</math>.</p> <p>c) Ist <math>x_0</math> ein Häufungspunkt von <math>D_+ := \{x \in D : x &gt; x_0\}</math>, so hat <math>f</math> für <math>x</math> gegen <math>x_0</math> den <b>rechtsseitigen Grenzwert</b> <math>y</math>, wenn für jede Folge <math>(a_n)</math> in <math>D_+</math>, die gegen <math>x_0</math> konvergiert, die Folge <math>(f(a_n))</math> gegen <math>y</math> konvergiert. Wir schreiben dafür: <math>\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y</math>.</p> <p>d) Ist <math>x_0</math> ein Häufungspunkt von <math>D_- := \{x \in D : x &lt; x_0\}</math>, so hat <math>f</math> für <math>x</math> gegen <math>x_0</math> den <b>linksseitigen Grenzwert</b> <math>y</math>, wenn für jede Folge <math>(a_n)</math> in <math>D_-</math>, die gegen <math>x_0</math> konvergiert, die Folge <math>(f(a_n))</math> gegen <math>y</math> konvergiert. Wir schreiben dafür: <math>\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y</math>.</p>
B	5.7.1	<p><math>x_0</math> HP von <math>D</math> bedeutet, dass <math>x_0</math> aus <math>D \setminus \{x_0\}</math> annäherbar Bsp.: HP von <math>(0, 1]</math>: <math>[0, 1]</math></p>
S	5.7.4	<p>Es sei <math>D \subseteq \mathbb{R}</math>, <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Funktion und <math>x_0 \in \mathbb{R}</math>. Existieren <math>\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)</math> und <math>\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)</math> und sind die beiden Werte gleich so existiert auch <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math> und es gilt</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$
B	5.7.4	Es gilt nicht $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
S	5.7.6	<p>Es sei <math>D \subseteq \mathbb{R}</math> und <math>x_0</math> ein Häufungspunkt von <math>D</math>. Desweiteren seien drei Funktionen <math>f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}</math> gegeben, so dass die Grenzwerte <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math> und <math>\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math> existieren. Dann gilt:</p> <p>a) Die Grenzwerte für <math>x</math> gegen <math>x_0</math> von <math>f + g</math>, <math>fg</math> und <math> f </math> existieren und es gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x)  =  \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) </math></li> </ul> <p>b) Gilt <math>f(x) \leq g(x)</math> für alle <math>x \in D \setminus \{x_0\}</math>, so ist <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math></p> <p>c) Ist <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math> und es gilt <math>f(x) \leq h(x) \leq g(x)</math> für alle <math>x \in D \setminus \{x_0\}</math>, so gilt auch <math>\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)</math>. (Sandwich-Theorem)</p> <p>d) Ist <math>y := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0</math>, so existiert <math>\delta &gt; 0</math>, so dass <math> g(x)  \geq \frac{ y }{2}</math> für alle <math>x \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}</math> ist. Wir können also die Funktion <math>\frac{f}{g} : (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}</math> mit <math>\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}</math> definieren. Für diese existiert dann der Limes für <math>x</math> gegen <math>x_0</math> mit</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$
D	5.7.7	<p><b>Divergenz</b></p> <p>a) Es seien <math>D \subseteq \mathbb{R}</math>, <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Funktion und <math>x_0</math> ein Häufungspunkt von <math>D</math>. Wir schreiben <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty(-\infty)</math>, wenn für jedes Folge <math>(a_n)</math> in <math>D</math>, die gegen <math>x_0</math> konvergiert und für die <math>a_n \neq x_0</math> für alle <math>n \in \mathbb{N}</math> gilt, die Folge <math>(f(a_n))</math> bestimmt gegen <math>\infty(-\infty)</math> divergiert.</p> <p>b) Es sei <math>D \subset \mathbb{R}</math> <b>nicht</b> nach oben (unten) <b>beschränkt</b>, <math>f : D \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Funktion und <math>y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}</math>. Wir sagen <math>\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y</math> (bzw. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y</math>), wenn für jede Folge <math>(a_n)</math> in <math>D</math>, die bestimmt gegen <math>\infty(-\infty)</math> divergiert, <math>\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y</math> gilt.</p>
BSP	5.7.8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$
BSP	5.7.8	<p>Exponentialfunktion: <math>E(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}</math></p> <p>Grenzwerte:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

## 1.7.2 Stetigkeit

D	5.7.9	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt <b>stetig</b> in $x_0$ , falls für jede Folge $(a_n)$ in $D$ , die gegen $x_0$ konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ gilt. Weiter heißt $f$ stetig auf $D$ , wenn $f$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Schließlich setzen wir noch $C(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } D\}$ . (Menge aller stetigen Funktionen auf $D$ )
B	5.7.9	Stetigkeit: Kleines Wackeln an Parametern $\rightarrow$ auch nur kleines Wackeln am Funktionswert
S	5.7.12	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D$ , so ist $f$ in $x_0$ genau dann <b>stetig</b> , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
B	5.7.12	Stetigkeit: Grenzübergang austauschbar mit Funktionsauswertung
S	5.7.15	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$ . Dann sind die Funktionen $f + g$ , $fg$ und $ f $ stetig in $x_0$ . Ist $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , so ist die Funktion $\frac{f}{g} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ .
B	5.7.15	Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
S	5.7.16	Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow E$ , sowie $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Ist $f$ stetig in $x_0 \in D$ und $g$ stetig in $f(x_0)$ , so ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ .
D	5.7.18	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt a) <b>monoton wachsend</b> , falls für alle $x, y \in D$ gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ b) <b>monoton fallend</b> , falls für alle $x, y \in D$ gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ c) <b>streng monoton wachsend</b> , falls für alle $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ d) <b>streng monoton fallend</b> , falls für alle $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ e) <b>(streng) monoton</b> , wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist
B	5.7.19	Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.
S	5.7.20	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0$ genau dann <b>stetig</b> , wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $ f(x) - f(y)  < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $ x - x_0  < \delta$ gilt.
D	5.7.22	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt <b>Lipschitz-stetig</b> , falls es ein $L > 0$ gibt mit $ f(x) - f(y)  \leq L x - y $ für alle $x, y \in D$ .
S	5.7.23	Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ <b>Lipschitz-stetig</b> so ist $f$ <b>stetig</b> auf $D$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch. (Lipschitz-Stetigkeit ist damit ein strengerer Begriff als Stetigkeit)
B	5.7.23	Lipschitz-Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass die Steigung des Graphen beschränkt bleibt.

### 1.7.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

S	5.7.25	<b>Zwischenwertsatz</b> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und $f \in C([a, b])$ . Ist $y_0$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ , so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$ .
		
