Mathematik II für Informatik - Zusammenfassung

Jonas Milkovits

Last Edited: 12. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit

1.1 Die reellen Zahlen

Definitionen

5.1.1	Die **Menge der reellen Zahlen** ist der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das Vollständigskeitsaxiom *"Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Suprenum."* erfüllt.
5.1.3	Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt: a) nach **oben (unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt. b) **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
5.1.5	Die Funktion $\lvert\cdot\rvert : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{falls x} \geq 0 \\ -x & \text{falls x} < 0 \end{cases}$$ heißt **Betragsfunktion** und $\lvert x\rvert$ heißt Betrag von x.
5.1.8	**Intervalle:** Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen: • $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall • $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall • $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall • $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall **Halbstrahlen:** • $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ • $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ • $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ • $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ • $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Sätze

5.1.4	Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. (Umkehrung Vollständigkeitsaxiom)
5.1.6	**Rechenregeln Betragsfunktion:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: a) $\lvert x\rvert \geq 0$ b) $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$ c) $\pm x \leq \lvert x\rvert$ d) $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$ e) $\lvert x\rvert = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ f) $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkungen

	Ein Körper mit Totalordnung $\leq$ heißt **angeordneter Körper**, falls gilt: • $\forall a, b, c \in K : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ • $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc$

1.2 Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Definitionen

5.2.1	**Ganzzahlige Potenzen:** Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist a) $x^n := x \cdot x \cdot x ... \cdot x$ (n-mal x) b) $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, falls $x \neq 0$ c) $x^0 := 1$
5.2.3	Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Die **eindeutige Zahl** $x^n \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ heißt n-te **Wurzel** von a und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. Für den wichtigsten Fall $n = 2$ gibt es die Konvention $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
5.2.5	Aus der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel (5.2.4) folgt: Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist die **rationale Potenz** definiert durch: $$x^q = x^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[x]{x})^n.$$
5.2.7	Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann wird die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ als n **Fakultät** bezeichnet. Weiterhin definieren wir $0! := 1$. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** "n über k".

Sätze

5.2.2	**Existenz der Wurzel:** Für jedes $a \in R_+$ und alle $n \in N^*$ gibt es genau ein $w \in R_+$ mit $x^n = a$.
5.2.4	Es seien $q \in \mathbb{Q}$ und $m, \in \mathbb{Z}$, sowie $n, r \in \mathbb{N}^*$ so, dass $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$: $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{m})^p$.
5.2.9	Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ b) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$ c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ (Binomialformel)

Bemerkungen

5.2.6	**Rechenregeln für Potenzen (auch rational)** $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ gilt: • $x^p x^q = x^{p+q}$ • $x^p y^p = (xy)^p$ • $(x^p)^q = x^{pq}$ • $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ • $\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p$
5.2.8	**Fakultät und Binomialkoeffizient** $n!$ ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von n unterschiedlichen Dingen. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n unterscheidbaren Dingen genau k auszuwählen.
	Zugriff auf **Binomialkoeffizienten** für binomische Formeln durch Pascal'sches Dreieck

1.3 Konvergenz von Folgen

1.3.1 Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

Definitionen

5.3.1	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Die Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen a, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exisitert mit $$\lvert a_n - a \rvert < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$ In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** oder Limes von (a_n) und wir schreiben: $$lim_{a \to \infty} = a \text{ oder } a_n \to a(n \to \infty).$$ Ist (a_n) eine Folge $\mathbb{K}$, die gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, so heißt diese **divergent**.
5.3.4	Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so setzen wir weiter $$sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := sup_{n=0}^{\infty} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ $$inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := inf_{n=0}^{\infty} a_n := inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$
5.3.13	**Bestimmte Divergenz:** Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ **divergiert bestimmt nach** $\infty(-\infty)$ und wir schreiben $lim_{n\to\infty} a_n = \infty(-\infty)$, wenn es für jedes $C \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq C(a_n \leq -C)$ für alle $n \leq n_0$ gilt.

Sätze

5.3.5	Jede **konvergente Folge** in $\mathbb{K}$ ist **beschränkt**. Die Umkehrung dieses Satzes ist **falsch**. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.
5.3.7	**Grenzwertsätze** Es seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Dann gilt: a) Ist $lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $lim_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = \lvert a \rvert$ b) Gilt $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$ so gilt: i) $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ ii) $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ iii) $lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ iv) Ist zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt außerdem: c) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $lim_{n\to\infty} b_n = b$, so folgt $a \leq b$ d) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = a$, so ist auf die Folge (c_n) konvergent und es gilt $lim_{n\to\infty} c_n = a$ **(Sandwich-Theorem)**

Bemerkungen

	Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. (Für $X = \mathbb{R}$ reelle Folge, $X = \mathbb{C}$ komplexe Folge) Schreibweise: a_n statt $a(n)$. (n-tes Folgeglied) Ganze Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n) oder $(a_n)_{n>0}$
	Folgen haben maximal einen (eindeutiger) Grenzwert
	Bezeichnung von Folgen, für die der Grenzwert 0 ist: **"Nullfolge"**
5.3.7	c) ist falsch mit $<$, nur richtig mit $\leq$
5.3.10	**Wichtige konvergente Folgen** a) Ist (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a und gilt $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist für jedes $p \in \mathbb{N}^*$ auch $lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$. b) Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt: $lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \end{cases}$ Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $\|q\| < 1$, so gilt ebenfalls $lim_{n\to\infty} q^n = 0$. c) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}_+$. d) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. e) $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n := e \ (n \geq 1)$. Beachte hier: Beide n gleichzeitig wachsen lassen, keine trägen oder eiligere n.

Beispiele

5.3.1	Folge $(a_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ Sei $\epsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\epsilon} < n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (beliebiges n immer größer). Für alle $n \geq n_0$ gilt dann: $\|a_n - a\| = \|a_n - 0\| = \|a_n\| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ $\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0
5.3.9	Sei $p \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt und $a_n = \frac{1}{n^p}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Ungleichung $n \leq n^p$ und damit $0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}$. Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7(d) auch die Folge (a_n) konvergent und ebenfalls eine Nullfolge.
5.3.9	Wir untersuchen $a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3}, n \in \mathbb{N}$. Dazu kürzen wir durch Bruch durch die **höchste auftretende Potenz**: $a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1+0+0}{1+0} = 1 \ (n \to \infty)$. Dieses Verfahren ist bei allen Polynom in n geteilt durch Polynom in n"gut anwendbar.
5.3.12	$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ (Differenz von zwei divergenten Folgen) Trick: Erweiterung mit der Summe von Wurzeln bei Differenzen von Wurzeln $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$ Sandwich: $lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.
5.3.12	**Geometrische Summenformel:** $a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n, n \in \mathbb{N}$ $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}, \|q\| < 1$.

1.3.2 Konvergenzkriterien

Definitionen

5.3.14	Eine reelle Folge (a_n) heißt: a) **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. b) **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. c) **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.
5.3.18	Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\lvert a_n - a_m \rvert < \epsilon$, für alle $n, m \geq n_0$

Sätze

5.3.15	**Monotonie Kriterium** Ist die reelle Folge (a_n) nach oben (nach unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist (a_n) **konvergent** und es gilt: $lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (bzw. $lim_{n\to\infty} a_n = inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$)
5.3.19	Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist eine **Cauchy-Folge**.
5.3.20	**Cauchy-Kriterium** Eine Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkungen

	Monotonieverhalten, deswegen hier nur in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{C}$ (keine Ordnung)
	Beide hier gesehenen Konvergenzkriterien funktionieren ohne vorherige Behauptung über den Grenzwert

Beispiele

5.3.16	Betrachtung einer rekursiv defininierten Folge $a_0 := \sqrt[3]{6}$ und $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}, n \in \mathbb{N}$ Damit folgt: $a_1 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}$, $a_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}$ Solche Folgen entstehen oft bei iterativen Näherungsverfahren. Behauptung: (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ Konvergenz Beweis: Induktion

1.3.3 Teilfolgen und Häufungswerte

Definitionen

5.3.22	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - a \rvert < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente hat.
5.3.23	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ist $\{n_1, n_2, n_3, ...\} \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge von Indizes mit $n_1 < n_2 < n_3 ...$, so heißt die Folge $(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).

Sätze

5.3.24	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt a) Ein $\alpha \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Häufungswert von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert, die gegen α konvergiert. b) Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert α, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a. c) Ist (a_n) konvergent, so hat (a_n) genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert $lim_{n\to\infty} a_n$.

Bemerkungen

	Jeder Grenzwert ist auch Häufungswert.
	Häufungswert von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: 1, -1 (aber keine Grenzwerte)
	Häfungswert von (i^n): 1, i, -1, -i
	Keine Teilfolgen: $(a_0, a_0, a_2, a_2, ..)$ (keine doppelten Elemente) $(a_2, a_3, a_0, ..)$ (nicht umsortieren)

1.4 Asymptotik

Definitionen

5.4.1	a) Wir bezeichnen mit $F_+ := \{(a_n)$ Folge in $\mathbb{R} : a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ b) Es sei $(b_n) \in \mathbb{F}_+$. Dann definieren wir die Landau-Symbole durch • $O(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : \frac{a_n}{b_n}{}_{n\in\mathbb{N}}\}$ (b_n größer gleich a_n) • $o(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\}$ (b_n echt größer als a_n)

Sätze

5.4.5	Es seien $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n) \in \mathbb{F}_+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt: a) Sind $a_n, b_n \in O(c_n)$, so ist auch $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$ b) Gilt $a_n \in O(b_n)$ und $c_n \in O(d_n)$, so ist $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ c) Aus $a_n \in O(b_n)$ und $b_n \in O(c_n)$ folgt $a_n \in O(c_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$ genau dann, wenn $\frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$ e) Diese Aussagen gelten auch alle mit Klein-O anstatt Groß-O

Bemerkungen

5.4.2	a) =-Zeichen wird hier nicht bekannten mathematischen Sinne verwendet $\Rightarrow$ Kompromiss Notation $a_n \in O(b_n)$ b) Es gilt immer $o(b_n) \subseteq O(b_n)$. c) $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow a_n \in O(b_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$: Folge a_n wächst höchstens so schnell wie ein Vielfaches von b_n
	Exponentielle Algorithmen sind viel schlechter als polynomiale.

