Algorithmen und Datenstrukturen

Jonas Milkovits

Last Edited: 13. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Probleme in der Informatik

- Problem im Sinne der Informatik
  - Enthält eine Beschreibung der Eingabe
  - Enthält eine Beschreibung der Ausgabe
  - Gibt **keinen** Übergang von Eingabe und Ausgabe an
  - z.B.: Finde den kürzesten Weg zwischen zwei Orten
- Probleminstanzen
  - Probleminstanz ist eine konkrete Eingabenbelegung, für die entsprechende Ausgabe gewünscht ist
  - z.B.: Was ist der kürzeste Weg vom Audimax in die Mensa?

1.2 Definitionen für Algorithmen

- Begriff des Algorithmus
  - Endliche Folge von Rechenschritten, der eine Ausgabe in eine Eingabe verwandelt
- Anforderungen an Algorithmen
  - Spezifizierung der Eingabe und Ausgabe
    - Anzahl und Typen aller Elemente ist definiert
  - Eindeutigkeit
    - Jeder Einzelschritt ist klar definiert und ausführbar
    - Die Reihenfolge der Einzelschritte ist festgelegt
  - Eindlichkeit
    - Notation hat eine endliche Länge
- Eigenschaften von Algorithmen
  - Determiniertheit
    - Für gleiche Eingabe stets die gleiche Ausgabe (andere mögliche Zwischenzustände)
  - Determinismus
    - Für gleiche Eingabe stets identische Ausführung und Ausgabe
  - Terminierung
    - Algorithmus läuft für jede Eingabe nur endlich lange
  - Korrektheit
    - Algorithmus berechnet stets die spezifizierte Ausgabe (falls dieser terminiert)
  - Effizienz
    - Sparsamkeit im Ressourcenverbrauch (Zeit, Speicher, Energie,...)

2 Sortieren

2.1 Einführung ins Sortieren

- **Das Sortierproblem**
  - Ausgangspunkt: Folge von Datensätzen $D_1, D_2, ..., D_n$
  - Zu sortierende Elemente heißen auch Schlüssel(werte)
  - Ziel: Datensätze so anzuordnen, dass die Schlüsselwerte sukzessive ansteigen/absteigen
  - Bedingung: Schlüsselwerte müssen vergleichbar sein
  - Durchführung:
    - Eingabe: Sequenz von Schlüsselwerten $< a_1, a_2, ..., a_n >$
    - Engabe ist eine **Instanz** des Sortierproblems
    - Ausgabe: Permutation $< a'_1, a'_2, ..., a'_n >$ derselben Folge mit Eigenschaft $a'_1 \leq ... \leq a'_n$
  - Algorithmus **korrekt**, wenn dieser das Problem für alle Instanzen löst
- **Exkurs: Totale Ordnung**
  - Sei M eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq MxM$ eine binäre Relation auf M
  - Das Paar $(M, \leq)$ heißt genau dann totale Relation auf der Menge M, wenn Folgendes erfüllt ist:
    - Reflexivität: $\forall x \in M : x \leq x$
    - Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
    - Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
    - Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$
  - z.B.: $\leq$ Ordnung auf natürlichen Zahlen bildet eine totale Ordnung $(1 \leq 2 \leq 3...)$
  - z.B.: Lexikographische Ordnung $\leq_{lex}$ ist eine totale Ordnung $(A \leq B \leq C...)$
- **Vergleichskriterien von Sortieralgorithmen**
  - Berechnungsaufwand $O(n)$
  - Effizient: Best Case vs Average Case vs Worst Case
  - Speicherbedarf:
    - in-place (in situ): Zusätzlicher Speicher von der Eingabegröße unabhängig
    - out-of-place: Speichermehrbedarf von Eingabegröße abhängig
  - Stabilität: Stabile Verfahren verändern die Reihenfolge von äquivalenten Elementen nicht
  - Anwendung als Auswahlfaktor:
    - Hauptoperationen beim Sortieren: Vergleiche und Vertausche
    - Diese Operationen können sehr teuer oder sehr günstig sein, je nach Aufwand
    - Anpassung des Verfahrens abhängig von dem Aufwand dieser Operationen

2.2 Analyse von Algorithmen - Teil 1

- **Schleifeninvariante (SIV)**
  - Sonderform der Invariante
  - Am Anfang/Ende jedes Schleifendurchlaufs und vor/nach jedem Schleifendurchlauf gültig
  - Wird zur Feststellung der Korrektheit von Algorithmen verwendet
  - Eigenschaften:
    - Initialisierung: Invariante ist vor jeder Iteration wahr
    - Fortsetzung: Wenn SIV vor der Schleife wahr ist, dann auch bis Beginn der nächsten Iteration
    - Terminierung: SIV liefert bei Schleifenabbruch, helfende Eigenschaft für Korrektheit
  - Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - SIV
- **Laufzeitanalyse**
  - Aufstellung der Kosten und Durchführungsanzahl für jede Zeile des Quelltextes
  - Beachte: Bei Schleifen wird auch der Aufruf gezählt, der den Abbruch einleitet
  - Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - Laufzeit
  - Zusätzliche Überprüfung des `Best Case`, `Worst Case` und `Average Case`
- **Effizienz von Algorithmen**
  - Effizienzfaktoren
    - Rechenzeit (Anzahl der Einzelschritte)
    - Kommunikationsaufwand
    - Speicherplatzbedarf
    - Zugriffe auf Speicher
  - Laufzeit hängt von versch. Faktoren ab
    - Länge der Eingabe
    - Implementierung der Basisoperationen
    - Takt der CPU

2.3 Analyse von Algorithmen - Teil 2

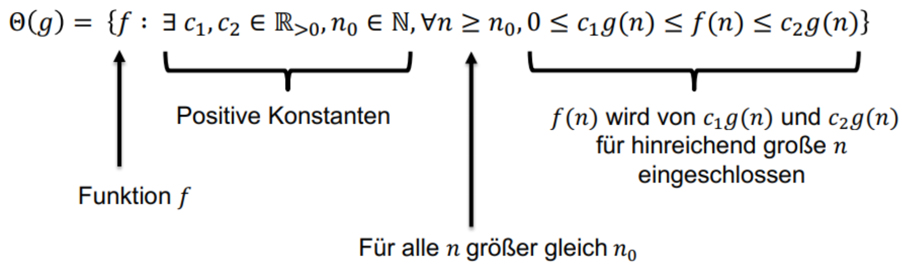
- **Komplexität**
  - Abstrakte Rechenzeit $T(n)$ ist abhängig von den Eingabedaten
  - Übliche Betrachtungsweise der Rechenzeit ist asymptotische Betrachtung
- **Asymptotik**
  - Annäherung an einer sich ins Unendliche verlaufende Kurve
  - z.B.: $f(x) = \frac{1}{x} + x$ | Asymptote: $g(x) = x$ | ($\frac{1}{x}$ läuft gegen Null)
- **Asymptotische Komplexität**
  - Abschätzung des zeitlichen Aufwands eines Algorithmus in Abhängigkeit einer Eingabe
  - Beispiel für Umsetzung: Insertion Sort - Laufzeit Θ
- **Asymptotische Notation**
  - Betrachtung der Laufzeit $T(n)$ für sehr große Eingaben $n \in \mathbb{N}$
  - Komplexität ist unabhängig von konstanten Faktoren und Summanden
  - Nicht berücksichtigt: Rechnergeschwindigkeit / Initialisierungsauswände
  - Komplexitätsmessung via Funktionsklasse ausreichend
    - Verhalten des Algorithmus für große Problemgrößen

    - Veränderung der Laufzeit bei Verdopplung der Problemgröße

- **Gründe für die Nutzung der theoretischen Betrachtung statt der Messung der Laufzeit**
  - Vergleichbarkeit
    - Laufzeit abhängig von konkreter Implementierung und System
    - Theoretische Betrachung ist frei von Abhängigkeiten und Seiteneffekten
    - Theoretische Betrachtung lässt direkte Vergleichbarkeit zu
  - Aufwand
    - Wieviele Testreihen?
    - In welcher Umgebung?
    - Messen führt in der Ausführung zu hohem, praktischen Aufwand
  - Komplexitätsfunktion
    - Wachstumsverhalten ausreichend
    - Praktische Evaluation mit Zeiten nur für Auswahl von Systemen mögliche
    - Theoretischer Vergleich (Funktionsklassen) hat ähnlichen Erkenntnisgewinn

2.4 Analyse von Algorithmen - Teil 3

- **Θ-Notation**
  - Θ-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben und unten
  - Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ ($\mathbb{N}$: Eingabelänge, $\mathbb{R}$: Zeit)



  - $\Theta(g)$ enthält alle f, die genauso schnell wachsen wie g
  - Schreibweise: $f \in \Theta(g)$ (korrekt), manchmal auch $f = \Theta(g)$
  - $g(n)$ ist eine asymptotisch scharfe Schranke von $f(n)$
  - $f(n) = \Omega(g(n))$ gilt, wenn $f(n) = O(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$ erfüllt sind

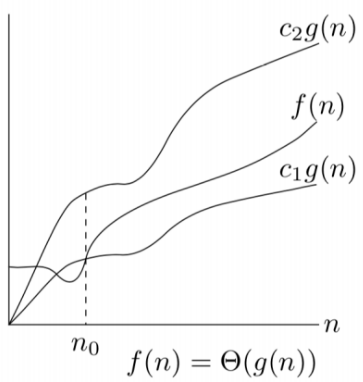


Abbildung 1: Veranschaulichung

  - z.B.: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \mid f(n) \in \Theta(n^2)$?
  - Aus $\Theta(n^2)$ folgt, dass $g(n) = n^2$
  - Vorgehen:
    - Finden eines n_0 und c_1, c_2, sodass
    - $c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ erfüllt ist
    - Konkret: $c_1 * n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 * n^2$
    - Division durch n^2: $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c2$
    - Ab $n = 7$ positives Ergebnis: $0,0714 \mid n_0 = 7$
    - Deswegen setzen wir $c_1 = \frac{1}{14}$
    - Für $n \to \infty :\ 0,5 \mid c_2 = 0,5$
    - Natürlich auch andere Konstanten möglich

- ***O*-Notation**

- O-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben

$$O(g) = \{f : \underbrace{\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{Positive Konstanten}}, \forall n \geq n_0, \underbrace{0 \leq f(n) \leq cg(n)}_{f(n) \text{ wird von } cg(n) \text{ für hinreichend große } n \text{ beschränkt}}\}$$

Funktion f

Für alle n größer gleich n_0

- $O(g)$ enthält alle f, die höchstens so schnell wie g wachsen
- Schreibweise: $f = O(g)$
- $f(n) = \Theta(g) \rightarrow f(n) = O(g) \mid \Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- Ist f in der Menge $\Theta(g)$, dann auch in der Menge $O(g)$

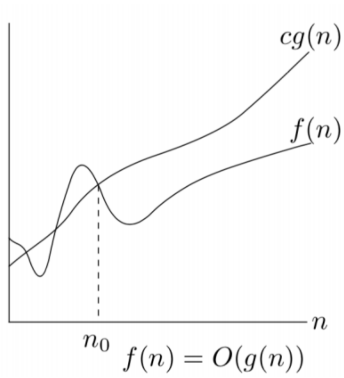


Abbildung 2: Veranschaulichung

- z.B.: $f(n) = n + 2 \mid f(n) = O(n)$?
- Ja $f(n)$ ist Teil von $O(n)$ für z.B. $c = 2$ und $n_0 = 2$

- **O-Notation Rechenregeln**
  - Konstanten:
    - $f(n) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ konstante Funktion $\rightarrow f(n) = O(1)$
    - z.B. $3 \in O(1)$
  - Skalare Multiplikation:
    - $f = O(g)$ und $a \in \mathbb{R} \rightarrow a * f = O(g)$
  - Addition:
    - $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \rightarrow f_1 + f_2 = O(max\{g_1, g_2\})$
  - Multiplikation:
    - $f_1 = O(g_1)$ und $f_1 = O(g_2) \rightarrow f_1 * f_2 = O(g_1 * g_2)$
- **Ω-Notation**
  - Ω-Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von unten

$$\Omega(g) = \{f : \underbrace{\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{Positive Konstanten}}, \forall n \geq n_0, \underbrace{0 \leq cg(n) \leq f(n)}_{f(n) \text{ wird von } cg(n) \text{ für hinreichend große } n \text{ unten beschränkt}}\}$$

Funktion f

Für alle n größer gleich n_0

  - Ω-Notation enthält alle f, die mindestens so schnell wie g wachsen

- Schreibweise: $f = \Omega(g)$

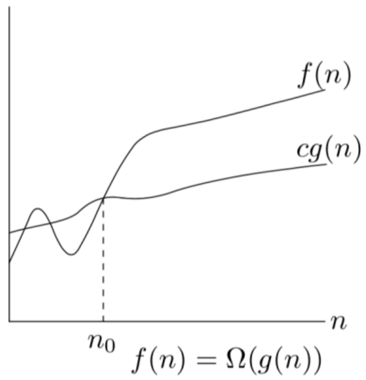


Abbildung 3: Veranschaulichung

- **Komplexitätsklassen**
  - n ist hier die Länge der Eingabe

Klasse	Bezeichnung	Beispiel
$\Theta(1)$	Konstant	Einzeloperation
$\Theta(\log n)$	Logarithmisch	Binäre Suche
$\Theta(n)$	Linear	Sequentielle Suche
$\Theta(n \log n)$	Quasilinear	Sortieren eines Arrays
$\Theta(n^2)$	Quadratisch	Matrixaddition
$\Theta(n^3)$	Kubisch	Matrixmultiplikation
$\Theta(n^k)$	Polynomiell	
$\Theta(2^n)$	Exponentiell	Travelling-Salesman*
$\Theta(n!)$	Faktoriell	Permutationen

  - Ausführungsdauer, falls eine Operation n genau $1\mu s$ dauert

Eingabe-größe n	$\log_{10} n$	n	n^2	n^3	2^n
10	1µs	10µs	100µs	1ms	~1ms
100	2µs	100µs	10ms	1s	~4x10^{16}y
1000	3µs	1ms	1s	16min 40s	?
10000	4µs	10ms	1min 40s	~11,5d	?
10000	5µs	100ms	2h 46min 40s	~31,7y	?