S	5.7.26	<b>Nullstellensatz von Bolzano</b> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und $f \in C([a, b])$ erfülle $f(a)f(b) < 0$ (Existenz einer Nullstelle / Einer der beiden Werte 0). Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$ .
D	5.7.27	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls die Menge $f(D)$ (Bild der Funktion) beschränkt ist, d.h. falls ein $C \geq 0$ existiert, so dass $ f(x)  \leq C$ für alle $x \in D$ gilt.
S	5.7.28	Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ <b>kompakt</b> und nicht-leer, sowie $f \in C(K)$ . Dann gibt es $x_*, x^* \in K$ , so dass $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in K$ gilt. Insbesondere ist $f$ <b>beschränkt</b> . (Jede stetige Funktion auf kompakter Menge ist beschränkt)

### 1.8 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

D	5.8.1	Es seien $V$ und $W$ normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume, $D \subseteq V$ und $f : D \rightarrow W$ eine Funktion. a) Wir nennen $x_0 \in D$ <b>Häufungspunkt</b> von $D$ , falls es eine Folge $(a_n)$ in $D$ mit $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, die gegen $x_0$ konvergiert. b) Sei $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$ . Dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ , falls für jede Folge $(a_n)$ in $D$ , die gegen $x_0$ konvergiert und $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, die Folge $(f(a_n))$ gegen $y$ konvergiert.
B	5.8.2	Hier keine links- und rechtsseitiger Grenzwerte, da es Unmengen an Richtungen gibt
D	5.3.3	Es seien $V, W$ zwei normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, $D \subseteq V$ und $x_0 \in D$ . Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt <b>stetig</b> in $x_0$ , wenn für jede Folge $(a_n)$ in $D$ , die gegen $x_0$ konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ gilt. Weiter heißt <b>f stetig auf D</b> , wenn $f$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Außerdem setzen wir wieder $C(D; W) := \{f : D \rightarrow W : f \text{ stetig auf } D\}$ .
S	5.8.4	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in D$ . Dann ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ genau dann in $x_0$ <b>stetig</b> , wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0$ stetig sind.
S	5.8.5	Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , $x_0 \in D$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ , sowie $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$ . Dann sind auch $f + g$ , $fg$ und $h \circ f$ als Funktionen von $D$ nach $\mathbb{R}$ stetig in $x_0$ . Ist außerdem $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ , so ist auch $\frac{f}{g} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ .
S	5.8.8	Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ <b>kompakt</b> und nicht-leer, sowie $f \in C(K)$ . Dann gibt es $x_*, x^* \in K$ , so dass $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in K$ gilt. Insbesondere ist $f$ <b>beschränkt</b> .
S	5.8.10	Es sei $\ \cdot\ $ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\ \cdot\ _2$ die 2-Norm auf $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es zwei Konstanten $c$ und $C$ mit $0 < c \leq C$ , so dass $c\ x\ _2 \leq \ x\  \leq C\ x\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.
S	5.8.11	a) Sind $\ \cdot\ $ und $\ \cdot\ $ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ , so gibt es Konstanten $0 < c \leq C$ , so dass $c\ x\  \leq \ x\  \leq C\ x\ $ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. b) Ist eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}^d$ bezüglich einer Norm konvergent, so konvergiert sie auch bezüglich jeder anderen Norm und der Grenzwert ist derselbe.
B	5.8.11	Gilt $c\ x\  \leq \ x\  \leq C\ x\ $ so heißen die Normen $\ \cdot\ , \ \cdot\ $ äquivalent. Je zwei Normen im $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

## 1.9 Potenzreihen

D	5.9.1	Es sei $(a_n)$ eine Folge $\mathbb{K}$ . Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ heißt <b>Potenzreihe</b> .
B		Offensichtlich konvergieren alle Potenzreihen für $x = 0$ .
BSP	5.9.2	<b>Geometrische Reihe</b> Konvergiert für $ x  < 1$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .
BSP	5.9.2	<b>Exponentialfunktion</b> $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
S	5.9.3	<b>Satz von Hadamard</b> Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ , so dass der Grenzwert $\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$ existiert oder die Folge $(\sqrt[n]{ a_n })$ unbeschränkt ist. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ : a) Ist die Folge $\sqrt[n]{ a_n }$ unbeschränkt, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$ . b) Ist $\rho = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut. c) Ist $\rho \in (0, \infty)$ , so ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $ x  < \frac{1}{\rho}$ <b>absolut konvergent</b> und für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $ x  > \frac{1}{\rho}$ <b>divergent</b> .
B	5.9.3	Keine Aussage bei $ x  = \frac{1}{\rho}$ möglich.
B	5.9.3	Konvergenzbereich entweder $\{0\}$ oder $\mathbb{K}$ oder Kreis in $\mathbb{C}$ bzw. Intervall in $\mathbb{R}$
D	5.9.4	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe die die Voraussetzungen von 5.9.3 erfüllt und $\rho$ wie in diesem Satz definiert. Dann heißt die Zahl: $r := \begin{cases} 0 & \text{falls in obigem Satz a) gilt} \\ \infty & \text{falls in obigem Satz b) gilt} \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls in obigem Satz c) gilt} \end{cases}$ der <b>Konvergenzradius</b> der Reihe.
BSP	5.9.5	a) $a_n = 1, \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Dann gilt: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ , also $r = \frac{1}{\rho} = 1$ . Am Rand: Für $x = 1$ : $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ divergent. (-1 auch divergent) Konvergenzbereich: $(-1, 1)$ b) $a_n = \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Konvergenzradius 1, da: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1$ . Am Rand: Für $x = 1$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ : divergent (harmonische Reihe) Für $x = -1$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ : konvergent (alternierende harmonische Reihe) Konvergenzbereich: $[-1, 1)$
D	5.9.6	Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ , $n_0 \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$ . Dann nennt man eine Reihe der Form $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ <b>Potenzreihe</b> . Der Punkt $x_0$ wird <b>Entwicklungspunkt</b> der Potenzreihe genannt. (Hier ist das Konvergenzgebiet nun um $x_0$ statt um 0 (allgemeiner)) (Alle Sätze und Definitionen gelten hier genauso)
B	5.9.6	Konvergenzradius nun entweder 0, $\infty$ oder $r = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n })^{-1}$ .
BSP	5.9.6	$a_n := \frac{(-4)^n}{n}, x_0 = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} (x - 1)^n$ Es gilt: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left \frac{(-4)^n}{n}\right } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = \frac{4}{1} = 4$ Konvergenzradius: $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4}$ Konvergenz in $(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}) = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ Randpunkte: $x = \frac{5}{4}$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} (\frac{5}{4} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent (alt. harmonische Reihe) $x = \frac{3}{4}$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} (\frac{3}{4} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \cdot \frac{1}{(-4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (harmonische Reihe) Konvergenzgebiet: $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$

S	5.9.10	<b>Quotientenkriterium</b> Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ , so dass $\sigma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $ existiert. Dann gilt für den Konvergenzradius $r$ von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ : $r = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & \text{falls } \sigma \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{falls } \sigma = 0. \end{cases}$
		a) $a_n = \frac{n^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ Quotientenkriterium: $\sigma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_{n+1}}{a_n} \right  = \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right  = \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1)n^n} \right  = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ Konvergenzradius: $r = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{e}$
BSP	5.9.11	b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n}$ Achtung Falle! Wegen $3^n$ kein Hadamard und 5.9.10 anwendbar. Substitution $y = x^3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} y^n$ Konvergenzradius: 2, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left  \frac{1}{2^n} \right } = \frac{1}{2}$ . Also Konvergenz für $y = x^3 \in (-2, 2)$ , Divergenz außerhalb $[-2, 2]$ $\rightarrow$ Konvergenz für $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ , Divergenz außerhalb $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist $\sqrt[3]{2}$ .
S	5.9.13	<b>Cauchy-Produkt von Potenzreihen</b> Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$ . Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$ mindestens den Konvergenzradius $R := \min\{r_1, r_2\}$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $ x  < r$ $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$
S	5.9.14	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$ . Dann ist die dadurch gegebene Funktion $f : \{x \in \mathbb{K} :  x  < r\} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig auf $\{x \in \mathbb{K} :  x  < r\}$ .
B	5.9.14	$E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $E(x) = e^x$ stetig auf $\mathbb{C}$ . Daraus folgt: $E(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$
BSP	5.9.16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ Konvergenzradius: Unendlich (Quotientenkriterium) $\rightarrow$ Auf $\mathbb{R}$ und in Null stetig Damit gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$ .