Landau-Symbol	Bezeichnung	Bemerkung
$O(1)$	beschränkt	
$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a > 1$
$O(n)$	linear	
$O(n \log_a(n))$	„n log n“	$a > 1$
$O(n^2)$	quadratisch	
$O(n^3)$	kubisch	
$O(n^k)$	polynomial	$k \in \mathbb{N}^*$
$O(a^n)$	exponentiell	$a > 1$

1.5 Reihen

Definitionen

5.5.1	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_o + a_1 + a_2 + ...$$ die **Reihe** über (a_n). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ heißt dann $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ die k-te Teilsumme oder **Partialsumme** der Reihe. Ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so nennen wir die Reihe **konvergent** mit dem Reihenwert: $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := lim_{k\to\infty} s_k = lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$. Ist (s_k) divergent, so nennen wir auch die Reihe divergent.

Sätze

5.5.3	Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und es gilt $$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
5.5.4	Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
5.5.5	Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$, so ist (a_n) eine **Nullfolge** in $\mathbb{K}$.
5.5.6	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$ Dann gilt: a) **Monotonie Kriterium** Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. b) **Cauchy-Kriterium** Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ existiert mit $$\lvert \sum_{n=l+1}^{k} a_n \rvert < \epsilon \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k > l \geq n_0.$$
5.5.7	**Leibniz-Kriterium** Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

Bemerkungen

5.5.5	Gilt nicht umgekehrt. Nullfolge ist eine Voraussetzung für eine konvergente Reihe, aber keine Garantie.

Beispiele

Reihen:

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$ *(Geometrische Reihe)*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = divergent$ *(Harmonische Reihe)*
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = ln(2)$ *(alternierende harmonische Reihe)* (Leibniz-Kriterium)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$: konvergent, wenn $\alpha > 1$, sonst divergent

1.5.1 Absolute Konvergenz

Definitionen

5.5.9	Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. (Summanden werden schnell genug klein, vorzeichenunabhängig)

Sätze

5.5.10	Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist auch konvergent in $\mathbb{K}$ und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung $$\lvert \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rvert \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert$$
5.5.12	Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen und $n_o \in \mathbb{N}$. • **Majorantenkriterium** Ist $\lvert a_n\rvert \leq b_n$ für alle $n \geq n_o$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. • **Minorantenkriterium** Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ und divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
5.5.16	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. a) **Wurzelkriterium** Existiert der Grenzwert $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$, so ist die Reihe • absolut konvergent, wenn $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$ ist • divergent, wenn $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$ ist b) **Quotientenkriterium** Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert der Grenzwert $lim_{n\to\infty}\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\rvert$, so ist die Reihe • absolut konvergent, wenn $lim_{n\to\infty}\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\rvert < 1$ ist • divergent, wenn $lim_{n\to\infty}\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\rvert > 1$ ist

Bemerkungen

5.5.10	Gilt nicht umgekehrt (alternierende harmonische Reihe)
5.5.10	Absolute Konvergenz: Reihenwert ist unabhängig von der Summationsreihenfolge
5.5.12	Die Vergleichsfolge heißt jeweils konverente Majorante bzw. divergente Minorante.
5.5.16	Liefert Wurzel-/Quotientenkriterium genau Eins, kann man daraus keine Aussage ableiten

1.5.2 Das Cauchy-Produkt

Definitionen

5.5.21	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z := E(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Sätze

5.5.19	Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei **absolut konvergente Folgen** in $\mathbb{K}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ **absolut** und es gilt für die Reihenwerte: $$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$$ Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ heißt **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen.
5.5.20	Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z + w) = E(z)E(w)$.

1.6 Konvergenz in normierten Räumen

Definitionen

5.6.1	a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heißt **konvergent** gegen ein $a \in V$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $$\|\|a_n - a\|\|_V < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$ Die Folge heißt **divergent,** wenn sie nicht konvergent ist. b) Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $$\|\|a_n - a_m\|\|_V < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0$$ c) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in V heißt **konvergent** mit Reihenwert $s \in V$, wenn die Folge der Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, in V gegen s konvergiert. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|\|a_n\|\|_V$ in $\mathbb{R}$ so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**. Ist die Reihe nicht konvergent, so nennt man sie **divergent**.
5.6.2	Eine Menge $M \subseteq V$ heißt beschränkt, falls es ein ≥ 0 gibt, so dass $\|\|x\|\|_V \leq C$ für alle $x \in \mathbb{M}$ gilt.
5.6.8	a) Es seien $x_0 \in \mathbb{V}$ und $r \in (0, \infty)$. Dann heißt die Menge $B_r(x_0) := \{x \in V : \|\|x - x_o\|\|_V < r\}$ **(offene) Kugel** um x_0 (Mittelpunkt) mit Radius r. b) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt **offen**, falls es für jeden Punkt $x_0 \in M$ einen Radius $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x_0) \subseteq M$ gilt. c) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt **abgeschlossen**, wenn die Menge $M^c = V\ M$ offen ist. d) Es sei $M \subseteq V$. Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt **innerer Punkt** von M, falls es ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x_0) \subseteq M$ ist. Man nennt $M^o := \{x \in M : x \text{ innerer Punkt von } M\}$ das **Innere von** M.
5.6.13	Ist V ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heißt eine Teilmenge $M \subseteq V$ **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
5.6.15	Es sei (a_n) eine Folge in $(V, \|\|\cdot\|\|_V)$. a) Ein $a \in V$ heißt **Häufungswert** von (a_n)m falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $$\{n \in \mathbb{N} : \|\|a_n - a\|\|_V < \epsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\epsilon(a)\}$$ unendlich viele Elemente hat. b) Ist $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von (a_n).
5.6.19	Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\|\cdot\|\|_V)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert. Ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum wird auch **Banachraum** genannt. Wird die Norm $\|\|\cdot\|\|_V$ außerdem durch eine Skalarprodukt auf V induziert, so nennt man V **Hilbertraum**.

Sätze

5.6.5	Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d})^T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit der 2-Norm. Dann ist (a_n) in $\mathbb{R}^d$ genau dann **konvergent**, wenn für jedes $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ die Koordinatenfolge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **konvergent** ist. In diesem Fall ist $$lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \dots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lim_{n\to\infty} a_{n,1} \\ lim_{n\to\infty} a_{n,2} \\ \dots \\ lim_{n\to\infty} a_{n,d} \end{pmatrix}.$$ Falls eine Komponente im Vektor divergiert, divergiert die ganze Folge.
5.6.11	Eine Teilmenge M von V ist genau dann **abgeschlossen**, wenn für jede Folge in M, die in V konvergiert, der Grenzwert ein Element aus M ist.
5.6.17	**Satz von Bolzano-Weierstraß** Sei $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum und $M \subseteq V$ kompakt. Dann besitzt jede Folge in M eine **konvergente Teilfolge mit Grenzwert in** M.
5.6.22	**Banach'scher Fixpunktsatz** Es sei $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein Banachraum $M \subseteq V$ abgeschlossen und $f : M \to M$ eine Funktion. Weiter existiere ein $q \in (0, 1)$, so dass $$\|\|f(x) - f(y)\|\|_V \leq q\|\|x - y\|\|_V, \text{ für alle } x, y \in M$$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen: a) Es gibt genau ein $v \in M$ mit $f(v) = v$. (d.h. f hat genau einen Fixpunkt in M) b) Für jedes $x_0 \in M$ konvergiert die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen v und es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen für hedes $n \in \mathbb{N}^*$: $\|\|x_n - v\|\|_V \leq \frac{q^n}{1-q}\|\|x_1 - x_0\|\|_V$ (A-priori-Abschätzung) $\|\|x_n - v\|\|_V \leq \frac{q}{1-q}\|\|x_n - x_{n-1}\|\|_V$ (A-posterior-Abschätzung)

Bemerkungen

	Normierter Raum: V = normierter Vektorraum mit Norm $\|\| \cdot \|\|_V$ (ermöglicht Abstandsmessung) Hier als Vorstellung $\mathbb{R}^3$ mit Standard(2)-Norm (normaler Abstand im Raum)
5.6.1	Genau dasselbe wie vorher, wir ersetzen nur den Betrag durch die jeweilige Norm
5.6.1	**Cauchy-Folge**: Abstand von je zwei Folgegliedern
	2-Norm: $\|\|x\|\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
5.6.5	Der Satz gilt im endlichen Raum für alle Normen. Wenn eine Folge bezüglich einer Norm konvergiert, dann auch bzgl jeder anderen. Grenzwerte bleiben gleich.
5.6.8	Menge **abgeschlossen**: Rand gehört zur Menge Menge **offen**: Rand gehört nicht zur Menge Die meisten Menge sind weder offen noch abgeschlossen, keine Umkehrschlüsse!
5.6.17	Ist $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum,so besitzt jede beschränkte Folge in V mindestens einen Häufungswert. (Unendliche viele Punkte in einer beschränkten Menge müssen irgendwo klumpen)
5.6.19	Standardvektorraum $\mathbb{R}^d$ ist für jedes $d \in \mathbb{N}^*$ mit jeder Norm ein **Banachraum**. Wählt man außerdem die durch das Skalarprodukt induzierte 2-Norm, so ist $(\mathbb{R}^d, \|\| \cdot \|\|_2)$ ein **Hilbertraum**.

