AUD Klausurblatt SoSe 2020 | Janson/Fischlin

J. Milkovits

Last Edited: 24. August 2020

Empfehlung: Titelblatt dient nur zur Übersicht, für Klausur lieber Post-Its!

Inhaltsverzeichnis

AUD Klausurblatt SoSe 2020 | Janson/Fischlin

1 Definitionen/Wissen

1.1 Master-Theorem

- *Anwendbar?*
  - $a \geq 1$ und konstant?
  - $b > 1$ und konstant?
  - $f(n)$ positiv?
- *Vorgehen*
  - Berechnung von $log_b(a)$
  - Vergleich mit $f(n)$
    - $f(n)$ **polynomial kleiner** als $n^{log_b(a)}$ $(f(n) = O(n^{log_b(a-\epsilon)}),\ \epsilon > 0)$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$
    - $f(n)$ und $n^{log_b(a)}$ **gleiche Größe** $(f(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{log_b(a)} lg(n))$
    - $f(n)$ **polynomial größer** als $n^{log_b(a)}$ und $af(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n),\ (\epsilon < 1)$ $(f(n) = \Omega(n^{log_b(a+\epsilon)}),\ \epsilon > 0)$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

1.2 Asymptotik

- $\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = o(g(n))$
- $\frac{f(n)}{g(n)} : konvergent \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- $o(n) \in O(n) \Rightarrow$ schließt alle anderen aus
- $f(n) = g(n) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

1.3 Sortier-Algorithmen in einem Satz

- *InsertionSort*: Sortierthalten der linken Teilfolge, neuen Wert an richtige Position einfügen
- *BubbleSort*: Vergleiche Paare von benachbarten Schlüsselwerten
- *SelectionSort*: Wähle kleinstes Element und tausche es nach vorne
- *MergeSort*: Teilen, sortiertes Zurückschreiben in Array
- *QuickSort*: Vergleich der Werte mithilfe PivotElement, rekursiver Aufruf auf Teilarray

1.4 Bäume in einem Satz

- *BinarySearchTree*: Suchbaum mit Ordnung auf Werten (kleinere Werte links, größere rechts)
- *RedBlackTree*: BST mit Zusatzeigenschaften (Rot/Schwarz, Root: Schwarz, Nicht-Rot-Rot, Schwarzhöhe)
- *AVL*: BST, Teilbäume müssen jedoch balanciert sein (Unbalance maximal -1, 1)
- *Splay*: BST, selbst organisierende Liste (angefragte/neue Werte werden nach oben gespült)
- *Max-Heaps*: Kein BST, vollständig gefüllt (links -> rechts), Maximum in Wurzel, Parent > Child
- *B-Trees*: Kein BST, angegebener Grad, der die Fülle jedes Knotens bestimmt, Ordnung zwischen Knoten

1.5 Advanced Designs

1.5.1 Dynamische Programmierung

- Anwendung, wenn Teilprobleme sich überlappen
- bereits gelöste Teilprobleme werden gespeichert und bei Bedarf nachgeschlagen
- Laufzeit-Speicher-Tradeoff
- Memoisation: Wert der Berechung speichern, um obiges zu verhindern
- Bottom-Up: Löst immer zuerst die kleinen Teilprobleme und arbeitet sich von unten nach oben
- Top-Down: Arbeitet sich von großen zu kleinen Problemen

1.5.2 Greedy-Algorithmus

- Trifft stets die Entscheidung, die im Moment am besten erscheint
- lokale Optimierung in der Hoffnung auf globale Optimierung
- Aktivitätenauswahl mit Greedy:
  - Wahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Resourcen)
  - Ab dort rekursiv weiter

1.5.3 Backtracking

- Lösen via Trial and Error / Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
- Falls Teillösung inkorrekt → Schritt zurück und andere Möglichkeit
- Voraussetzung: Komponentenlösung / Mehrere Wahlmöglichkeiten / Teillösung verifizierbar

1.5.4 Optimierungsproblem - Metaheuristiken

- Finden einer Lösung und Überprüfen dieser
- Danach versuche eine bessere Lösung (Finde globales Maxima) in der Nachbarschaft zu finden
- *Zufällige Suche*
  - Falls zufällige Lösung besseren Wert als aktuelle Lösung hat, übernimm Lösung und wiederhole dies
  + **kann** im globalen Optimum terminieren
  - potentiell lange Laufzeit
- *Bergsteigeralgorithmus*
  - Iterative Verbesserungstechnik
  - Auswahl einer neuen zufälligen Lösung aus Nachbarschaft
  - Falls diese besser ist wird sie übernommen → wiederholen
  + einfach anzuwenden
  - terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
- *Iterative lokale Suche*
  - Sucht Lösungen nur in einem bestimmten Bereich mit Bergsteigeralgorithmus
  - Springt aber dann weiter weg (aus Nachbarschaft raus) um anderes Optimum zu finden

- *Simulated Annealing*
  - Wie Bergsteigeralgorithmus, wählt aber mit gewisser Wahrscheinlichkeit auch schlechtere Lösungen
  - Auch mit Tabu-List (speichert bereits verwendete Lösungen) umsetzbar
- *Evolutionary*
  - Hier wird eine Stichprobe von möglichen Lösungen betrachtet (populationsbasiert)
  - Generiert zufällige Populationen, beurteilt die Qualität jedes Individuums
  - Löscht dann die schlechtesten Individuuen und ersetzt diese durch neue

1.5.5 Amortisierte Analyse

- Genauere Abschätzung des Worst-Case von Algorithmen
- Wie? Nicht alle Operationen sind gleichteuer → genauere Abschätzung

  (z.B. abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur)

  ⇒ Ermittlung der mittleren Perfomanz jeder Operation im Worst-Case
- *Aggregat-Methode*: Aufsummation der tatsächlich anfallenden Kosten aller Operationen
- *Account-Methode*: Besteuerung und Zuweisung höherer Kosten an Operationen, Guthabenmodell
- *Potential-Methode*: Betrachtung des Einflusses auf die Datenstruktur durch Operationen

1.6 NP

- Sind alle Probleme in polynomieller Zeit lösbar? ($O(n^k)$)

  ⇒ Nein, manche nur in superpolynomieller Zeit lösbar (k^n)
- P:
  - Klasse aller Polynomialzeitprobleme (in polynomieller Zeit lösbar)
  - Betrachtung von Optimierungsprobleme → bestimmter Wert
  - Optimierungsprobleme oft in Entscheidungsprobleme umwandelbar (Schranke für Ergebnis)
  - $P \subseteq NP$
- NP:
  - Alle Probleme, der Lösung in Polynomialzeit **verifizierbar** ist
  - Betrachtung von Entscheiduzngsprobleme → Ja/Nein
  - Für viele wichtige Probleme unbekannt, ob sie in P (effizient) lösbar sind
  - *NP-Schwer*: Vergleich mit anderen NP-Problemen (mindestens genauso schwierig)
  - *NP-Vollständig*: Sowohl NP-schwer als auch in NP