## 1.10 Wichtige Funktionen

### 1.10.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

S	5.10.1	Die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist <b>bijektiv</b>
D	5.10.2	Die Umkehrfunktion von $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ wird mit $\ln := E^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet und heißt <b>natürlicher Logarithmus</b> .
		a) Die Funktion $\ln$ ist auf $(0, \infty)$ stetig und wächst streng monoton. b) Es gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$ . c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ .
S	5.10.3	d) Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und $q \in \mathbb{Q}$ gilt: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)</math></li> <li><math>\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)</math></li> <li><math>\ln(x^q) = q \ln(x)</math></li> </ul>
D	5.10.4	Für alle $a \in (0, \infty)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die <b>allgemeine Potenz</b> durch $a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$
S	5.10.5	Es sei $a \in (0, \infty)$ . Dann ist die Funktion $x \rightarrow a^x$ stetig auf $\mathbb{R}$ und es gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen wie beispielsweise $a^{x+y} = a^x a^y$ , $a^{-1} = \frac{1}{a}$ , $(a^x)^y = a^{xy}$



## 1.10.2 Trigonometrische Funktionen

D	5.10.6	$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, z \in \mathbb{C}$ ( <b>Sinus</b> ) $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, z \in \mathbb{C}$ ( <b>Cosinus</b> )																								
B	5.10.6	Alle Winkel in der Mathematik werden im Bogenmaß angegeben. <table><tr><td></td><td>0°</td><td>30°</td><td>45°</td><td>60°</td><td>90°</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td><math>\frac{\pi}{6}</math></td><td><math>\frac{\pi}{4}</math></td><td><math>\frac{\pi}{3}</math></td><td><math>\frac{\pi}{2}</math></td></tr><tr><td>sin</td><td>0</td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td><math>\frac{1}{\sqrt{2}}</math></td><td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td><td>1</td></tr><tr><td>cos</td><td>1</td><td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td><td><math>\frac{1}{\sqrt{2}}</math></td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td>0</td></tr></table> (Sin: $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ )		0°	30°	45°	60°	90°		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
	0°	30°	45°	60°	90°																					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$																					
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1																					
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0																					
S	5.10.8	<b>Trigonometrischer Pythagoras</b> $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , für alle $x \in \mathbb{R}$																								
D	5.10.9	Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt: a) ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt. b) gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt. c) periodisch mit Periode $L \in \mathbb{R}$ , bzw. $\mathbb{C}$ , wenn $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt.																								
S	5.10.10	Der Cosinus ist <b>gerade</b> und der Sinus ist <b>ungerade</b> .																								
S	5.10.11	<b>Eulersche Formel</b> Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{iz} = \cos(z) + \sin(z)i$ . Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ damit $Re(e^{ix}) = \cos(x)$ und $Im(e^{ix}) = \sin(x)$ .																								
S	5.10.12	Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt a) $ \sin(x)  \leq 1$ und $ \cos(x)  \leq 1$ b) Additionstheoreme: $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ c) Rechenregeln für verschobene Funktionen: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode $2\pi$																								
S	5.10.13	Es ist $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$																								
D	5.10.14	Die Funktion $\tan : \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ heißt <b>Tangens</b> .																								
D	5.10.15	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ( <b>Arcussinus</b> ) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ( <b>Arcuscosinus</b> ) $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ( <b>Arcustangens</b> )																								

### 1.10.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen

D	5.10.17	Es sei $Z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ der <b>Betrag</b> von $z$ und der Winkel $\phi$ , der zwischen $z$ und der positiven reellen Achse eingeschlossen wird das <b>Argument</b> von $z$ . Beide Werte zusammen $(r, \phi)$ zusammen sind die <b>Polarkoordinaten</b> von $z$ .
B	5.10.17	Argument im Intervall $(-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi)$ um Eindeutigkeit zu garantieren.
B	5.10.18	Argument: $(-\pi, \pi) \rightarrow$ Umrechnung von Komplex zu Polarkoordinaten $x = r \cos(\phi)$ $y = r \sin(\phi)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$
S	5.10.19	Es seien $z = re^{i\phi}$ , $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polarkoordinaten $(r, \phi)$ , bzw. $(s, \psi)$ gegeben. Dann hat $z \cdot w$ die Polarkoordinaten $(rs, \phi + \psi)$ und $\frac{z}{w}$ die Polarkoordinaten $(\frac{r}{s}, \phi - \psi)$ .
BSP	5.10.20	Wir berechnen $(1 + i)^{2001}$ . $(1 + i)^{2001} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2001} = \sqrt{2}^{2001} e^{i2001 \cdot \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot 2^{1005} e^{i(2008+3)\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot 2^{1005} e^{i502\pi} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{1005} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{1005}(-1 + i) \quad (e^{i502\pi} = 1)$

### 1.10.4 Hyperbolische Funktionen

D	5.10.22	$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)}$ $\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)}$ $\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{(k\pi + \frac{\pi}{2}i) : k \in \mathbb{Z}\} \text{ (Tangens hyperbolicus)}$
---	---------	---

## 2 Analysis - Teil II: Differential- und Integralrechnung

### 2.1 Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

#### 2.1.1 Der Ableitungsbegriff

D	6.1.1	Für ganzes Kapitel gilt: $I \subseteq \mathbb{R}$ als Intervall. a) Es sei $x_0 \in I$ . Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0$ , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ in $\mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die <b>Ableitung</b> von $f$ in $x_0$ und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. b) Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt <b>differenzierbar</b> auf $I$ , falls sie in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird $x \rightarrow f'(x)$ für $x \in I$ eine Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion heißt die <b>Ableitung</b> oder auch <b>Ableitungsfunktion</b> von $f$ auf $I$ .
B	6.1.1	Der Grenzwert in 6.1.1 existiert genau dann, wenn der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Die Werte stimmen dann überein. Je nach Situation den einen oder anderen verwenden.
BSP	6.1.3	$f(x) = c \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$ (Ableitung konstanter Funktionen ist 0)
S	6.1.4	Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist $f$ <b>stetig</b> in $x_0$ . (Jede differenzierbare Funktion ist stetig)
B	6.1.6	Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $E'(x) = e^x = E(x)$ .
BSP	6.1.6	$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$ Daraus folgt: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$ Damit ist $f$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ .
S	6.1.7	Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann <b>differenzierbar</b> mit $f'(x_0) = a$ , wenn $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x), x \in I$ ist und für die Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ r(x) }{ x - x_0 } = 0$ .

#### 2.1.2 Ableitungsregeln

S	6.1.9	Es seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt a) $\alpha f + \beta g$ ist in $x_0$ differenzierbar und $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \text{ (Linearität)}$ b) $fg$ ist differenzierbar in $x_0$ und $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \text{ (Produktregel)}$ c) Ist $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein Intervall $J \subseteq I$ mit $x_0 \in J$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ . Außerdem ist die Funktion $\frac{f}{g} : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \text{ (Quotientenregel)}$
S	6.1.10	<b>Kettenregel</b> Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g : I \rightarrow J$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$ . Weiter sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist auch die Funktion $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0$ und es gilt $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$
BSP	6.1.11	$a > 0, \phi(x) := a^x, x \in \mathbb{R}$ (allgemein) $\phi(x) = e^{x \cdot \ln(a)}: f(x) = e^y$ und $g(x) = x \cdot \ln(a) \rightarrow \phi = f \circ g$ $\phi' = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} \ln(a) = e^{x \cdot \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a)$

S 6.1.12 Es sei  $f \in C(I)$  streng monoton und  $x_0 \in I$  differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann existiert die **Umkehrfunktion**  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , diese ist differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$  und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

B 6.1.12 Wichtig:  $f'(x_0) \neq 0$  als Voraussetzung!

BSP 6.1.14 **Ableitung des ln**

$$f(x) = e^x, f^{-1}(x) = \ln(x)$$

$$(ln)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}, y \in (0, \infty)$$

S 6.1.15 Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann hat auch die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  den Konvergenzradius  $r$ , die Funktion  $f$  ist in allen  $x \in (-r, r)$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, x \in (-r, r)$$

(Potenzreihe im Inneren des Konvergenzgebietes summandenweise ableitbar)

BSP 6.1.16 Potenzreihen von Sinus und Cosinus konvergieren auf ganz  $\mathbb{R}$ .

$$\sin'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

BSP 6.1.17 Berechnung des Reihenwerts mithilfe von 6.1.15

Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ , Konvergenzradius 1, Welche Funktion ist hier gegeben?