Beispiele

5.6.3

$V = \mathbb{R}^3$, 1-Norm: $||x||_1 = \sum_{j=1}^{3} |x_i|$, $a_n := (1, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})^T$, $n \in \mathbb{N}^*$
Hier gilt $lim_{n\to\infty} a_n = (1,0,1)^T$. Zeige: Abstand von a_n zu Grenzwert belieblig klein:
$||a_n - (1,0,1)^T|| = |0| + |\frac{1}{n}| + |\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{2}{n}$ (Abstand geht gegen 0)
Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt:
$||a_n - (1,0,1)^T||_1 = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$

1.7 Stetigkeit reeller Funktionen

1.7.1 Der Grenzwertbegriff für Funktionen

Definitionen

5.7.1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$

a) Wir nennen x_0 einen **Häufungspunkt** von D, falls es eine Folge (a_n) in D mit $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert.

b) Ist x_0 ein Häufungspunkt von D, so sagen wir, dass f für x gegen x_0 den Grenzwert y hat, wenn für jede Folge (a_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(f(a_n))$ gegen y konvergiert.
Wir schreiben dafür: $lim_{x\to x_0} f(x) = y$.

c) Ist x_0 ein Häufungspunkt von $D_+ := \{x \in D : x > x_0\}$, so hat f für x gegen x_0 den **rechtsseitigen Grenzwert** y, wenn für jede Folge (a_n) in D_+, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(a_n))$ gegen y konvergiert.
Wir schreiben dafür: $lim_{x\to x_0+} f(x) = y$.

d) Ist x_0 ein Häufungspunkt von $D_- := \{x \in D : x < x_0\}$, so hat f für x gegen x_0 den **linksseitigen Grenzwert** y, wenn für jede Folge (a_n) in D_-, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(a_n))$ gegen y konvergiert.
Wir schreiben dafür: $lim_{x\to x_0-} f(x) = y$.

5.7.7

Divergenz

a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Wir schreiben $lim_{x\to x_0} f(x) = \infty(-\infty)$, wenn für jedes Folge (a_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(f(a_n))$ bestimmt gegen $\infty(-\infty)$ divergiert.

b) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ **nicht** nach oben (unten) **beschränkt**, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Wir sagen $lim_{x\to\infty} f(x) = y$ (bzw. $lim_{x\to-\infty} f(x) = y$), wenn für jede Folge (a_n) in D, die bestimmt gegen $\infty(-\infty)$ divergiert, $lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$ gilt.

Sätze

5.7.4

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Existieren $lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $lim_{x\to x_0+} f(x)$ und sind die beiden Werte gleich so existiert auch $lim_{x\to x_0} f(x)$ und es gilt

$$lim_{x\to x_0} f(x) = lim_{x\to x_0-} = lim_{x\to x_0+} .$$

5.7.6

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Desweiteren seien drei Funktion $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass die Grenzwerte $lim_{x\to x_0} f(x)$ und $lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Dann gilt:

a) Die Grenzwerte für x gegen x_0 von $f + g$, fg und $|f|$ exisiteren und es gilt:
- $lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = lim_{x\to x_0} f(x) + lim_{x\to x_0} g(x)$
- $lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = lim_{x\to x_0} f(x) \cdot lim_{x\to x_0} g(x)$
- $lim_{x\to x_0}|f(x)| = |lim_{x\to x_0} f(x)|$

b) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D\backslash\{x_0\}$, so ist $lim_{x\to x_0} f(x) \leq lim_{x\to x_0} g(x)$

c) Ist $lim_{x\to x_0} f(x) = lim_{x\to x_0} g(x)$ und es gilt $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D\backslash\{x_0\}$, so gilt auch $lim_{x\to x_0} h(x) = lim_{x\to x_0} f(x) = lim_{x\to x_0} g(x)$. (Sandwich-Theorem)

d) Ist $y := lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, so existiert $\delta > 0$, so dass $|g(x)| \geq \frac{|y|}{2}$ für alle $x \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\backslash\{x_0\}$ ist. Wir können also die Funktion $\frac{f}{g} : (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ definieren. Für diese existiert dann der Limes für x gegen x_0 mit $lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to x_0} f(x)}{lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Bemerkungen

5.7.1	x_0 HP von D bedeutet, dass x_0 aus $D \setminus \{x_o\}$ annäherbar Bsp.: HP von $(0,1]$: $[0,1]$
5.7.4	Es gilt nicht $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiele

5.7.8	$lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ $lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ $lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ $lim_{x\to\infty} x = \infty$
5.7.8	Exponentialfunktion: $E(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Grenzwerte: $lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ $lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

1.7.2 Stetigkeit

Definitionen

5.7.9	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in x_0, falls für jede Folge (a_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert und $lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ gilt. Weiter heißt f stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Schließlich setzen wir noch $C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } D\}$. (Menge aller stetigen Funktionen auf D)
5.7.18	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt a) **monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in D$ gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ b) **monoton fallend**, falls für alle $x, y \in D$ gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ c) **streng monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ d) **streng monoton fallend**, falls für alle $x, y \in D$ gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ e) **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist
5.7.22	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls es ein $L > 0$ gibt mit $\lvert f(x) - f(y)\rvert \leq L\lvert x - y\rvert$ für alle $x, y \in D$.

Sätze

5.7.12	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D,so ist f in x_0 genau dann **stetig**, wenn $lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
5.7.15	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg und $\lvert f\rvert$ stetig in x_0. Ist $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist die Funktion $\frac{f}{g} : D^* \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.
5.7.16	Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to E$, sowie $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.
5.7.20	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann **stetig**, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\lvert f(x) - f(y)\rvert < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0\rvert < \delta$ gilt.
5.7.23	Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ **Lipschitz-stetig** so ist f **stetig** auf D. Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch. (Lipschitz-Stetigkeit ist damit ein strengerer Begriff als Stetigkeit)

Bemerkungen

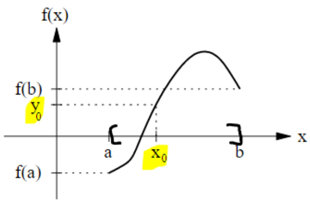
5.7.9	Stetigkeit: Kleines Wackeln an Parametern $\to$ auch nur kleines Wackeln am Funktionswert
5.7.12	Stetigkeit: Grenzübergang austauschbar mit Funktionsauswertung
5.7.15	Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
5.7.19	Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.
5.7.23	Lipschitz-Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass die Steigung des Graphen beschränkt bleibt.

1.7.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definitionen

5.7.27	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls die Menge $f(D)$ (Bild der Funktion) beschränkt ist, d.h. falls ein $C \geq 0$ existiert, so dass $\|f(x)\| \leq C$ für alle $x \in D$ gilt.

Sätze

5.7.25	**Zwischenwertsatz** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und $f \in C([a, b])$. Ist y_0 eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$. 
5.7.26	**Nullstellensatz von Bolzano** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und $f \in C([a, b])$ erfülle $f(a)f(b) < 0$ (Existenz einer Nullstelle / Einer der beiden Werte 0). Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.
5.7.28	Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ **kompakt** und nicht-leer, sowie $f \in C(K)$. Dann gibt es $x_*, x^* \in K$, so dass $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in K$ gilt. Insbesondere ist f **beschränkt**. (Jede stetige Funktion auf kompakter Menge ist beschränkt)

1.8 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Definitionen

5.8.1	Es seien V und W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subseteq V$ und $f : D \to W$ eine Funktion. a) Wir nennen $x_0 \in D$ **Häufungspunkt** von D, falls es eine Folge (a_n) in D mit $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert. b) Sei x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann ist $lim_{x \to x_0} f(x) = y$, falls für jede Folge (a_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, die Folge $(f(a_n))$ gegen y konvergiert.
5.3.8	Es seien V, W zwei normierte $\mathbb{R}$-Vektorräumen, $D \subseteq V$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **stetig** in x_0, wenn für jede Folge (a_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert und $lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$ gilt. Weiter heißt **f stetig auf D**, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Außerdem setzen wir wieder $C(D; W) := \{f : D \to W : f \text{ stetig auf } D\}$.

Sätze

5.8.4	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in D$. Dann ist $f : D \to \mathbb{R}^p$ genau dann in x_0 **stetig**, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig sind.
5.8.5	Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, sowie $h : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann sind auch $f + g$, fg und $h \circ f$ als Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ stetig in x_0. Ist außerdem $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g} : D^* \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.
5.8.8	Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ **kompakt** und nicht-leer, sowie $f \in C(K)$. Dann gibt es $x_*, x^* \in K$, so dass $$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ für alle } x \in K$$ gilt. Insbesondere ist f **beschränkt**.
5.8.10	Es sei $\|\|\cdot\|\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\|\|\cdot\|\|_2$ die 2-Norm auf $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es zwei Konstanten c und C mit $0 < c \leq C$, so dass $c\|\|x\|\|_2 \leq \|\|x\|\| \leq C\|\|x\|\|_x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.
5.8.11	a) Sind $\|\|\cdot\|\|$ und $\|\|\|\cdot\|\|\|$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$, so gibt es Konstanten $0 < c \leq C$, so dass $c\|\|x\|\| \leq \|\|\|x\|\|\| \leq C\|\|x\|\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. b) Ist eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}^d$ bezüglich einer Norm konvergent, so konvergiert sie auch bezüglich jeder anderen Norm und der Grenzwert ist derselbe.

