

Algorithmen und Datenstrukturen

Jonas Milkovits

Last Edited: 13. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Probleme in der Informatik	1
1.2	Definitionen für Algorithmen	1
2	Sortieren	2
2.1	Einführung ins Sortieren	2
2.2	Analyse von Algorithmen - Teil 1	3
2.3	Analyse von Algorithmen - Teil 2	3
2.4	Analyse von Algorithmen - Teil 3	4
2.5	Insertion Sort	7
2.6	Bubble Sort	8
2.7	Selection Sort	10
2.8	Divide-And-Conquer-Ansatz	10
2.9	Merge Sort	10
2.10	Quicksort	12
2.11	Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen	14
3	Grundlegende Datenstrukturen	17
3.1	Stacks	17
3.2	Verkettete Listen	18
3.3	Queues	20
3.4	Binäre Bäume	22
3.5	Binäre Suchbäume	25
4	Advanced Data Structures	28
4.1	Rot-Schwarz-Bäume	28
4.2	AVL-Bäume	30
4.3	Splay-Bäume	31
4.4	Binäre Max-Heaps	33
4.5	B-Bäume	34
5	Randomized Data Structures	36
5.1	Skip Lists	36
5.2	Hashtables	38
5.3	Bloom-Filter	39
6	Graph Algorithms	40
6.1	Graphen	40
6.2	Breadth-First Search (BFS)	41
6.3	Depth-First Search(DFS)	42
6.4	Minimale Spannbäume	43
6.5	Kürzeste Wege in (gerichteten) Graphen	44

1 Einleitung

1.1 Probleme in der Informatik

- Problem im Sinne der Informatik
 - Enthält eine Beschreibung der Eingabe
 - Enthält eine Beschreibung der Ausgabe
 - Gibt **keinen** Übergang von Eingabe und Ausgabe an
 - z.B.: Finde den kürzesten Weg zwischen zwei Orten
- Probleminstanzen
 - Probleminstanz ist eine konkrete Eingabenbelegung, für die entsprechende Ausgabe gewünscht ist
 - z.B.: Was ist der kürzeste Weg vom Audimax in die Mensa?

1.2 Definitionen für Algorithmen

- Begriff des Algorithmus
 - Endliche Folge von Rechenschritten, der eine Ausgabe in eine Eingabe verwandelt
- Anforderungen an Algorithmen
 - Spezifizierung der Eingabe und Ausgabe
 - Anzahl und Typen aller Elemente ist definiert
 - Eindeutigkeit
 - Jeder Einzelschritt ist klar definiert und ausführbar
 - Die Reihenfolge der Einzelschritte ist festgelegt
 - Eindlichkeit
 - Notation hat eine endliche Länge
- Eigenschaften von Algorithmen
 - Determiniertheit
 - Für gleiche Eingabe stets die gleiche Ausgabe (andere mögliche Zwischenzustände)
 - Determinismus
 - Für gleiche Eingabe stets identische Ausführung und Ausgabe
 - Terminierung
 - Algorithmus läuft für jede Eingabe nur endlich lange
 - Korrektheit
 - Algorithmus berechnet stets die spezifizierte Ausgabe (falls dieser terminiert)
 - Effizienz
 - Sparsamkeit im Ressourcenverbrauch (Zeit, Speicher, Energie,...)

2 Sortieren

2.1 Einführung ins Sortieren

- **Das Sortierproblem**

- Ausgangspunkt: Folge von Datensätzen D_1, D_2, \dots, D_n
- Zu sortierende Elemente heißen auch Schlüssel(werte)
- Ziel: Datensätze so anzuordnen, dass die Schlüsselwerte sukzessive ansteigen/absteigen
- Bedingung: Schlüsselwerte müssen vergleichbar sein
- Durchführung:
 - Eingabe: Sequenz von Schlüsselwerten $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
 - Eingabe ist eine **Instanz** des Sortierproblems
 - Ausgabe: Permutation $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ derselben Folge mit Eigenschaft $a'_1 \leq \dots \leq a'_n$
- Algorithmus **korrekt**, wenn dieser das Problem für alle Instanzen löst

- **Exkurs: Totale Ordnung**

- Sei M eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq M \times M$ eine binäre Relation auf M
- Das Paar (M, \leq) heißt genau dann totale Relation auf der Menge M , wenn Folgendes erfüllt ist:
 - Reflexivität: $\forall x \in M : x \leq x$
 - Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
 - Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
 - Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$
- z.B.: \leq Ordnung auf natürlichen Zahlen bildet eine totale Ordnung ($1 \leq 2 \leq 3 \dots$)
- z.B.: Lexikographische Ordnung \leq_{lex} ist eine totale Ordnung ($A \leq B \leq C \dots$)

- **Vergleichskriterien von Sortieralgorithmen**

- Berechnungsaufwand $O(n)$
- Effizient: Best Case vs Average Case vs Worst Case
- Speicherbedarf:
 - in-place (in situ): Zusätzlicher Speicher von der Eingabegröße unabhängig
 - out-of-place: Speichermehrbedarf von Eingabegröße abhängig
- Stabilität: Stabile Verfahren verändern die Reihenfolge von äquivalenten Elementen nicht
- Anwendung als Auswahlfaktor:
 - Hauptoperationen beim Sortieren: Vergleiche und Vertausche
 - Diese Operationen können sehr teuer oder sehr günstig sein, je nach Aufwand
 - Anpassung des Verfahrens abhängig von dem Aufwand dieser Operationen

2.2 Analyse von Algorithmen - Teil 1

- **Schleifeninvariante (SIV)**
 - Sonderform der Invariante
 - Am Anfang/Ende jedes Schleifendurchlaufs und vor/nach jedem Schleifendurchlauf gültig
 - Wird zur Feststellung der Korrektheit von Algorithmen verwendet
 - Eigenschaften:
 - Initialisierung: Invariante ist vor jeder Iteration wahr
 - Fortsetzung: Wenn SIV vor der Schleife wahr ist, dann auch bis Beginn der nächsten Iteration
 - Terminierung: SIV liefert bei Schleifenabbruch, helfende Eigenschaft für Korrektheit
 - Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - SIV**
- **Laufzeitanalyse**
 - Aufstellung der Kosten und Durchführungsanzahl für jede Zeile des Quelltextes
 - Beachte: Bei Schleifen wird auch der Aufruf gezählt, der den Abbruch einleitet
 - Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - Laufzeit**
 - Zusätzliche Überprüfung des **Best Case**, **Worst Case** und **Average Case**
- **Effizienz von Algorithmen**
 - Effizienzfaktoren
 - Rechenzeit (Anzahl der Einzelschritte)
 - Kommunikationsaufwand
 - Speicherplatzbedarf
 - Zugriffe auf Speicher
 - Laufzeit hängt von versch. Faktoren ab
 - Länge der Eingabe
 - Implementierung der Basisoperationen
 - Takt der CPU