1.7 String-Matching

1.7.1 Allgemein

- durchsuchender Text: Array `T` der Länge `lenTxt`
- Textmuster: Array `P` der Länge `lenPat` $\leq$ `lenTxt`
- Gesucht: alle gültigen Verschiebungen mit denen `P` in `T` auftaucht
- Rückgabe: alle `sft` $\in \mathbb{N}$, sodass `T[sft,...,sft+lenPat-1] = P` gilt

1.7.2 NaiveStringMatching

Pseudocode:

NaiveStringMatching(T,P)

```
1  lenTxt = length(T)
2  lenPat = length(P)
3  L = empty
4  FOR sft = 0 TO lenTxt - lenPat DO
5      isValid = TRUE
6      FOR j = 0 TO lenPat - 1 DO
7          IF P[j] ≠ T[sft+j] THEN
8              isValid = FALSE
9      IF isValid THEN
10         L = append(L, sft)
11 RETURN L
```

Beispiel: `T=[h,e,h,e,h,h,h,e,y,h]`, `P=[h,e,h]`

sft	$T[sft, \ldots, sft + lenPat - 1] \stackrel{?}{=} P$	L
0	**true**	[0]
1	**false**	[0]
2	**true**	[0, 2]
3	**false**	[0, 2]
4	**false**	[0, 2]
5	**false**	[0, 2]
6	**false**	[0, 2]
7	**false**	[0, 2]

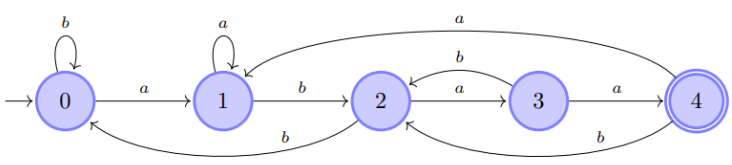
1.7.3 FiniteAutomationMatching

Pseudocode:

FiniteAutomationMatching(T, δ, lenPat)

```
1  lenTxt = length(T)
2  L = empty
3  st = 0
4  FOR sft = 0 TO lenTxt - 1 DO
5      st = δ(st, T[sft])
6      IF st = lenPat THEN
7          L = append(L, sft - lenPat + 1)
8  RETURN L
```

Beispiel: Σ = {a,b}, `P = [a,b,a,a]`, `T = [a,a,b,a,b,a,a,b,a,a]`



sft	$T[sft]$	*st*	L
0	a	1	[]
1	a	1	[]
2	b	2	[]
3	a	3	[]
4	b	2	[]
5	a	3	[]
6	a	4	[3]
7	b	2	[3]
8	a	3	[3]
9	a	4	[3, 6]

1.7.4 Rabin-Karp-Algorithmus

Pseudocode:

RobinKarpMatch(T,P,q)

```
1  n = T.length
2  m = P.length
3  h = 10^(m−1) (mod q)
4  p = 0, t_0 = 0, L = empty
5  FOR i = 0 TO m-1 DO
6      p = (10p + P[i]) (mod q)
7      t_0 = (10t_0 + T[i]) (mod q)
8  FOR s = 0 TO n - m DO
9      IF p == t_s THEN
10         b = TRUE
11         FOR j = 0 TO m - 1 DO
12             IF P[j] ≠ T[s+j] THEN
13                 b = FALSE
14                 BREAK
15         IF b THEN
16             L.add(s)
17     IF s < n - m THEN
18     t_{s+1} = (10(t_s - T[s]h) + T[s+m]) (mod q)
19 RETURN L
```

Beispiel: `P = [7,3,4]`, `T = [6,9,1,7,3,4,5,0,9,4,6,2,4,8,7,3,4]`, `q = 13`, Ergebnis `L = [3,14]`

s	$t_s \pmod q$	$t_s == p \pmod q$	$T[s,\ldots,s+m-1] == P$	Treffer?
0	2	false		
1	7	false		
2	4	false		
3	6	**true**	**true**	Ja
4	7	false		
5	8	false		
6	2	false		
7	3	false		
8	10	false		
9	7	false		
10	0	false		
11	1	false		
12	6	**true**	false	Unecht
13	2	false		
14	6	**true**	**true**	Ja

1.8 Queue mithilfe von zwei Stacks

enqueue pusht auf den ersten Stack.
dequeue wird als $pop(S_2)$ definiert.
Falls der zweite Stack leer ist werden alle Elemente aus S_1 geholt und in S_2 überführt.
Dann wird das erste Element von S_2 ausgegeben.

new(Q)
11: $S_1 = \text{new}(S_1)$
12: $S_2 = \text{new}(S_2)$
13: $Q = [S_1, S_2]$
14: **return** Q

isEmpty(Q)
21: **parse** $Q = [S_1, S_2]$
22: $b_1 = \text{isEmpty}(S_1)$
23: $b_2 = \text{isEmpty}(S_2)$
24: **return** $b_1 \wedge b_2$

enqueue(Q, x)
31: **parse** $Q = [S_1, S_2]$
32: push(S_1, x)

dequeue(Q)
41: **parse** $Q = [S_1, S_2]$
42: **if** isEmpty(Q) **then**
43: **return** Error
44: **if** isEmpty(S_2) **then**
45: **while** ¬isEmpty(S_1) **do**
46: push(S_2, pop(S_1))
47: **return** pop(S_2)

1.9 Stack mithilfe von zwei Queues

Eine der beiden Queues bleibt immer leer (anfangs Q_2)
push fügt Wert immer der leeren Queue hinzu.
pop holt alle Elemente bis auf das letzte aus der Queue zurück und fügt sie in die leere ein.
Das letzte Element wird dann ausgegeben.

new(S)

```
11: Q_1 = new(Q_1)
12: Q_2 = new(Q_2)
13: S = [Q_1, Q_2]
14: return S
```

isEmpty(S)

```
21: parse S = [Q_1, Q_2]
22: b_1 = isEmpty(Q_1)
23: b_2 = isEmpty(Q_2)
24: return b_1 ∧ b_2
```

push(S, x)

```
31: parse S = [Q_1, Q_2]
32: if isEmpty(Q_1) then
33:     enqueue(Q_2, x)
34: else
35:     enqueue(Q_1, x)
```

pop(S)

```
41: parse S = [Q_1, Q_2]
42: if isEmpty(S) then
43:     return Error
44: if isEmpty(Q_2) then
45:     t = dequeue(Q_1)
46:     while ¬isEmpty(Q_1) do
47:         enqueue(Q_2, t)
48:         t = dequeue(Q_1)
49: else
50:     t = dequeue(Q_2)
51:     while ¬isEmpty(Q_2) do
52:         enqueue(Q_1, t)
53:         t = dequeue(Q_2)
54: return t
```