- Asymptotische Notationen in Gleichungen
  - $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$
  - $\Theta(n)$ fungiert hier als Platzhalter für eine beliebige Funktion $f(n)$ aus $\Theta(n)$
  - z.B.: $f(n) = 3n + 1$
- ***o*-Notation**
  - o-Notation stellt eine echte obere Schranke dar
  - Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
  - Außerdem $<$ statt $\leq$
  - z.B.: $2n = o(n^2)$ und $2n^2 \neq o(n^2)$

$$o(g) = \{f : \underbrace{\forall\, c \in \mathbb{R}_{>0}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

Gilt für **alle** Konstanten $c > 0$.
In O-Notation gilt es für eine Konstante $c > 0$

- **ω-Notation**
  - ω-Notation stellt eine echte untere Schranke dar
  - Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R} > 0$ gelten muss
  - Außerdem $>$ statt $\geq$
  - z.B.: $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$ und $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$$\omega(g) = \{f : \forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$

2.5 Insertion Sort

- **Idee**
  - Halte die linke Teilfolge sortiert
  - Füge nächsten Schlüsselwert hinzu, indem es an die korrekte Position eingefügt wird
  - Wiederhole den Vorgang bis Teilfolge aus der gesamten Liste besteht
- **Code**

```
FOR j = 1 TO A.length - 1
  key = A[j]
  // Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[0...j-1] ein
  i = j - 1
  WHILE i >= 0 and A[i] > key
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
  A[i + 1] = key
```

- **Schleifeninvariante von `Insertion Sort`**
  - Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife besteht die Teilfolge `A[0...j-1]` aus den Elementen der ursprünglichen Teilfolge `A[0...j-1]` enthaltenen Elementen, allerdings in sortierter Reihenfolge.
- **Korrektheit von `Insertion Sort`**
  - Initialisierung:
    - Beginn mit `j=1`, also Teilfeld `A[0...j-1]` besteht nur aus einem Element `A[0]`. Dies ist auch das ursprüngliche Element und Teilfeld ist sortiert.
  - Fortsetzung:
    - Zu zeigen ist, dass die Invariante bei jeder Iteration erhalten bleibt. Ausführungsblock der `for`-Schleife sorgt dafür, dass `A[j-1], A[j-2]`,... je um Stelle nach rechts geschoben werden bis `A[j]` korrekt eingefügt wurde. Teilfeld `A[0...j]` besteht aus ursprünglichen Elementen und ist sortiert. Inkrementieren von j erhält die Invariante.
  - Terminierung:
    - Abbruchbedingung der `for`-Schleife, wenn `j > A.length - 1`. Jede Iteration erhöht j. Dann bei Abbruch ist `j = n` und einsetzen in Invariante liefert das Teilfeld `A[0...n-1]` welches aus den ursprünglichen Elementen besteht und sortiert ist. Teilfeld ist gesamtes Feld.
  - Algorithmus `Insertion Sort` arbeitet damit korrekt.

- **Laufzeitanalyse von** `Insertion Sort`

```
INSERTION-SORT(A)
1  FOR j = 1 TO A.length - 1
2      key = A[j]
3      // Füge A[j] in die
       //sortierte Sequenz A[0 .. j - 1]
4      i = j - 1
5      WHILE i ≥ 0 and A[i] > key
6            A[i + 1] = A[i]
7             i = i - 1
8      A[i + 1] = key
```

Laufzeit:
$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) +$
$c_5 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_6 \sum_{j=1}^{n-1}(t_j - 1) + c_7 \sum_{j=1}^{n-1}(t_j - 1)$
$+ c_8(n-1)$

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	n
2	c_2	$n-1$
3	0	$n-1$
4	c_4	$n-1$
5	c_5	$\sum_{j=1}^{n-1} t_j$
6	c_6	$\sum_{j=1}^{n-1}(t_j - 1)$
7	c_7	$\sum_{j=1}^{n-1}(t_j - 1)$
8	c_8	$n-1$

- Festlegung der Laufzeit für jede Zeile
- Jede Zeile besitzt gewissen Kosten c_i
- Jede Zeile wird x mal durchgeführt
- $Laufzeit = Anzahl * Kosten$ jeder Zeile
- Schleifen: Abbruchüberprüfung zählt auch
- t_j: Anzahl der Abfragen der `While`-Schleife

  - Warum n in Zeile 1?
    - Die Überprüfung der Fortführungsbedingung beinhaltet auch die letze Überprüfung
    - Quasi die Überprüfung, durch die die Schleife abbricht
  - Warum $\sum_{j=1}^{n-1}$ in Zeile 5?
    - Aufsummierung aller einzelnen t_j über die Anzahl der Schleifendurchläufe
    - Diese ist allerdings $n-1$ und nicht n, da die Abbruchüberprüfung dort auch enthalten ist
  - Warum $t_j - 1$ in Zeile 6?
    - Selbes Argument wie oben, bei t_j ist die Abbruchüberprüfung enthalten
    - Deswegen wird die `while`-Schleife nur $t_j - 1$-mal ausgeführt
  - `Best Case`
    - zu sortierendes Feld ist bereits sortiert
    - t_j wird dadurch zu 1, da die `While`-Schleife immer nur einmal prüft (Abbruch)
    - Die zwei Zeilen innerhalb der `While`-Schleife werden nie ausgeführt
    - Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine lineare Funktion in n ist
  - `Worst Case`
    - zu sortierendes Feld ist umgekehrt sortiert
    - t_j wird dadurch zu $j+1$, da die `While`-Schleife immer die gesamte Länge prüft
    - Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine quadratische Funktion in n ist (n^2)
  - `Average Case`
    - im Mittel gut gemischt
    - t_j wird dadurch zu $j/2$
    - Die Laufzeit bleibt aber eine quadratische Funktion in n (n^2)

- **Asymptotische Laufzeitbetrachtung Θ**
  - $T(n)$ lässt sich als quadratische Funktion $an^2 + bn + c$ betrachten
  - Terme niedriger Ordnung sind für große n irrelevant
  - Deswegen Vereinfachung zu n^2 und damit $\Theta(n^2)$

2.6 Bubble Sort

- **Idee**
  - Vergleiche Paare von benachbarten Schlüsselwerten
  - Tausche das Paar, falls rechter Schlüsselwert kleiner als linker
- **Code**

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    FOR j = A.length - 1 DOWNTO i + 1
        IF A[j] < A[j-1]
            SWAP(A[j], A[j-1])
```

- **Analyse von `Bubble Sort`**
  - Anzahl der Vergleiche:
    - Es werden stets alle Elemente der Teilfolge miteinander verglichen
    - Unabhängig von der Vorsortierung sind `Worst` und `Best Case` identisch
  - Anzahl der Vertauschungen:
    - `Best Case`: 0 Vertauschungen
    - `Worst Case`: $\frac{n^2-n}{2}$ Vertauschungen
  - Komplexität:
    - `Best Case`: $\Theta(n)$
    - `Average Case`: $\Theta(n^2)$
    - `Worst Case`: $\Theta(n^2)$

2.7 Selection Sort

- **Idee**
  - Sortieren durch direktes Auswählen
  - `MinSort`: "wähle kleines Element in Array und tausche es nach vorne"
  - `MaxSort`: "wähle größtes Element in Array und tausche es nach vorne"
- **Code - MinSort**

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
    k = i
    FOR j = i + 1 TO A.length - 1
        IF A[j] < A[k]
            k = j
    SWAP(A[i], A[k])
```

2.8 Divide-And-Conquer-Ansatz

- Anderer Ansatz im Gegensatz zu z.B. `InsertionSort` (inkrementelle Herangehensweise)
- Laufzeit ist im schlechtesten Fall immer noch besser als `InsertionSort`
- Prinzip: Zerlege das Problem und löse es direkt oder zerlege es weiter
- **Divide:**
  - Teile das Problem in mehrere Teilprobleme auf
  - Teilprobleme sind Instanzen des gleichen Problems
- **Conquer:**
  - Beherrsche die Teilprobleme rekursiv
  - Falls Teilprobleme klein genug, löse sie auf direktem Weg
- **Combine:**
  - Vereine die Lösungen der Teilprobleme zu Lösung des ursprünglichen Problems

2.9 Merge Sort

- **Idee**
  - **Divide:** Teile die Folge aus n Elementen in zwei Teilfolgen von je $\frac{n}{2}$ Elemente auf
  - **Conquer:** Sortiere die zwei Teilfolgen rekursiv mithilfe von `MergeSort`
  - **Combine:** Vereinige die zwei sortierten Teilfolgen, um die sortierte Lösung zu erzeugen
- **Code**

```
MERGE-SORT (A,p,r)
IF p < r
    q = ⌊(p+r)/2⌋ // Teilen in 2 Teilfolgen
    MERGE-SORT(A,p,q) // Sortieren der beiden Teilfolgen
    MERGE-SORT(A,q+1,r)
    MERGE(A,p,q,r) // Vereinigung der beiden sortierten Teilfolgen
```

```
MERGE(A,p,q,r) // Geteiltes Array an Stelle q
n1 = q - p + 1
n2 = r - q
Let L[0...n1] and R[0...n2] be new arrays
FOR i = 0 TO n1 - 1 // Auffüllen der neu erstellten Arrays
    L[i] = A[p + i]
FOR j = 0 TO n2 - 1
    R[j] = A[q + j + 1]
L[n1] = ∞ // Einfügen des Sentinel-Wertes
R[n2] = ∞
i = 0
j = 0
FOR k = p TO r  // Eintragweiser Vergleich der Elemente
    IF L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i] // Sortiertes Zurückschreiben in Original-Array
        i = i + 1
    ELSE
        A[k] = R[j]
        j = j + 1
```

- **Korrektheit von MergeSort**
  - Schleifeninvariante

    Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife (Letztes `for` in Methode `MERGE`) enthält das Teilfeld `A[p...k-1]` die `k-p` kleinsten Elemente aus `L[0...`n_1`]` und `R[0...`n_2`]` in sortierter Reihenfolge. Weiter sind `L[i]` und `R[i]` die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.
  - Initialisierung

    Vor der ersten Iteration gilt `k=p`. Daher ist `A[p...k-1]` leer und enthält 0 kleinste Elemente von `L` und `R`. Wegen `i=j=0` sind `L[i]` und `R[i]` die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.
  - Fortsetzung