2.3 Analyse von Algorithmen - Teil 2

- **Komplexität**
 - Abstrakte Rechenzeit $T(n)$ ist abhängig von den Eingabedaten
 - Übliche Betrachtungsweise der Rechenzeit ist asymptotische Betrachtung
- **Asymptotik**
 - Annäherung an einer sich ins Unendliche verlaufende Kurve
 - z.B.: $f(x) = \frac{1}{x} + x$ | Asymptote: $g(x) = x$ | ($\frac{1}{x}$ läuft gegen Null)
- **Asymptotische Komplexität**
 - Abschätzung des zeitlichen Aufwands eines Algorithmus in Abhängigkeit einer Eingabe
 - Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - Laufzeit Θ**
- **Asymptotische Notation**
 - Betrachtung der Laufzeit $T(n)$ für sehr große Eingaben $n \in \mathbb{N}$
 - Komplexität ist unabhängig von konstanten Faktoren und Summanden
 - Nicht berücksichtigt: Rechnergeschwindigkeit / Initialisierungsauswände
 - Komplexitätsmessung via Funktionsklasse ausreichend
 - Verhalten des Algorithmus für große Problemgrößen

- Veränderung der Laufzeit bei Verdopplung der Problemgröße
- **Gründe für die Nutzung der theoretischen Betrachtung statt der Messung der Laufzeit**
 - Vergleichbarkeit
 - Laufzeit abhängig von konkreter Implementierung und System
 - Theoretische Betrachtung ist frei von Abhängigkeiten und Seiteneffekten
 - Theoretische Betrachtung lässt direkte Vergleichbarkeit zu
 - Aufwand
 - Wieviele Testreihen?
 - In welcher Umgebung?
 - Messen führt in der Ausführung zu hohem, praktischen Aufwand
 - Komplexitätsfunktion
 - Wachstumsverhalten ausreichend
 - Praktische Evaluation mit Zeiten nur für Auswahl von Systemen möglich
 - Theoretischer Vergleich (Funktionsklassen) hat ähnlichen Erkenntnisgewinn

2.4 Analyse von Algorithmen - Teil 3

• Θ -Notation

- Θ -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben und unten
- Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (\mathbb{N} : Eingabelänge, \mathbb{R} : Zeit)

$$\Theta(g) = \{f : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

- $\Theta(g)$ enthält alle f , die genauso schnell wachsen wie g
- Schreibweise: $f \in \Theta(g)$ (korrekt), manchmal auch $f = \Theta(g)$
- $g(n)$ ist eine asymptotisch scharfe Schranke von $f(n)$
- $f(n) = \Omega(g(n))$ gilt, wenn $f(n) = O(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$ erfüllt sind

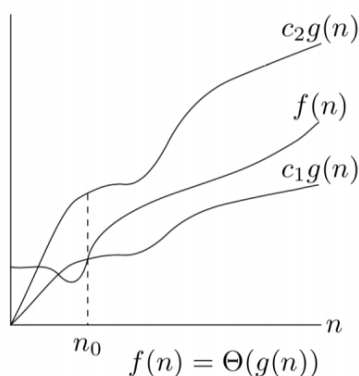


Abbildung 1: Veranschaulichung

- z.B.: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \mid f(n) \in \Theta(n^2)$
- Aus $\Theta(n^2)$ folgt, dass $g(n) = n^2$
- Vorgehen:
 - Finden eines n_0 und c_1, c_2 , sodass
 - $c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ erfüllt ist
 - Konkret: $c_1 * n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 * n^2$
 - Division durch n^2 : $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$
 - Ab $n = 7$ positives Ergebnis: $0,0714 \mid n_0 = 7$
 - Deswegen setzen wir $c_1 = \frac{1}{14}$
 - Für $n \rightarrow \infty$: $0,5 \mid c_2 = 0,5$
 - Natürlich auch andere Konstanten möglich

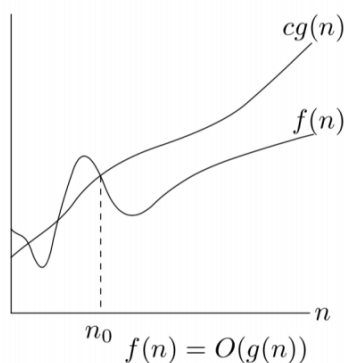
• O -Notation

- O -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben

$$O(g) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 Funktion f Positive Konstanten Für alle n größer gleich n_0 $f(n)$ wird von $cg(n)$ für hinreichend große n beschränkt

- $O(g)$ enthält alle f , die höchstens so schnell wie g wachsen
- Schreibweise: $f = O(g)$
- $f(n) = \Theta(g) \rightarrow f(n) = O(g) \mid \Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- Ist f in der Menge $\Theta(g)$, dann auch in der Menge $O(g)$



- z.B.: $f(n) = n + 2 \mid f(n) = O(n)$?
- Ja $f(n)$ ist Teil von $O(n)$ für z.B. $c = 2$ und $n_0 = 2$

Abbildung 2: Veranschaulichung

• O -Notation Rechenregeln

- Konstanten:
 - $f(n) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ konstante Funktion $\rightarrow f(n) = O(1)$
 - z.B. $3 \in O(1)$
- Skalare Multiplikation:
 - $f = O(g)$ und $a \in \mathbb{R} \rightarrow a * f = O(g)$
- Addition:
 - $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \rightarrow f_1 + f_2 = O(\max\{g_1, g_2\})$
- Multiplikation:
 - $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \rightarrow f_1 * f_2 = O(g_1 * g_2)$

• Ω -Notation

- Ω -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von unten

$$\Omega(g) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 Funktion f Positive Konstanten Für alle n größer gleich n_0 $f(n)$ wird von $cg(n)$ für hinreichend große n unten beschränkt

