# Mathematik II für Informatik - Zusammenfassung

Jonas Milkovits

Last Edited: 15. Juli 2020

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit

## 1.1 Die reellen Zahlen

### Definitionen

| | |
|---|---|
| 5.1.1 | Die **Menge der reellen Zahlen** ist der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das Vollständigskeitsaxiom *"Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Suprenum."* erfüllt. |
| 5.1.3 | Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt:<br>a) nach **oben (unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.<br>b) **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. |
| 5.1.5 | Die Funktion $\lvert \cdot \rvert : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{falls x} \geq 0 \\ -x & \text{falls x} < 0 \end{cases}$$ heißt **Betragsfunktion** und $\lvert x \rvert$ heißt Betrag von $x$. |
| 5.1.8 | **Intervalle:**<br>Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen:<br>• $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall<br>• $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall<br>• $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall<br>• $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall<br>**Halbstrahlen:**<br>• $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$<br>• $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$<br>• $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$<br>• $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$<br>• $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ |

### Sätze

| | |
|---|---|
| 5.1.4 | Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. (Umkehrung Vollständigkeitsaxiom) |
| 5.1.6 | **Rechenregeln Betragsfunktion:**<br>Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:<br>a) $\lvert x \rvert \geq 0$<br>b) $\lvert x \rvert = \lvert -x \rvert$<br>c) $\pm x \leq \lvert x \rvert$<br>d) $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$<br>e) $\lvert x \rvert = 0$ genau dann, wenn $x = 0$<br>f) $\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ (Dreiecksungleichung) |

### Bemerkungen

| | |
|---|---|
| | Ein Körper mit Totalordnung $\leq$ heißt **angeordneter Körper**, falls gilt:<br>• $\forall a, b, c \in K : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$<br>• $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc$ |

## 1.2 Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

### Definitionen

| | |
|---|---|
| 5.2.1 | **Ganzzahlige Potenzen:**<br>Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist<br>a) $x^n := x \cdot x \cdot x ... \cdot x$ ($n$-mal $x$)<br>b) $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, falls $x \neq 0$<br>c) $x^0 := 1$ |
| 5.2.3 | Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Die **eindeutige Zahl** $x^n \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ heißt $n$-te **Wurzel** von $a$ und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. Für den wichtigsten Fall $n = 2$ gibt es die Konvention $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$. |
| 5.2.5 | Aus der Eindeutigkeit der $n$-ten Wurzel (5.2.4) folgt:<br>Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist die **rationale Potenz** definiert durch:<br>$$x^q = x^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[x]{x})^n.$$ |
| 5.2.7 | Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann wird die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ als $n$ **Fakultät** bezeichnet.<br>Weiterhin definieren wir $0! := 1$.<br>Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** "$n$ über $k$". |

### Sätze

| | |
|---|---|
| 5.2.2 | **Existenz der Wurzel:**<br>Für jedes $a \in R_+$ und alle $n \in N^*$ gibt es genau ein $w \in R_+$ mit $x^n = a$. |
| 5.2.4 | Es seien $q \in \mathbb{Q}$ und $m, \in \mathbb{Z}$, sowie $n, r \in \mathbb{N}^*$ so, dass $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$.<br>Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$: $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{m})^p$. |
| 5.2.9 | Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:<br>a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$<br>b) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$<br>c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ (Binomialformel) |

### Bemerkungen

| | |
|---|---|
| 5.2.6 | **Rechenregeln für Potenzen (auch rational)**<br>$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:<br>• $x^p x^q = x^{p+q}$<br>• $x^p y^p = (xy)^p$<br>• $(x^p)^q = x^{pq}$<br>• $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$<br>• $\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p$ |
| 5.2.8 | **Fakultät und Binomialkoeffizient**<br>$n!$ ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von $n$ unterschiedlichen Dingen.<br>$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus $n$ unterscheidbaren Dingen genau $k$ auszuwählen. |
| | Zugriff auf **Binomialkoeffizienten** für binomische Formeln durch Pascal'sches Dreieck |

## 1.3 Konvergenz von Folgen

### 1.3.1 Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

### Definitionen

| | |
|---|---|
| 5.3.1 | Es sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Die Folge $(a_n)$ heißt **konvergent** gegen $a$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exisitert mit $$\|a_n - a\| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$ In diesem Fall heißt $a$ der **Grenzwert** oder Limes von $(a_n)$ und wir schreiben: $$lim_{a\to\infty} = a \text{ oder } a_n \to a(n \to \infty).$$ Ist $(a_n)$ eine Folge $\mathbb{K}$, die gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, so heißt diese **divergent**. |
| 5.3.4 | Eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist.<br>Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so setzen wir weiter $$sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := sup_{n=0}^{\infty} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ $$inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := inf_{n=0}^{\infty} a_n := inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ |
| 5.3.13 | **Bestimmte Divergenz:**<br>Eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ **divergiert bestimmt nach** $\infty(-\infty)$ und wir schreiben $lim_{n\to\infty} a_n = \infty(-\infty)$, wenn es für jedes $C \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq C(a_n \leq -C)$ für alle $n \leq n_0$ gilt. |