Für alle  $x \in (-1, 1)$  gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$

Nun bis auf fehlenden ersten Summanden gleich der schon bekannten geometrische Reihe. Für  $x \in (-1, 1)$  gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' = x \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Name	Symbol	Definitionsbereich	Bild	Ableitung
E-funktion	$e^x$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$e^x$
(nat.) Logarithmus	$\ln$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
Sinus	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\cos$
Cosinus	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin$
Tangens	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{(k + 1/2)\pi\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
Arcussinus	$\arcsin$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcuscosinus	$\arccos$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcustangens	$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\frac{1}{1+x^2}$
Sinus hyperbolicus	$\sinh$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cosh$
Cosinus hyp.	$\cosh$	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	$\sinh$
Tangens hyp.	$\tanh$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

B

### 2.1.3 Höhere Ableitungen

D 6.1.19 Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $I$  differenzierbare Funktion und ist  $f'$  auf  $I$  stetig, so nennt man  $f$  **stetig differenzierbar**. Man schreibt  $C^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig differenzierbar}\}$

a) Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $I$ ,  $x_0 \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Dann heißt die Funktion  $f$  in  $x_0$  (bzw. auf  $I$ )  **$n$ -mal differenzierbar** falls sie auf  $I$  schon  $(n-1)$  differenzierbar ist und die Funktion  $f^{(n-1)}$  in  $x_0$  (bzw. auf  $I$ ) wieder differenzierbar ist.

In diesem Fall heißt  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$  die  **$n$ -te Ableitung** von  $f$  in  $x_0$  bzw.  $x \rightarrow f^{(n)}(x)$  die  **$n$ -te Ableitungsfunktion** von  $f$  auf  $I$ .

D 6.1.20 b) Ist die  $n$ -te Ableitung von  $f$  auf  $I$  selbst sogar wieder stetig auf  $I$ , so sagt man  $f$  sei  $n$ -mal **stetig differenzierbar** auf  $I$ . Man schreibt

$$C^n(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

c) Ist  $f \in C^n(I)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennt man  $f$  **beliebig oft differenzierbar**. Man verwendet dafür die Bezeichnung

$$f \in C^\infty(I) := \prod_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

B 6.1.20 Die Funktion selbst wird als nullte Ableitung definiert  $f^{(0)} := f$ .

## 2.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

S	6.2.1	<b>Mittelwertsatz der Differenzialrechnung</b> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$ sei differenzierbar in $(a, b)$ . Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ , so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ , bzw. gleichbedeutend $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ gilt.
B	6.2.1	Sekantensteigung der Funktion (erhalten durch $a$ und $b$ ) entspricht irgendwann zwischen $a$ und $b$ tatsächlich der Tangentensteigung. <div style="text-align: center;"> </div>
S	6.2.2	a) <b>Satz von Rolle</b> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$ . Ist $f$ auf $(a, b)$ differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$ , so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$ . b) Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem <b>Intervall</b> $I$ differenzierbar. Dann gilt Ist $f' = 0$ auf $I$ , so ist $f$ auf $I$ konstant. Ist $f' > 0$ auf $I$ , so ist $f$ auf $I$ streng monoton wachsend. Ist $f' < 0$ auf $I$ , so ist $f$ auf $I$ streng monoton fallend. Ist $f' \geq 0$ auf $I$ , so ist $f$ auf $I$ monoton wachsend. Ist $f' \leq 0$ auf $I$ , so ist $f$ auf $I$ monoton fallend. c) Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I$ differenzierbare Funktionen und gilt $f' = g'$ auf $I$ , so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ , so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$ gilt.
S	6.2.6	<b>Satz von de l'Hospital</b> Es sei $(a, b)$ ein offenes Intervall $\mathbb{R}$ ( $a = -\infty$ und $b = \infty$ hier zugelassen) und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf $(a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ . Gilt dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ und existiert der Grenzwert $L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ( $L = \pm\infty$ zugelassen), dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$
B	6.2.6	Achtung! Alle Voraussetzungen prüfen!
D	6.2.9	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^\infty(I)$ . a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ heißt <b>Taylorreihe</b> von $f$ um $x_0$ . b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ heißt das Polynom $T_{k,f}(x; x_0) := \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ das <b>Taylorpolynom k-ten Grades</b> von $f$ in $x_0$ .
BSP	6.2.10	Taylorpolynom $k$ -ten Grades ist anschaulich die bestmögliche Approximation an die Funktion $f$
S	6.2.12	<b>Satz von Taylor</b> Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x, x_0 \in I$ und für ein $k \in \mathbb{N}_\times$ sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $k + 1$ -mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ , so dass gilt $f(x) = T_{k,f}(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$ (Vorne Annäherung, hinten Fehlerterm - Abschätzung wie gut die Taylorreihe zu Funktion passt)

- a) Taylor für  $k = 0$  ist Mittelwertsatz.  
 b) Der Fehlerterm

$$R_{k,f}(x; x_0) := \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

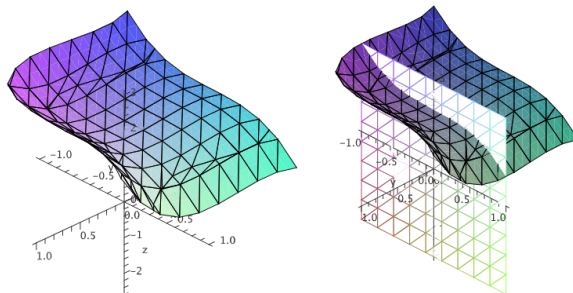
der die Differenz zwischen  $f(x)$  und der Näherung durch das Taylorpolynom  $k$ -ten Grades beschreibt, wird auch als Restglied bezeichnet.

## 2.3 Extremwerte

- D 6.3.1 Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  
 a) Man sagt, dass  $f$  in  $x_0 \in D$  ein **globales Maximum** (bzw. Minimum) hat, falls  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in D$  gilt.  
 b)  $f$  hat in  $x_0 \in D$  ein **relatives Maximum** (bzw. Minimum), falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt.  
 c) Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen **Extremum** in  $x_0$  wenn  $f$  dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.
- S 6.3.3 Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Ist  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$  und hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Extremum, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .
- B 6.3.3 Innerer Punkt von  $D$ : Kein Randpunkt, möglich Kugel um den Punkt zu legen  
 Warnung:  $x_0$  innerer Punkt ist wesentlich  
 Warnung: Umkehrung des Satzes gilt nicht (Kann auch Sattelpunkt sein, nicht unbedingt Extremum)
- S 6.3.5 Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I^\circ$  und  $f \in C^n(I)$  für ein  $n \geq 2$ . Weiter gelte  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , aber  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ist nun  $n$  ungerade, so hat  $f$  in  $x_0$  kein Extremum, ist  $n$  gerade, so liegt in  $x_0$  ein Extremum vor, und zwar falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ein **Minimum** und falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$  ein **Maximum**.