- Ω -Notation enthält alle f , die mindestens so schnell wie g wachsen

- Schreibweise: $f = \Omega(g)$

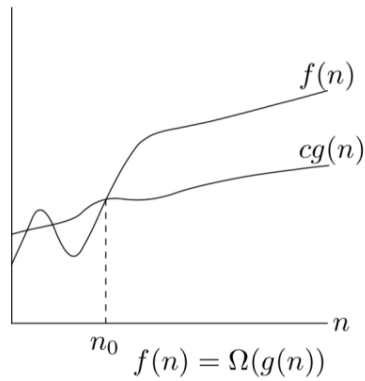


Abbildung 3: Veranschaulichung

• Komplexitätsklassen

- n ist hier die Länge der Eingabe

Klasse	Bezeichnung	Beispiel
$\Theta(1)$	Konstant	Einzeloperation
$\Theta(\log n)$	Logarithmisch	Binäre Suche
$\Theta(n)$	Linear	Sequentielle Suche
$\Theta(n \log n)$	Quasilinear	Sortieren eines Arrays
$\Theta(n^2)$	Quadratisch	Matrixaddition
$\Theta(n^3)$	Kubisch	Matrixmultiplikation
$\Theta(n^k)$	Polynomiell	
$\Theta(2^n)$	Exponentiell	Travelling-Salesman*
$\Theta(n!)$	Faktoriell	Permutationen

- Ausführungsdauer, falls eine Operation n genau $1\mu s$ dauert

Eingabe- größe n	$\log_{10} n$	n	n^2	n^3	2^n
10	$1\mu s$	$10\mu s$	$100\mu s$	1ms	$\sim 1ms$
100	$2\mu s$	$100\mu s$	10ms	1s	$\sim 4 \times 10^{16}y$
1000	$3\mu s$	1ms	1s	16min 40s	?
10000	$4\mu s$	10ms	1min 40s	$\sim 11,5d$?
10000	$5\mu s$	100ms	2h 46min 40s	$\sim 31,7y$?

- Asymptotische Notationen in Gleichungen

- $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$
- $\Theta(n)$ fungiert hier als Platzhalter für eine beliebige Funktion $f(n)$ aus $\Theta(n)$
- z.B.: $f(n) = 3n + 1$

• o-Notation

- o -Notation stellt eine echte obere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
- Außerdem $<$ statt \leq
- z.B.: $2n = o(n^2)$ und $2n^2 \neq o(n^2)$

$$o(g) = \{f : \underbrace{\forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < cg(n)}\}$$

Gilt für **alle** Konstanten $c > 0$.

In O-Notation gilt es für eine Konstante $c > 0$

- **ω -Notation**

- ω -Notation stellt eine echte untere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
- Außerdem $>$ statt \geq
- z.B.: $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$ und $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$$\omega(g) = \{f : \forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$

2.5 Insertion Sort

- **Idee**

- Halte die linke Teilfolge sortiert
- Füge nächsten Schlüsselwert hinzu, indem es an die korrekte Position eingefügt wird
- Wiederhole den Vorgang bis Teilfolge aus der gesamten Liste besteht

- **Code**

```
FOR j = 1 TO A.length - 1
  key = A[j]
  // Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[0...j-1] ein
  i = j - 1
  WHILE i >= 0 and A[i] > key
    A[i + 1] = A[i]
    i = i - 1
  A[i + 1] = key
```

- **Schleifeninvariante von Insertion Sort**

- Zu Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife besteht die Teilfolge $A[0 \dots j-1]$ aus den Elementen der ursprünglichen Teilfolge $A[0 \dots j-1]$ enthaltenen Elementen, allerdings in sortierter Reihenfolge.

- **Korrektheit von Insertion Sort**

- Initialisierung:
 - Beginn mit $j=1$, also Teilfeld $A[0 \dots j-1]$ besteht nur aus einem Element $A[0]$. Dies ist auch das ursprüngliche Element und Teilfeld ist sortiert.
- Fortsetzung:
 - Zu zeigen ist, dass die Invariante bei jeder Iteration erhalten bleibt. Ausführungsblock der **for**-Schleife sorgt dafür, dass $A[j-1]$, $A[j-2]$,... je um Stelle nach rechts geschoben werden bis $A[j]$ korrekt eingefügt wurde. Teilfeld $A[0 \dots j]$ besteht aus ursprünglichen Elementen und ist sortiert. Inkrementieren von j erhält die Invariante.
- Terminierung:
 - Abbruchbedingung der **for**-Schleife, wenn $j > A.length - 1$. Jede Iteration erhöht j . Dann bei Abbruch ist $j = n$ und einsetzen in Invariante liefert das Teilfeld $A[0 \dots n-1]$ welches aus den ursprünglichen Elementen besteht und sortiert ist. Teilfeld ist gesamtes Feld.
- Algorithmus **Insertion Sort** arbeitet damit korrekt.

• Laufzeitanalyse von Insertion Sort

```

INSERTION-SORT (A)
1 FOR j = 1 TO A.length - 1
2   key = A[j]
3   // Füge A[j] in die
   //sortierte Sequenz A[0..j-1]
4   i = j - 1
5   WHILE i ≥ 0 and A[i] > key
6     A[i+1] = A[i]
7     i = i - 1
8   A[i+1] = key

```

Laufzeit:

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_6 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

Zeile	Kosten	Anzahl
1	c_1	n
2	c_2	$n-1$
3	0	$n-1$
4	c_4	$n-1$
5	c_5	$\sum_{j=1}^{n-1} t_j$
6	c_6	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$
7	c_7	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$
8	c_8	$n-1$

- Festlegung der Laufzeit für jede Zeile
- Jede Zeile besitzt gewissen Kosten c_i
- Jede Zeile wird x mal durchgeführt
- $\text{Laufzeit} = \text{Anzahl} * \text{Kosten}$ jeder Zeile
- Schleifen: Abbruchüberprüfung zählt auch
- t_j : Anzahl der Abfragen der **While**-Schleife

- Warum n in Zeile 1?
 - Die Überprüfung der Fortführungsbedingung beinhaltet auch die letzte Überprüfung
 - Quasi die Überprüfung, durch die die Schleife abbricht
- Warum $\sum_{j=1}^{n-1}$ in Zeile 5?
 - Aufsummierung aller einzelnen t_j über die Anzahl der Schleifendurchläufe
 - Diese ist allerdings $n-1$ und nicht n , da die Abbruchüberprüfung dort auch enthalten ist
- Warum $t_j - 1$ in Zeile 6?
 - Selbes Argument wie oben, bei t_j ist die Abbruchüberprüfung enthalten
 - Deswegen wird die **while**-Schleife nur $t_j - 1$ -mal ausgeführt
- **Best Case**
 - zu sortierendes Feld ist bereits sortiert
 - t_j wird dadurch zu 1, da die **While**-Schleife immer nur einmal prüft (Abbruch)
 - Die zwei Zeilen innerhalb der **While**-Schleife werden nie ausgeführt
 - Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine lineare Funktion in n ist
- **Worst Case**
 - zu sortierendes Feld ist umgekehrt sortiert
 - t_j wird dadurch zu $j+1$, da die **While**-Schleife immer die gesamte Länge prüft
 - Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine quadratische Funktion in n ist (n^2)
- **Average Case**
 - im Mittel gut gemischt
 - t_j wird dadurch zu $j/2$
 - Die Laufzeit bleibt aber eine quadratische Funktion in n (n^2)