    Müssen zeigen, dass Schleifeninvariante erhalten bleibt. Dafür nehmen wir an, dass `L[i]` $\leq$ `R[j]`. Dann ist `L[i]` kleinstes Element, welches noch nicht zurück kopiert wurde. Da Array `A[p...k-1]` die `k-p` kleinsten Elemente enthält, wird der Array `A[p...k]` die `k-p+1` kleinsten Elemente enthalten, nachdem der Wert nach der Durchführung von `A[k]=L[i]` kopiert wurde. Die Erhöhung der Variablen `k` und `i` stellt die Schleifeninvariante für die nächste Iteration wieder her. Wenn `L[i]>R[j]` dann analoges Argument in der `ELSE`-Anweisung.
  - Terminierung

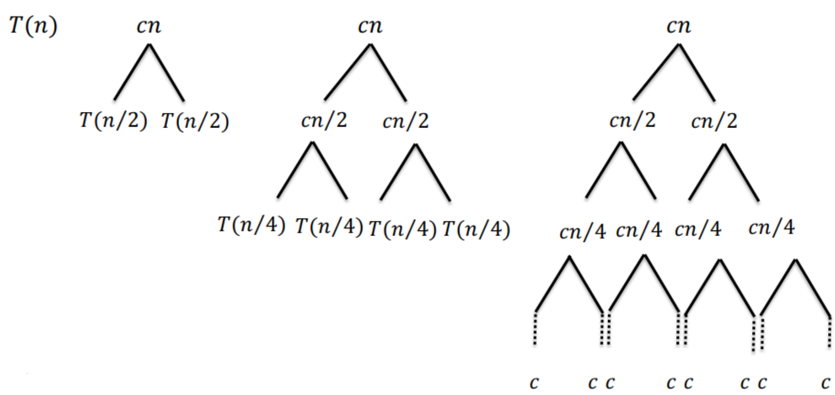
    Beim Abbruch gilt `k=r+1`. Durch die Schleifeninvariante enthält `A[p...r]` die kleinste Elemente von `L[0...`n_1`]` und `R[0...`n_2`]` in sortierter Reihenfolge. Alle Elemente außer der Sentinels wurden komplett zurück kopiert. `MergeSort` ist außerdem ein stabiler Algorithmus.

- **Analyse von MergeSort**
  - Ziel: Bestimme Rekursionsgleichung für Laufzeit $T(n)$ von n Zahlen im schlechtesten Fall
  - Divide: Berechnung der Mitte des Feldes: Konstante Zeit $\Theta(1)$
  - Conquer: Rekursives Lösen von zwei Teilproblemen der Größe $\frac{n}{2}$: Laufzeit von $2\ T(\frac{n}{2})$
  - Combine: `MERGE` auf einem Teilfeld der Länge n: Lineare Zeit $\Theta(n)$

$$T(n) = \begin{Bmatrix} \Theta(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2\ T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{falls } n > 1 \end{Bmatrix}$$

  - Lösen der Rekursionsgleichung mithilfe eines Rekursionsbaums

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{falls } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$



- Verwenden der Konstante c statt $\Theta(1)$
- cn stellt den Aufwand an der ersten Ebene dar
- Der addierte Aufwand jeder Stufe (aller Knoten) ist auch cn
- Die Azahl der Ebenen lässt sich mithilfe von $lg(n) + 1$ bestimmen (2-er Logarithmus)
- Damit ergibt sich für die Laufzeit: $cn \cdot lg(n) + cn$
- Für $\lim_{n\to\infty}$ wird diese zu $n \cdot lg(n)$
- Laufzeit beträgt damit $\Theta(n \cdot lg(n))$
- Laufzeit von `MergaSort` ist in jedem Fall gleich

2.10 Quicksort

- **Idee**
  - **Pivotelement**:

    Wahl eines Pivotelement `x` aus dem Array
  - **Divide:**

    Zerlege den Array `A[p...r]` in zwei Teilarrays `A[p...q-1]` und `A[q+1...r]`, sodass jedes Element von `A[p...q-1]` kleiner oder gleich `A[q]` ist, welches wiederum kleiner oder gleich jedem Element von `A[q+1...r]` ist. Berechnen Sie den Index `q` als Teil vom `Partition` Algorithmus.
  - **Conquer:**

    Sortieren beider Teilarrays `A[p...q-1]` und `A[q+1...r]` durch rekursiven Aufruf von Quicksort.
  - **Combine:**

    Da die Teilarrays bereits sortiert sind, ist keine weitere Arbeit nötig um diese zu vereinigen. `A[p...r]` ist nun sortiert.

- **Code**

```
QUICKSORT(A,p,r)
IF p < r     // Überprüfung, ob Teilarray leer ist
    q = PARTITION(A,p,r)
    QUICKSORT(A,p,q-1)
    QUICKSORT(A,q+1,r)


PARTITION(A,p,r)
x = A[r]     // Wahl des Pivotelements
i = p - 1    // Index i setzen
FOR j = p TO r - 1 // Auffüllen des Teilarrays mit Elementen
    IF A[j] ≤ x
        i = i + 1
        SWAP(A[i], A[j]) /
```

```
SWAP(A[i+1], A[r]) // Tausch des Pivotelements
RETURN i + 1 // Neuer Index des Pivotelements
```

- **Korrektheit von Quicksort**
  - Schleifeninvariante:

    Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife gilt für den Arrayindex k folgendes:
    1. Ist $p \leq k \leq i$, so gilt `A[k]` $\leq x$
    2. Ist $i+1 \leq k \leq j-1$, so gilt `A[k]` $> x$
    3. Ist $k = r$, so gilt `A[k]` $= x$
  - Initialisierung:

    Vor der ersten Iteration gilt $i = p-1$ und $j = p$. Da es keine Werte zwischen p und j gibt und es auch keine Werte zwischen $i+1$ und $j-1$ gibt, sind die ersten beiden Eigenschaften trivial erfüllt. Die Zuweisung in `x = A[r]` sorgt für die Erfüllung der dritten Eigenschaft.
  - Fortsetzung:

    Zwei mögliche Fälle durch `IF A[j]` $\leq$ `x`. Wenn `A[j] > x`, dann inkrementiert die Schleife nur den Index j. Dann gilt Bedingung 2 für `A[j-1]` und alle anderen Einträge bleiben unverändert. Wenn `A[j]` $\leq$ `x`, dann wird Index i inkrementiert und die Einträge `A[i]` und `A[j]` getauscht und schließlich der Index j erhöht. Wegen des Vertauschens gilt `A[i]` $\leq$ `x` und Bedingung 1 ist erfüllt. Analog gilt `A[j-1] > x`, da das Element welches mit `A[j-1]` vertauscht wurde wegen der Invariante gerade größer als x ist.
  - Terminierung:

    Bei der Terminierung gilt, dass $j = r$. Daher gilt, dass jeder Eintrag des Arrays zu einer der drei durch die Invariante beschriebenen Mengen gehört.

- **Performanz von Quicksort**
  - Abhängig von der **Balanciertheit** der Teilarrays
    - Definition Balanciert: ungefähr gleiche Anzahl an Elementen
    - Teilarrays balanciert: Laufzeit asymptotisch so schnell wie `MergeSort`
    - Teilarrays unbalanciert: Laufzeit kann so langsam wie `InsertionSort` laufen
  - Zerlegung im **schlechtesten Fall**
    - Partition zerlegt Problem in ein Teilproblem mit $n-1$ Elementen und eins mit 0 Elementen
    - Unbalancierte Zerlegung zieht sich durch gesamte Rekursion
    - Zerlegung kostet $\Theta(n)$
    - Aufruf auf Feld der Größe 0: $T() = \Theta(1)$
    - Laufzeit (rekursiv):
      - $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
      - Insgesamt folgt: $T(n) = \Theta(n^2)$
  - Zerlegung im **besten Fall**
    - Problem wird so balanciert wie möglich zerlegt
    - Zwei Teilprobleme mit maximaler Größe von $\frac{n}{2}$
    - Zerlegung kostet $\Theta(n)$
    - Laufzeit (rekursiv):
      - $T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
      - Laufzeit beträgt: $O(n\ lg(n))$
    - Solange die Aufteilung konstant bleibt, bleibt die Laufzeit $O(n\ lg(n))$

2.11 Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen

- **Analyse von Divide-And-Conquer Algorithmen**
  - $T(n)$ ist Laufzeit eines Problems der Größe n
  - Für kleines Problem benötigt die direkte Lösung eine konstante Zeit $\Theta(1)$
  - Für sonstige n gilt:
    - Aufteilen eines Problems führt zu a Teilproblemen
    - Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{1}{b}$ der Größe des ursprünglichen Problems
    - Lösen eines Teilproblems der Größe $\frac{n}{b}$: $T(\frac{n}{b})$
    - Lösen a solcher Probleme: $a\ T(\frac{n}{b})$
    - $D(n)$: Zeit um das Problem aufzuteilen (Divide)
    - $C(n)$: Zeit um Teillösungen zur Gesamtlösung zusammenzufügen (Combine)

$$T(n) = \left\{\begin{matrix} \Theta(1) & \text{falls } n \leq c \\ a\ T(\frac{n}{b}) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{matrix}\right\}$$

- **Subsitutionsmethode**
  - Idee: Erraten einer Schranke und Nutzen von Induktion zum Beweis der Korrektheit
  - Ablauf:
    1. Rate die Form der Lösung (Scharfes Hinsehen oder kurze Eingaben ausprobieren/einsetzen)
    2. Anwendung von vollständiger Induktion zum Finden der Konstanten und Beweis der Lösung
  - **Beispiel**
    - Betrachten von `MergeSort`:
      - $T(1) \leq c$
      - $T(n) \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn$
    - Ziel:

      Obere Abschätzung $T(n) \leq g(n)$ mit $g(n)$ ist eine Funktion, die durch eine geschlossene Formel dargestellt werden kann.

      Wir "raten": $T(n) \leq 4cn\ lg(n)$ und nehmen dies für alle $n' < n$ an und zeigen es für n.
    - Induktion:
      - lg steht hier für log_2
      - $n = 1$: $T(1) \leq c$
      - $n = 2$: $T(2) \leq T(1) + T(1) + 2c \leq 4c \leq 8c$

        $T(2) = 4c * 2\ lg(2) = 8c$
    - Hilfsbehauptungen:
      - (1): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$
      - (2): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2}{3}n$
      - (3): $log_c(\frac{a}{b}) = log_c(a) - log_c(b)$
      - (4): $log_c(a * b) = log_c(a) + log_c(b)$
    - Induktionsschritt:
      - Annahme: $n > 2$ und sei Behauptung wahr für alle $n' < n$.

$$\begin{array}{ll} \text{T(n)} & \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\ & \leq 4c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\ \ lg(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4c \lceil \frac{n}{2} \rceil\ \ lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\ \text{(HB)} & \leq 4c \cdot lg(\frac{2}{3}n) \cdot (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil + cn \\ & \leq 4c \cdot lg(\frac{2}{3}n) \cdot n + cn \\ \text{(HB)} & \leq 4cn \cdot (lg(\frac{2}{3}) + lg(n)) + cn \\ & = 4cn \cdot lg(n) + 4cn \cdot lg(\frac{2}{3}) \\ & = 4cn \cdot lg(n) + cn(1 + 4 \cdot (lg(2) - lg(3))) \\ & \leq 4cn \cdot lg(n) \\ & \Rightarrow \Theta(n\ lg(n)) \end{array}$$