Bemerkungen

5.8.2	Hier keine links- und rechtsseitiger Grenzwerte, da es Unmengen an Richtungen gibt
5.8.11	Gilt $c\|\|x\|\| \leq \|\|\|x\|\|\| \leq C\|\|x\|\|$ so heißen die Normen $\|\|\cdot\|\|, \|\|\|\cdot\|\|\|$ äquivalent. Je zwei Normen im $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

1.9 Potenzreihen

Definitionen

5.9.1	Es sei (a_n) eine Folge $\mathbb{K}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ heißt **Potenzreihe**.
5.9.4	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe die die Voraussetzungen von 5.9.3 erfüllt und ρ wie in diesem Satz definiert. Dann heißt die Zahl: $$r := \begin{cases} 0 & \text{falls in obigem Satz a) gilt} \\ \infty & \text{falls in obigem Satz b) gilt} \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls in obigem Satz c) gilt} \end{cases}$$ der **Konvergenzradius** der Reihe.
5.9.6	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ und $x_o \in \mathbb{K}$. Dann nennt man eine Reihe der Form $$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$ **Potenzreihe**. Der Punkt x_0 wird **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe genannt. (Hier ist das Konvergenzgebiet nun um x_0 statt um 0 (allgemeiner)) (Alle Sätze und Definitionen gelten hier genauso)

Sätze

5.9.3	**Satz von Hadamard** Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$, so dass der Grenzwert $\rho := lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$ existiert oder die Folge $(\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert})$ unbeschränkt ist. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: a) Ist die Folge $\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$ unbeschränkt, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$. b) Ist $\rho = 0$, so konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut. c) Ist $\rho \in (0, \infty)$, so ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $\lvert x \rvert < \frac{1}{\rho}$ **absolut konvergenz** und für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $\lvert x > \frac{1}{\rho}$ **divergent**.
5.9.10	**Quotientenkriterium** Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sigma := lim_{n\to\infty} \lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \rvert$ existiert. Dann gilt für den Konvergenzradius r von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: $$r = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & \text{falls } \sigma \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{falls } \sigma = 0. \end{cases}$$
5.9.13	**Cauchy-Produkt von Potenzreihen** Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$. Dann hat die Potenzreihe $$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$$ mindestens den Konvergenzradius $R := min\{r_1, r_2\}$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $\lvert x \rvert < r$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n).$$
5.9.14	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die dadurch gegebene Funktion $f : \{x \in \mathbb{K} : \lvert x \rvert < r\} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig auf $\{x \in \mathbb{K} : \lvert x \rvert < r\}$.

Bemerkungen

	Offensichtlich konvergieren alle Potenzreihen für $x = 0$.
5.9.3	Keine Aussage bei $\lvert x \rvert = \frac{1}{\rho}$ möglich.
5.9.3	Konvergenzbereich entweder $\{0\}$ oder $\mathbb{K}$ oder Kreis in $\mathbb{C}$ bzw. Intervall in $\mathbb{R}$
5.9.6	Konvergenzradius nun entweder 0, ∞ oder $r = (lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert})^{-1}$.
5.9.14	$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $E(x) = e^x$ stetig auf $\mathbb{C}$. Daraus folgt: $E(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$

Beispiele

5.9.2	**Geometrische Reihe** Konvergiert für $\lvert x\rvert < 1$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
5.9.2	**Exponentialfunktion** $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
5.9.5	a) $a_n = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Dann gilt: $\rho = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = lim_{n\to\infty} 1 = 1$, also $r = \frac{1}{\rho} = 1$. Am Rand: Für $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ divergent. (-1 auch divergent) Konvergenzbereich: $(-1, 1)$ b) $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Konvergenzradius 1, da: $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$. Am Rand: Für $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: divergent (harmonische Reihe) Für $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: konvergent (alternierende harmonische Reihe) Konvergenzbereich: $[-1, 1)$
5.9.6	$a_n := \frac{(-4)^n}{n}$, $x_0 = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(x-1)^n$ Es gilt: $\rho = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert\frac{(-4)^n}{n}\rvert} = lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = \frac{4}{1} = 4$ Konvergenzradius: $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4}$ Konvergenz in $(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}) = ()\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ Randpunkte: $x = \frac{5}{4} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(\frac{5}{4}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent (alt. harmonische Reihe) $x = \frac{3}{4} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(\frac{3}{4}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} \cdot \frac{1}{(-4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (harmonische Reihe) Konvergenzgebiet: $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$
5.9.11	a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ Quotientenkriterium: $\sigma := lim_{n\to\infty} \lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\rvert = lim_{n\to\infty} \lvert\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\rvert = lim_{n\to\infty} \lvert\frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+1)n}\rvert = lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ Konvergenzradius: $r = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{e}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n}$ Achtung Falle! Wegen 3^n kein Hadamard und 5.9.10 anwendbar. Substitution $y = x^3$. $\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} y^n$ Konvergenzradius: 2, da $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert\frac{1}{2^n}\rvert} = \frac{1}{2}$. Also Konvergenz für $y = x^3 \in (-2, 2)$, Divergenz außerhalb $[-2, 2]$ $\to$ Konvergenz für $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$, Divergenz außerhalb $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist $\sqrt[3]{2}$.
5.9.16	$lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^(n-1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ Konvergenzradius: Unendlich (Quotientenkriterium) $\to$ Auf $\mathbb{R}$ und in Null stetig Damit gilt: $lim_{n\to\infty} \frac{e^x-1}{x} = lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$.

1.10 Wichtige Funktionen

1.10.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

Definitionen

5.10.2	Die Umkehrfunktion von $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wird mit $ln := E^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet und heißt **natürlicher Logarithmus**.
5.10.4	Für alle $a \in (0, \infty)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die **allgemeine Potenz** durch $a^x := e^{x \cdot ln(a)}$

Sätze

5.10.1	Die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist **bijektiv**
5.10.3	a) Die Funktion ln ist auf $(0, \infty)$ stetig und wöchst streng monoton. b) Es gilt $ln(1) = 0$ und $ln(e) = 1$. c) $lim_{x \to \infty} ln(x) = \infty$ und $lim_{x \to 0+} ln(x) = -\infty$. d) Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und $q \in \mathbb{Q}$ gilt: • $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ • $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$ • $ln(x^q) = qln(x)$
5.10.5	Es sei $a \in (0, \infty)$. Dann ist die Funktion $x \to a^x$ stetig auf $\mathbb{R}$ und es gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen wie beispielsweise $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $(a^x)^y = a^{xy}$

1.10.2 Trigonometrische Funktionen

Definitionen

5.10.6	$sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^(2n+1)$, $z \in \mathbb{C}$ (**Sinus**) $cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $z \in \mathbb{C}$ (**Cosinus**)
5.10.9	Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt: a) ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt. b) gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt. c) periodisch mit Periode $L \in \mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$, wenn $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt.
5.10.14	Die Funktion $tan : \mathbb{C} \backslash \{\frac{pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ mit $tan(z) \frac{sin(z)}{cos(z)}$ heißt **Tangens**.
5.10.15	arcsin: $[-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (**Arcussinus**) arcsin: $[-1, 1] \to [0, \infty]$ (**Arcuscosinus**) arcsin: $\mathbb{R} \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (**Arcustangens**)

Sätze

5.10.8	**Trigonometrischer Pythagoras** $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$
5.10.10	Der Cosinus ist **gerade** und der Sinus ist **ungerade**.
5.10.11	**Eulersche Formel** Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{iz} = cos(z) + sin(z)i$. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ damit $Re(e^{ix}) = cos(x)$ und $Im(e^{ix}) = sin(x)$.
5.10.12	Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt a) $\lvert sin(x)\rvert \leq 1$ und $\lvert cos(x)\rvert \leq 1$ b) Additionstheoreme: $sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x)$ $cos(x+y) = cos(x)cos(y) + sin(x)sin(y)$ c) Rechenregeln für verschobene Funktionen: $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$ $sin(x + \pi) = -sin(x)$ $sin(x + 2\pi) = sin(x)$ $cos(x + \frac{\pi}{2}) = -sin(x)$ $cos(x + \pi) = -cos(x)$ $cos(x + 2\pi) = cos(x)$
5.10.13	Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode 2π Es ist $sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ $cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

Bemerkungen

<table>
<tr><td>5.10.6</td><td>Alle Winkel in der Mathematik werden im Bogenmaß angegeben.
<table>
<tr><td></td><td>0°</td><td>30°</td><td>45°</td><td>60°</td><td>90°</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>sin</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>1</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td></tr>
</table>
(Sin: $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$)</td></tr>
</table>

1.10.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Definitionen

5.10.17	Es sei $Z = x + yi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** von z und der Winkel ϕ, der zwischen z und der positiven reellen Achse eingeschlossen wird das **Argument** von z. Beide Werte zusammen (r, ϕ) zusammen sind die **Polarkoordinaten** von z.

Sätze

5.10.19	Es seien $z = re^{i\phi}$, $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit Polarkoordinaten (r, ϕ), bzw. (s, ϕ) gegeben. Dann hat $z \cdot w$ die Polarkoordinaten $(rs, \phi + \psi)$ und $\frac{z}{w}$ die Polarkoordinaten $(\frac{r}{s}, \phi - \psi)$.