• Asymptotische Laufzeitbetrachtung Θ

- $T(n)$ lässt sich als quadratische Funktion $an^2 + bn + c$ betrachten
- Terme niedriger Ordnung sind für große n irrelevant
- Deswegen Vereinfachung zu n^2 und damit $\Theta(n^2)$

2.6 Bubble Sort

• Idee

- Vergleiche Paare von benachbarten Schlüsselwerten
- Tausche das Paar, falls rechter Schlüsselwert kleiner als linker

• Code

```

FOR i = 0 TO A.length - 2
  FOR j = A.length - 1 DOWNT0 i + 1
    IF A[j] < A[j-1]
      SWAP(A[j], A[j-1])

```

- **Analyse von Bubble Sort**
 - Anzahl der Vergleiche:
 - Es werden stets alle Elemente der Teilfolge miteinander verglichen
 - Unabhängig von der Vorsortierung sind **Worst** und **Best Case** identisch
 - Anzahl der Vertauschungen:
 - **Best Case**: 0 Vertauschungen
 - **Worst Case**: $\frac{n^2-n}{2}$ Vertauschungen
 - Komplexität:
 - **Best Case**: $\Theta(n)$
 - **Average Case**: $\Theta(n^2)$
 - **Worst Case**: $\Theta(n^2)$

2.7 Selection Sort

- Idee
 - Sortieren durch direktes Auswählen
 - **MinSort**: "wähle kleines Element in Array und tausche es nach vorne"
 - **MaxSort**: "wähle größtes Element in Array und tausche es nach vorne"
- Code - MinSort

```
FOR i = 0 TO A.length - 2
  k = i
  FOR j = i + 1 TO A.length - 1
    IF A[j] < A[k]
      k = j
  SWAP(A[i], A[k])
```

2.8 Divide-And-Conquer-Ansatz

- Anderer Ansatz im Gegensatz zu z.B. **InsertionSort** (inkrementelle Herangehensweise)
- Laufzeit ist im schlechtesten Fall immer noch besser als **InsertionSort**
- Prinzip: Zerlege das Problem und löse es direkt oder zerlege es weiter
- **Divide**:
 - Teile das Problem in mehrere Teilprobleme auf
 - Teilprobleme sind Instanzen des gleichen Problems
- **Conquer**:
 - Beherrsche die Teilprobleme rekursiv
 - Falls Teilprobleme klein genug, löse sie auf direktem Weg
- **Combine**:
 - Vereine die Lösungen der Teilprobleme zu Lösung des ursprünglichen Problems

2.9 Merge Sort

- Idee
 - **Divide**: Teile die Folge aus n Elementen in zwei Teilfolgen von je $\frac{n}{2}$ Elemente auf
 - **Conquer**: Sortiere die zwei Teilfolgen rekursiv mithilfe von **MergeSort**
 - **Combine**: Vereinige die zwei sortierten Teilfolgen, um die sortierte Lösung zu erzeugen
- Code

```
MERGE-SORT (A,p,r)
IF p < r
  q =  $\lfloor (p+r)/2 \rfloor$  // Teilen in 2 Teilfolgen
  MERGE-SORT(A,p,q) // Sortieren der beiden Teilfolgen
  MERGE-SORT(A,q+1,r)
  MERGE(A,p,q,r) // Vereinigung der beiden sortierten Teilfolgen
```

```

MERGE(A,p,q,r) // Geteiltes Array an Stelle q
n1 = q - p + 1
n2 = r - q
Let L[0...n1] and R[0...n2] be new arrays
FOR i = 0 TO n1 - 1 // Auffüllen der neu erstellten Arrays
    L[i] = A[p + i]
FOR j = 0 TO n2 - 1
    R[j] = A[q + j + 1]
L[n1] = ∞ // Einfügen des Sentinel-Wertes
R[n2] = ∞
i = 0
j = 0
FOR k = p TO r // Eintragweiser Vergleich der Elemente
    IF L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i] // Sortiertes Zurückschreiben in Original-Array
        i = i + 1
    ELSE
        A[k] = R[j]
        j = j + 1

```

• Korrektheit von MergeSort

• Schleifeninvariante

Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife (Letztes `for` in Methode `MERGE`) enthält das Teilfeld $A[p \dots k-1]$ die $k-p$ kleinsten Elemente aus $L[0 \dots n_1]$ und $R[0 \dots n_2]$ in sortierter Reihenfolge. Weiter sind $L[i]$ und $R[i]$ die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

• Initialisierung

Vor der ersten Iteration gilt $k=p$. Daher ist $A[p \dots k-1]$ leer und enthält 0 kleinste Elemente von L und R . Wegen $i=j=0$ sind $L[i]$ und $R[i]$ die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

• Fortsetzung

Müssen zeigen, dass Schleifeninvariante erhalten bleibt. Dafür nehmen wir an, dass $L[i] \leq R[j]$. Dann ist $L[i]$ kleinstes Element, welches noch nicht zurück kopiert wurde. Da Array $A[p \dots k-1]$ die $k-p$ kleinsten Elemente enthält, wird der Array $A[p \dots k]$ die $k-p+1$ kleinsten Elemente enthalten, nachdem der Wert nach der Durchführung von $A[k]=L[i]$ kopiert wurde. Die Erhöhung der Variablen k und i stellt die Schleifeninvariante für die nächste Iteration wieder her. Wenn $L[i] > R[j]$ dann analoges Argument in der `ELSE`-Anweisung.

• Terminierung

Beim Abbruch gilt $k=r+1$. Durch die Schleifeninvariante enthält $A[p \dots r]$ die kleinste Elemente von $L[0 \dots n_1]$ und $R[0 \dots n_2]$ in sortierter Reihenfolge. Alle Elemente außer der Sentinels wurden komplett zurück kopiert. `MergeSort` ist außerdem ein stabiler Algorithmus.