- **Rekursionsbaum**
  - Idee: Stellen das Ineinander-Einsetzen als Baum dar und Analyse der Kosten
  - Ablauf:
    1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar
       - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar
       - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar (z.B. $T(0)$)
    2. Berechnen der Kosten innerhalb jeder Ebene des Baums
    3. Die Gesamtkosten sind die Summe über die Kosten aller Ebenen
  - Rekursionsbaum ist nützlich um Lösung für Subsitutionsmethode zu erraten
  - **Beispiel:** $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n^2)$
    - $\Rightarrow T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + cn^2 \; (c > 0)$
    - Je Abstieg verringert sich die Größe des Problems um den Faktor 4.
    - Erreichen der Randbedingung ist vonnöten, die Frage ist wann dies geschieht.
    - Größe Teilproblem bei Level i: $\frac{n}{4^i}$
    - Erreichen Teilproblem der Größe 1, wenn $\frac{n}{4^i} = 1$, d.h. wenn $i = log_4(n)$
      $\Rightarrow$ Baum hat also $log_4 n + 1$ Ebenen
    - Kosten pro Ebene:
      - Jede Ebene hat 3-mal soviele Knoten wie darüber liegende
      - Anzahl der Knoten in Tiefe i ist 3^i
      - Kosten $c(\frac{n}{4^i})^2$, $i = 0 ... log_4 n - 1$
      - Anzahl $\cdot$ Kosten $= 3^i \cdot c(\frac{n}{4^i})^2 = (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2$
    - Unterste Ebene:
      - $3^{log_4(n)} = nlog_4(3)$ Knoten
      - Jeder Knoten trägt $T(1)$ Kosten bei
      - Kosten unten: $n^{log_4(3)} \cdot T(1) = \Theta(n^{log_4(3)})$
    - Addiere alle Kosten aller Ebenen:
      - $$\begin{aligned} T(n) &= cn^2 + \tfrac{3}{16}cn^2 + (\tfrac{3}{16})^2 cn^2 + ... + (\tfrac{3}{16})^{log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{log_4(3)}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{log_4 n - 1} (\tfrac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{log_4^3}) \\ &= \frac{(\frac{3}{16}^{log_4 n}) - 1}{\frac{3}{16} - 1} \cdot cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \end{aligned}$$
        (Verwendung der geometrischen Reihe)
      - Verwendung einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe als obere Schranke:
        $$\begin{aligned} T(n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{log_4 n - 1} (\tfrac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &< \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} \cdot cn^2 + \Theta(n^{log_4 3}) \\ &= \tfrac{16}{13} \cdot cn^2 + Theta(n^{log_4 3}) = O(n^2) \end{aligned}$$
    - Jetzt **Subsitutionsmethode:**
      - Zu zeigen: $\exists d > 0 : T(n) \leq dn^2$
      - Induktionsanfang:
        $$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(\lfloor \tfrac{1}{4} \rfloor) + c \cdot 1^2 \\ &= 3 \cdot T(0) + c = c \end{aligned}$$
      - Induktionsschritt:
        $$\begin{aligned} T(n) &\leq 3 \cdot T(\lfloor \tfrac{n}{4} \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3 \cdot d(\lfloor \tfrac{n}{4} \rfloor)^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(\tfrac{n}{4})^2 + cn^2 \\ &= \tfrac{3}{16} dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2, \text{ falls } d \geq \tfrac{16}{13} c \end{aligned}$$
- **Mastertheorem**

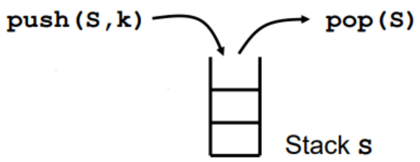
- Idee:

  Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine positive Funktion und $T(n)$ über den nicht-negativen ganzen Zahlen über die Rekursionsgleichung $T(n) = a\ T(\frac{n}{b}) + f(n)$ defininiert, wobei wir $\frac{n}{b}$ so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ oder $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ gemeint ist. Dann besitzt $T(n)$ die folgenden asymptotischen Schranken (a und b werden aus $f(n)$ gelesen):
  1. Gilt $f(n) = O(n^{log_b(a-\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$, dann $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$
  2. Gilt $f(n) = O(n^{log_b(a)})$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)} lg(n))$
  3. Gilt $f(n) = \Omega(n^{log_b(a+\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ und $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend großen n, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$
- Erklärung:
  - In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^{log_b(a)}$ verglichen
    1. Wenn $f(n)$ polynomial kleiner ist als $n^{log_b(a)}$, dann $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$
    2. Wenn $f(n)$ und $n^{log_b(a)}$ die gleiche Größe haben, gilt $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)} lg(n))$
    3. Wenn $f(n)$ polynomial größer als $n^{log_b(a)}$ und $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ erfüllt, dann $T(n) = \Theta(f(n))$
  - (polynomial größer/kleiner: um Faktor n^ϵ asymptotisch größer/kleiner)
- Nicht abgedeckte Fälle:
  - Wenn einer dieser Fälle eintritt, kann das Mastertheorem nicht angewendet werden
    1. Wenn $f(n)$ kleiner ist als $n^{log_b(a)}$, aber nicht polynomial kleiner
    2. Wenn $f(n)$ größer ist als $n^{log_b(a)}$, aber nicht polynomial größer
    3. Regularitätsbedingung $a\ f(\frac{n}{b}) \leq c\ f(n)$ wird nicht erfüllt
    4. a oder b sind nicht konstant (z.B. $a = 2^n$)
- **Beispiel:**
  - $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
    - $a = 9, b = 3, f(n) = n$
    - $log_b(a) = log_3(9) = 2$
    - $f(n) = n = O(n^{log_b(a-\epsilon)})$
      $= O(n^{2-\epsilon})$
    - Ist diese Gleichung für ein $\epsilon > 0$ erfüllt? $\Rightarrow \epsilon = 1$
    - **1. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$
  - $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
    - $a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = 1$
    - $log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
    - $f(n) = 1 = O(n^{log_b(a)})$
      $= O(n^0)$
      $= O(1)$
    - **2.Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(1 * lg(n)) = \Theta(lg(n))$
  - $T(n) = 3(T\frac{n}{4}) + n\ lg(n)$
    - $a = 3, b = 4, f(n) = n\ lg(n)$
    - $n^{log_b(a)} = n^{log_4(3)} \leq n^{0.793}$
    - $\epsilon = 0.1$ im Folgenden
    - $f(n) = n\ lg(n) \geq n \geq n^{0.793+0.1} \geq n^{0.793}$
    - **3.Fall** $\Rightarrow f(n) = \Omega(n^{log_b(a+0.1)})$
    - $af(\frac{n}{b}) = 3f(\frac{n}{4}) = 3(\frac{n}{4})\ lg(\frac{n}{4}) \leq \frac{3}{4}n\ lg(n)$
    - Damit ist auch die Randbedingung erfüllt und $T(n) = \Theta(n\ lg(n))$

3 Grundlegende Datenstrukturen

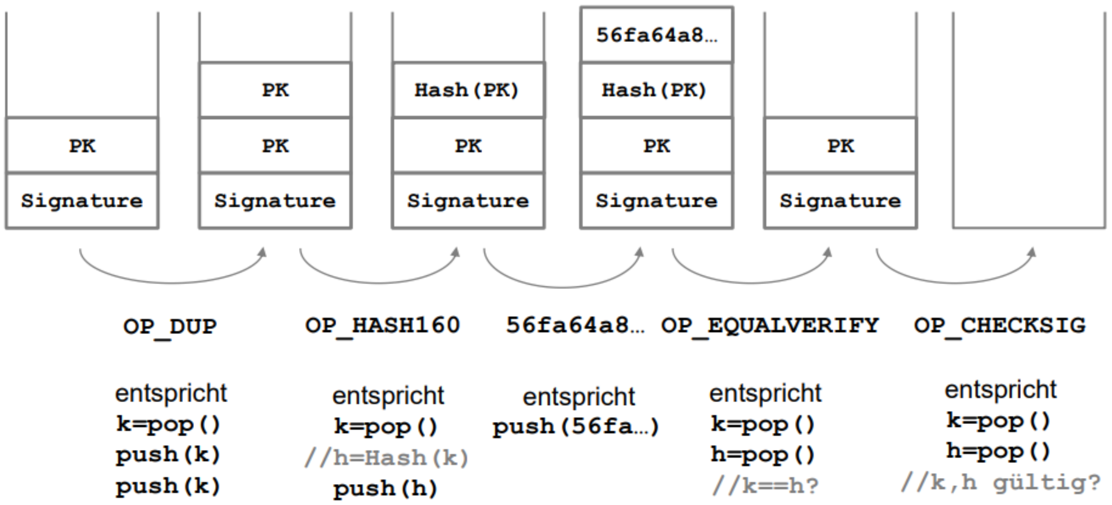
3.1 Stacks

- **Abstrakter Datentyp Stack**
  - `new S()`
    - Erzeugt neuen (leeren) Stack
  - `s.isEmpty()`
    - Gibt an, ob Stack `s` leer ist
  - `s.pop()`
    - Gibt oberstes Element vom Stack `s` zurück und löscht es vom Stack
    - Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist
  - `s.push(k)`
    - Schreibt `k` als neues oberstes Element auf Stack `s`
  - Abstrakter Aufbau:
    - **LIFO**-Prinzip - Last in, First out

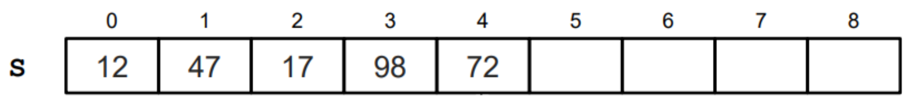


- **Beispiel Bitcoin**

```
scriptPubKey:
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fcd52d2c580b65d35549d
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



- **Stacks als Array**



  - `s.top` zeigt immer auf oberstes Element
  - `pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt
  - `push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt

- **Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt**

```
new(S)

S.A[]=ALLOCATE(MAX);
S.top=-1;
```

```
isEmpty(S)

IF S.top<0 THEN
    return true
ELSE
    return false;
```

```
pop(S)

IF isEmpty(S) THEN
    error 'underflow'
ELSE
    S.top=S.top-1;
    return S.A[S.top+1];
```

```
push(S,k)

IF S.top==MAX-1 THEN
    error 'overflow'
ELSE
    S.top=S.top+1;
    S.A[S.top]=k;
```

- **Stacks mit variabler Größe - Einfach**
  - Falls `push(k)` bei vollem Array ⇒ Vergößerung des Arrays
  - Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge + 1 und Umkopieren aller Elemente
  - Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro `push`-Befehl
- **Stacks mit variabler Größe - Verbesserung**
  - Idee:
    - Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
    - Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder
  - Methoden:
    `RESIZE(A,m)` reserviert neuen Speicher der Größe `m` und kopiert `A` um

```
new(S)

S.A[]=ALLOCATE(1);
S.top=-1;
S.memsize=1;
```

```
isEmpty(S)

IF S.top<0 THEN
    return true
ELSE
    return false;
```

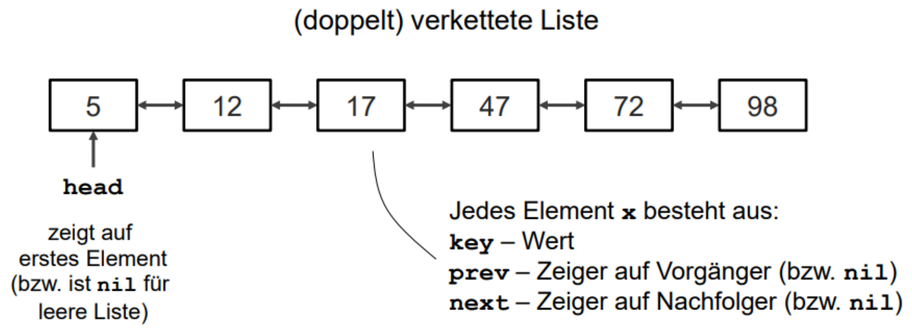
```
pop(S)

IF isEmpty(S) THEN
    error 'underflow'
ELSE
    S.top=S.top-1;
    IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN
        S.memsize=S.memsize/2;
        RESIZE(S.A,S.memsize);
    return S.A[S.top+1];
```

```
push(S,k)

S.top=S.top+1;
S.A[S.top]=k;
IF S.top+1>=S.memsize THEN
    S.memsize=2*S.memsize;
    RESIZE(S.A,S.memsize);
```

  - Im Durchschnitt für jeder der mindestens `n` Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

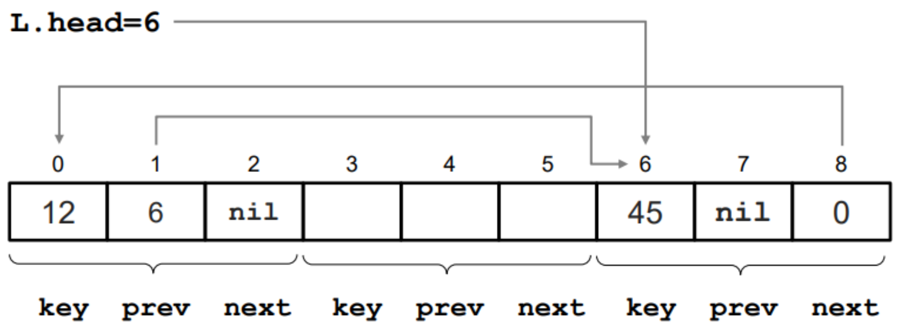
3.2 Verkettete Listen

- **Aufbau**



- **Verkettete Listen durch Arrays**

  Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12



- **Elementare Operationen auf Listen**
  - Suche nach Element
    - Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n)$
      $\Rightarrow$ Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(n)$
    - Code:

```
search(L,k)     // Returns pointer to k in L (or nil)
current = L.head;
WHILE current != nil AND current.key != k DO
    current = current.next;
return current;
```

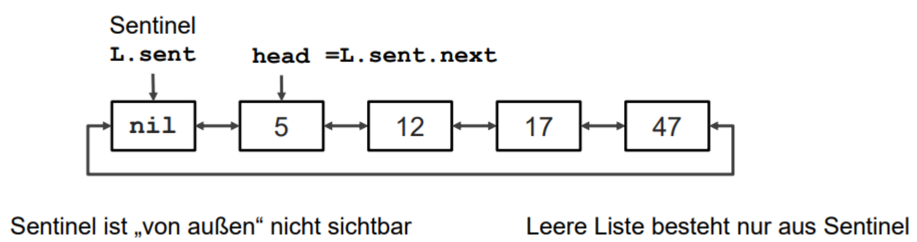
  - Einfügen eines Elements am Kopf der Liste
    - Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf
    - Code:

```
insert(L,x)
x.next = l.head;
x.prev = nil;
IF L.head != nil THEN
    L.head.prev = x;
L.head = x;
```

  - Löschen eines Elements aus Liste
    - Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben
      Löschen eines Wertes k mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$
    - Code:

```
delete (L,x)
IF x.prev != nil THEN
    x.prev.next = x.next
ELSE
    L.head = x.next;
IF x.next != nil THEN
    x.next.prev = x.prev;
```

- **Vereinfachung per Wächter/Sentinels**
  - Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende

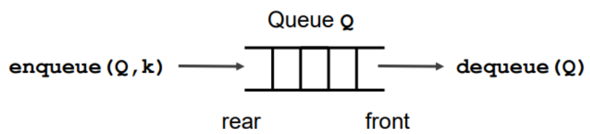


- Löschen mit Sentinels:

```
deleteSent(L,x)
x.prev.next = x.next;
x.next.prev = x.prev;
```

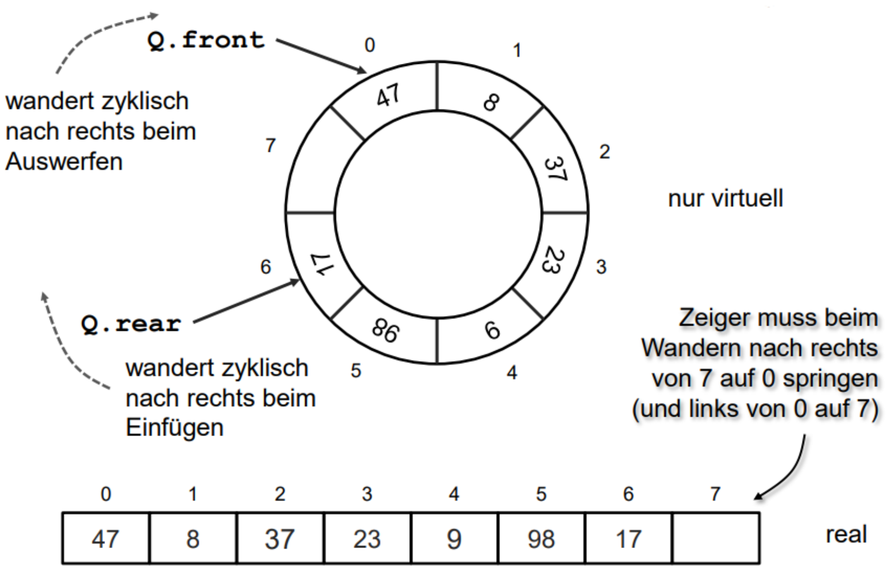
3.3 Queues

- **Abstrakter Datentyp Queue**
  - `new Q()`
    - Erzeuge neue (leere) Queue
  - `q.isEmpty()`
    - Gibt an, ob Queue `q` leer ist
  - `q.dequeue()`
    - Gibt vorderstes Element aus `q` zurück und löscht es auf Queue
    - Fehlermeldung, falls Queue leer ist
  - `q.enqueue(k)`
    - Schreibt `k` als neues hinterstes Element auf `q`
    - Fehlermeldung, falls Queue voll ist
  - Abstrakter Aufbau:
    - **FIFO**-Prinzip / First in, First out



- **Queues als (virtuelles) zyklisches Array**

  Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue



  - Problem, falls `Q.rear` und `Q.front` auf selbes Element zeigen
    - Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean `empty`
    - Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter
  - Methoden für zyklisches Array

Q leer, wenn `front==rear` und `empty==true`

Q voll, wenn `front==rear` und `empty==false`

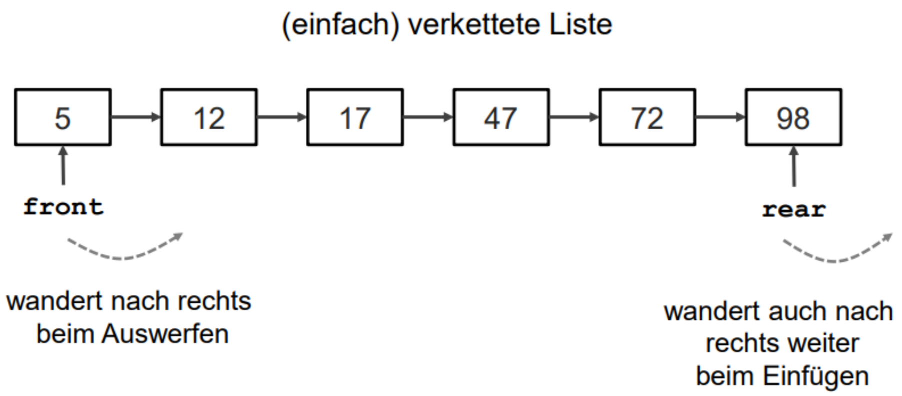
```
new(Q)

Q.A[]=ALLOCATE(MAX);
Q.front=0;
Q.rear=0;
Q.empty=true;
```

```
isEmpty(Q)

return Q.empty;
```

```
dequeue(Q)

IF isEmpty(Q) THEN
  error 'underflow'
ELSE
  Q.front=Q.front+1 mod MAX;
  IF Q.front==Q.rear THEN
      Q.empty=true;
  return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

```
enqueue(Q,k)

IF Q.rear==Q.front AND !Q.empty
THEN error 'overflow'
ELSE
    Q.A[Q.rear]=k;
    Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
    Q.empty=false;
```

- **Queues durch einfach verkettete Listen**



Methoden:

```
new(Q)

Q.front=nil;
Q.rear=nil;
```

```
isEmpty(Q)

IF Q.front==nil THEN
    return true
ELSE
    return false;
```

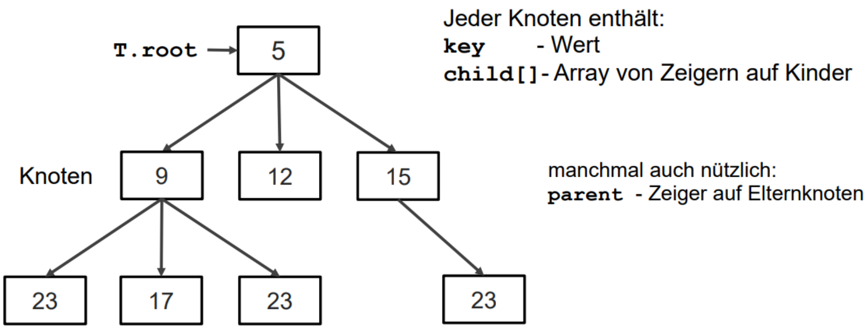
```
dequeue(Q)

IF isEmpty(Q) THEN
    error 'underflow'
ELSE
    x=Q.front;
    Q.front=Q.front.next;
    return x;
```

```
enqueue(Q,x)

IF isEmpty(Q) THEN
      Q.front=x;
ELSE
      Q.rear.next=x;
x.next=nil;
Q.rear=x;
```

- **Laufzeit**
  - Enqueue: $\Theta(1)$
  - Dequeue: $\Theta(1)$

3.4 Binäre Bäume

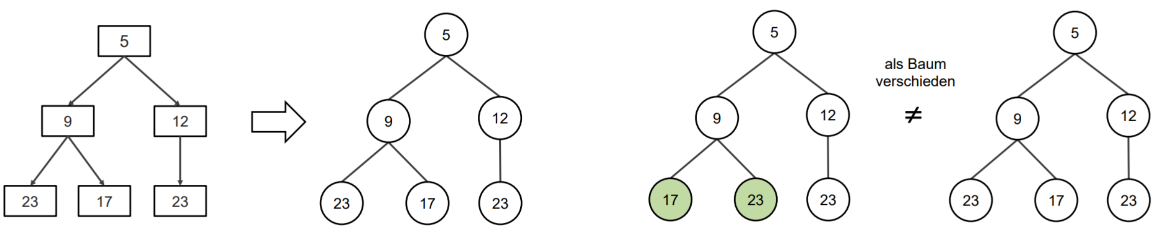
- **Bäume durch verkettete Listen**



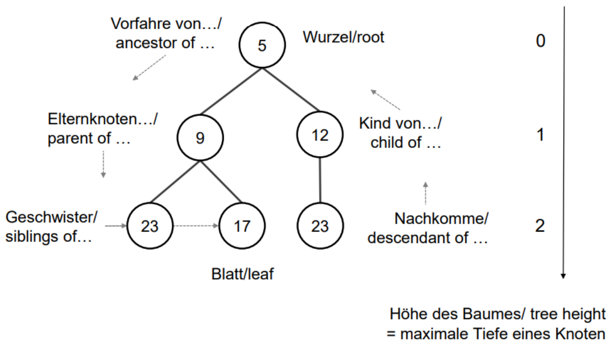
Baum-Bedingung: Baum ist leer oder…
es gibt einen Knoten `r` („Wurzel"), so dass jeder Knoten `v` von der Wurzel aus per eindeutiger Sequenz von `child`-Zeigern erreichbar ist:
`v = r.child[i1].child[i2].….child[im]`

Bäume sind "azyklisch" (Keine rückführende Spur")

- **Darstellung als (ungerichteter) Graph**

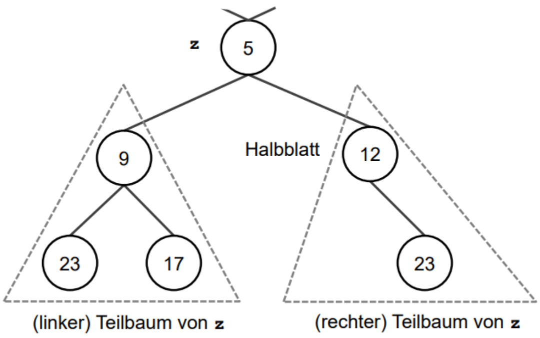


- **Allgemeine Begrifflichkeiten**



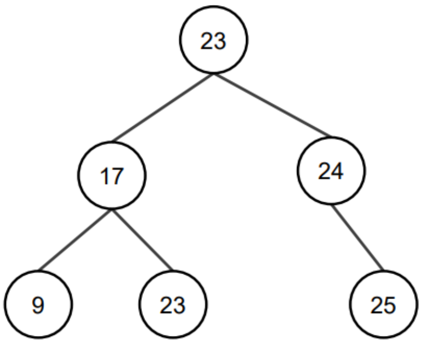
- Blatt: Knoten ohne Nachfolger
- Nachkomme von x:
  Erreichbar durch Pfad ausgehend von x

- **Begrifflichkeiten Binärbaum**



- Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder
  `left=child[0]` und `right=child[1]`
- Ausgangsgrad jedes Knoten ist ≤ 2
- Höhe leerer Baum per Konvention -1
- Hohe (nicht-leerer) Baum:
  max{Höhe aller Teilbäume der Wurzel} + 1
- Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

- **Traversieren von Bäumen**
  - Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
  - Laufzeit bei n Knoten: $T(n) = O(n)$
  - Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
    1. Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
    2. Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
  - Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
    1. Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
    2. Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses



`inorder(T.root)` ergibt

9 17 23 23 24 25

`preorder(T.root)` ergibt

23 17 9 23 24 25

`postorder(T.root)` ergibt

9 23 17 25 24 23

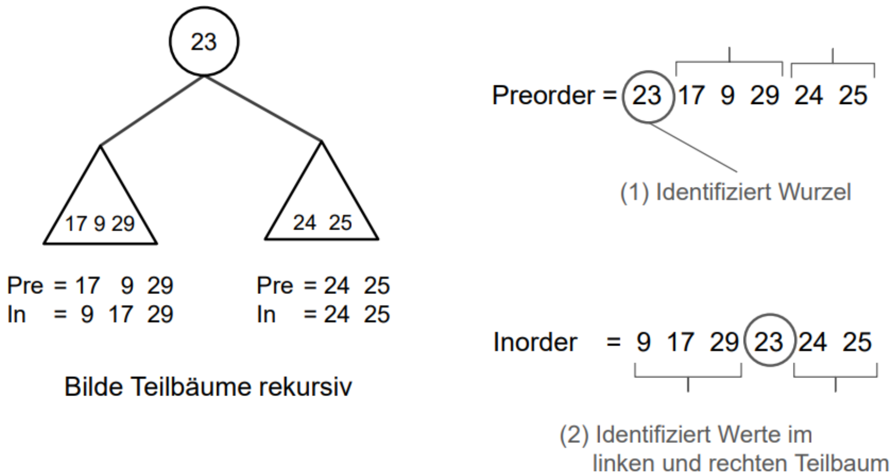
Code:

```
inorder(x)
IF x != nil THEN
    inorder(x.left);
    print x.key;
    inorder(x.right);
```

```
preorder(x)
IF x != nil THEN
print x.key;
preorder(x.left);
preorder(x.right);
```

```
postorder(x)
IF x != nil THEN
    postorder(x.left);
    postorder(x.right);
    print x.key;
```

- **Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen**
  - Nur In-,Pre-,Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen
    $\Rightarrow$ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig



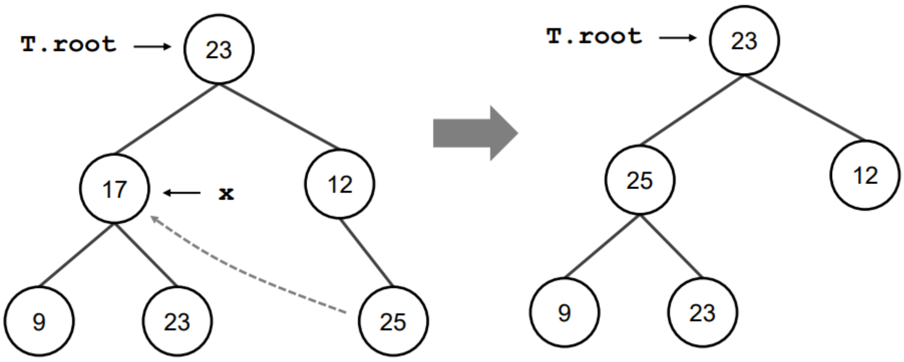
- **Abstrakter Datentyp Baum**
  - Abstrakter Aufbau:
    - `new T()`
      - Erzeugt neuen Baum namens `t`
    - `t.search(k)`
      - Gibt Element `x` in Baum `t` mit `x.key == k` zurück
    - `t.insert(k)`
      - Fügt Element `x` in Baum `t` hinzu
    - `t.delete(x)`
      - Löscht `x` aus Baum `t`
  - Suche nach Elementen
    - Laufzeit $= \Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)
    - Starte mit `search(T.root,k)`
    - Code:

```
search(x,k)
IF x == nil THEN return nil;
IF x.key == k THEN return x;
y = search(x.left,k);
IF y != nil THEN return y;
return search(x.right,k);
```

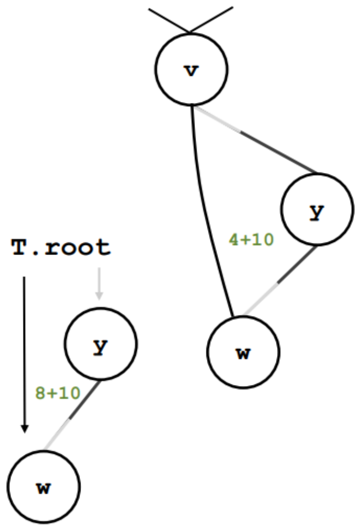
  - Einfügen von Elementen
    - Laufzeit $= \Theta(1)$
    - Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum)
    - Code:

```
insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;
IF T.root != nil THEN
    T.root.parent = x;
    x.left = T.root;
T.root = x;
```

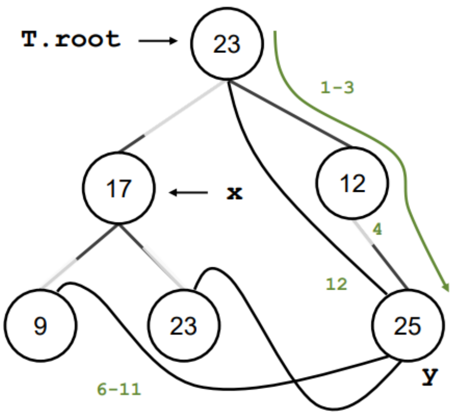
  - Löschen von Elementen
    - Laufzeit $= \Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)
    - Hier: Ersetze x durch Halbblatt ganz rechts



    - `Connect`-Algorithmus:



- Delete-Algorithmus:



- Laufzeit $= \Theta(1)$

```
connect(T,y,w) // Connects w to y.parent
v = y.parent;
IF y != T.root THEN
    IF y == v.right THEN
        v.right = w;
    ELSE
        v.left = w;

ELSE
    T.root = w;

IF w != nil THEN
    w.parent = v;
```

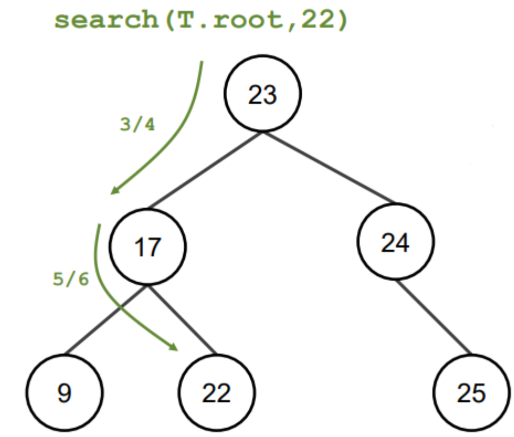
```
delete(T,x) // assumes x in T
y = T.root;
WHILE y.right != nil DO
    y = y.right;

connect(T,y,y.left);

if x != y THEN
    y.left = x.left;
    IF x.left != nil THEN
        x.left.parent = y;
    y.right = x.right;
    IF x.right != nil THEN
        x.right.parent = y;
    connect(T,x,y);
```

3.5 Binäre Suchbäume

- **Definition**
  - Totale Ordnung auf den Werten
  - Für alle Knoten z gilt:

    Wenn x Knoten im linken Teilbaum von z, dann `x.key` $\leq$ `z.key`

    Wenn y Knoten im rechten Teilbaum von z, dann `y.key` $\geq$ `z.key`
  - Preorder/Postorder + eindeutige Werte $\Rightarrow$ Eindeutige Identifizierung
- **Suchen im Binären Suchbaum**



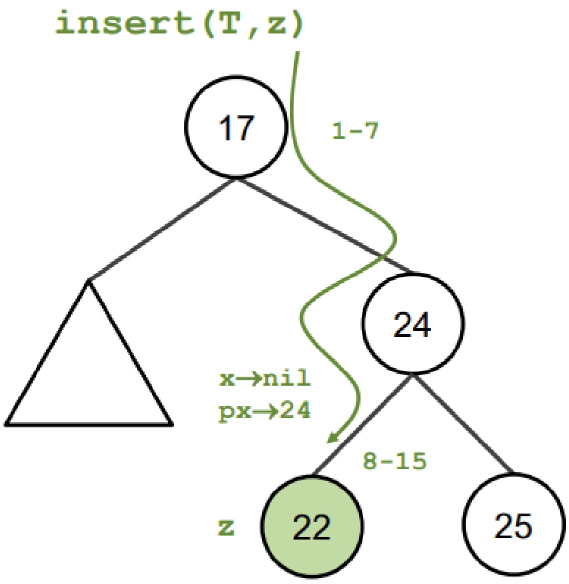
- Laufzeit $= O(h)$ (Höhe)
- Code:

```
search(x,k) // 1. Aufruf x = root
IF x == nil OR x.key == k THEN
    return x;
IF x.key > k THEN
    return search(x.left,k);
ELSE
    return search(x.right,k);
```

- Iterativer Code:

```
iterative-search(x,k)
WHILE x != nil AND x.key != k DO
    IF x.key > k THEN
        x = x.left;
    ELSE
        x = x.right;
return x;
```

- **Einfügen im Binary Search Tree**

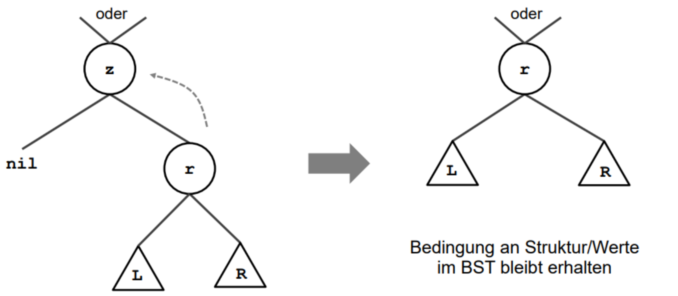


- Laufzeit $= O(h)$
- Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss
- Code:

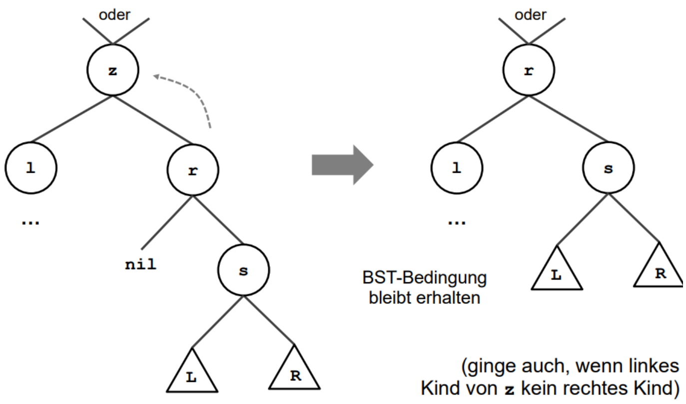
```
insert (T,z) // z.left == z.right == nil;
x = T.root;
px = nil;
WHILE x != nil DO
    px = x;
    IF x.key > z.key THEN
        x = x.left;
    ELSE
        x = x.right;
z.parent = px;
IF px == nil THEN
    T.root = z;
ELSE
    IF px.key > z.key THEN
        px.left = z;
    ELSE
        px.right = z;
```

- **Löschen im BST**
  - Verschiedene Fälle:

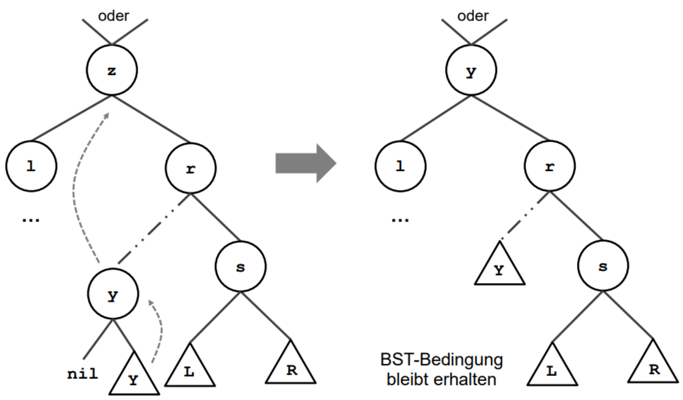
Löschen im BST (I) zu löschender Knoten **z** hat maximal ein Kind