## 2.4 Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Partielle Ableitung

- D 6.4.1 Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion,  $x_0 \in G$  und  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Existiert der Grenzwert
- $$(\partial_v f)(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h},$$
- so heißt  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar und  $(\partial_v f)(x_0)$  die **Richtungsableitung** von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$ . (Betrachtung der Funktionswerte entlang einer Geraden im Raum)



B 6.4.1

- D 6.4.3 Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$  die **Standardbasis** des  $\mathbb{R}^d$ .
- a) Existieren in einem  $x_0 \in G$  die Richtungsableitungen von  $f$  in alle Richtungen  $e_1, e_2, \dots, e_d$ , so heißt  $f$  in  $x_0$  **partiell differenzierbar**. Man schreibt dann für  $j = 1, 2, \dots, d$  auch
- $$\partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := f_{x_j}(x_0) := (\partial_{e_j} f)(x_0)$$
- für die **partielle Ableitung von  $f$  in  $x_0$  nach der  $j$ -ten Koordinate**.
- b) Ist  $f$  in allen  $x_0 \in G$  partiell differenzierbar, so sagt man  $f$  ist in  $G$  partiell differenzierbar und schreibt  $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  für die **partielle Ableitungs(-funktion)**
- c) Ist  $f$  in  $G$  partiell differenzierbar und sind sämtliche partielle Ableitungen  $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_d f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig, so nennt man  $f$  **stetig partiell differenzierbar** in  $G$ .

B	6.4.3	Berechnung Ableitung: Alle anderen Variablen werden als konstante Parameter behandelt
BSP	6.4.7	$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = xe^{xz+y^2}$ : $\partial_1 f(x, y, z) = e^{xz+y^2} + xe^{xz+y^2} \cdot z$ $\partial_2 f(x, y, z) = xe^{xz+y^2} \cdot 2y$ $\partial_3 f(x, y, z) = xe^{xz+y^2} \cdot x$
S	6.4.8	<p>Ist <math>G \subseteq \mathbb{R}^d</math> offen, <math>f : G \rightarrow \mathbb{R}^p</math> eine Funktion und <math>x_0 \in G</math>, so ist <math>f</math> in <math>x_0</math> genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen <math>f_1, f_2, \dots, f_p : G \rightarrow \mathbb{R}</math> in <math>x_0</math> partiell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt</p> $\partial_j f(x_0) = (\partial_1 f_1(x_0), \partial_2 f_2(x_0), \dots, \partial_j f_p(x_0))^T$
D	6.1.10	<p>Es sei <math>G \subseteq \mathbb{R}^d</math> offen und <math>f : G \rightarrow \mathbb{R}^p</math> in <math>x_0 \in G</math> partiell differenzierbar. Die <math>p \times d</math>-Matrix aller partiellen Ableitungen</p> $J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \dots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$ <p>heißt <b>Jakobi-Matrix</b> von <math>f</math>.  Im Spezialfall <math>p = 1</math> nennt man die <math>1 \times d</math>-Matrix, d.h. den <math>\mathbb{R}^d</math>-Zeilenvektor  <math>\nabla f(x_0 := J_f(x_0)) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0))</math>  den <b>Gradient</b> von <math>f</math>.</p>
B	6.1.10	Es gilt $J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla(f_1(x)) \\ \nabla(f_2(x)) \\ \dots \\ \nabla(f_p(x)) \end{pmatrix}$
B	6.1.10	Bedeutung Gradient: Falls $f$ glatt genug ist gibt der Vektor $\nabla f(x_0)$ die Richtung, in der der Graph von $f$ an der Stelle $x_0$ am stärksten ansteigt und seine Länge entspricht dieser maximalen Steigung. (Basis für Optimierungsverfahren)
D	6.4.13	<p>Es seien <math>G \subseteq \mathbb{R}^d</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math> mit <math>n \geq 2</math>, <math>x_0 \in G</math> und <math>f : G \rightarrow \mathbb{R}^p</math> eine Funktion. Diese nennt man <math>n</math>-mal (stetig) partiell differenzierbar in <math>x_0</math>, wenn sie schon <math>(n-1)</math>-mal (stetig) partiell differenzierbar auf <math>G</math> ist und alle <math>(n-1)</math>-ten partiellen Ableitungen in <math>x_0</math> wieder (stetig) partiell differenzierbar sind.</p> <p>Notation: <math>\partial_1 \partial_3 \partial_1</math> (Reihenfolge meist egal, wenn nicht von innen nach außen)</p>
BSP	6.4.14	<p><math>f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}</math> mit <math>f(x, y) = x^3 y + x e^y</math></p> <p>Ableitungen erster Ordnung:</p> $\partial_1 f(x, y) = 3x^2 y + e^y \text{ und } \partial_2 f(x, y) = x^3 + x e^y$ <p>Ableitungen zweiter Ordnung:</p> $\begin{aligned} \partial_1^2 f(x, y) &= 6xy & \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= 3x^2 + e^y \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 3x^2 + e^y & \partial_2^2 f(x, y) &= x e^y \end{aligned}$ <p>Man beobachtet, dass das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängig sind.</p>
S	6.4.15	<p><b>Satz von Schwarz</b></p> <p>Ist <math>G \subseteq \mathbb{R}^d</math> offen und <math>f : G \rightarrow \mathbb{R}^p</math> eine <math>n</math>-mal stetig partiell differenzierbare Funktion, so ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung <math>n</math> vertauschbar.  (Sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, gilt der Satz nicht.)</p>

## 2.5 Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Totale Differenzierbarkeit

D	6.5.1	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $x_0 \in G$ . Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt <b>(total) differenzierbar</b> in $x_0$ , wenn es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ gibt, so dass gilt $f(x) = f(x_0) * \Phi(x - x_0) + r(x), \quad x \in G$ mit einer Funktion $r : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ die $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ r(x)\ }{\ x - x_0\ } = 0$ erfüllt. Die lineare Abbildung $Df(x_0) := \Phi$ heißt dann <b>(totale) Ableitung</b> von $f$ in $x_0$ . Ist $f$ in allen $x_0 \in G$ total differenzierbar, so nennt man die Funktion $Df : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ die <b>Ableitung(sfunktion)</b> von $f$ .
B	6.5.4	Ableitung einer linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist in jedem Punkt die Abbildung $\Phi$ selbst
S	6.5.6	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist $f$ auch stetig in $x_0$ .
S	6.5.7	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine in $x_0 \in G$ total differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Dann existiert in $x_0$ die Richtungsableitung von $f$ in Richtung $v$ und es gilt $(\partial_v f)(x_0) = Df(x_0)(v).$
S	6.5.8	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Ist $f$ in $x_0$ total differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ auch partiell differenzierbar und die Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^p$ ist die Jakobi-Matrix $J_f(x_0)$ .
B	6.5.8	Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch.
S	6.5.10	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\partial_v f(x_0) = J_f(x_0)v.$
S	6.5.12	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ stetig partiell differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ sogar total differenzierbar.
		$ \begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell differenzierbar} & \implies & \text{total differenzierbar} & \implies & \text{stetig} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{partiell differenzierbar} & \iff & \text{alle Richtungsabl. existieren} & &  \end{array} $
B	6.5.12	
S	6.5.13	<b>Kettenregel</b> Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, sowie $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $g(G) \subseteq H$ und $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ Funktionen, so dass $g$ in $x_0 \in G$ und $f$ in $g(x_0)$ total differenzierbar sind. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : G \rightarrow \mathbb{R}^q$ in $x_0$ total differenzierbar und es gilt $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$ (Enthält Matrixmultiplikation)
S	6.5.16	<b>Mittelwertsatz</b> Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Sind $a, b \in G$ so gewählt, dass $\bar{ab} \subseteq G$ , so gibt es ein $\xi \in \bar{ab}$ mit $f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b - a)$
B	6.5.16	$\bar{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}$ : Verbindungsstrecke von $a$ nach $b$
D	6.5.17	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt <b>konvex</b> , wenn für alle $a, b \in M$ auch $\bar{ab} \subseteq M$ gilt.
S	6.5.18	<b>Schrankensatz</b> Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, sowie $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar. Gibt es ein $L \geq 0$ mit $\ \nabla f(x)\ _2 \leq L$ für alle $x \in G$ , so gilt $ f(x) - f(y)  \leq L\ x - y\ _2, \quad \text{für alle } x, y \in G$ d.h. $f$ ist <b>Lipschitz-stetig</b> auf $G$ .
D	6.5.20	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in G$ zweimal partiell differenzierbar. Dann heißt die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen $H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1,\dots,d}$ <b>Hesse-Matrix</b> von $f$ in $x_0$ .
B	6.5.20	Hesse-Matrix ist immer eine quadratische Matrix. Sogar symmetrisch, falls $f$ stetig partiell differenzierbar in $x_0$ ist Es gilt $H_f(x_0) = J_{(\nabla f)^T}(x_0)$



D 6.5.22 **Satz von Taylor**  
Den Ausdruck

$$T_{1,f}(x; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

bezeichnen wir wieder als das **Taylorpolynom** ersten Grades von  $f$  in  $x_0$ .