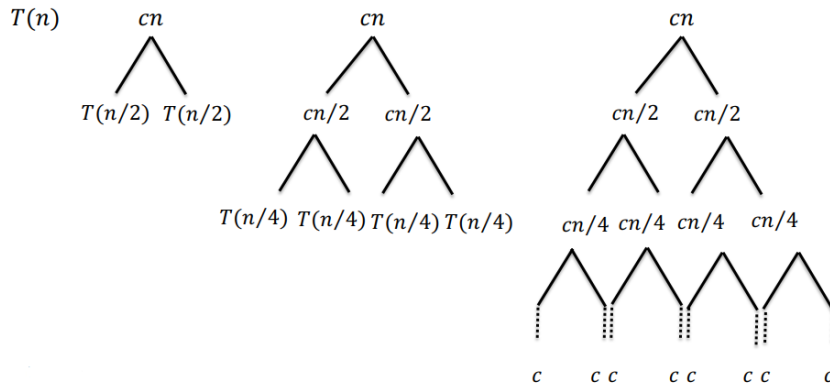
• Analyse von MergeSort

- Ziel: Bestimme Rekursionsgleichung für Laufzeit $T(n)$ von n Zahlen im schlechtesten Fall
- Divide: Berechnung der Mitte des Feldes: Konstante Zeit $\Theta(1)$
- Conquer: Rekursives Lösen von zwei Teilproblemen der Größe $\frac{n}{2}$: Laufzeit von $2 T(\frac{n}{2})$
- Combine: `MERGE` auf einem Teilfeld der Länge n : Lineare Zeit $\Theta(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2 T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

- Lösen der Rekursionsgleichung mithilfe eines Rekursionsbaums

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{falls } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$



- Verwenden der Konstante c statt $\Theta(1)$
- cn stellt den Aufwand an der ersten Ebene dar
- Der addierte Aufwand jeder Stufe (aller Knoten) ist auch cn
- Die Anzahl der Ebenen lässt sich mithilfe von $\lg(n) + 1$ bestimmen (2-er Logarithmus)
- Damit ergibt sich für die Laufzeit: $cn \cdot \lg(n) + cn$
- Für $\lim_{n \rightarrow \infty}$ wird diese zu $n \cdot \lg(n)$
- Laufzeit beträgt damit $\Theta(n \cdot \lg(n))$
- Laufzeit von MergeSort ist in jedem Fall gleich

2.10 Quicksort

• Idee

• Pivotelement:

Wahl eines Pivotelement x aus dem Array

• Divide:

Zerlege den Array $A[p \dots r]$ in zwei Teilarrays $A[p \dots q-1]$ und $A[q+1 \dots r]$, sodass jedes Element von $A[p \dots q-1]$ kleiner oder gleich $A[q]$ ist, welches wiederum kleiner oder gleich jedem Element von $A[q+1 \dots r]$ ist. Berechnen Sie den Index q als Teil vom Partition Algorithmus.

• Conquer:

Sortieren beider Teilarrays $A[p \dots q-1]$ und $A[q+1 \dots r]$ durch rekursiven Aufruf von Quicksort.

• Combine:

Da die Teilarrays bereits sortiert sind, ist keine weitere Arbeit nötig um diese zu vereinigen. $A[p \dots r]$ ist nun sortiert.

• Code

```
QUICKSORT(A,p,r)
IF p < r    // Überprüfung, ob Teilarray leer ist
    q = PARTITION(A,p,r)
    QUICKSORT(A,p,q-1)
    QUICKSORT(A,q+1,r)

PARTITION(A,p,r)
x = A[r]    // Wahl des Pivotelements
i = p - 1  // Index i setzen
FOR j = p TO r - 1 // Auffüllen des Teilarrays mit Elementen
    IF A[j] ≤ x
        i = i + 1
        SWAP(A[i], A[j]) /
```

```

SWAP(A[i+1], A[r]) // Tausch des Pivotelements
RETURN i + 1 // Neuer Index des Pivotelements

```

• Korrektheit von Quicksort

- Schleifeninvariante:

Zu Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife gilt für den Arrayindex k folgendes:

1. Ist $p \leq k \leq i$, so gilt $A[k] \leq x$
2. Ist $i + 1 \leq k \leq j - 1$, so gilt $A[k] > x$
3. Ist $k = r$, so gilt $A[k] = x$

- Initialisierung:

Vor der ersten Iteration gilt $i = p - 1$ und $j = p$. Da es keine Werte zwischen p und j gibt und es auch keine Werte zwischen $i + 1$ und $j - 1$ gibt, sind die ersten beiden Eigenschaften trivial erfüllt. Die Zuweisung in $x = A[r]$ sorgt für die Erfüllung der dritten Eigenschaft.

- Fortsetzung:

Zwei mögliche Fälle durch **IF** $A[j] \leq x$. Wenn $A[j] > x$, dann inkrementiert die Schleife nur den Index j . Dann gilt Bedingung 2 für $A[j-1]$ und alle anderen Einträge bleiben unverändert. Wenn $A[j] \leq x$, dann wird Index i inkrementiert und die Einträge $A[i]$ und $A[j]$ getauscht und schließlich der Index j erhöht. Wegen des Vertauschens gilt $A[i] \leq x$ und Bedingung 1 ist erfüllt. Analog gilt $A[j-1] > x$, da das Element welches mit $A[j-1]$ vertauscht wurde wegen der Invariante gerade größer als x ist.

- Terminierung:

Bei der Terminierung gilt, dass $j = r$. Daher gilt, dass jeder Eintrag des Arrays zu einer der drei durch die Invariante beschriebenen Mengen gehört.

• Performanz von Quicksort

- Abhängig von der **Balanciertheit** der Teilarrays

- Definition Balanciert: ungefähr gleiche Anzahl an Elementen
- Teilarrays balanciert: Laufzeit asymptotisch so schnell wie **MergeSort**
- Teilarrays unbalanciert: Laufzeit kann so langsam wie **InsertionSort** laufen

- Zerlegung im **schlechtesten Fall**

- Partition zerlegt Problem in ein Teilproblem mit $n - 1$ Elementen und eins mit 0 Elementen
- Unbalancierte Zerlegung zieht sich durch gesamte Rekursion
- Zerlegung kostet $\Theta(n)$
- Aufruf auf Feld der Größe 0: $T() = \Theta(1)$
- Laufzeit (rekursiv):
 - $T(n) = T(n - 1) + T(0) + \Theta(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$
 - Insgesamt folgt: $T(n) = \Theta(n^2)$

- Zerlegung im **besten Fall**

- Problem wird so balanciert wie möglich zerlegt
- Zwei Teilprobleme mit maximaler Größe von $\frac{n}{2}$
- Zerlegung kostet $\Theta(n)$
- Laufzeit (rekursiv):
 - $T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
 - Laufzeit beträgt: $O(n \lg(n))$
- Solange die Aufteilung konstant bleibt, bleibt die Laufzeit $O(n \lg(n))$