Löschen im BST (II) rechtes Kind von Knoten **z** hat kein linkes Kind



Löschen im BST (III) „kleinster“ Nachfahre vom rechten Kind von **z**



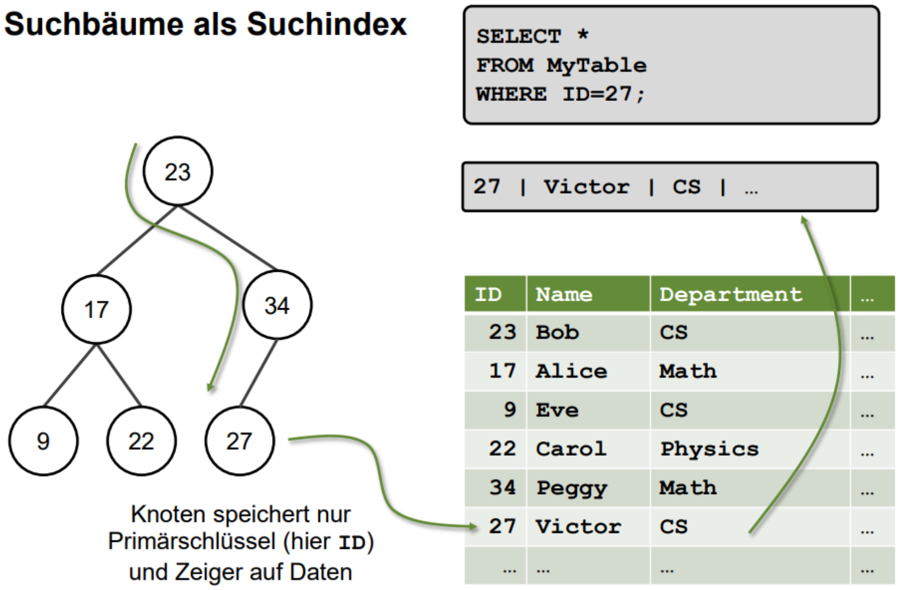
  - Code (Transplantation)

```
// Hängt Teilbaum v an Parent von u
transplant(T,u,v)
IF u.parent == nil THEN
    T.root = v;
ELSE
    IF u == u.parent.left THEN
        u.parent.left = v;
    ELSE
        u.parent.right = v;
IF v != nil THEN
    v.parent = u.parent;
```

```
delete(T,z)
IF z.left == nil THEN
    transplant(T,z,z.left)
ELSE
    IF z.right == nil THEN
        transplant(T,z,z,left)
    ELSE
        y = z.right;
        WHILE y.left != nil DO y = y.left;
        IF y.parent != z THEN
            transplant(T,y,y.right)
            y.right = z.right;
            y.right.parent = y;
        transplant(T,z,y)
        y.left = z.left;
        y.left.parent = y;
```

  - Laufzeit $= O(h)$
  - Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und h klein relativ zu n

- **Höhe eines BST**
  - Best Case:
    - Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
    - $h = O(log_2 n)$
    - Laufzeit $= O(log_2 n)$
  - Worst Case:
    - Degenerierter Baum (lineare Liste)
    - $h = n - 1$
    - Laufzeit $= \Theta(n)$
  - Durchschnittliche Höhe:
    - Erwartete Höhe: $\Theta(log_2 n)$
- **Suchbäume als Suchindex**
  - Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
  - Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatzbedarf



4 Advanced Data Structures

4.1 Rot-Schwarz-Bäume

- **Definition**
  - Binärer Suchbaum mit Zusatzeigenschaften
  - Zusatzeigenschaften:
    - Jeder Knoten hat die Farbe rot oder schwarz
    - Die Wurzel ist schwarz
    - Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz ("Nicht-Rot-Rot-Regel")
    - Für jeden Knoten hat jeder Pfad zu einem Blatt die selbe Anzahl an gleichen schwarzen Knoten
  - Halbblätter im RBT sind schwarz
  - Schwarzhöhe eines Knoten:
    Eindeutige Anzahl von schwarzen Knoten auf dem Weg zu einem Blatt im Teilbaum des Knoten
  - Für leeren Baum gibt Schwarzhöhe $= 0$ ($SH(nil) = 0$)
  - Höhe eines Rot-Schwarz-Baums
    - $h \leq 2 \cdot log_2(n+1)$ (n Knoten)
    - In jedem Unterteilbaum gleiche Anzahl schwarzer Knoten

- Maximal zusätzlich gleiche Anzahl roter Knoten auf diesem Pfad
- Einigermaßen ausbalanciert $\Rightarrow$ Höhe $O(log\ n)$

- Alle folgenden Algorithmen arbeiten mithilfe eines Sentinels (zeigt auf sich selbst)

- **Einfügen**
  - Laufzeit: $\Theta(h)$ (h jedoch $log\ n$)

1. Finde Elternknoten wie im BST (BST-Einfüge Algorithmus)
2. Färbe den neuen Knoten rot
3. Wiederherstellen der Rot-Schwarz-Bedingung

```
fixColorsAfterInsertion(T,z)

WHILE z.parent.color == red DO                  // solange der Elternknoten rot ist
    IF z.parent == z.parent.parent.left THEN    // Linkes Kind (if-Fall)
        y = z.parent.parent.right;
        IF y != nil AND y.color == red THEN     // Fall 1
            z.parent.color = block;
            y.color = black;
            z.parent.parent.color = red;
            z = z.parent.parent;                // rekursiv nach oben weiterführen
        ELSE                                    // Fall 2
            IF z == z.parent.right THEN         // Zwischenfall (2.1)
                z = z.parent;
                rotateLeft(T,z);
            z.parent.color = black;
            z.parent.parent.color = red;
            rotateRight(T, z.parent.parent);
    ELSE                                        // Rechtes Kind (else-Fall)
        // Tauschen von rechts und links
    T.root.color = black;                       // Setzen der Wurzel auf Schwarz
```

- Hilfsmethode `rotateLeft`

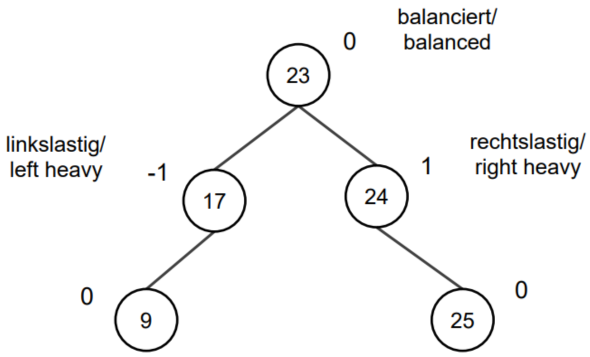
```
rotateLeft(T,x)

y = x.right;
x.right = y.left;
IF y.left != nil THEN
    y.left.parent = x;
y.parent = x.parent;
IF x.parent == T.sent THEN
    T.root = y;
ELSE
    IF x == x.parent.left THEN
        x.parent.left = y;
    ELSE
        x.parent.right = y;
y.left = x;
x.parent = y;
```

- **Löschen**
  - Laufzeit: $O(h) = O(log\ n)$
  - analog zum binären Suchbaum, aber neue Node erbt Farbe der alten Node
  - Wenn neueNode schwarz war $\Rightarrow$ Fixup
  - Verschiedene Fälle, die auch gegenseitig Voraussetzungen füreinander sind
  - Da das Ganze jedoch etwas umfangreicher ist, findet es sich nicht hier in der Zusammenfassung

- **Worst-Case-Laufzeiten**
  - Einfügen: $\Theta(log\ n)$
  - Löschen: $\Theta(log\ n)$
  - Suchen: $\Theta(log\ n)$

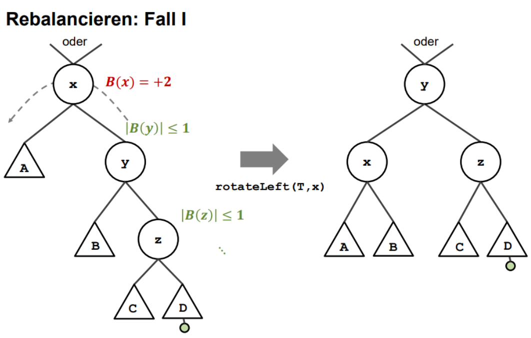
4.2 AVL-Bäume

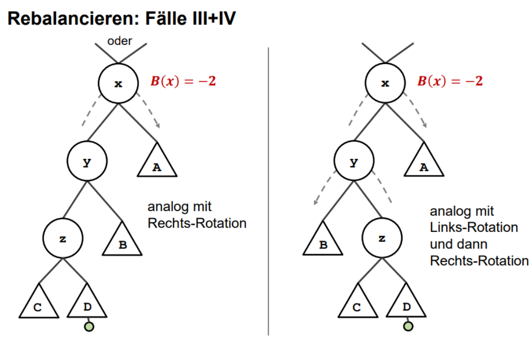
- **Definition:**
  - $h \leq 1.441 \cdot log\ n$ (optimierte Konstanten - 1,441 vs 2 (RBT))
  - Binärer Suchbaum
  - Allerdings Balance in jedem Knoten nur $-1, 0, 1$
  - Balance für x: $B(x)$ = Höhe(rechter Teilbaum) - Höhe(linker Teilbaum)

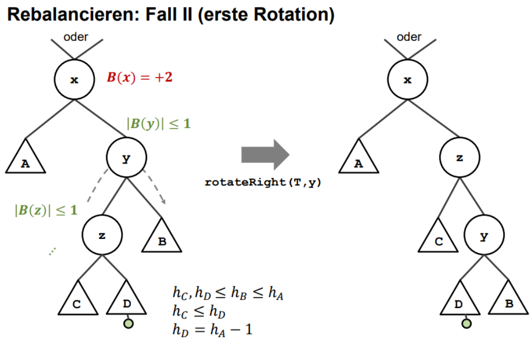


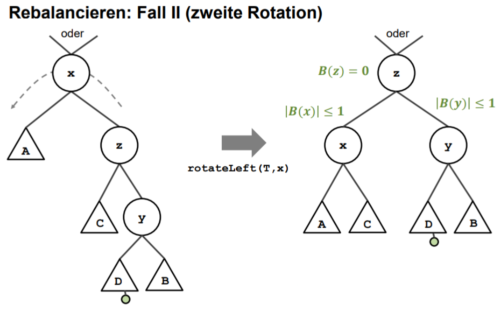
- **AVL vs. Rot-Schwarz**
  - AVL:
    - Einfügen und Löschen verletzen in der Regel öfter die Baum-Bedingung
    - Aufwendiger zum Rebalancieren
  - Rot-Schwarz:
    - Suchen dauert evtl. länger
  - Konklusion:
    - AVL geeigneter, wenn mehr Such-Operationen und weniger Einfügen und Löschen
  - Gemeinsamkeiten:
  - AVL $\subset$ Rot-Schwarz
  - AVL Baum $\Rightarrow$ Rot-Schwarz-Baum mit Höhe $\lceil \frac{h+1}{2} \rceil$
  - Für jede Höhe $h \geq 3$ gibt es einen RBT, der kein AVL-Baum ist (AVL $\neq$ RBT)

- **Einfügen**
  - Einfügen funktioniert wie beim Binary Search Tree mit Sentinel
  - Erfordert danach jedoch Rebalancieren weiter oben im Baum
  - Rebalancieren: (verschiedene Fälle)









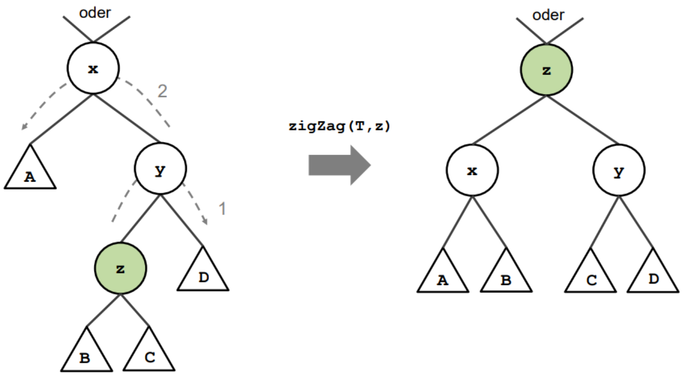
- **Löschen**
  - Analog zum binären Suchbaum
  - Rebalancieren bis eventuell in die Wurzel notwendig
- **Worst-Case-Laufzeiten**
  - Einfügen: $\Theta(log\ n)$
  - Löschen: $\Theta(log\ n)$
  - Suchen: $\Theta(log\ n)$
  - theoretisch bessere Konstanten als RBT
  - in Praxis aber nur unwesentlich schneller