1.10 Graphen - Adjazenzmatrix/-liste

Umformung Liste → Matrix

listToMatrix(L)

```
1  nNodes = length(L)
2  M = newMatrix(nNodes, nNodes, 0)
3  FOR i = 0 to nNodes - 1 DO
4      node = L[i]
5      WHILE node ≠ nil DO
6          j = node.key
7          M[i,j] = 1
8          node = node.next
9  RETURN M
```

Umformung Matrix → Liste

matrixToList(M)

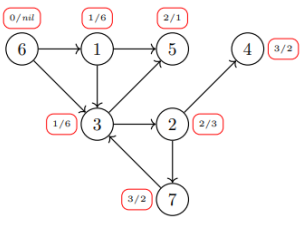
```
1  nNodes = rows(M)
2  L = newArray(nNodes)
3  FOR i = 0 to nNodes - 1 DO
4      L[i] = newList()
5      FOR j = 0 TO nNodes - 1 DO
6          IF M[i,j] = 1 THEN
7              insert(L[i],j)
8  RETURN L
```

1.11 Graphenalgorithmen

1.11.1 Breadth-First-Search

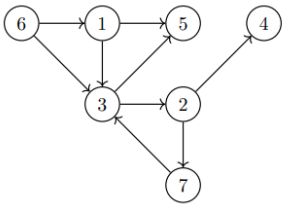
- Besuche zuerst alle unmittelbaren Nachbarn, dann deren Nachbarn, usw.
- Funktionsweise:
  - setzt alle Knoten auf Weiß und Distanz auf $+\infty$
  - Startknoten grau, Distanz grau, Vorgänger nil
  - Fügt alle Nachbarn einer Queue hinzu die weiß sind und passt deren Distanz an (dist+1)
  - Setzt Knoten auf Schwarz, wenn alle Nachbarn hinzugefügt und holt sich neuen Knoten aus Queue

Iteration	u	v	Q
0	–	□	[6]
1	6	1, 3	[1, 3]
2	1	5	[3, 5]
3	3	2	[5, 2]
4	5	□	[2]
5	2	4, 7	[4, 7]
6	4	□	[7]
7	7	□	[]



1.11.2 Depth-First-Search

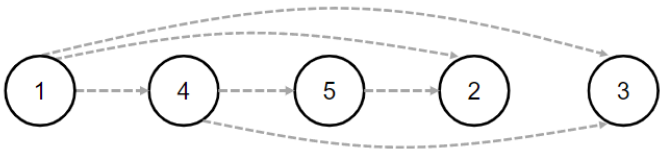
- Besuche zuerst alle noch nicht besuchten Nachfolgeknoten
- "Laufe so weit wie möglich weg vom aktuellen Knoten"
- *Funktionsweise DFS (Initialaufruf):*
  - Setzt alle Knoten auf Weiß, Vorgänger auf nil, time auf 0
  - Ruft innerhalb einer for-Schleife auf jedem Knoten DFS-VISIT auf
- *Funktionsweise DFS-Visit:*
  - Wird min. einmal auf jedem Knoten aufgerufen
  - Erhöht zuallererst time um 1
  - setzt discovery time der Node auf time und Farbe auf grau
  - Ruft innerhalb For-Schleife für jeden weißen Nachbarn DFS-Visit auf
  - Falls die rekursive For-Schleife abgeschlossen ist -> Node Schwarz / time + 1
  - Abspeichern der finish-Zeit (u.finish = time)



Knoten	Entdeckungszeit	Abschlusszeit	Vorgängerknoten
1	1	12	*nil*
2	3	8	3
3	2	11	1
4	4	5	2
5	9	10	3
6	13	14	*nil*
7	6	7	2

- *Anwendungen DFS:* `Topo-Sort`
  - nur für directed acyclic graphs
  - Kanten zeigen immer nur nach rechts
  - (alternativ: führe DFS aus und schreibe Werte auf - starte bei höchster finish time)

```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
1 newLinkedList(L)
2 run DFS(G) but, each time a node is finished, insert in front of L
3 RETURN L.head
```



- *Starke Zusammenhangskomponenten*
  - SCCs sind nur in eine Richtung verbunden und verschiedene sind disjunkt
  - Algorithmus lässt einmal DFS laufen und dann nochmal auf dem transponierten Graphen
  - DFS auf transponierten Graphen aber in abnehmender finish-time des ersten Graphen (Transponierter Graph: Umdrehen der Kantenrichtungen)
  - Ausgabe jedes DFS-Baumes als ein SCC (Verwendung des Outputs transponierten Graphens)

1.12 Path-Finding Algorithmen

1.12.1 Dijkstra

- Voraussetzung: keine negativen Kantengewichte
- Alle Knoten erhalten Distanz ∞ und Predecessor nil
- Startknoten erhält Distanz 0
- Füge alle Knoten in Queue ein
- Extrahiere in jedem Schritt den Knoten mit kleinster Distanz bis Queue leer
- Relaxe jeden Nachbarknoten des momentan extrahierten Knotens

1.12.2 Bellmann-Ford

- Kantengewichte dürfen negativ sein
- Setzt alle Distanzen auf unendlich und Startknotendistanz auf 0
- $n-1$-maliges Durchlaufen aller Kanten und relaxen dieser
- Am Ende überprüfen, ob negativer Zyklus vorhanden ist

1.12.3 Johnson

- Kantengewichte dürfen auch negativ sein
- Verwendet Bellmann-Ford um negative Kantengewichte zu eliminieren
- Verwendet dann Dijkstra auf dem veränderten Graphen
- Genauer Ablauf:
  - Fügt neue Node hinzu, die 0-Gewichts-Verbindungen zu allen anderen Nodes hat
  - Ausführen von Bellmann-Ford auf der neuen Node
  - Neu Gewichtung aller Kanten
  - Entfernen der neuen Node und ausführen von Dijkstra

1.12.4 Floyd-Warshall

- Kantengewichte dürfen auch negativ sein
- Erstellung einer Gewichtsmatrix mit allen Knoten (Eintragen der direkten Distanzen)
- Durchläuft alle Knoten k-mal, verbessert direkte Pfadwerte über Pfade über andere Knoten
- Zweite Matrix benötigt, die Vorgänger speichert, um kürzeste Pfade auszugeben

1.13 Minimale Spannbäume

1.13.1 Kruskal

- jeder Knoten wird in einer Menge mit nur sich selbst gespeichert
- Durchläuft KANTEN in nichtfallender Reihenfolge (nach Gewicht)
- Überprüft, ob die jeweiligen Mengen dieselben sind, falls nicht werden sie verschmolzen
- Sobald nur eine Komponente übrigbleibt, ist der minimale Spannbaum gefunden