S 6.5.22 **Satz von Taylor**

Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene und konvexe Menge und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig partiell differenzierbar (damit auch 2x total differenzierbar) in  $G$ . Zu jeder Wahl von  $x_0, x \in G$  gibt es dann ein  $\xi \in x_0 \bar{x}$  mit

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$$

## 2.6 Extremwertprobleme in mehreren Variablen

D 6.6.1 Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a) Man sagt, dass  $f$  in  $x_0 \in G$  ein globales Maximum (bzw. Minimum) hat, falls  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in G$  gilt.
- b)  $f$  hat in  $x_0 \in G$  ein relatives Maximum (bzw. Minimum), falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in G$  mit  $\|x - x_0\| < \delta$  gilt.
- c) Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen Extremum in  $x_0$ , wenn  $f$  dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.

S 6.6.2 Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $x_0$  ein innerer Punkt von  $G$ , sowie  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$ . Hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Extremum, so gilt  $\nabla f(x_0) = 0$ .

S 6.6.3 Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und für  $x_0 \in G$  gelte  $\nabla f(x_0) = 0$ . Ist dann die Hesse-Matrix  $H_f(x_0)$

- a) *positiv definit*, so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Minimum
- b) *negativ definit*, so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Maximum
- c) *indefinit*, so hat  $f$  in  $x_0$  kein relatives Extremum

## 2.7 Integration in $\mathbb{R}$

### 2.7.1 Definition des bestimmten Integrals

D	6.7.1	<p>Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math>. Eine endliche Menge <math>Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]</math> heißt <b>Zerlegung</b> des Intervalls <math>[a, b]</math>, wenn gilt <math>a = x_0 &lt; x_1 &lt; \dots &lt; x_{n-1} &lt; x_n = b</math>. Für eine solche Zerlegung und eine gegebene beschränkte Funktion <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> setzen wir nun für jedes <math>j = 1, \dots, n</math></p> $I_j := [x_{j-1}, x_j],  I_j  := x_j - x_{j-1}, m_j := \inf f(I_j), M_j := \sup f(I_j)$
D	6.7.2	<p>Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math>, <math>Z = \{x_0, \dots, x_n\}</math> eine Zerlegung von <math>[a, b]</math> und <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> beschränkt. Dann heißt der Wert</p> $\underline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j  I_j  \text{ die } \mathbf{Untersumme \textit{von f zu Z}}$ $\bar{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j  I_j  \text{ die } \mathbf{Obersumme \textit{von f zu Z}}$
B	6.7.2	Es gilt $\underline{s}_f(Z) \leq \bar{s}_f(Z)$
D	6.7.4	<p>Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math> und <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> sei beschränkt. Wir nennen</p> $\int_a^b f(x) dx := \sup \{ \underline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$ <p><b>unteres Integral</b> von <math>f</math> auf <math>[a, b]</math></p> $\int_a^b f(x) dx := \inf \{ \bar{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$ <p><b>oberes Integral</b> von <math>f</math> auf <math>[a, b]</math> <math>f</math> auf <math>[a, b]</math> heißt (Riemann-)integrierbar, wenn</p> $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
B	6.7.4	Flächeninhalte unter der $x$ -Achse zählen negativ.
S	6.7.7	<p>Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math> und integrierbare Funktionen <math>f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen.</p> <p>a) <b>Monotone</b>: Ist <math>f(x) \leq g(x)</math> für alle <math>x \in [a, b]</math>, so ist auch</p> $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ <p>b) <b>Homogenität</b>: Ist <math>\alpha \in \mathbb{R}</math>, so ist auch <math>\alpha f</math> integrierbar und es gilt</p> $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ <p>c) <b>Additivität</b>: Auch die Funktion <math>f + g</math> ist integrierbar und es gilt</p> $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ <p>d) <b>Dreiecksungleichung</b>: Die Funktion <math> f </math> ist ebenfalls integrierbar und es gilt</p> $\left  \int_a^b f(x) dx \right  \leq \int_a^b  f(x)  dx$ <p>e) Ist <math>c \in (a, b)</math> so ist <math>f</math> auch integrierbar auf <math>[a, c]</math> und <math>[c, b]</math> und es gilt</p> $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
S	6.7.8	<p><b>Standardabschätzung</b> Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math> und <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> integrierbar. Dann ist</p> $\left  \int_a^b f(x) dx \right  \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]}  f(x)  = (b - a) \ f\ _\infty$
D	6.7.9	<p>Es seien <math>a, b \in \mathbb{R}</math> mit <math>a &lt; b</math> und <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> sei integrierbar. Dann setzt man für jedes <math>c \in [a, b]</math></p> $\int_c^c f(x) dx := 0 \text{ und } \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$
S	6.7.10	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ . Jede stetige und jede monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

## 2.7.2 Stammfunktionen und der Hauptsatz

D	6.7.13	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt $F$ ist eine <b>Stammfunktion</b> von $f$ , wenn $F$ auf $[a, b]$ differenzierbar ist und $F' = f$ auf $[a, b]$ gilt. (Wenn $F$ Stammfunktion von $f$ ist, dann auch $F + c$ , $c \in \mathbb{R}$ )
S	6.7.15	<b>Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</b> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c \in [a, b]$ , sowie eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen a) Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_c^x f(s)ds$ , $x \in I$ , ist eine Stammfunktion von $f$ . b) Ist $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$ , so gilt $\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(x)ds, \text{ für alle } x \in [a, b].$
B	6.7.15	Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ , so erhält man sofort $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x) _{x=a}^{x=b}$
D	6.7.18	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Besitzt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I$ eine Stammfunktion, so schreibt man für die Menge aller Stammfunktionen auch das sogenannte unbestimmte Integral $\int f(x)dx.$ Dieses bezeichnet eine Menge von Funktionen und keine bestimmte Zahl.
BSP	6.7.18	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$ , $c \in \mathbb{R}$
S	6.7.20	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius größer null. Dann hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ denselben Konvergenzradius und es gilt $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$ innerhalb des Konvergenzbereichs.

## 2.8 Integrationstechniken

S	6.8.1	<b>Partielle Integration</b> Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) _{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx$
B	6.8.1	Gilt auch für unbestimmte Integrale $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
BSP	6.8.3	$\int_0^1 x e^x dx$ $g(x) = x, f'(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x$ Partielle Integration liefert: $\int_0^1 x e^x dx = x e^x _{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x dx = e - (e^x _{x=0}^{x=1}) = e - (e - 1) = 1$ Die Wahl von $f$ und $g$ ist hierbei für den Erfolg sehr entscheidend.
BSP	6.8.3	Erschaffung einer zweiten künstlichen Funktion oft notwendig. $\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}$ Wahl hier: $g(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = 1$
S	6.8.4	<b>Substitutionsregel</b> Es seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, sowie $f \in C([a, b])$ und $g \in C^1([c, d])$ mit $g([c, d]) \subseteq [a, b]$ . Dann ist $\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$
B	6.8.4	Schreibweise für unbestimmte Integrale $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx _{x=g(t)}$ $ _{x=g(t)}$ : Zuerst gesamtes Intervall ausrechnen, dann am Ende überall für $x$ den Wert $g(t)$ einsetzen.