2.11 Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen

- **Analyse von Divide-And-Conquer Algorithmen**

- $T(n)$ ist Laufzeit eines Problems der Größe n
- Für kleines Problem benötigt die direkte Lösung eine konstante Zeit $\Theta(1)$
- Für sonstige n gilt:
 - Aufteilen eines Problems führt zu a Teilproblemen
 - Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{1}{b}$ der Größe des ursprünglichen Problems
 - Lösen eines Teilproblems der Größe $\frac{n}{b}$: $T(\frac{n}{b})$
 - Lösen a solcher Probleme: $a T(\frac{n}{b})$
 - $D(n)$: Zeit um das Problem aufzuteilen (Divide)
 - $C(n)$: Zeit um Teillösungen zur Gesamtlösung zusammenzufügen (Combine)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n \leq c \\ a T(\frac{n}{b}) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Substitutionsmethode**

- Idee: Erraten einer Schranke und Nutzen von Induktion zum Beweis der Korrektheit
- Ablauf:
 1. Rate die Form der Lösung (Scharfes Hinsehen oder kurze Eingaben ausprobieren/einsetzen)
 2. Anwendung von vollständiger Induktion zum Finden der Konstanten und Beweis der Lösung

- **Beispiel**

- Betrachten von MergeSort:
 - $T(1) \leq c$
 - $T(n) \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn$

- Ziel:

Obere Abschätzung $T(n) \leq g(n)$ mit $g(n)$ ist eine Funktion, die durch eine geschlossene Formel dargestellt werden kann.

Wir "raten": $T(n) \leq 4cn \lg(n)$ und nehmen dies für alle $n' < n$ an und zeigen es für n .

- Induktion:

- \lg steht hier für \log_2
- $n = 1$: $T(1) \leq c$
- $n = 2$: $T(2) \leq T(1) + T(1) + 2c$
 $\leq 4c \leq 8c$

$$T(2) = 4c * 2 \lg(2) = 8c$$

- Hilfsbehauptungen:

- (1): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$
- (2): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2}{3}n$
- (3): $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c(a) - \log_c(b)$
- (4): $\log_c(a * b) = \log_c(a) + \log_c(b)$

- Induktionsschritt:

- Annahme: $n > 2$ und sei Behauptung wahr für alle $n' < n$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\ &\leq 4c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(HB)} &\leq 4c \cdot \lg(\frac{2}{3}n) \cdot (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\ &\leq 4c \cdot \lg(\frac{2}{3}n) \cdot n + cn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(HB)} &\leq 4cn \cdot (\lg(\frac{2}{3}) + \lg(n)) + cn \\ &= 4cn \cdot \lg(n) + 4cn \cdot \lg(\frac{2}{3}) \\ &= 4cn \cdot \lg(n) + cn(1 + 4 \cdot (\lg(2) - \lg(3))) \\ &\leq 4cn \cdot \lg(n) \\ &\Rightarrow \Theta(n \lg(n)) \end{aligned}$$

- **Rekursionsbaum**

- Idee: Stellen das Ineinander-Einsetzen als Baum dar und Analyse der Kosten
- Ablauf:
 1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar
 - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar
 - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar (z.B. $T(0)$)
 2. Berechnen der Kosten innerhalb jeder Ebene des Baums
 3. Die Gesamtkosten sind die Summe über die Kosten aller Ebenen
- Rekursionsbaum ist nützlich um Lösung für Substitutionsmethode zu erraten
- **Beispiel:** $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n^2)$
 - $\Rightarrow T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + cn^2$ ($c > 0$)
 - Je Abstieg verringert sich die Größe des Problems um den Faktor 4.
 - Erreichen der Randbedingung ist vonnöten, die Frage ist wann dies geschieht.
 - Größe Teilproblem bei Level i : $\frac{n}{4^i}$
 - Erreichen Teilproblem der Größe 1, wenn $\frac{n}{4^i} = 1$, d.h. wenn $i = \log_4(n)$
 \Rightarrow Baum hat also $\log_4 n + 1$ Ebenen
 - Kosten pro Ebene:
 - Jede Ebene hat 3-mal so viele Knoten wie darüber liegende
 - Anzahl der Knoten in Tiefe i ist 3^i
 - Kosten $c(\frac{n}{4^i})^2$, $i = 0 \dots \log_4 n - 1$
 - Anzahl \cdot Kosten $= 3^i \cdot c(\frac{n}{4^i})^2 = (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2$
 - Unterste Ebene:
 - $3^{\log_4(n)} = n \log_4(3)$ Knoten
 - Jeder Knoten trägt $T(1)$ Kosten bei
 - Kosten unten: $n^{\log_4(3)} \cdot T(1) = \Theta(n^{\log_4(3)})$
 - Addiere alle Kosten aller Ebenen:
 - $T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2cn^2 + \dots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1}cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 $= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 $= \frac{(\frac{3}{16})^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 (Verwendung der geometrischen Reihe)
 - Verwendung einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe als obere Schranke:
 $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 $< \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 $= \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)})$
 $= \frac{16}{13} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)}) = O(n^2)$
 - Jetzt **Substitutionsmethode**:
 - Zu zeigen: $\exists d > 0 : T(n) \leq dn^2$
 - Induktionsanfang:
 $T(n) = 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + c \cdot 1^2$
 $= 3 \cdot T(0) + c = c$
 - Induktionsschritt:
 $T(n) \leq 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + cn^2$
 $\leq 3 \cdot d(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)^2 + cn^2$
 $\leq 3d(\frac{n}{4})^2 + cn^2$
 $= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2$
 $\leq dn^2$, falls $d \geq \frac{16}{13}c$

- **Mastertheorem**

- Idee:

Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine positive Funktion und $T(n)$ über den nicht-negativen ganzen Zahlen über die Rekursionsgleichung $T(n) = a T(\frac{n}{b}) + f(n)$ definiert, wobei wir $\frac{n}{b}$ so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ oder $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ gemeint ist. Dann besitzt $T(n)$ die folgenden asymptotischen Schranken (a und b werden aus $f(n)$ gelesen):

1. Gilt $f(n) = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. Gilt $f(n) = O(n^{\log_b(a)})$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \lg(n))$
3. Gilt $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ und $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend großen n , dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$

- Erklärung:

- In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^{\log_b(a)}$ verglichen
 1. Wenn $f(n)$ polynomial kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
 2. Wenn $f(n)$ und $n^{\log_b(a)}$ die gleiche Größe haben, gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \lg(n))$
 3. Wenn $f(n)$ polynomial größer als $n^{\log_b(a)}$ und $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ erfüllt, dann $T(n) = \Theta(f(n))$
- (polynomial größer/kleiner: um Faktor n^ϵ asymptotisch größer/kleiner)

- Nicht abgedeckte Fälle:

- Wenn einer dieser Fälle eintritt, kann das Mastertheorem nicht angewendet werden
 1. Wenn $f(n)$ kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial kleiner
 2. Wenn $f(n)$ größer ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial größer
 3. Regularitätsbedingung $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ wird nicht erfüllt
 4. a oder b sind nicht konstant (z.B. $a = 2^n$)

- Beispiel:

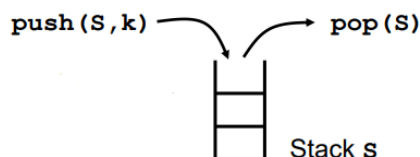
- $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
 - $a = 9, b = 3, f(n) = n$
 - $\log_b(a) = \log_3(9) = 2$
 - $f(n) = n = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$
 $= O(n^{2-\epsilon})$
 - Ist diese Gleichung für ein $\epsilon > 0$ erfüllt? $\Rightarrow \epsilon = 1$
 - **1. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$
- $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
 - $a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = 1$
 - $\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
 - $f(n) = 1 = O(n^{\log_b(a)})$
 $= O(n^0)$
 $= O(1)$
 - **2. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(1 * \lg(n)) = \Theta(\lg(n))$
- $T(n) = 3(T(\frac{n}{4}) + n \lg(n))$
 - $a = 3, b = 4, f(n) = n \lg(n)$
 - $n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)} \leq n^{0.793}$
 - $\epsilon = 0.1$ im Folgenden
 - $f(n) = n \lg(n) \geq n \geq n^{0.793+0.1} \geq n^{0.793}$
 - **3. Fall** $\Rightarrow f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+0.1)})$
 - $a f(\frac{n}{b}) = 3 f(\frac{n}{4}) = 3(\frac{n}{4}) \lg(\frac{n}{4}) \leq \frac{3}{4} n \lg(n)$
 - Damit ist auch die Randbedingung erfüllt und $T(n) = \Theta(n \lg(n))$

3 Grundlegende Datenstrukturen

3.1 Stacks

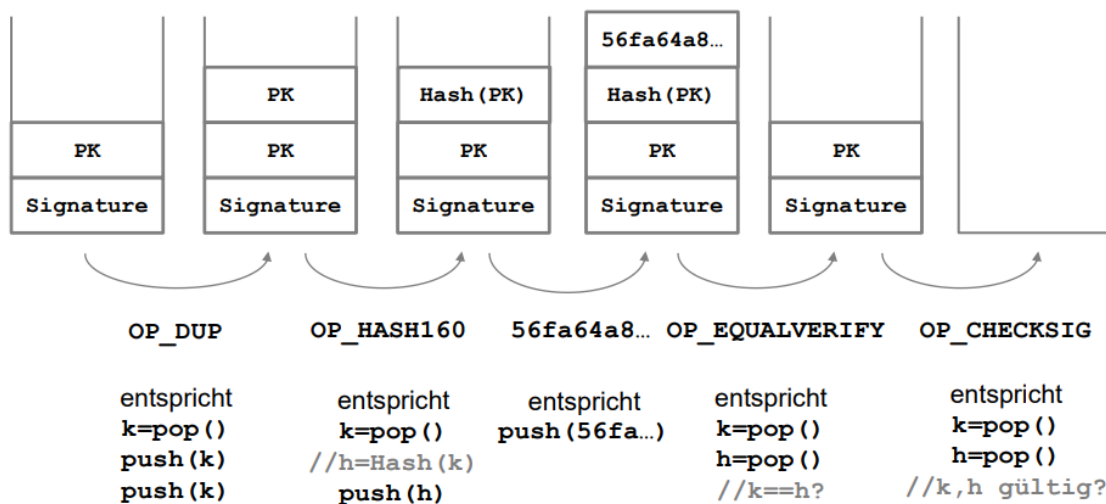
- Abstrakter Datentyp Stack

- `new S()`
 - Erzeugt neuen (leeren) Stack
- `s.isEmpty()`
 - Gibt an, ob Stack `s` leer ist
- `s.pop()`
 - Gibt oberstes Element vom Stack `s` zurück und löscht es vom Stack
 - Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist
- `s.push(k)`
 - Schreibt `k` als neues oberstes Element auf Stack `s`
- Abstrakter Aufbau:
 - LIFO-Prinzip - Last in, First out



- Beispiel Bitcoin

```
scriptPubKey:
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fcd52d2c580b65d35549d
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



- Stacks als Array

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s	12	47	17	98	72				

- `s.top` zeigt immer auf oberstes Element
- `pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt
- `push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt
- Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt

```

new(S)

1 S.A[]=ALLOCATE(MAX);
2 S.top=-1;

```

```

isEmpty(S)

1 IF S.top<0 THEN
2   return true
3 ELSE
4   return false;

```

```

pop(S)

1 IF isEmpty(S) THEN
2   error 'underflow'
3 ELSE
4   S.top=S.top-1;
5   return S.A[S.top+1];

```

```

push(S,k)