Bemerkungen

5.10.17	Argument im Intervall $(-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi)$ um Eindeutigkeit zu garantieren.
5.10.18	Argument: $(-\pi, \pi) \rightarrow$ Umrechnung von Komplex zu Polarkoordinaten $x = r\ cos(\phi)$ $y = r\ sin(\phi)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \begin{cases} arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$

Beispiele

5.10.20	Wir berechnen $(1+i)^{2001}$. $(1+i)^{2001} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2011} = \sqrt{2}^{2011} e^{i2011\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot 2^{1005} e^{i(2008+3)\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\dot{2}^1 005 e^{i502\pi} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{1005} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{1005}(-1+i)$ $(e^{i502\pi} = 1)$

1.10.4 Hyperbolische Funktionen

Definitionen

5.10.22	$sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$ (**Sinus hyperbolicus**) $cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$ (**Cosinus hyperbolicus**) $tanh(z) := \frac{sinh(z)}{cosh(z)}$, $z \in \mathbb{C} \backslash \{(k\pi + \frac{\pi}{2} i : k \in \mathbb{Z})\}$ (**Tangens hyperbolicus**)

2 Analysis - Teil II: Differential- und Integralrechnung

2.1 Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

2.1.1 Der Ableitungsbegriff

Definitionen

6.1.1	Für ganzes Kapitel gilt: $I \subseteq \mathbb{R}$ als Intervall. a) Es sei $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in $\mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die **Ableitung** von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. b) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** auf I, falls sie in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird $x \to f'(x)$ für $x \in I$ eine Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion heißt die **Ableitung** oder auch **Ableitungsfunktion** von f auf I.

Sätze

6.1.4	Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f **stetig** in x_0. (Jede differenzierbare Funktion ist stetig)
6.1.7	Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann **differenzierbar** mit $f'(x_0) = a$, wenn $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x),\ x \in I$ ist und für die Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ gilt $lim_{x \to x_0} \frac{\lvert r(x)\rvert}{\lvert x-x_0\rvert} = 0$.

Bemerkungen

6.1.1	Der Grenzwert in 6.1.1 existiert genau dann, wenn der Grenzwert $lim_{h \to 0} \frac{f(_x0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Die Werte stimmen dann überein. Je nach Situation den einen oder anderen verwenden.
6.1.6	Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $E'(x) = e^x = E(x)$.

Beispiele

6.1.3	$f(x) = c \to lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = lim_{x \to x_0} \frac{0}{x-x_0} = 0$ (Ableitung konstanter Funktionen ist 0)
6.1.6	$f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0$ Daraus folgt: $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = lim_{x \to x_0}(x + x_0) = 2x_0$ Damit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Ableitungsregeln

Sätze

6.1.9

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $\alpha f + \beta g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \text{ } \textbf{(Linearität)}$$

b) fg ist differenzierbar in x_0 und
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \text{ (}\textbf{Produktregel}\text{)}$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein Intervall $J \subseteq I$ mit $x_0 \in J$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Außerdem ist die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ differenziber und es gilt
$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \text{ (}\textbf{Quotientenregel}\text{)}$$

6.1.10

Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g : I \to J$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$. Weiter sei $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt
$$(f \circ g)'x_0 = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

6.1.12

Es sei $f \in C(I)$ streng monoton und $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, diese ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

6.1.15

Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann hat auch die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ den Konvergenzradius r, die Funktion f ist in allen $x \in (-r, r)$ differenzierbar und es gilt
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \; x \in (-r, r)$$
(Potenzreihe im Inneren des Konvergenzgebietes summandenweise ableitbar)

Bemerkungen

6.1.12

Wichtig: $f'(x_0) \neq 0$ als Voraussetzung!

Name	Symbol	Definitionsbereich	Bild	Ableitung
E-funktion	$e^{\cdot}$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$e^{\cdot}$
(nat.) Logarithmus	ln	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
Sinus	sin	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	cos
Cosinus	cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin$
Tangens	tan	$\mathbb{R} \setminus \{(k + 1/2)\pi\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
Arcussinus	arcsin	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcuscosinus	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcustangens	arctan	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\frac{1}{1+x^2}$
Sinus hyperbolicus	sinh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cosh
Cosinus hyp.	cosh	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	sinh
Tangens hyp.	tanh	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

Beispiele

6.1.11

$a > 0$, $\phi(x) := a^x$, $x \in \mathbb{R}$ (allgemein)
$\phi(x) = e^{x \cdot ln(a)}$: $f(x) = e^y$ und $g(x) = x \cdot ln(a) \to \phi = f \circ g$
$\phi' = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} ln(a) = e^{x \cdot ln(a)} ln(a) = a^x ln(a)$

6.1.14

Ableitung des ln

$f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = ln(x)$
$(ln)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{ln(y)}} = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty)$

6.1.16

Potenzreihen von Sinus und Cosinus konvergieren auf ganz $\mathbb{R}$.
$$sin'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = cos(x)$$
$$cos'(x) = -sin(x)$$

6.1.17

Berechnung des Reihenwerts mithilfe von 6.1.15
Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, Konvergenzradius 1, Welche Funktion ist hier gegeben?
Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$
Nun bis auf fehlenden ersten Summanden gleich der schon bekannten geometrische Reihe. Für $x \in (-1, 1)$ gilt:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x(\frac{1}{1-x} - 1)' = x \frac{-1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2.1.3 Höhere Ableitungen

Definitionen

6.1.19	Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine in I differenzierbare Funktion und ist f' auf I stetig, so nennt man f **stetig differenzierbar**. Man schreibt $C^1(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ stetig differenzierbar}\}$
6.1.20	a Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, $x_0 \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann heißt die Funktion f in x_0 (bzw. auf I) n**-mal differenzierbar** falls sie auf I schon $(n-1)$ differenzierbar ist und die Funktion $f^{(n-1)}$ in x_0 (bzw. auf I) wieder differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ die n**-te Ableitung** von f in x_0 bzw. $x \to f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitungsfunktion von f auf I. b) Ist die n-te Ableitung von f auf I selbst sogar wieder stetig auf I, so sagt man f sei sei n-mal **stetig differenzierbar** auf I. Man schreibt $C^n(I) := \{f : I\mathbb{R} : f \; n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$. c) Ist $f \in C^n(I)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennt man f **beliebig oft differenzierbar**. Man verwendet dafür die Bezeichnung $f \in C^\infty(I) := \prod_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.

Bemerkungen

6.1.20	Die Funktion selbst wird als nullte Ableitung definiert $f^{(0)} := f$.

2.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

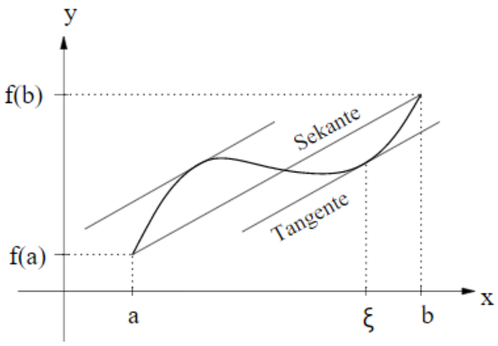
Definitionen

6.2.9	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^{\infty}(I)$. a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ heißt **Taylorreihe** von f um x_0. b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ heißt das Polynom $T_{k,f}(x;x_0) := \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ das **Taylorpolynom k-ten Grades** von f in x_0.

Sätze

6.2.1	**Mittelwertsatz der Differenzialrechnung** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$ sei differenzierbar in (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, bzw. gleichbedeutend $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ gilt.
6.2.2	a) **Satz von Rolle** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$. Ist f auf (a,b) differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem **Intervall** I differenzierbar. Dann gilt Ist $f' = 0$ auf I, so ist f auf I konstant. Ist $f' > 0$ auf I, so ist f auf I streng monoton wachsend. Ist $f' < 0$ auf I, so ist f auf I streng monoton fallend. Ist $f' \geq 0$ auf I, so ist f auf I monoton wachsend. Ist $f' \leq 0$ auf I, so ist f auf I monoton fallend. c) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen und gilt $f' = g'$ auf I, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$ gilt.
6.2.6	**Satz von de 'Hospital** Es sei (a,b) ein offenes Intervall $\mathbb{R}$ ($a = -\infty$ und $b = \infty$ hier zugelassen) und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Gilt dann $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = 0$ oder $lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ und existiert der Grenzwert $L := lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ($L = \pm\infty$ zugelassen), dann gilt $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$
6.2.12	**Satz von Taylor** Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x, x_0 \in I$ und für ein $k \in \mathbb{N}_{\nvdash}$ sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $k+1$-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0, so dass gilt $f(x) = T_{k,f}(x;x_0) + \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$ (Vorne Annäherung, hinten Fehlerterm - Abschätzung wie gut die Taylorreihe zu Funktion passt)

Bemerkungen

6.2.1	Sekantensteigung der Funktion (erhalten durch a und b) entspricht irgendwann zwischen a und b tatsächlich der Tangentensteigung. 
6.2.6	Achtung! Alle Voraussetzungen prüfen!
6.2.12	a) Taylor für $k = 0$ ist Mittelwertsatz. b) Der Fehlerterm $$R_{k,f}(x; x_0) := \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$ der die Differenz zwischen $f(x)$ und der Näherung durch das Taylorpolynom k-ten Grades beschreibt, wird auch als Restglied bezeichnet.

