Mathematik II für Informatik - Zusammenfassung

Jonas Milkovits

Last Edited: 28. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit

1.1 Die reellen Zahlen

Definitionen

5.1.1	Die **Menge der reellen Zahlen** ist der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das Vollständigskeitsaxiom *"Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Suprenum."* erfüllt.
5.1.3	Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt: a) nach **oben (unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt. b) **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
5.1.5	Die Funktion $\lvert\cdot\rvert : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{falls x} \geq 0 \\ -x & \text{falls x} < 0 \end{cases}$$ heißt **Betragsfunktion** und $\lvert x\rvert$ heißt Betrag von x.
5.1.8	**Intervalle:** Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen: • $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall • $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall • $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall • $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall **Halbstrahlen:** • $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ • $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ • $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ • $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ • $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Sätze

5.1.4	Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. (Umkehrung Vollständigkeitsaxiom)
5.1.6	**Rechenregeln Betragsfunktion:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: a) $\lvert x\rvert \geq 0$ b) $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$ c) $\pm x \leq \lvert x\rvert$ d) $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$ e) $\lvert x\rvert = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ f) $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkungen

	Ein Körper mit Totalordnung $\leq$ heißt **angeordneter Körper**, falls gilt: • $\forall a, b, c \in K : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ • $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc$

1.2 Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Definitionen

5.2.1	**Ganzzahlige Potenzen:** Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist a) $x^n := x \cdot x \cdot x ... \cdot x$ (n-mal x) b) $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, falls $x \neq 0$ c) $x^0 := 1$
5.2.3	Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Die **eindeutige Zahl** $x^n \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ heißt n-te **Wurzel** von a und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. Für den wichtigsten Fall $n = 2$ gibt es die Konvention $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
5.2.5	Aus der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel (5.2.4) folgt: Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist die **rationale Potenz** definiert durch: $$x^q = x^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[x]{x})^n.$$
5.2.7	Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann wird die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ als n **Fakultät** bezeichnet. Weiterhin definieren wir $0! := 1$. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** "n über k".

Sätze

5.2.2	**Existenz der Wurzel:** Für jedes $a \in R_+$ und alle $n \in N^*$ gibt es genau ein $w \in R_+$ mit $x^n = a$.
5.2.4	Es seien $q \in \mathbb{Q}$ und $m, \in \mathbb{Z}$, sowie $n, r \in \mathbb{N}^*$ so, dass $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$: $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{m})^p$.
5.2.9	Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ b) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$ c) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (Binomialformel)

Bemerkungen

5.2.6	**Rechenregeln für Potenzen (auch rational)** $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ gilt: • $x^p x^q = x^{p+q}$ • $x^p y^p = (xy)^p$ • $(x^p)^q = x^{pq}$ • $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ • $\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p$
5.2.8	**Fakultät und Binomialkoeffizient** $n!$ ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von n unterschiedlichen Dingen. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n unterscheidbaren Dingen genau k auszuwählen.
	Zugriff auf **Binomialkoeffizienten** für binomische Formeln durch Pascal'sches Dreieck

1.3 Konvergenz von Folgen

1.3.1 Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

Definitionen

5.3.1	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Die Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen a, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exisitert mit $$\lvert a_n - a \rvert < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$ In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** oder Limes von (a_n) und wir schreiben: $$lim_{a \to \infty} = a \text{ oder } a_n \to a(n \to \infty).$$ Ist (a_n) eine Folge $\mathbb{K}$, die gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, so heißt diese **divergent**.
5.3.4	Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so setzen wir weiter $$sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := sup_{n=0}^{\infty} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ $$inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := inf_{n=0}^{\infty} a_n := inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$
5.3.13	**Bestimmte Divergenz:** Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ **divergiert bestimmt nach** $\infty(-\infty)$ und wir schreiben $lim_{n \to \infty} a_n = \infty(-\infty)$, wenn es für jedes $C \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq C(a_n \leq -C)$ für alle $n \leq n_0$ gilt.