1.13.2 Prim

- Setzt alle Keys auf $+\infty$ und Vorgänger auf nil
- Übergebener Knoten erhält Key $-\infty$
- Hinzufügen aller Knoten zu einer Queue
- Entfernt Minimum aus Queue bis Queue leer ist in While-Schleife
- Speichert für jeden Nachbarknoten minimales Gewicht und Vorgänger
- Im Key wird nur das Kantengewicht gespeichert, keine Additionen dieser
- Bereits bearbeitete Knoten (hinzugefügt) werden nicht mehr aktualisiert

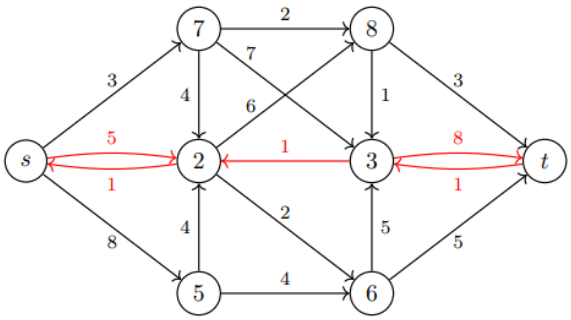
1.14 Netzwerkflüsse - Ford-Fulkerson

1.14.1 Restkapazitätsgraph

- Wird für Ford-Fulkerson benötigt
- Betrachte ALLE Kombinationen an Knoten
- Trage möglichen Zufluss in Richtung des Zielknotens ein
- Trage möglichen Abfluss in Richtung des Startknotens ein
- Beispiel:
  - Normaler Graph: a $\rightarrow$ b: 3/5
  - Restkapazitätsgraph: a $\rightarrow$ b: 2 (möglicher Zufluss) | b $\rightarrow$ a: 3 (möglicher Abfluss)

1.14.2 Ford-Fulkerson

- Wähle Pfad mithilfe von DFS / BFS
- Erhöhe alle Flüsse um "bottleneck"-Wert (niedrigsten möglichen Wert auf Pfad)
- Führe dies durch, bis kein Fluss mehr möglich

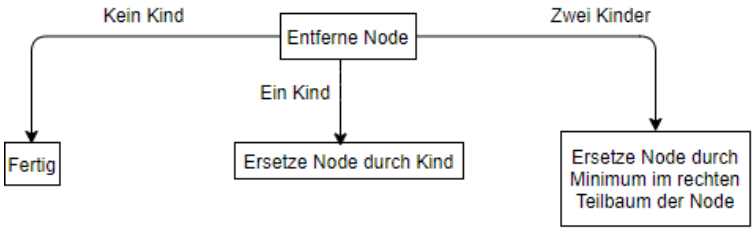


(a) Hinzugefügter Pfad: $(s, 2, 3, t)$. Hinzugefügter Wert: 1.

2 Baumoperationen

2.1 BST

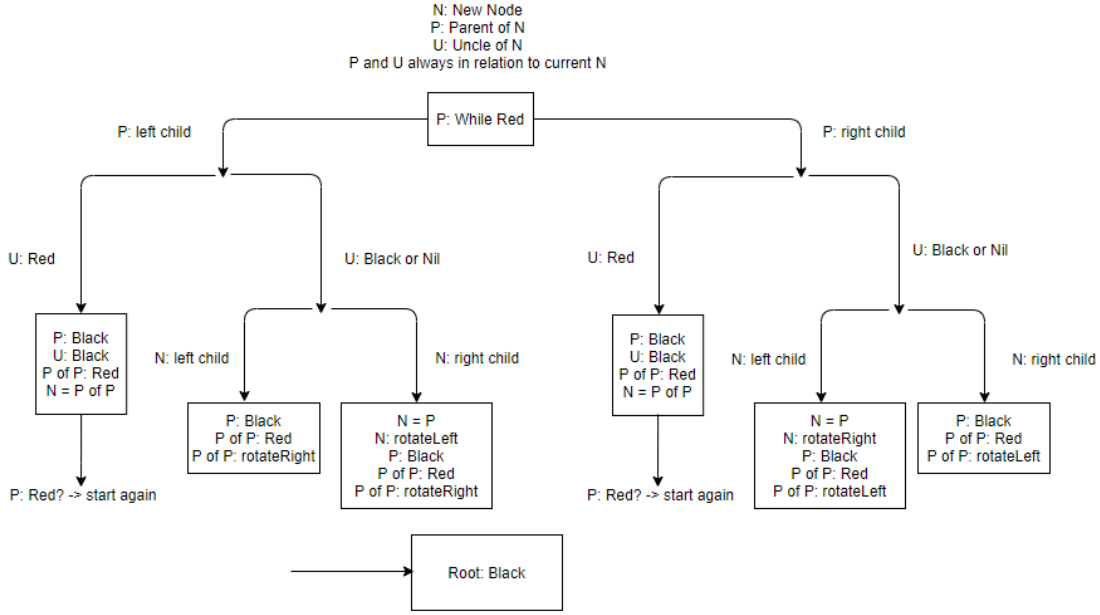
Löschen



2.2 RBT

Insert

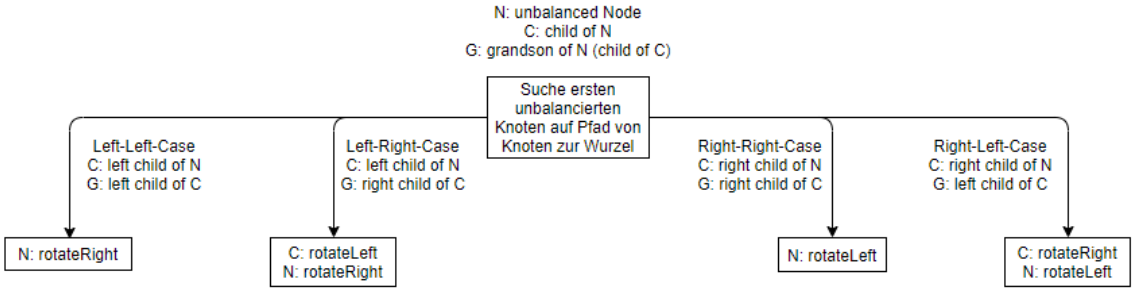
Wie im BST, neuen Knoten rot färben, danach FixUp:



2.3 AVL-Bäume

Einfügen/Löschen

Einfügen und Löschen wie beim BST, danach jeweils Rebalancieren:



Beachte beim Löschen:

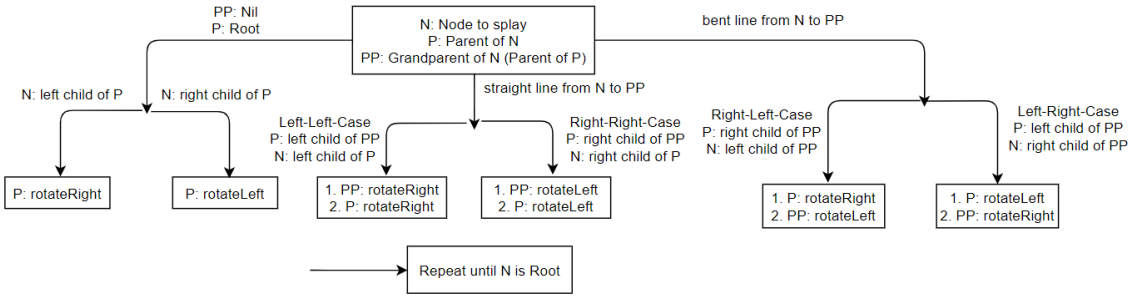
- Wahl von C: größter Teilbaum von N (eindeutig, da N unbalanciert)
- Wahl von G: größter Teilbaum von C (nicht eindeutig, Wahl Rechts-Rechts/Links-Links)
- **Potenziell** müssen mehrere Knoten bearbeitet werden ⇒ alle Knoten bis Wurzel prüfen

2.4 Splay-Bäume

- Suchen: Spüle gesuchten Knoten an die Wurzel (alternativ zuletzt besuchten Knoten)
- Einfügen: Einfügen nach BST-Regeln und danach Hochspülen des Knotens
- Löschen:

  1. zu löschenden Knoten hochspülen
  2. Knoten löschen
     - Falls nur ein Kind: Dieses Kind neue Wurzel und fertig
     - Falls zwei Kinder: Spüle größten Knoten im linken Teilbaum hoch
       Hänge danach beide Teilbäume an diesen Knoten

2.4.1 Spülen

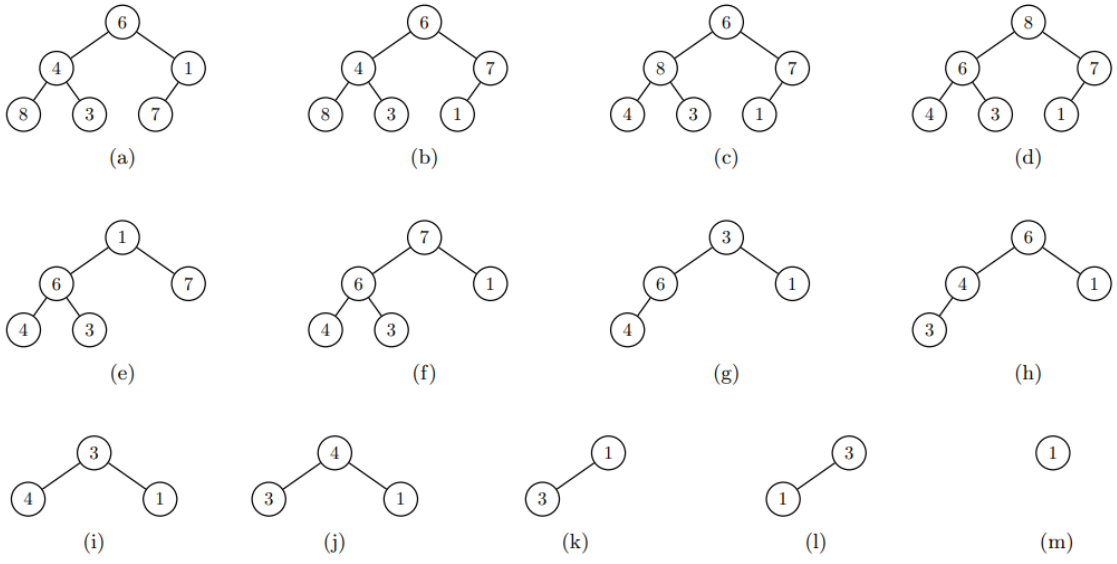


2.5 Heaps

2.5.1 Heap-Sort

1. Array wird als Heap aufgefasst
2. Heapeigenschaft wird wiederhergestellt (Heapify)
3. Extrahieren der Wurzel (Maximum) und Ersetzen durch "letztes" Blatt
4. Wieder Heapify um Wert an die richtige Stelle zu rücken
5. Falls der Baum noch nicht leer ist, gehe zu Schritt 3

Heapify: beginnend bei `ceil((H.length-1)/2) - 1` bis 0: vertausche nach unten, falls Parent kleiner als Child



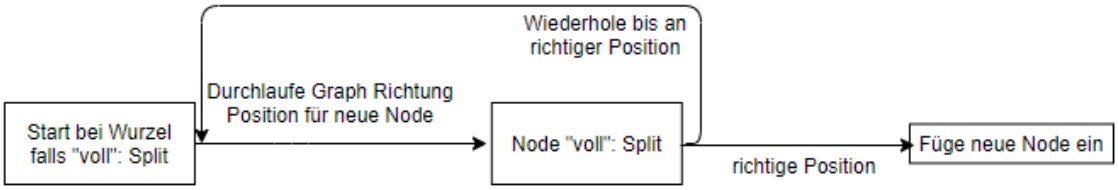
2.6 B-Bäume vom Grad `t`

Knoten zwischen `[t-1, ...,2t-1]` Werte (Wurzel: `[1, ...,2t-1]`)

2.6.1 Einfügen

`Split:`

- Aufbrechen der vollen (`2t-1`) Node
- Hinzufügen der mittleren Node zur Elternnode
- Aus den anderen Nodes entstehen nun jeweils einzelne Kinder
- Splitten an der Wurzel erzeugt neue Wurzel und erhöht Baumhöhe um 1



2.6.2 Löschen

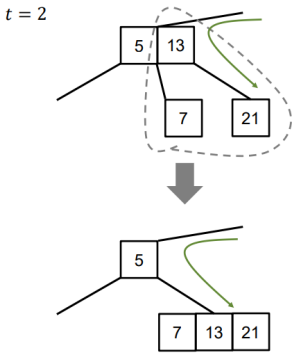
1. Start bei Wurzel

   Wurzel: `1` Wert | Kinder der Wurzel: `t-1` Werte → Verschmelze Kinder und Wurzel

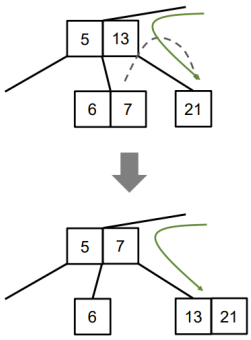
2. Durchlaufe Graph von Node bis zum löschenden Knoten

3. Überprüfe bei jeder Node:

Verschmelzen
Kind + Geschwister `t-1` Werte



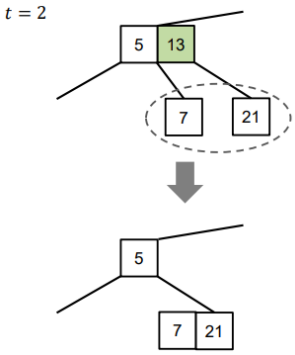
Rotation
Kind nur `t-1` Werte
Geschwister jedoch mehr als `t-1` Werte