Beispiele

6.2.10	Taylorpolynom k-ten Grades ist anschaulich die bestmögliche Approximation an die Funktion f

2.3 Extremwerte

Definitionen

6.3.1	Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. a) Man sagt, dass f in $x_0 \in D$ ein **globales Maximum** (bzw. Minimum) hat, falls $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_=)$) für alle $x \in D$ gilt. b) f hat in $x_0 \in D$ ein **relatives Maximum** (bzw. Minimum), falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt. c) Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen **Extremum** in x_0 wenn f dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.

Sätze

6.3.3	Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Ist x_0 ein innerer Punkt von I und hat f in x_0 ein relatives Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.
6.3.5	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I^\circ$ und $f \in C^n(I)$ für ein $n \geq 2$. Weiter gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist nun n ungerade, so hat f in x_0 kein Extremum, ist n gerade, so liegt in x_0 ein Extremum vor, und zwar falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein **Minimum** und falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein **Maximum**.

Bemerkungen

6.3.3	Innerer Punkt von D: Kein Randpunkt, möglich Kugel um den Punkt zu legen Warnung: x_0 innerer Punkt ist wesentlich Warnung: Umkehrung des Satzes gilt nicht (Kann auch Sattelpunkt sein, nicht unbedingt Extremum)

2.4 Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Partielle Ableitung

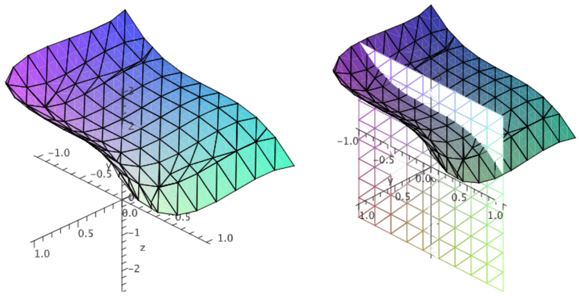
Definitionen

6.4.1	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, $x_0 \in G$ und $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Existiert der Grenzwert $$(\partial_v f)(x_0) := lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h},$$ so heißt f in x_0 in Richtung v differenzierbar und $(\partial_v f)(x_0)$ die **Richtungsableitung** von f in x_0 in Richtung v. (Betrachtung der Funktionswerte entlang einer Geraden im Raum)
6.4.3	Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ die **Standardbasis** des $\mathbb{R}^d$. a) Existieren in einem $x_0 \in G$ die Richtungsableitungen von f in alle Richtungen $e_1, e_2, \ldots e_d$, so heißt f in x_0 **partiell differenzierbar**. Man schreibt dann für $j = 1, 2, \ldots, d$ auch $$\partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := f_{x_j}(x_0) := (\partial_{e_j} f)(x_0)$$ für die **partielle Ableitung von f in x_0 nach der j-ten Koordinate**. b) Ist f in allen $x_0 \in G$ partiell differenzierbar, so sagt man f ist in G partiell differenzierbar und schreibt $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} : G \to \mathbb{R}^p$ für die **partielle Ableitungs(-funktion)** c) Ist f in G partiell differenzierbar und sind sämtliche partielle Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_d f : G \to \mathbb{R}^p$ stetig, so nennt man f **stetig partiell differenzierbar** in G.
6.1.10	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ partiell differenzierbar. Die p x d-Matrix aller partiellen Ableitungen $$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \ldots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \ldots & \partial_d f_2(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \ldots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$$ heißt **Jakobi-Matrix** von f. Im Spezialfall $p = 1$ nennt man die 1 x d-Matrix, d.h. den $\mathbb{R}^d$-Zeilenvektor $$\nabla f(x_0 := J_f(x_0)) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0))$$ den **Gradient** von f.
6.4.13	Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $x_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Diese nennt man n-mal (stetig) partiell differenzierbar in x_0, wenn sie schon $(n-1)$-mal (stetig) partiell differenzierbar auf G ist und alle $(n-1)$-ten partiellen Ableitungen in x_0 wieder (stetig) partiell differenzierbar sind. Notation: $\partial_1 \partial_3 \partial_1$ (Reihenfolge meist egal, wenn nicht von innen nach außen)

Sätze

6.4.8	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in G$, so ist f in x_0 genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \ldots, f_p : G \to \mathbb{R}$ in x_0 partiell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt $$\partial_j f(x_0) = (\partial_1 f_1(x_0), \partial_j f_2(x_0), \ldots, \partial_j f_p(x_0))^T$$
6.4.15	**Satz von Schwarz** Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine n-mal stetig partiell differenzierbare Funktion, so ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung n vertauschbar. (Sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, gilt der Satz nicht.)

Bemerkungen

6.4.1	
6.4.3	Berechnung Ableitung: Alle anderen Variablen werden als konstante Parameter behandelt
6.1.10	Es gilt $J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla(f_1(x)) \\ \nabla(f_2(x)) \\ \dots \\ \nabla(f_p(x)) \end{pmatrix}$
6.1.10	Bedeutung Gradient: Falls f glatt genug ist gibt der Vektor $\nabla f(x_0)$ die Richtung, in der der Graph von f an der Stelle x_0 am stärksten ansteigt und seine Länge entspricht dieser maximalen Steigung. (Basis für Optimierungsverfahren)

Beispiele

6.4.7	$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xe^{xz+y^2}$: $\partial_1 f(x,y,z) = e^{xz+y^2} + xe^{xz+y^2} \cdot z$ $\partial_2 f(x,y,z) = xe^{xz+y^2} \cdot 2y$ $\partial_3 f(x,y,z) = xe^{xz+y^2} \cdot x$
6.4.14	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 y + xe^y$ Ableitungen erster Ordnung: $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 y + e^y$ und $\partial_2 f(x,y) = x^3 + xe^y$ Ableitungen zweiter Ordnung: $\partial_1^2 f(x,y) = 6xy \qquad \partial_1\partial_2 f(x,y) = 3x^2 + e^y$ $\partial_2\partial_1 f(x,y) = 3x^2 + e^y \qquad \partial_2^2 f(x,y) = xe^y$ Man beobachtet, dass das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängig sind.

2.5 Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen - Totale Differenzierbarkeit

Definitionen

6.5.1	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $x_0 \in G$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^p$ heißt **(total) differenzierbar** in x_0, wenn es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ gibt, so dass gilt $$f(x) = f(x_0) * \Phi(x - x_0) + r(x),\ x \in G$$ mit einer Funktion $r : G \to \mathbb{R}^p$ die $$lim_{x \to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$$ erfüllt. Die lineare Abbildung $Df(x_0) := \Phi$ heißt dann **(totale) Ableitung** von f in x_0. Ist f in allen $x_0 \in G$ total differenzierbar, so nennt man die Funktion $Df : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ die **Ableitung(sfunktion)** von f.
6.5.17	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **konvex**, wenn für alle $a, b \in M$ auch $\bar{ab} \subseteq M$ gilt.
6.5.20	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in G$ zweimal partiell differenzierbar. Dann heißt die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen $$H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1,\ldots,d}$$ **Hesse-Matrix** von f in x_0.
6.5.22	**Satz von Taylor** Den Ausdruck $$T_{1,f}(x; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$ bezeichnen wir wieder als das **Taylorpolynom** ersten Grades von f in x_0.

Sätze

6.5.6	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.
6.5.7	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine in $x_0 \in G$ total differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Dann existiert in x_0 die Richtungsableitung von f in Richtung v und es gilt $(\partial_v f)(x_0) = Df(x_0)(v).$
6.5.8	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Ist f in x_0 total differenzierbar, so ist f in x_0 auch partiell differenzierbar und die Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^p$ ist die Jakobi-Matrix $J_f(x_0)$.
6.5.10	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ $\partial_v f(x_0) = J_f(x_0)v.$
6.5.12	Ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ stetig partiell differenzierbar, so ist f in x_0 sogar total differenzierbar.
6.5.13	**Kettenregel** Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, sowie $g : G \to \mathbb{R}^p$ mit $g(G) \subseteq H$ und $f : H \to \mathbb{R}^q$ Funktionen, so dass g in $x_0 \in G$ und f in $g(x_0)$ total differenzierbar sind. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : G \to \mathbb{R}^q$ in x_0 total differenzierbar und es gilt $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$ (Enthält Matrixmultiplikation)
6.5.16	**Mittelwertsatz** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Sind $a, b \in G$ so gewählt, dass $\bar{ab} \subseteq G$, so gibt es ein $\xi \in \bar{ab}$ mit $\bar{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}$
6.5.18	**Schrankensatz** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, sowie $f : G \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Gibt es ein $L \geq 0$ mit $\|\|\nabla f(x)\|\|_2 \leq L$ für alle $x \in G$, so gilt $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|\|x - y\|\|_2$, für alle $x, y \in G$ d.h. f ist **Lipschitz-stetig** auf G.
6.5.22	**Satz von Taylor** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene und konvexe Menge und $f : G \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar (damit auch 2x total differenzierbar) in G. Zu jeder Wahl von $x_0, x \in G$ gibt es dann ein $\xi \in \bar{x_0 x}$ mit $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$

Bemerkungen

6.5.4	Ableitung einer linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ ist in jedem Punkt die Abbildung Φ selbst
6.5.8	Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch.
6.5.12	$\begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell differenzierbar} & \Longrightarrow & \text{total differenzierbar} & \Longrightarrow & \text{stetig} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{partiell differenzierbar} & \Longleftarrow & \text{alle Richtungsabl. existieren} & & \end{array}$
6.5.16	$\bar{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}$: Verbindungsstrecke von a nach b
6.5.20	Hesse-Matrix ist immer eine quadratische Matrix. Sogar symmetrisch, falls f stetig partiell differenzierbar in x_0 ist Es gilt $H_f(x_0) = J_{(\nabla f)^T}(x_0)$

2.6 Extremwertprobleme in mehreren Variablen

Definitionen

6.6.1	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : G \to \mathbb{R}$. a) Man sagt, dass f in $x_0 \in G$ ein globales Maximum (bzw. Minimum) hat, falls $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in G$ gilt. b) f hat in $x_0 \in G$ ein relatives Maximum (bzw. Minimum), falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in G$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ gilt. c) Allgemein spricht man von einem globalen bzw. relativen Extremum in x_0, wenn f dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.