### Sätze

| | |
|---|---|
| 5.3.5 | Jede **konvergente Folge** in $\mathbb{K}$ ist **beschränkt**.<br>Die Umkehrung dieses Satzes ist **falsch**. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren. |
| 5.3.7 | **Grenzwertsätze**<br>Es seien $(a_n), (b_n)$ und $(c_n)$ Folgen in $\mathbb{K}$. Dann gilt:<br>a) Ist $lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$<br>b) Gilt $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$ so gilt:<br>i) $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$<br>ii) $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$<br>iii) $lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$<br>iv) Ist zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$<br>Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt außerdem:<br>c) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $lim_{n\to\infty} b_n = b$, so folgt $a \leq b$<br>d) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sind $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergent mit $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = a$, so ist auf die Folge $(c_n)$ konvergent und es gilt $lim_{n\to\infty} c_n = a$ **(Sandwich-Theorem)** |

### Bemerkungen

| | |
|---|---|
| | Sei $X$ eine Menge. Eine **Folge** in $X$ ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$.<br>(Für $X = \mathbb{R}$ reelle Folge, $X = \mathbb{C}$ komplexe Folge)<br>Schreibweise: $a_n$ statt $a(n)$. ($n$-tes Folgeglied)<br>Ganze Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)$ oder $(a_n)_{n>0}$ |
| | Folgen haben maximal einen (eindeutiger) Grenzwert |
| | Bezeichnung von Folgen, für die der Grenzwert 0 ist: **"Nullfolge"** |
| 5.3.7 | c) ist falsch mit $<$, nur richtig mit $\leq$ |
| 5.3.10 | **Wichtige konvergente Folgen**<br>a) Ist $(a_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $a$ und gilt $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist für jedes $p \in \mathbb{N}^*$ auch $lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.<br>b) Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt: $lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \end{cases}$<br>Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $\|q\| < 1$, so gilt ebenfalls $lim_{n\to\infty} q^n = 0$.<br>c) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}_+$.<br>d) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.<br>e) $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n := e \ (n \geq 1)$.<br>Beachte hier: Beide $n$ gleichzeitig wachsen lassen, keine trägen oder eiligere $n$. |

**Beispiele**

| | |
|---|---|
| 5.3.1 | Folge $(a_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$<br>Sei $\epsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\epsilon} < n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (beliebiges $n$ immer größer).<br>Für alle $n \geq n_0$ gilt dann:<br>$$\lvert a_n - a\rvert = \lvert a_n - 0\rvert = \lvert a_n\rvert = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$<br>$\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0 |
| 5.3.9 | Sei $p \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt und $a_n = \frac{1}{n^p}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Ungleichung $n \leq n^p$ und damit<br>$$0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}.$$<br>Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7$(d)$ auch die Folge $(a_n)$ konvergent und ebenfalls eine Nullfolge. |
| 5.3.9 | Wir untersuchen<br>$$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3},\ n \in \mathbb{N}.$$<br>Dazu kürzen wir durch Bruch durch die **höchste auftretende Potenz**:<br>$$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1+0+0}{1+0} = 1\ (n \to \infty).$$<br>Dieses Verfahren ist bei allen Polynom in $n$ geteilt durch Polynom in $n$"gut anwendbar. |
| 5.3.12 | $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (Differenz von zwei divergenten Folgen)<br>Trick: Erweiterung mit der Summe von Wurzeln bei Differenzen von Wurzeln<br>$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$<br>Sandwich: $lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. |
| 5.3.12 | **Geometrische Summenformel:**<br>$$a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n,\ n \in \mathbb{N}$$<br>$lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$. |

### 1.3.2 Konvergenzkriterien

**Definitionen**

| | |
|---|---|
| 5.3.14 | Eine reelle Folge $(a_n)$ heißt:<br>a) **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.<br>b) **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.<br>c) **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. |

**Sätze**

| | |
|---|---|
| 5.3.15 | **Monotonie Kriterium**<br>Ist die reelle Folge $(a_n)$ nach oben (nach unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist $(a_n)$ **konvergent** und es gilt:<br>$$lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ (bzw. } lim_{n\to\infty} a_n = inf_{n\in\mathbb{N}} a_n)$$ |

**Bemerkungen**

| | |
|---|---|
| | Monotonieverhalten, deswegen hier nur in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{C}$ (keine Ordnung) |

**Beispiele**