4.3 Splay-Bäume

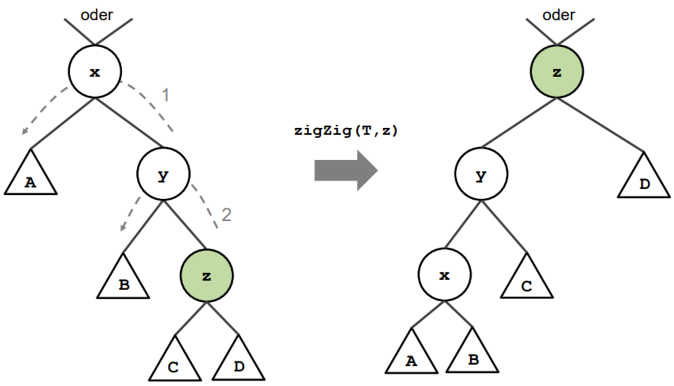
- **Definition**
  - selbst-organisierende Listen
  - Ansatz: Einmal angefragte Werte werdeb wahrs. noch öfter angefragt
  - Angefragte Werte nach oben schieben
  - Splay-Bäume sind Untermenge von BST
- **Splay-Operationen**
  - Suchen oder Einfügen: Spüle gesuchten oder neu eingefügten Knoten an die Wurzel
  - Splay: (Folge von Zig-,Zig-Zig-, Zig-Zag-Operationen)

```
splay(T,z)

WHILE z != T.root DO
    IF z.parent.parent == nil THEN
        zig(T,z);
    ELSE
        IF z == z.parent.parent.left.left OR
           z == z.parent.parent.right.right THEN
           zigZig(T,z);
        ELSE
            zigZag(T,z);
```

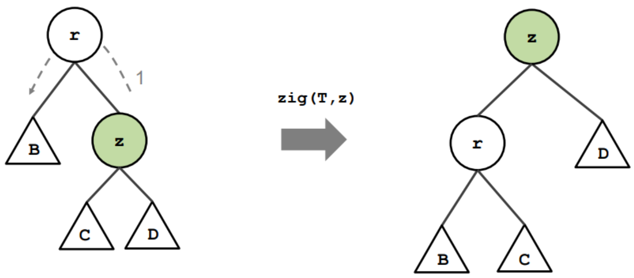
Zig-Zag-Operation =Rechts-Links- oder Links-Rechts-Rotation



Zig-Zig-Operation =Links-Links- oder Rechts-Rechts-Rotation



Zig-Operation =einfache Links- oder Rechts-Rotation

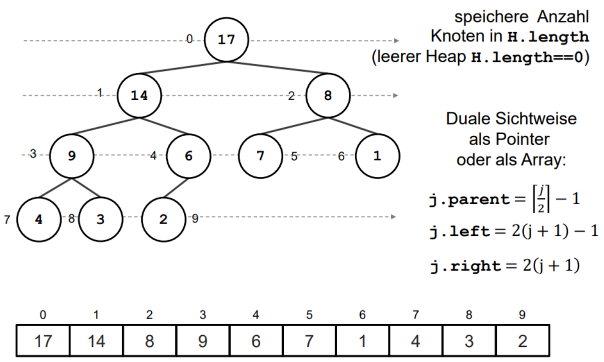


- **Suchen**
  - Laufzeit: $O(h)$
  - Suche des Knotens wie im BST
  - Hochspülen des gefundenen Knotens (alternativ zuletzt besuchter Knoten, falls nicht gefunden)
- **Einfügen**
  - Laufzeit: $O(h)$
  - Suche der Position wie im BST
  - Einfügen und danach hochspülen des eingefügten Knotens
- **Löschen**
  - Laufzeit: $O(h)$
  1. Spüle gesuchten Knoten per Splay-Operation nach oben
  2. Lösche den gesuchten Knoten (Wenn einer der beiden entstehenden Teilbäume leer, dann fertig)
  3. Spüle den größten Knoten im linken Teilbaum nach oben (kann kein rechtes Kind haben)
  4. Hänge rechten Teilbaum an größten Knoten aus 3. an
- **Laufzeit Splay-Bäume**

- Amortisierte Laufzeit: Laufzeit pro Operation über mehrere Operationen hinweg
- Worst-Case-Laufzeit pro Operation: $O(log_n\ n)$

4.4 Binäre Max-Heaps

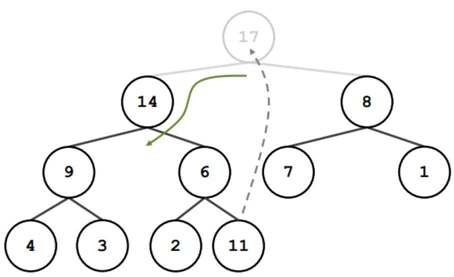
- **Definition**
  - Heaps sind keine BSTs
  - Eigenschaften binäre Max-Heaps:
    - bis auf das unterste Level vollständig und dort von links gefüllt ist
    - Für alle Knoten gilt: `x.parent.key` $\geq$ `x.key`
    - Maximum des Heaps steht damit in der Wurzel
  - $h \leq log\ n$, da Baum fast vollständig
- **Heaps durch Arrays**



- **Einfügen**
  - Idee: Einfügen und danach Vertauschen nach oben, bis Max-Eigenschaft wieder erfüllt ist
  - Laufzeit: $O(h) = O(log\ n)$

```
insert(H,k) // als unbeschränktes Array

H.length = H.length + 1;
H.A[H.length-1] = k;

i = H.length - 1;
WHILE i > 0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]
    SWAP(H.A, i, i.parent);
    i = i.parent;
```

- **Lösche Maximum**
  1. Ersetze Maximum durch letztes"Blatt
  2. Vertausche Knoten durch Maximum der beiden Kinder (`heapify`)



```
extract-max(H)

IF isEmpty(H) THEN return error 'underflow';
ELSE
    max = H.A[0];
    H.A[0] = H.A[H.length - 1];
    H.length = H.length - 1;
    heapify(H, 0);
    return max;
```

```
heapify(H, i)

maxind = i;
IF i.left < H.length AND H.A[i]<H.A[i.left] THEN
    maxind = i.left;
IF i.right < H.length AND H.A[maxind]<H.A[i.right] THEN
    maxind = i.right;

IF maxind != i THEN
    SWAP(H.A, i, maxind);
    heapify(H, maxind);
```

- **Heap-Konstruktion aus Array**
  - Blätter sind für sich triviale Max-Heaps
  - Bauen von Max-Heaps für Teilbäume mithilfe Rekursion per `heapify`
  - (Array nicht unbedingt in richtiger Reihenfolge)

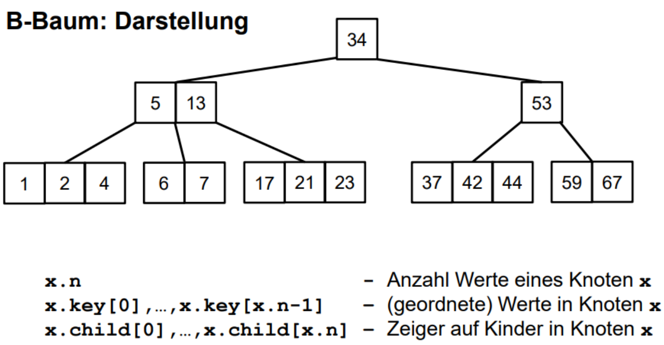
```
buildHeap(H.A) // Array in H.A

H.length = A.length;
FOR i = ceil((H.length-1)/2) - 1 DOWNTO 0 DO
    heapify(H.A,i);
```

- **Heap-Sort**
  - Idee: Bauen des Heaps aus Array und dann Extraktion des Maximums

```
heapSort(H.A)

buildHeap(H.A)                    // Bauen des Heaps
WHILE !isEmpty(H) DO
    PRINT extract-max(H);         // Ausgabe des Maximums bis Heap leer ist
```

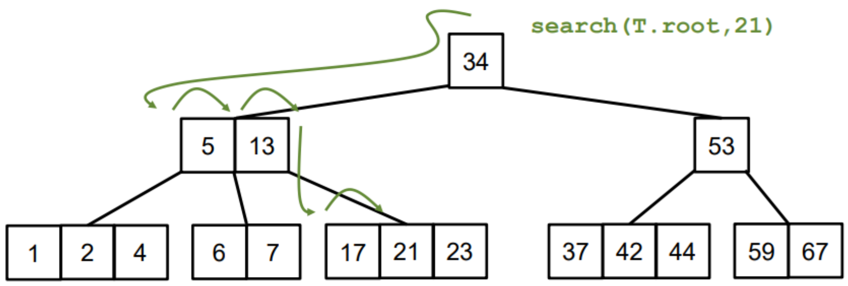
4.5 B-Bäume

- **Definition**
  - Jeder B-Baum hat einen angebenen Grad also z.B. $t = 2$
  - Eigenschaften:
    - Wurzel zwischen $[1, ..., 2t - 1]$ Werte
    - Knoten zwischen $[t - 1, ...2t - 1]$ Werte
    - Werte innerhalb eines Knotens aufsteigend geordnet
    - Blätter haben alle die gleiche Höhe
    - Jeder innere Knoten mit n Werten hat $n + 1$ Kinder, sodass gilt: $k_0 \leq key[0] \leq k_1 \leq key[1] \leq ... \leq k_{n-1} \leq key[n-1] \leq k_n$



  - Höhe B-Baum: $h \leq log_t \frac{n+1}{2}$ (Grad t und n Werte)
  - B-Baum wird für größere t flacher

- **Suche**

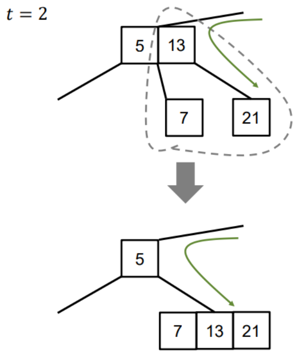



```
search(x, k)

WHILE x != nil DO
    i = 0;
    WHILE i < x.n AND x.key[i] < k DO
        i++;
    IF i < x.n AND x.key[i] == k THEN
        return(x, i);
    ELSE
        x = x.child[i];
return nil;
```

- **Einfügen**
  - Einfügen erfolgt immer in einem Blatt
  - Falls das Blatt voll ist, muss jedoch gesplittet werden
  - ⇒ Beim Durchlaufen des Baumes an jeder notwendigen (voll) Position splitten
  - Splitten:
    - Bricht volle Node auf und fügt mittleren Wert zur Elternnode hinzu
    - Aus den anderen Werten entstehen nun jeweils eigene Kinder
    - An der Wurzel splitten erzeugt neue Wurzel und erhöht Baumhöhe um eins
  - Ablauf zusammengefasst:
    1. Start bei Wurzel, falls kein Platz mehr splitten
    2. Durchlaufen des Baumes bis zur richtigen Position und immer, falls voll, splitten
    3. Einfügen der Node (fertig)

```
insert(T, z)

Wenn Wurzel schon 2t-1 Werte, dann splitte Wurzel
Suche rekursiv Einfügeposition:
    Wenn zu besuchendes Kind 2t-1 Werte, splitte es erst
Füge z in Blatt ein
```

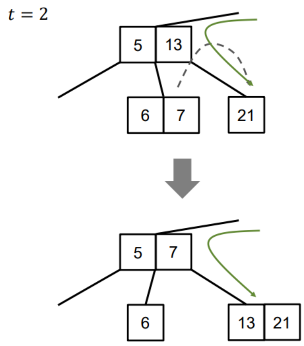
- **Löschen**
  - Wenn Blatt noch mehr als t-1 Werte, kann der Wert einfach entfernt werden
  - Allerdings durchlaufen wir hier den Baum auch wieder von oben und stellen gewisse Voraussetzungen her
  - Durchlaufen des Baumes von oben und Anwendung der folgenden Algorithmen



Allgemeines Verschmelzen:

- Kind und alle rechten/linken Geschwisterknoten nur $t-1$ Werte
- Wenn Elternknoten vorher min. t Werte

  $\Rightarrow$ keine Änderung oberhalb notwendig



Allgemeines Rotieren/Verschieben:

- Kind nur $t-1$ Werte
- Geschwister jedoch mehr als $t-1$ Werte
- keine Änderung oberhalb notwendig

- Code:

```
delete(T, k)

Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder t-1 Werte,
verschmelze Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)
Suche rekursiv Löschposition:
    Wenn zu besuchendes Kind nur t-1 Werte,
    verschmelze es oder rotiere/verschiebe
Entferne Wert k im inneren Knoten/Blatt
// Ohne Probleme, aufgrund vorheriger Anpassung
```

- **Worst-Case-Laufzeiten**
  - Einfügen: $\Theta(log_t\ n)$
  - Löschen: $\Theta(log_t\ n)$
  - Suchen: $\Theta(log_t\ n)$
  - Nur vorteilhaft wenn Daten blockweise eingelesen werden
  - O-Notation versteckt hier konstanten Faktor t für Suche innerhalb eines Knotens