Sätze

6.6.2	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und x_0 ein innerer Punkt von G, sowie $f : G \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x_0. Hat f in x_0 ein relatives Extremum, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$.
6.6.3	Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und für $x_0 \in G$ gelte $\nabla f(x_0) = 0$. Ist dann die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ a) *positiv definit*, so hat f in x_0 ein relatives Minimum b) *negativ definit*, so hat f in x_0 ein relatives Maximum c) *indefinit*, so hat f in x_0 kein relatives Extremum

2.7 Integration in $\mathbb{R}$

2.7.1 Definition des bestimmten Integrals

Definitionen

6.7.1	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine endliche Menge $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ heißt **Zerlegung** des Intervalls $[a, b]$, wenn gilt $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Für eine solche Zerlegung und eine gegebene beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ setzen wir nun für jedes $j = 1, \dots, n$ $I_j := [x_{j-1}, x_j], \|I_j\| := x_j - x_{j-1}, m_j := inf\ f(I_j), M_j := sup\ f(I_j)$
6.7.2	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $Z = \{x_0, dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt der Wert $\underline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j \|I_j\|$ die **Untersumme von f zu Z** $\bar{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j \|I_j\|$ die **Obersumme von f zu Z**
6.7.4	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Wir nennen $\underline{\int_a^b} f(x)dx := sup\{\underline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von [a,b]}\}$ **unteres Integral** von f auf $[a, b]$ $\overline{\int_a^b} f(x)dx := inf\{\bar{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\ \}$ **oberes Integral** von f auf $[a, b]$ f auf $[a, b]$ heißt (Riemann-)integrierbar, wenn $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$
6.7.9	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Dann setzt man für jedes $c \in [a, b]$ $\int_c^c f(x)dx := 0$ und $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.

Sätze

6.7.7	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen. a) **Monotone**: Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch $\int_a^b f(x)f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ b) **Homogenität**: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist auch αf integrierbar und es gilt $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ c) **Additivität**: Auch die Funktion $f + g$ ist integrierbar und es gilt $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ d) **Dreiecksungleichung**: Die Funktion $\lvert f\rvert$ ist ebenfalls integrierbar und es gilt $\lvert \int_a^b f(x)dx\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$ e) Ist $c \in (a, b)$ so ist f auch integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$ und es gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$
6.7.8	**Standardabschätzung** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $\lvert \int_a^b f(x)dx\rvert \leq (b - a)sup_{x\in[a,b]}\lvert f(x)\rvert = (b - a)\lvert\lvert f\rvert\rvert_\infty$
6.7.10	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Jede stetige und jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Bemerkungen

6.7.2	Es gilt $\underline{s}_f(Z) \leq \bar{s}_f(Z)$
6.7.4	Flächeninhalte unter der $x - Achse$ zählen negativ.

2.7.2 Stammfunktionen und der Hauptsatz

Definitionen

6.7.13	Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt F ist eine **Stammfunktion** von f, wenn F auf $[a, b]$ differenzierbar ist und $F' = f$ auf $[a, b]$ gilt. (Wenn F Stammfunktion von f ist, dann auch $F + c$, $c \in \mathbb{R}$)
6.7.18	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Besitzt $f : I \to \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für die Menge aller Stammfunktionen auch das sogenannte unbestimmte Integral $\int f(x)dx.$ Dieses bezeichnet eine Menge von Funktionen und keine bestimmte Zahl.

Sätze

6.7.15	**Hauptsatz der Differnzial- und Integralrechnung** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c \in [a, b]$, sowie eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen a) Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_c^x f(s)ds, x \in I$, ist eine Stammfunktion von f. b) Ist $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt $\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(x)ds$, für alle $x \in [a, b]$.
6.7.20	Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius größer null. Dann hat die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ denselben Konvergenzradius und es gilt $\int \sum_{n=0}^\infty a_n x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$ innerhalb des Konvergenzbereichs.

Bemerkungen

6.7.15	Ist F eine Stammfunktion von f, so erhält man sofort $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\|_{x=a}^{x=b}$$

Beispiele

6.7.18	$\int sin(x)dx = -cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

2.8 Integrationstechniken

Sätze

6.8.1	**Partielle Integration** Es seien $f, b : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt $$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
6.8.4	**Substitutionsregel** Es seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, sowie $f \in C([a, b])$ und $g \in C^1([c, d])$ mit $g([c, d]) \subseteq [a, b]$. Dann ist $$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$$
6.8.9	**Differenzieren von Parameter-Integralen** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $[\alpha, \beta]x[a, b] \subseteq G$ und $f : G \to \mathbb{R}$ sei (total) differenzierbar, sowie die partielle Ableitung $\partial_1 f$ stetig. Dann ist die Funktion $$g(x) := \int_a^b f(x, y)dy,\ x \in [\alpha, \beta]$$ differenzierbar und es gilt $$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \int_a^b \partial_1 f(x, y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy,\ x \in [\alpha, \beta]$$

Bemerkungen

6.8.1	Gilt auch für unbestimmte Integrale $$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$
6.8.4	Schreibweise für unbestimmte Integrale $$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx\|_{x=g(t)}$$ $\|_{x=g(t)}$: Zuerst gesamtes Intervall ausrechnen, dann am Ende überall für x den Wert $g(t)$ einsetzen.

Beispiele

6.8.3	$\int_0^1 xe^x dx$ $g(x) = x, f'(x) = e^x \to f(x) = e^x$ Partielle Integration liefert: $$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x dx = e - (e^x\|_{x=0}^{x=1}) = e - (e - 1) = 1$$ Die Wahl von f und g ist hierbei für den Erfolg sehr entscheidend.
6.8.3	Erschaffung einer zweiten künstlichen Funktion oft notwendig. $$\int ln(x)dx = \int 1 \cdot ln(x)dx = x\ ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}$$ Wahl hier: $g(x) = ln(x)$ und $f'(x) = 1$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Problemstellung und Motivation

Definitionen

7.1.2	Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I\ x\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt die Gleichung $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y^n(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)),\ t \in I$ **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung n** (Hängt F nicht von der ersten Variable t ab, so nennt man die DGL **autonom**)
7.1.9	Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $F : I\ x\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. a) Dann heißt $(AWP) \begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)})(t), & t \in I \\ y^{(j)}(t_0) = y_j, & j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$ ein **Anfangswertproblem** mit Anfangswerten $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ b) Jede Funktion $y : J \to \mathbb{R}$, die • auf einem offenen Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ definiert ist • auf J n-mal stetig differenzierbar ist und • die $n+1$ Gleichungen in (AWP) erfüllt heißt **Lösung** des Anfangswertproblems. c) Ist die Lösung sogar auf dem ganzen Intervall I eine Lösung der Gleichung so nennt man sie eine **globale Lösung**.

Bemerkungen

	Differentialgleichung: Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung bekannt
7.1.4	Fall von DGL der Ordnung n immer auf Fall erster Ordnung $(n = 1)$ zurückspielbar. Also zuerst nur Gleichungen mit $n = 1$ der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in I$ $f : I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktion und $y : I \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion.
7.1.4	Autonome DGL erster Ordnung: $y'(t) = f(y(t))$, $t \in I$
7.1.4	Stetig differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, die DGL erfüllt: **Lösung der DGL**
7.1.6	DGLs im Allgemeinen mehrere Lösungen Anzahl der frei wählbaren Konstanten entspricht meist der Ordnung der Gleichung

Beispiele

7.1.1	Wachstumsmodell: Zuwachs proportional dazu, wie groß die Population schon ist $y(t)$ Populationsgröße zum Zeitpunkt $t \geq 0$: $y'(t) = \mu y(t)$, $t \geq 0$ μ Proportionalitätskonstante (hier Wachstumsrate)
7.1.2	Beispiele für DGL: a) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = sin(t)$ mit $n = 2$ und $F(t, y(t), y'(t)) = sin(t) - 2y'(t) - y(t)$ b) $y'(t) = t^2 + 1$ mit $n = 1$ und $F(t, y(t)) = t^2 + 1$

3.2 Elementare Lösungstechniken

3.2.1 Getrennte Veränderliche

Sätze

7.2.2	**Trennung der Variablen** Auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei mit stetigen Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $$\begin{cases} y'(t) = g(t)h(y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ gegeben. Ist $h(y_0) \neq 0$, so existiert ein offenes Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$, auf dem das Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt. Diese ist gegeben durch $$y = H^{-1} \circ G \text{ mit } G(t) := \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau \text{ und } H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{h}{h(\eta)}d\eta$$

Bemerkungen

7.2.2	Verwendung dieser Methode, falls eine DGL der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ zu lösen ist, bei der die rechte Seite f von der Form $f(t, y) = g(t)h(y)$ ist. (Abhängigkeit zwischen t und y multiplikativ getrennt)

3.2.2 Homogene Differentialgleichungen

Bemerkungen

	Homogene DGL: Rechte Seite hängt nur vom Quotienten $\frac{y}{t}$ ab, es existiert also eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als $y'(t) = f(t, y(t)) = g(\frac{y(t)}{t})$ geschrieben werden kann. Diese können durch Substitution gelöst werden, wir setzen $u(t) := \frac{y(t)}{t}$. Nun schauen wir welche Gleichung von u gelöst wird, wenn y Lösung der Ausgangsgleichung ist. $$u'(t) = \frac{ty'(t)-y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}(g(\frac{y(t)}{t}) - u(t) = \frac{1}{t}(g(u(t)) - u(t))$$ Dieses u erfüllt Gleichung die nach Methode der getrennten Veränderlichen gelöst werden kann.