Sätze

5.3.5	Jede **konvergente Folge** in $\mathbb{K}$ ist **beschränkt**. Die Umkehrung dieses Satzes ist **falsch**. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.
5.3.7	**Grenzwertsätze** Es seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Dann gilt: a) Ist $lim_{n \to \infty} a_n = a$, so gilt $lim_{n \to \infty} \lvert a_n \rvert = \lvert a \rvert$ b) Gilt $lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $lim_{n \to \infty} b_n = b$ so gilt: i) $lim_{n \to \infty}(a_n + b_n) = a + b$ ii) $lim_{n \to \infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ iii) $lim_{n \to \infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ iv) Ist zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist $lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt außerdem: c) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n \to \infty} a_n = a$ sowie $lim_{n \to \infty} b_n = b$, so folgt $a \leq b$ d) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $lim_{n \to \infty} a_n = lim_{n \to \infty} b_n = a$, so ist auf die Folge (c_n) konvergent und es gilt $lim_{n \to \infty} c_n = a$ **(Sandwich-Theorem)**

Bemerkungen

	Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. (Für $X = \mathbb{R}$ reelle Folge, $X = \mathbb{C}$ komplexe Folge) Schreibweise: a_n statt $a(n)$. (n-tes Folgeglied) Ganze Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_n) oder $(a_n)_{n > 0}$
	Folgen haben maximal einen (eindeutiger) Grenzwert
	Bezeichnung von Folgen, für die der Grenzwert 0 ist: **"Nullfolge"**
5.3.7	c) ist falsch mit $<$, nur richtig mit $\leq$
5.3.10	**Wichtige konvergente Folgen** a) Ist (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a und gilt $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist für jedes $p \in \mathbb{N}^*$ auch $lim_{n \to \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$. b) Die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt: $$lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \end{cases}$$ Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $\lvert q \rvert < 1$, so gilt ebenfalls $lim_{n \to \infty} q^n = 0$. c) $lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}_+$. d) $lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. e) $lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n := e \ (n \geq 1)$. Beachte hier: Beide n gleichzeitig wachsen lassen, keine trägen oder eiligere n.

Beispiele

5.3.1	Folge $(a_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ Sei $\epsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\epsilon} < n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (beliebiges n immer größer). Für alle $n \geq n_0$ gilt dann: $$\lvert a_n - a\rvert = \lvert a_n - 0\rvert = \lvert a_n\rvert = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$ $\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0
5.3.9	Sei $p \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt und $a_n = \frac{1}{n^p}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Ungleichung $n \leq n^p$ und damit $$0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}.$$ Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7(d) auch die Folge (a_n) konvergent und ebenfalls eine Nullfolge.
5.3.9	Wir untersuchen $$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3},\ n \in \mathbb{N}.$$ Dazu kürzen wir durch Bruch durch die **höchste auftretende Potenz**: $$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1+0+0}{1+0} = 1\ (n \to \infty).$$ Dieses Verfahren ist bei allen Polynom in n geteilt durch Polynom in n"gut anwendbar.
5.3.12	$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (Differenz von zwei divergenten Folgen) Trick: Erweiterung mit der Summe von Wurzeln bei Differenzen von Wurzeln $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$ Sandwich: $lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.
5.3.12	**Geometrische Summenformel:** $$a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n,\ n \in \mathbb{N}$$ $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$.