S      6.8.9      **Differenzieren von Parameter-Integralen**

Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  offen mit  $[\alpha, \beta] \times [a, b] \subseteq G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sei (total) differenzierbar, sowie die partielle Ableitung  $\partial_1 f$  stetig. Dann ist die Funktion

$$g(x) := \int_a^b f(x, y) dy, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \int_a^b \partial_1 f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

---

### 3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

#### 3.1 Problemstellung und Motivation

BSP	7.1.1	Wachstumsmodell: Zuwachs proportional dazu, wie groß die Population schon ist $y(t)$ Populationsgröße zum Zeitpunkt $t \geq 0$ : $y'(t) = \mu y(t)$ , $t \geq 0$ $\mu$ Proportionalitätskonstante (hier Wachstumsrate)
D	7.1.2	Es sei $n \in \mathbb{N}$ , $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt die Gleichung $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ , $t \in I$ <b>gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung <math>n</math></b> (Hängt $F$ nicht von der ersten Variable $t$ ab, so nennt man die DGL <b>autonom</b> )
B		Differentialgleichung: Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung bekannt
BSP	7.1.2	Beispiele für DGL: a) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t)$ mit $n = 2$ und $F(t, y(t), y'(t)) = \sin(t) - 2y'(t) - y(t)$ b) $y'(t) = t^2 + 1$ mit $n = 1$ und $F(t, y(t)) = t^2 + 1$
B	7.1.4	Fall von DGL der Ordnung $n$ immer auf Fall erster Ordnung ( $n = 1$ ) zurückspielbar. Also zuerst nur Gleichungen mit $n = 1$ der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ , $t \in I$ $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktion und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion.
B	7.1.4	Autonome DGL erster Ordnung: $y'(t) = f(y(t))$ , $t \in I$
B	7.1.4	Stetig differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die DGL erfüllt: <b>Lösung der DGL</b>
B	7.1.6	DGLs im Allgemeinen mehrere Lösungen Anzahl der frei wählbaren Konstanten entspricht meist der Ordnung der Gleichung
D	7.1.9	Es seien $n \in \mathbb{N}$ , $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ , $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sowie $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ . a) Dann heißt $(AWP) \begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I \\ y^{(j)}(t_0) = y_j, & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$ ein <b>Anfangswertproblem</b> mit Anfangswerten $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ b) Jede Funktion $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ , die <ul style="list-style-type: none"> <li>auf einem offenen Intervall <math>J \subseteq I</math> mit <math>t_0 \in J</math> definiert ist</li> <li>auf <math>J</math> <math>n</math>-mal stetig differenzierbar ist und</li> <li>die <math>n + 1</math> Gleichungen in (AWP) erfüllt</li> </ul> heißt <b>Lösung</b> des Anfangswertproblems. c) Ist die Lösung sogar auf dem ganzen Intervall $I$ eine Lösung der Gleichung so nennt man sie eine <b>globale Lösung</b> .

#### 3.2 Elementare Lösungstechniken

##### 3.2.1 Getrennte Veränderliche

S	7.2.2	<b>Trennung der Variablen</b> Auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei mit stetigen Funktionen $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(t) = g(t)h(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ gegeben. Ist $h(y_0) \neq 0$ , so existiert ein offenes Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ , auf dem das Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt. Diese ist gegeben durch $y = H^{-1} \circ G$ mit $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$ und $H(y) := \int_{y_0}^y \frac{h}{h(\eta)} d\eta$
B	7.2.2	Verwendung dieser Methode, falls eine DGL der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ zu lösen ist, bei der die rechte Seite $f$ von der Form $f(t, y) = g(t)h(y)$ ist. (Abhängigkeit zwischen $t$ und $y$ multiplikativ getrennt)

### 3.2.2 Homogene Differentialgleichungen

B	Homogene DGL: Rechte Seite hängt nur vom Quotienten $\frac{y}{t}$ ab, es existiert also eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als $y'(t) = f(t, y(t)) = g(\frac{y(t)}{t})$ geschrieben werden kann. Diese können durch Substitution gelöst werden, wir setzen $u(t) := \frac{y(t)}{t}$ . Nun schauen wir welche Gleichung von $u$ gelöst wird, wenn $y$ Lösung der Ausgangsgleichung ist. $u'(t) = \frac{ty'(t) - y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}(g(\frac{y(t)}{t}) - u(t)) = \frac{1}{t}(g(u(t)) - u(t))$ Dieses $u$ erfüllt Gleichung die nach Methode der getrennten Veränderlichen gelöst werden kann.
BSP	7.2.4 Anfangswertproblem: $\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y(t)^2}, t \in \mathbb{R} \\ y(1) = 1. \end{cases}$ Die obige Substitution $u(t) = y(t)/t$ liefert hier: $u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}(u(t) - \frac{1}{u(t)^2} - u(t)) = -\frac{1}{t} \frac{1}{u(t)^2}$ Durch Methode der getrennten Veränderlichen finden wir: $u^2 du = -\frac{1}{t} dt, \text{ also } \int u^2 du = -\int \frac{1}{t} dt$ Das liefert nach Integration $\frac{u^3}{3} = -\ln(t) + c, \text{ d.h. } u(t) = \sqrt[3]{-3\ln(t) + 3c}$ was schließlich zu $y(t) = tu(t) = t \sqrt[3]{-3\ln(t) + 3c}$ führt. Mit dem Anfangswert bekommen wir wegen $1 = y(1) = \sqrt[3]{3c} \Rightarrow 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$ die Lösung $y(t) = t \sqrt[3]{1 - 3\ln(t)}$ die man leicht in einer Probe verifiziert.

### 3.2.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

D	7.2.5 Eine lineare DGL erster Ordnung hat die allgemeine Form $y'(t) + a(t)y(t) = b(t), t \in I$ wobei $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I$ sind. Ist $b = 0$ , so nennt man die Gleichung homogen, sonst inhomogen.
S	7.2.6 <b>Superpositionsprinzip</b> Es seien $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen der homogenen linearen Gleichung $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ . Dann ist auch jede Linearkombination $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Gleichung.
S	7.2.8 <b>Variation der Konstanten-Formel</b> Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C(I)$ und $t_0 \in I$ , sowie $y_0 \in \mathbb{R}$ . Das lineare Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ besitzt genau eine globale Lösung, die durch $y(t) = e^{-A(t)}y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)}ds \text{ mit } A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ gegeben ist.