Beispiele

7.2.4	Anfangswertproblem: $$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y(t)^2}, t \in \mathbb{R} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$ Die obige Substitution $u(t) = y(t)/t$ liefert hier: $$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}(u(t) - \frac{1}{u(t)^2} - u(t)) = -\frac{1}{t}\frac{1}{u(t)^2}$$ Durch Methode der getrennten Veränderlichen finden wir: $$u^2du = -\frac{1}{t}dt, \text{ also } \int u^2du = -\int \frac{1}{t}dt$$ Das liefert nach Integration $$\frac{u^3}{3} = -ln(t) + c, \text{ d.h. } u(t) = \sqrt[3]{-3ln(t) + 3c}$$ was schließlich zu $$y(t) = tu(t) = t\sqrt[3]{-3ln(t) + 3c}$$ führt. Mit dem Anfangswert bekommen wir wegen $$1 = y(1) = \sqrt[3]{3c} \Rightarrow 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$ die Lösung $$y(t) = t\sqrt[3]{1 - 3ln(t)}$$ die man leicht in einer Probe verifiziert.

3.2.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definitionen

7.2.5	Eine lineare DGL erster Ordnung hat die allgemeine Form $$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), t \in I$$ wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I sind. Ist $b = 0$, so nennt man die Gleichung homogen, sonst inhomogen.

Sätze

7.2.6	**Superpositionsprinzip** Es seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der homogenen linearen Gleichung $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. Dann ist auch jede Linearkombination $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Gleichung.
7.2.8	**Variation der Konstanten-Formel** Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C(I)$ und $t_0 \in I$, sowie $y_0 \in \mathbb{R}$. Das lineare Anfangswertproblem $$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ besitzt genau eine globale Lösung, die durch $$y(t) = e^{-A(t)}y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds \text{ mit } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$ gegeben ist.

3.3 Systeme von Differentialgleichungen

3.3.1 Lineare Systeme

Definitionen

7.3.1	E seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $N \in \mathbb{N}*$ und für jede Wahl von $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ stetige Funktionen $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$, sowie $b_j : I \to \mathbb{R}$ gegeben. a) Dann heißt $$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1N}(t)y_N(t) + b_1(t) \\ \dots \\ y_N'(t) = a_{N1}(t)y_1(t) + a_{N2}(t)y_2(t) + \dots + a_{NN}(t)y_N(t) + b_N(t) \end{cases}$$ $t \in I$, ein **System von linearen gewöhnlichen DGL erster Ordnung.** b) Das dazugehörige Anfangswertproblem ergibt sich, indem für ein $t_0 \in I$ und vorgegebene $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{N,0} \in \mathbb{R}$ noch $$y_1(t_0) = y_{1,0}, y_2(t_0) = y_{2,0}, \dots, y_N(t_0) = y_{N,0}$$ gefordert wird. c) Ist $b = 0$, so heißt das System homogen, sonst inhomogen.
7.3.4	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{NxN}$ stetig. Jede Basis des Lösungsraums aller Lösungen von Gleichung (7.2) nennt man ein Fundamentalsystem dieser Gleichung.

Sätze

7.3.3	Die Menge L aller Lösungen der Gleichung (7.2) ist ein N-dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I;\mathbb{R}^N)$.
7.3.5	Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_N \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ Lösungen der Gleichung (7.2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: i) $y_1, y_2, \ldots, y_N$ sind linear unabhängig in $C1(I;\mathbb{R}^N)$, d.h. $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ ist ein Fundamentalsystem der Gleichung. ii) Für alle $t \in I$ ist die Menge $\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^N$. iii) Es gibt ein $t \in I$, für das die Menge $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^N$ ist.
7.3.6	Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sowie $A : I \to \mathbb{R}^{NxN}$ und $b : I \to \mathbb{R}^N$ stetige Funktionen. Ist $y_p : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung der Gleichung (7.3), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch $y = y_p + y_h$, wobei y_h eine Lösung des zugehörigen Systems (7.2) ist.

Bemerkungen

7.3.1	Das Ganze lässt sich in Matrixschreibweise um Einiges übersichtlicher schreiben.

3.3.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Definitionen

7.3.8	Es sei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$. Dann heißt $$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$ die **Matrix-Exponentialfunktion** von A. (Reihe ist für jede Matrix konvergent)

Sätze

7.3.10	Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{NxN}$. Dann gelten die folgenden Aussagen über die Matrix-Exponentialfunktion: a) Für die Nullmatrix O gilt $e^O = I$. b) Kommutieren A und B, d.h. gilt $AB = BA$, so ist $e^A e^B = e^{A+B}$ c) Die Matrix e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. d) Ist A eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, so ist e^A ebenfalls eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_N}$.
7.3.11	Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathbb{R}^{NxN}$. Dann bilden die Spalten der Matrix e^{tA} ,$t \in I$, ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'(t) = Ay(t), t \in I$.
7.3.14	Es sei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Dann ist $$\{e^{t\lambda_1}v_1, e^{t\lambda_2}v_2, \ldots, e^{t\lambda_N}v_N\}$$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$.
7.3.15	Sei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$, Dann kann man ein Fundamentalsystem für $y'(t) = Ay(t)$ folgendermaßen konstruieren. Sei λ ein Eigenwert von A, d.h. $det(A - \lambda I) = 0$, und m die Vielfachheit der Nullstelle λ. Dann hat $(A - \lambda I)^m$ einen m-dimensionalen Kern. Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis dieses Kerns. Sei $$u_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{t\lambda} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k v_j$$ für $j = 1, \ldots, m$. Wenn λ reell ist, dann sind $u_1, \ldots, u_m$ die Beiträge von λ zum Fundamentalsystem. Wenn λ komplex ist und $Im\lambda > 0$, dann sind $Reu_1, Imu_1, \ldots, Reu_m, Imu_m$ die Beiträge von λ zum Fundamentalsystgem, wobei der konjugierte Eigenwert $\bar{\lambda}$ keinen Beitrag liefert.
7.3.16	**Variation der Konstanten-Formel** Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{R}^{NxN}$ eine Matrix und $b : I \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, sowie $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Dann hat das lineare Anfangswertproblem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ die eindeutige globale Lösung $$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Bemerkungen

	Konstante Koeffizienten: $y'(t) = Ay(t) + b(t)$, $t \in I$ Funktion A ist in der DGL konstant durch eine feste Matrix gegeben.
7.3.12	Leitet man die gesamte Matrix e^{tA} komponentenweise nach t ab, so bedeutet obiger Satz die eingängige Matrixgleichheit $$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

3.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definitionen

7.4.3	a) Jede Basis des Raums aller Lösungen in Satz 7.4.2 a) nennt man ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. b) Die Lösung y_p der inhomogenen Gleichung im Satz 7.4.2 b) heißt spezielle Lösung oder auch **Partikulärlösung der Gleichung (7.8)**.
7.4.5	Es sei $$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$ eine homogene lineare DGL der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt $$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_y\lambda + a_0 = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$$ **charakteristisches Polynom der DGL**.

Sätze

7.4.1	Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : Ix\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $y : I \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der DGL in (7.6), wenn $v = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})^T : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems $v'(t) = G(t, v(t))$ mit $$G(t, v(t)) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \dots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix}$$ ist.
7.4.2	Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen a) Ist $g = 0$, so ist die Menge aller Lösungen der Gleichung ein Untervektorraum der Dimension n von $C^n(I)$. b) Ist y_p eine Lösung der Gleichung (7.8), so ist jede Lösung dieser Gleichung gegeben durch $y = y_p + y_h$, wobei y_h eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (d.h. mit $g = 0$) ist.
7.4.6	Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \geq 2$. Mit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ sei die DGL $$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0, t \in I$$ gegeben und es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms mit $Im(\lambda_i) \geq 0$, sowie m_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j für $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Dann ist ein Fundamentalsystem für obige Gleichung gegeben durch $$F = F_1 \cup \dots \cup F_k,$$ wobei F_j im Falle $\lambda_j = \lambda \in \mathbb{R}$ als $$\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t}\}$$ und im Falle $\lambda_j = \lambda + i\omega$ mit $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega > 0$ als $$\{e^{\lambda t}cos(\omega t), e^{\lambda t}sin(\omega t), te^{\lambda t}sin(\omega t), \dots, t^{m_j-1}e^{\lambda t}cos(\omega t), t^{m_j-1}e^{\lambda t}sin(\omega t)\}$$ definiert ist.

3.5 Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

Sätze

7.5.1	**Satz von Peano** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : Ix\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann hat für jedes $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(t) = y_0 \end{cases}$ eine Lösung, d.h. es gibt ein offenes Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ und eine Funktion $y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, die das Anfangswertproblem auf J löst.
7.5.3	**Satz von Picard-Lindelöff** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : Ix\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Genügt dann f einer Lipschitzbedingung, d.h. exisitiert ein $L > 0$ mit $\|\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|\| \leq L\|\|y_1 - y_2\|\|$ für alle $t \in I$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ dann existiert ein kompaktes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$, sodass das Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(t) = y_0 \end{cases}$ eindeutig lösbar ist.