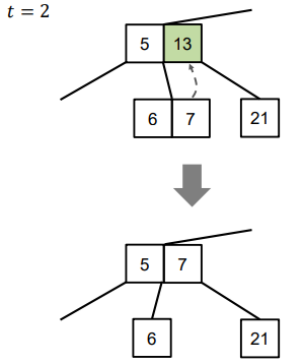
4. Knoten gefunden:

   - **Löschen im Blatt:** Einfach entfernen, fertig
   - **Löschen im inneren Knoten:**

Verschmelzen
Beide Kinder `t-1` Werte
→ Kindknoten verschmelzen



Verschieben
Eines der Kinder mehr als `t-1` Werte
Größten Wert vom linken Kind nach oben kopieren oder
Kleinsten Wert vom rechten Kind nach oben kopieren
Potentiell rekursiv nach unten suchen



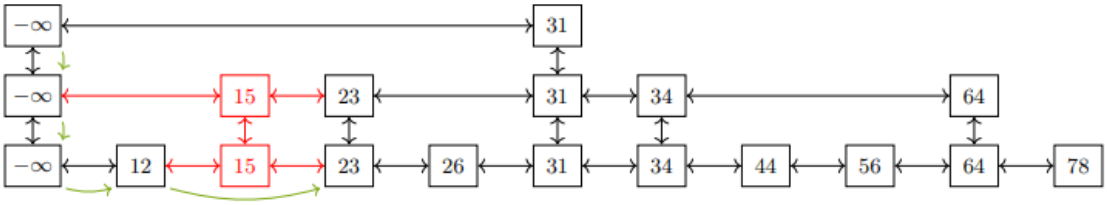
3 Randomized Data Structures

3.1 Skip-Lists

3.1.1 Einfügen

- Suche richtige Position in unterster Liste
- Füge Wert ein
- Füge ihn auch in drüberliegende Skip-Lists ein, falls die zufällige Zahl $< p$ ist

$p = \frac{1}{2}$, Zufallswerte: $0.33, 0.82 \rightarrow 15$ wird in eine höhere Skip-List eingefügt ($0.33 < \frac{1}{2}$, $0.82 > \frac{1}{2}$)



3.1.2 Löschen

- Wert und alle Vorkommen in Expresslisten entfernen

3.2 Hash-Tables

- Abspeichern der Werte in einem Array anhand einer gewissen Hashfunktion
- Kollisionsauflösung z.B. mithilfe einer LinkedList
- Hashfunktion sollte gut verteilen und uniform sein

3.3 Bloom-Filter

- Speicherschonende Wörterbücher mit kleinem Fehler
- Erzeugen eines Bit-Arrays
- Bits werden anhand von verschiedenen Hash-Funktionen beim Einfügen neuer Werte auf 1 gesetzt
- Bei Überprüfung ob Wort im Filter: Überprüfen, ob alle Hashpositionen $= 1$ sind

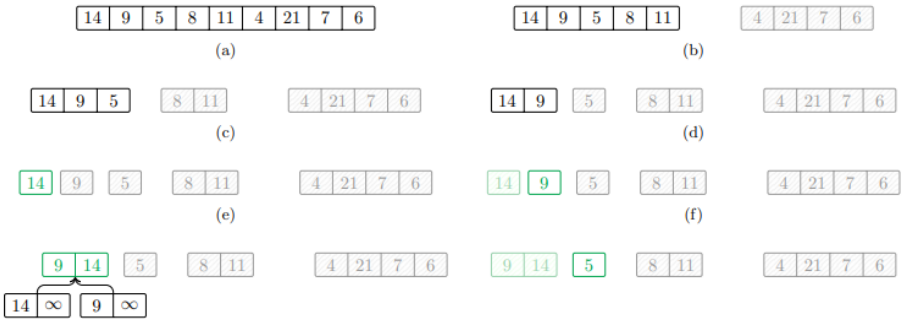
4 Anwendungsbeispiele

4.1 Sorting

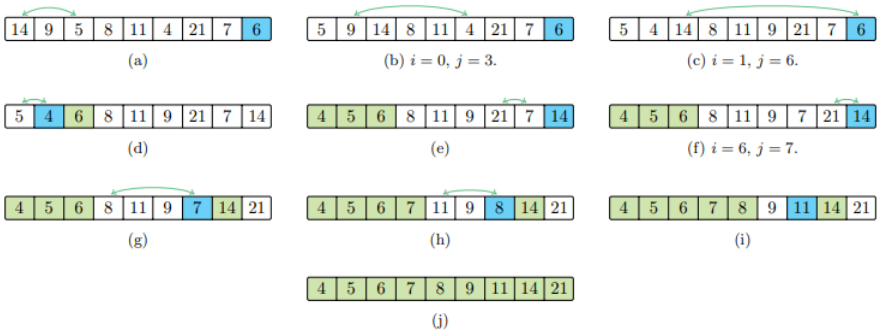
4.1.1 Insertion Sort

$j = 1$:	auf	Baum	Daten	Landesbibliothek	Haus	sortieren
$j = 2$:	Baum	auf	Daten	Landesbibliothek	Haus	sortieren
$j = 3$:	Daten	Baum	auf	Landesbibliothek	Haus	sortieren
$j = 4$:	Landesbibliothek	Daten	Baum	auf	Haus	sortieren
$j = 5$:	Landesbibliothek	Daten	Baum	Haus	auf	sortieren
$j = 6$:	Landesbibliothek	sortieren	Daten	Baum	Haus	auf

4.1.2 Merge Sort

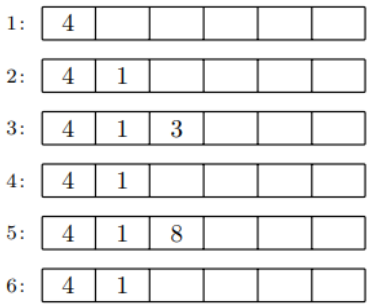


4.1.3 Quick Sort

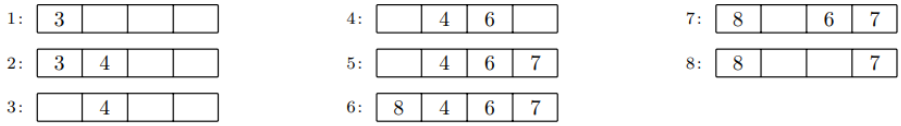


4.2 Basic Data Structures

4.2.1 Stacks



4.2.2 Queues



5 Pseudocode

5.1 Sorting

Insertion Sort(A)

```
FOR j = 1 TO A.length - 1
key = A[j]
// Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[0...j-1] ein
i = j - 1
WHILE i >= 0 and A[i] > key
    A[i + 1] = A[i]
    i = i - 1
A[i + 1] = key
```

BubbleSort(A)

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    FOR j = A.length - 1 DOWNTO i + 1
        IF A[j] < A[j-1]
            SWAP(A[j], A[j-1])
```

SelectionSort(A)

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    k = i
    FOR j = i + 1 TO A.length - 1
        IF A[j] < A[k]
            k = j
    SWAP(A[i], A[k])
```