### 3.3 Systeme von Differentialgleichungen

#### 3.3.1 Lineare Systeme

D	7.3.1	<p>E seien <math>I \subseteq \mathbb{R}</math> ein Intervall, <math>N \in \mathbb{N}^*</math> und für jede Wahl von <math>j, k \in \{1, 2, \dots, N\}</math> stetige Funktionen <math>a_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}</math>, sowie <math>b_j : I \rightarrow \mathbb{R}</math> gegeben.</p> <p>a) Dann heißt</p> $\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1N}(t)y_N(t) + b_1(t) \\ \dots \\ y_N'(t) = a_{N1}(t)y_1(t) + a_{N2}(t)y_2(t) + \dots + a_{NN}(t)y_N(t) + b_N(t) \end{cases} \quad t \in I, \text{ ein System}$ <p><b>von linearen gewöhnlichen DGL erster Ordnung.</b></p> <p>b) Das dazugehörige Anfangswertproblem ergibt sich, indem für ein <math>t_0 \in I</math> und vorgegebene <math>y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{N,0} \in \mathbb{R}</math> noch</p> $y_1(t_0) = y_{1,0}, y_2(t_0) = y_{2,0}, \dots, y_N(t_0) = y_{N,0}$ <p>gefordert wird.</p> <p>c) Ist <math>b = 0</math>, so heißt das System homogen, sonst inhomogen.</p>
B	7.3.1	Das Ganze lässt sich in Matrixschreibweise um Einiges übersichtlicher schreiben.
S	7.3.3	Die Menge $L$ aller Lösungen der Gleichung (7.2) ist ein $N$ -dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ .
D	7.3.4	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ stetig. Jede Basis des Lösungsraums aller Lösungen von Gleichung (7.2) nennt man ein Fundamentalsystem dieser Gleichung.
S	7.3.5	<p>Es seien <math>y_1, y_2, \dots, y_N \in C^1(I; \mathbb{R}^N)</math> Lösungen der Gleichung (7.2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:</p> <p>i) <math>y_1, y_2, \dots, y_N</math> sind linear unabhängig in <math>C^1(I; \mathbb{R}^N)</math>, d.h. <math>\{y_1, y_2, \dots, y_N\}</math> ist ein Fundamentalsystem der Gleichung.</p> <p>ii) Für alle <math>t \in I</math> ist die Menge <math>\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)\}</math> linear unabhängig in <math>\mathbb{R}^N</math>.</p> <p>iii) Es gibt ein <math>t \in I</math>, für das die Menge <math>\{y_1, y_2, \dots, y_N\}</math> linear unabhängig in <math>\mathbb{R}^N</math> ist.</p>
S	7.3.6	<p>Es seien <math>I \subseteq \mathbb{R}</math> ein Intervall, sowie <math>A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}</math> und <math>b : I \rightarrow \mathbb{R}^N</math> stetige Funktionen. Ist <math>y_p : I \rightarrow \mathbb{R}^N</math> eine Lösung der Gleichung (7.3), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch <math>y = y_p + y_h</math>, wobei <math>y_h</math> eine Lösung des zugehörigen Systems (7.2) ist.</p>

#### 3.3.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

D	7.3.8	<p>Es sei <math>A \in \mathbb{R}^{N \times N}</math>. Dann heißt</p> $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ <p>die <b>Matrix-Exponentialfunktion</b> von <math>A</math>. (Reihe ist für jede Matrix konvergent)</p>
B		<p>Konstante Koeffizienten: <math>y'(t) = Ay(t) + b(t)</math>, <math>t \in I</math> Funktion <math>A</math> ist in der DGL konstant durch eine feste Matrix gegeben.</p>
S	7.3.10	<p>Es seien <math>A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}</math>. Dann gelten die folgenden Aussagen über die Matrix-Exponentialfunktion:</p> <p>a) Für die Nullmatrix <math>O</math> gilt <math>e^O = I</math>.</p> <p>b) Kommutieren <math>A</math> und <math>B</math>, d.h. gilt <math>AB = BA</math>, so ist <math>e^A e^B = e^{A+B}</math></p> <p>c) Die Matrix <math>e^A</math> ist invertierbar mit <math>(e^A)^{-1} = e^{-A}</math>.</p> <p>d) Ist <math>A</math> eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen <math>\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N</math>, so ist <math>e^A</math> ebenfalls eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen <math>e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_N}</math>.</p>
S	7.3.11	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dann bilden die Spalten der Matrix $e^{tA}$ , $t \in I$ , ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$ , $t \in I$ .
B	7.3.12	<p>Leitet man die gesamte Matrix <math>e^{tA}</math> komponentenweise nach <math>t</math> ab, so bedeutet obiger Satz die eingängige Matrixgleichheit</p> $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

S 7.3.14 Es sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  und zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, v_2, \dots, v_N$ . Dann ist

$$\{e^{t\lambda_1}v_1, e^{t\lambda_2}v_2, \dots, e^{t\lambda_N}v_N\}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung  $y'(t) = Ay(t)$ .

S 7.3.15 Sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , Dann kann man ein Fundamentalsystem für  $y'(t) = Ay(t)$  folgendermaßen konstruieren. Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ , d.h.  $\det(A - \lambda I) = 0$ , und  $m$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$ . Dann hat  $(A - \lambda I)^m$  einen  $m$ -dimensionalen Kern. Sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis dieses Kerns. Sei

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{t\lambda} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k v_j$$

für  $j = 1, \dots, m$ .

Wenn  $\lambda$  reell ist, dann sind  $u_1, \dots, u_m$  die Beiträge von  $\lambda$  zum Fundamentalsystem.

Wenn  $\lambda$  komplex ist und  $\operatorname{Im}\lambda > 0$ , dann sind  $\operatorname{Re}u_1, \operatorname{Im}u_1, \dots, \operatorname{Re}u_m, \operatorname{Im}u_m$  die Beiträge von  $\lambda$  zum Fundamentalsystem, wobei der konjugierte Eigenwert  $\bar{\lambda}$  keinen Beitrag liefert.

S 7.3.16 **Variation der Konstanten-Formel**  
Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  eine Matrix und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetige Funktion, sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^N$ . Dann hat das lineare Anfangswertproblem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

die eindeutige globale Lösung

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

### 3.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

S 7.4.1 Es seien  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann eine Lösung der DGL in (7.6), wenn  $v = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Systems  $v'(t) = G(t, v(t))$  mit

$$G(t, v(t)) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \dots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix}$$

ist.

S 7.4.2 Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen

- Ist  $g = 0$ , so ist die Menge aller Lösungen der Gleichung ein Untervektorraum der Dimension  $n$  von  $C^n(I)$ .
- Ist  $y_p$  eine Lösung der Gleichung (7.8), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch  $y = y_p + y_h$ , wobei  $y_h$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (d.h. mit  $g = 0$ ) ist.

D 7.4.3

- Jede Basis des Raums aller Lösungen in Satz 7.4.2 a) nennt man ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.
- Die Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung im Satz 7.4.2 b) heißt spezielle Lösung oder auch **Partikulärlösung der Gleichung (7.8)**.

D 7.4.5 Es sei

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

eine homogene lineare DGL der Ordnung  $n$  mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$$

**charakteristisches Polynom der DGL**.



- S 7.4.6 Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $n \geq 2$ . Mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  sei die DGL
- $$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0, t \in I$$
- gegeben und es seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  paarweise verschiedene Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms mit  $\operatorname{Im}(\lambda_i) \geq 0$ , sowie  $m_j$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_j$  für  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .  
Dann ist ein Fundamentalsystem für obige Gleichung gegeben durch
- $$F = F_1 \cup \dots \cup F_k,$$
- wobei  $F_j$  im Falle  $\lambda_j = \lambda \in \mathbb{R}$  als
- $$\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t}\}$$
- und im Falle  $\lambda_j = \lambda + i\omega$  mit  $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega > 0$  als
- $$\{e^{\lambda t}\cos(\omega t), e^{\lambda t}\sin(\omega t), te^{\lambda t}\cos(\omega t), te^{\lambda t}\sin(\omega t), \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t}\cos(\omega t), t^{m_j-1}e^{\lambda t}\sin(\omega t)\}$$
- definiert ist.
- 

### 3.5 Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

---

- S 7.5.1 **Satz von Peano**  
Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann hat für jedes  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das Anfangswertproblem
- $$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$
- eine Lösung, d.h. es gibt ein offenes Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  und eine Funktion  $y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ , die das Anfangswertproblem auf  $J$  löst.
- 
- S 7.5.3 **Satz von Picard-Lindelöf**  
Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Genügt dann  $f$  einer Lipschitzbedingung, d.h. existiert ein  $L > 0$  mit
- $$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \text{ für alle } t \in I \text{ und } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$$
- dann existiert ein kompaktes Intervall  $J$  mit  $t_0 \in J \subseteq I$ , sodass das Anfangswertproblem
- $$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$
- eindeutig lösbar ist.
-