1.3.2 Konvergenzkriterien

Definitionen

5.3.14	Eine reelle Folge (a_n) heißt: a) **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. b) **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. c) **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.
5.3.18	Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $$\lvert a_n - a_m\rvert < \epsilon, \text{ für alle } n, m \geq n_0$$

Sätze

5.3.15	**Monotonie Kriterium** Ist die reelle Folge (a_n) nach oben (nach unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist (a_n) **konvergent** und es gilt: $$lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ (bzw. } lim_{n\to\infty} a_n = inf_{n\in\mathbb{N}} a_n)$$
5.3.19	Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist eine **Cauchy-Folge**.
5.3.20	**Cauchy-Kriterium** Eine Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkungen

	Monotonieverhalten, deswegen hier nur in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{C}$ (keine Ordnung)
	Beide hier gesehenen Konvergenzkriterien funktionieren ohne vorherige Behauptung über den Grenzwert

Beispiele

5.3.16	Betrachtung einer rekursiv defininierten Folge $$a_0 := \sqrt[3]{6} \text{ und } a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n}, n \in \mathbb{N}$$ Damit folgt: $a_1 = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}$, $a_2 = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}$ Solche Folgen entstehen oft bei iterativen Näherungsverfahren. Behauptung: (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ Konvergenz Beweis: Induktion

1.3.3 Teilfolgen und Häufungswerte

Definitionen

5.3.22	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - a \rvert < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente hat.
5.3.23	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ist $\{n_1, n_2, n_3, ...\} \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge von Indizes mit $n_1 < n_2 < n_3...$, so heißt die Folge $(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).

Sätze

5.3.24	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt a) Ein $\alpha \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Häufungswert von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert, die gegen α konvergiert. b) Ist (a_n) konvergenz mit Grenzwert α, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a. c) Ist (a_n) konvergenz, so hat (a_n) genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert $lim_{n\to\infty} a_n$.

Bemerkungen

	Jeder Grenzwert ist auch Häufungswert.
	Häufungswert von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: 1, -1 (aber keine Grenzwerte)
	Häfungswert von (i^n): 1, i, -1, -i
	Keine Teilfolgen: $(a_0, a_0, a_2, a_2, ..)$ (keine doppelten Elemente) $(a_2, a_3, a_0, ..)$ (nicht umsortieren)

1.4 Asymptotik

Definitionen

5.4.1	a) Wir bezeichnen mit $F_+ := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ b) Es sei $(b_n) \in \mathbb{F}_+$. Dann definieren wir die Landau-Symbole durch • $O(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : \frac{a_n}{b_n}{}_{n\in\mathbb{N}}\}$ (b_n größer gleich a_n) • $o(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\}$ (b_n echt größer als a_n)

Sätze

5.4.5	Es seien $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n) \in \mathbb{F}_+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt: a) Sind $a_n, b_n \in O(c_n)$, so ist auch $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$ b) Gilt $a_n \in O(b_n)$ und $c_n \in O(d_n)$, so ist $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ c) Aus $a_n \in O(b_n)$ und $b_n \in O(c_n)$ folgt $a_n \in O(c_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$ genau dann, wenn $\frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$ e) Diese Aussagen gelten auch alle mit Klein-O anstatt Groß-O

Bemerkungen

5.4.2	a) =-Zeichen wird hier nicht bekannten mathematischen Sinne verwendet $\Rightarrow$ Kompromiss Notation $a_n \in O(b_n)$ b) Es gilt immer $o(b_n) \subseteq O(b_n)$. c) $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow a_n \in O(b_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$: Folge a_n wächst höchstens so schnell wie ein Vielfaches von b_n
	Exponentielle Algorithmen sind viel schlechter als polynomiale.

Landau-Symbol	Bezeichnung	Bemerkung
$O(1)$	beschränkt	
$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a > 1$
$O(n)$	linear	
$O(n \log_a(n))$	„n log n“	$a > 1$
$O(n^2)$	quadratisch	
$O(n^3)$	kubisch	
$O(n^k)$	polynomial	$k \in \mathbb{N}^*$
$O(a^n)$	exponentiell	$a > 1$

2 Reihen

Definitionen

Sätze

Bemerkungen

Beispiele

2.1 Absolute Konvergenz

2.2 Das Cauchy-Produkt