5.1.1 Quicksort

QUICKSORT(A,p,r)

```
IF p < r    // Überprüfung, ob Teilarray leer ist
    q = PARTITION(A,p,r)
    QUICKSORT(A,p,q-1)
    QUICKSORT(A,q+1,r)
```

PARTITION(A,p,r)

```
x = A[r]    // Wahl des Pivotelements
i = p - 1   // Index i setzen
FOR j = p TO r - 1 // Auffüllen des Teilarrays mit Elementen
    IF A[j] ≤ x
        i = i + 1
        SWAP(A[i], A[j]) /
SWAP(A[i+1], A[r]) // Tausch des Pivotelements
RETURN i + 1 // Neuer Index des Pivotelements
```

5.1.2 Merge Sort

MergeSort(A, p, r)

```
IF p < r
    q = ⌊(p+r)/2⌋ // Teilen in 2 Teilfolgen
    MERGE-SORT(A,p,q) // Sortieren der beiden Teilfolgen
    MERGE-SORT(A,q+1,r)
    MERGE(A,p,q,r) // Vereinigung der beiden sortierten Teilfolgen
```

MERGE(A,p,q,r)

```
// Geteiltes Array an Stelle q
n_1 = q - p + 1
n_2 = r - q
Let L[0...n_1] and R[0...n_2] be new arrays
FOR i = 0 TO n_1 - 1 // Auffüllen der neu erstellten Arrays
    L[i] = A[p + i]
FOR j = 0 TO n_2 - 1
    R[j] = A[q + j + 1]
L[n_1] = ∞ // Einfügen des Sentinel-Wertes
R[n_2] = ∞
i = 0
j = 0
FOR k = p TO r  // Eintragweiser Vergleich der Elemente
    IF L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i] // Sortiertes Zurückschreiben in Original-Array
        i = i + 1
    ELSE
        A[k] = R[j]
        j = j + 1
```

5.2 Graphenalgorithmen

5.2.1 Breadth-First Search

BFS(G,s)

```
FOREACH u in V-{s} DO
    u.color = WHITE;        // Weiß = noch nicht besucht
    u.dist = +∞             // Setzen der Distanzen auf Unendlich
    u.pred = nil;           // Setzen der Vorgänger auf nil
s.color = GRAY;             // Anfang bei Startnode
s.dist = 0;
s.pred = nil;
newQueue(Q);
enqueue(Q,s);
WHILE !isEmpty(Q) DO
    u = dequeue(Q);
    FOREACH v in adj(G,u) DO
        IF v.color == WHITE THEN
            v.color == GRAY;
            v.dist = u.dist+1;
            v.pred = u;
            enqueue(Q,v);
    u.color = BLACK;            // Knoten abgearbeitet
```

5.2.2 Depth-First Search

DFS(G)

```
FOREACH u in V DO
    u.color = WHITE;
    u.pred = nil;
time = 0;                // time hier als globale Variable
FOREACH u in v DO
    IF u.color == WHITE THEN
        DFS-VISIT(G,u)  // Start eines rekursiven Aufrufs
```

DFS-VISIT(G,u)

```
time = time + 1;
u.disc = time;           // discovery time
u.color = GRAY;
FOREACH v in adj(G,u) DO
    IF v.color == WHITE THEN
        v.pred = u;
        DFS-VISIT(G,v);
u.color = BLACK;
time = time + 1;
u.finish = time;         // finish time
```

5.3 Path-Finding Algorithmen

5.3.1 Relax / initSSSP

relax(G,u,v,w)

```
IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
    v.dist = u.dist + w((u,v))
    v.pred = u
```

initSSSP(G,s,w)

```
FOREACH v in V DO
    v.dist = ∞
    v.pred = nil
s.dist = 0
```

5.3.2 Dijkstra

Dijkstra-SSSP(G,s,w)

```
initSSSP(G,s,w)
Q = V
WHILE !isEmpty(Q) DO
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    FOREACH v in adj(u) DO
        relax(G,u,v,w)
```

5.3.3 Kürzester Pfad durch TopoSort bei DAG

TopoSort-SSSP(G,s,w)

```
initSSSP(G,s,w)
execute topological sorting
FOREACH u in V in topological order DO
    FOREACH v in adj(u) DO
        relax(G,u,v,w)
```

5.3.4 Bellmann-Ford-Algorithmus

Bellmann-Ford-SSSP(G,s,w)

```
initSSSP(G,s,w)

FOR i = 1 TO V - 1 DO
    FOREACH (u,v) in E DO
        relax(G,u,v,w)
FOREACH (u,v) in E DO   // checks if negative cycle exists
    IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
        RETURN FALSE
RETURN TRUE
```

5.4 Minimale Spannbäume

5.4.1 Kruskal

MST-Kruskal(G,w)

```
A = ∅
FOREACH v in V DO
    set(v) = {v};        // Menge mit sich selbst
Sort edges according to weight in increasing order
FOREACH {u,v} in E according to order DO
    IF set(u) ≠ set(v) THEN     // Mengen noch nicht verbunden
        A = A ∪ {{u,v}}
        UNION(G,u,v)   // Zusammenführen der Mengen aller Knoten aus Sets
RETURN A
```

5.4.2 Prim

MST-Prim(G,w,r)

```
// r is given root
FOREACH v in V DO
    v.key = +∞
    v.pred = nil
r.key = −∞
Q = V
WHILE !isEmpty(Q) DO
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    FOREACH v in adj(u) DO
        IF v ∈ Q and w({u,v}) THEN
            v.key = w({u,v})
            v.pred = u
```

5.5 Netzwerkflüsse - Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

```
FOREACH e in E do e.flow = 0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) : (u,v) in p}
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow = e.flow + c_flow(p);
        ELSE
            e.flow = e.flow - c_flow(p);
```

6 Laufzeitentabelle

Data Str.	**Time Complexity**								**Space Complexity**
	Average Case				**Worst Case**				**Worst Case**
	Access	*Search*	*Insert*	*Delete*	*Access*	*Search*	*Insert*	*Delete*	
Array	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Stack	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Queue	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
LinkedList	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
BST	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
RBT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Splay	/	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	/	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
AVL	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
B-Tree	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Skip-List	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$
Hash-Table	/	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	/	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

Algorithm	**Time Complexity**			**Space Complexity**
	Best Case	**Average Case**	**Worst Case**	**Worst Case**
Insertion Sort	$\Omega(n)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Bubble Sort	$\Omega(n)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Selection Sort	$\Omega(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
Merge Sort	$\Omega(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Quick Sort	$\Omega(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
Heap Sort	$\Omega(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(1)$

7 MasterTheorem - Beispiele

Begründen Sie für jede der folgenden Rekursionsgleichungen $T(n)$, ob Sie das Mastertheorem anwenden können oder nicht. Benutzen Sie gegebenenfalls das Mastertheorem, um eine asymptotische Schranke für $T(n)$ zu bestimmen. Die entsprechenden Anfangsbedingungenen (also die Werte $T(1)$ in allen Beispielen und, in (f), (h) und (i), zusätzlich $T(2)$) sind dabei vorgegebene Konstanten.

(a) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ (für $n > 1$);
(b) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ (für $n > 1$);
(c) $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$ (für $n > 1$);
(d) $T(n) = \frac{1}{2}T\left(\frac{n}{2}\right) + 1/n$ (für $n > 1$);
(e) $T(n) = \sqrt{2}T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$ (für $n > 1$);
(f) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{\log(n)}\right) + n^2$ (für $n > 2$);
(g) $T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2\log(n)$ (für $n > 1$);
(h) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log(n)}$ (für $n > 2$);
(i) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log(n)}$ (für $n > 2$);
(j) $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2\log(n)$ (für $n > 1$);
(k) $T(n) = 2T\left(\frac{4n}{3}\right) + n$ (für $n > 1$);
(l) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$ (für $n > 1$).

Lösung. (a) Hier können wir das Mastertheorem anwenden: Es sind $a = 3 \geq 1$ und $b = 2 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\log_b(a) < 1{,}59 < 2$. Wir sind also im Fall 3 des Mastertheorems, denn $f(n) \in \Omega\big(n^{1{,}59+\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$ (z. B. mit $\varepsilon = 1/10$), vorausgesetzt, dass die Regularitätsbedingung erfüllt ist. Diese gilt aber für $c = \frac{3}{4} < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (da $3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}n^2$), und wir erhalten $T(n) \in \Theta\big(n^2\big)$.

(b) Hier können wir das Mastertheorem anwenden: Es sind $a = 4 \geq 1$ und $b = 2 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\log_b(a) = 2$. Wir sind also im Fall 2 des Mastertheorems, denn natürlich ist $f(n) \in \Theta\big(n^2\big)$, und wir erhalten $T(n) \in \Theta\big(n^2\log(n)\big)$.

(c) Hier können wir das Mastertheorem nicht anwenden, weil $a = 2^n$ nicht konstant ist.

(d) Auch hier können wir das Mastertheorem nicht anwenden, weil $a = \frac{1}{2}$ zwar konstant ist, aber $a < 1$.

(e) Hier können wir das Mastertheorem wieder anwenden: Es sind $a = \sqrt{2} \geq 1$ und $b = 2 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = \log(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\log_b(a) = \frac{1}{2}$. Wir sind also im Fall 1 des Mastertheorems, denn $f(n) \in O\big(n^{1/2-\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$ (z. B. mit $\varepsilon = 1/10$), und wir erhalten $T(n) \in \Theta(\sqrt{n})$.

(f) Hier können wir das Mastertheorem wieder nicht anwenden, da $b = \log(n)$ nicht konstant ist.

(g) Hier können wir das Mastertheorem auch nicht anwenden, weil $f(n) = -n^2\log(n)$ nicht positiv ist.

(h) Hier können wir das Mastertheorem wieder anwenden: Es sind $a = 4 \geq 1$ und $b = 2 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = \frac{n}{\log(n)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Daraus folgt $\log_b(a) = 2$. Wir sind also im Fall 1 des Mastertheorems, denn $f(n) \in O\big(n^{2-\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$ (z. B. mit $\varepsilon = 1/2$), und wir erhalten $T(n) \in \Theta\big(n^2\big)$.

(i) Hier können wir das Mastertheorem wieder nicht anwenden, weil keine der drei Bedingungen erfüllt ist. Die Anfangsbedingungen passen zwar, aber keiner der drei Fälle trifft zu. In der Tat, es sind $a = 2 \geq 1$ und $b = 2 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = \frac{n}{\log(n)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Daraus folgt $\log_b(a) = 1$. Wir argumentieren jetzt, dass keiner der drei Fälle des Mastertheorems zutrifft:

- Wäre $f(n) \in O\big(n^{1-\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$, dann gäbe es $C > 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass, für alle $n \geq N_0$, $\frac{n}{\log(n)} \leq Cn^{1-\varepsilon}$. Daraus würde $\frac{n^\varepsilon}{\log(n)} \leq C$ für alle $n \geq N_0$ folgen, was unmöglich ist, da $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\varepsilon}{\log(n)} = +\infty$. Somit gilt, für jedes $\varepsilon > 0$, $f(n) \notin O\big(n^{1-\varepsilon}\big)$, und Fall 1 des Mastertheorems trifft nicht zu.
- Wäre $f(n) \in \Theta(n)$, dann gäbe es $C > 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass, für alle $n \geq N_0$, $Cn \leq \frac{n}{\log(n)}$, also $C\log(n) \leq 1$ für alle $n \geq N_0$. Das ist auch unmöglich, denn $\lim_{n\to+\infty} C\log(n) = +\infty$. Somit gilt $f(n) \notin \Theta(n)$, und Fall 2 des Mastertheorem trifft auch nicht zu.
- Wäre $f(n) \in \Omega\big(n^{1+\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$, dann gäbe es $C > 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass, für alle $n \geq N_0$, $Cn^{1+\varepsilon} \leq \frac{n}{\log(n)}$, also $Cn^\varepsilon\log(n) \leq 1$ für alle $n \geq N_0$. Das kann auch nicht sein, da wieder $\lim_{n\to+\infty} Cn^\varepsilon\log(n) = +\infty$. Somit gilt, für jedes $\varepsilon > 0$, $f(n) \notin \Omega\big(n^{1+\varepsilon}\big)$, und Fall 3 des Mastertheorems trifft ebenfalls nicht zu.

(j) Hier können wir das Mastertheorem wieder anwenden: Es sind $a = 6 \geq 1$ und $b = 3 > 1$ konstant, und es gilt $f(n) = n^2\log(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\log_b(a) < 1{,}64 < 2$. Wir sind also im Fall 3 des Mastertheorems, denn $f(n) \in \Omega\big(n^{1{,}64+\varepsilon}\big)$ für ein $\varepsilon > 0$ (z. B. mit $\varepsilon = 1/10$), vorausgesetzt, dass die Regularitätsbedingung erfüllt ist. Diese gilt aber für $c = \frac{2}{3} < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (da $6\left(\frac{n}{3}\right)^2\log\left(\frac{n}{3}\right) \leq \frac{2}{3}n^2\log(n)$), und wir erhalten $T(n) \in \Theta\big(n^2\log(n)\big)$.

(k) Hier können wir das Mastertheorem wieder nicht anwenden, da $b = \frac{3}{4} < 1$.

(l) Auch hier können wir das Mastertheorem nicht anwenden, da die Rekursionsgleichung nicht die Form hat, die vom Mastertheorem abgedeckt wird. □