1 IF S.top==MAX-1 THEN
2   error 'overflow'
3 ELSE
4   S.top=S.top+1;
5   S.A[S.top]=k;

```

- Stacks mit variabler Größe - Einfach

- Falls push(k) bei vollem Array \Rightarrow Vergrößerung des Arrays
- Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge + 1 und Umkopieren aller Elemente
- Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro push-Befehl

- Stacks mit variabler Größe - Verbesserung

- Idee:
 - Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
 - Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder

- Methoden:

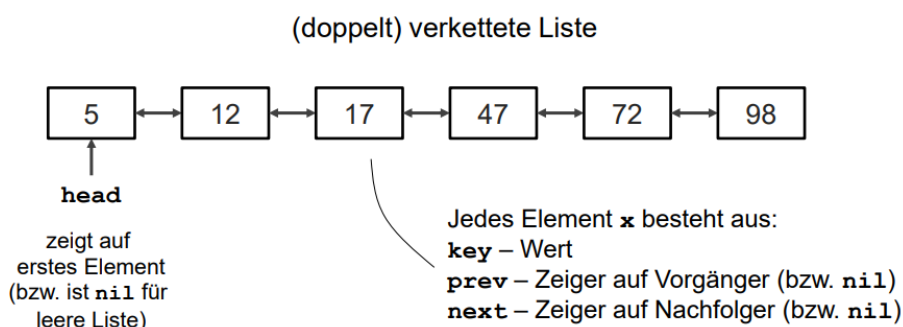
RESIZE(A,m) reserviert neuen Speicher der Größe m und kopiert A um

<pre> new(S) 1 S.A[]=ALLOCATE(1); 2 S.top=-1; 3 S.memsize=1; </pre>	<pre> isEmpty(S) 1 IF S.top<0 THEN 2 return true 3 ELSE 4 return false; </pre>
<pre> pop(S) 1 IF isEmpty(S) THEN 2 error 'underflow' 3 ELSE 4 S.top=S.top-1; 5 IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN 6 S.memsize=S.memsize/2; 7 RESIZE(S.A,S.memsize); 8 return S.A[S.top+1]; </pre>	<pre> push(S,k) 1 S.top=S.top+1; 2 S.A[S.top]=k; 3 IF S.top+1>=S.memsize THEN 4 S.memsize=2*S.memsize; 5 RESIZE(S.A,S.memsize); </pre>

- Im Durchschnitt für jeder der mindestens n Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

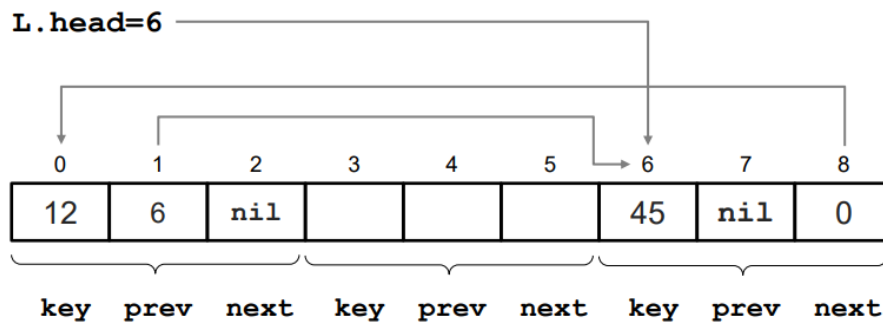
3.2 Verkettete Listen

- Aufbau



- Verkettete Listen durch Arrays

Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12



- Elementare Operationen auf Listen

- Suche nach Element

- Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n)$
 \Rightarrow Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(n)$

- Code:

```
search(L,k)    // Returns pointer to k in L (or nil)
current = L.head;
WHILE current != nil AND current.key != k DO
    current = current.next;
return current;
```

- Einfügen eines Elements am Kopf der Liste

- Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf

- Code:

```
insert(L,x)
x.next = l.head;
x.prev = nil;
IF L.head != nil THEN
    L.head.prev = x;
L.head = x;
```

- Löschen eines Elements aus Liste

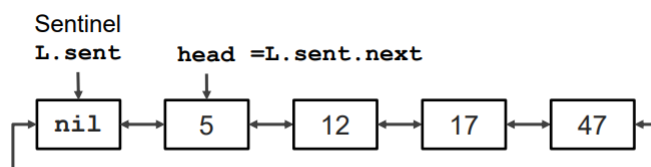
- Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben
 Löschen eines Wertes k mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$

- Code:

```
delete (L,x)
IF x.prev != nil THEN
    x.prev.next = x.next
ELSE
    L.head = x.next;
IF x.next != nil THEN
    x.next.prev = x.prev;
```

- Vereinfachung per Wächter/Sentinels

- Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende



Sentinel ist „von außen“ nicht sichtbar

Leere Liste besteht nur aus Sentinel

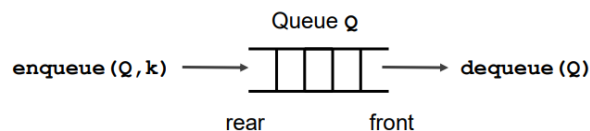
- Löschen mit Sentinels:

```
deleteSent(L,x)
x.prev.next = x.next;
x.next.prev = x.prev;
```

3.3 Queues

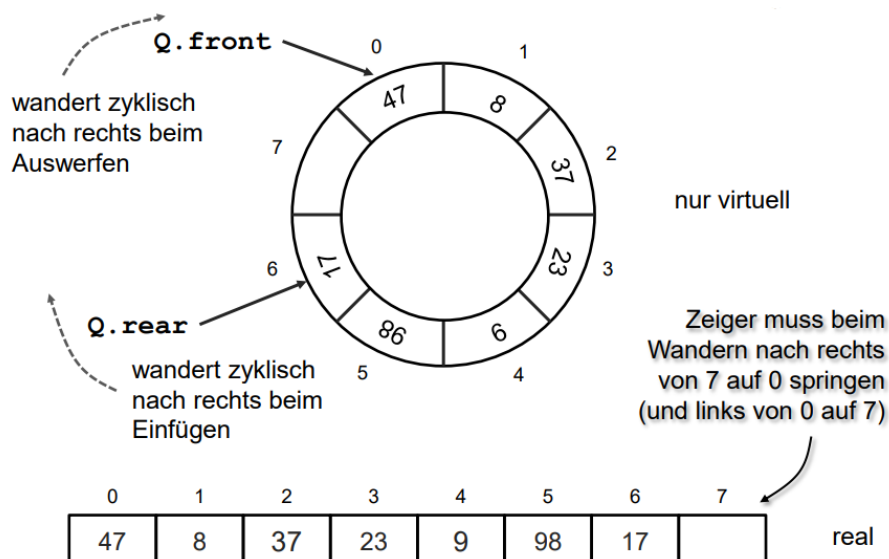
- **Abstrakter Datentyp Queue**

- `new Q()`
 - Erzeuge neue (leere) Queue
- `q.isEmpty()`
 - Gibt an, ob Queue q leer ist
- `q.dequeue()`
 - Gibt vorderstes Element aus q zurück und löscht es auf Queue
 - Fehlermeldung, falls Queue leer ist
- `q.enqueue(k)`
 - Schreibt k als neues hinterstes Element auf q
 - Fehlermeldung, falls Queue voll ist
- Abstrakter Aufbau:
 - **FIFO-Prinzip** / First in, First out



- **Queues als (virtuelles) zyklisches Array**

Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue



- Problem, falls `Q.rear` und `Q.front` auf selbes Element zeigen
 - Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean `empty`
 - Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter
- Methoden für zyklisches Array

Q leer, wenn `front==rear`
und `empty==true`

```
new(Q)
1 Q.A[]=ALLOCATE(MAX);
2 Q.front=0;
3 Q.rear=0;
4 Q.empty=true;
```

Q voll, wenn `front==rear`
und `empty==false`

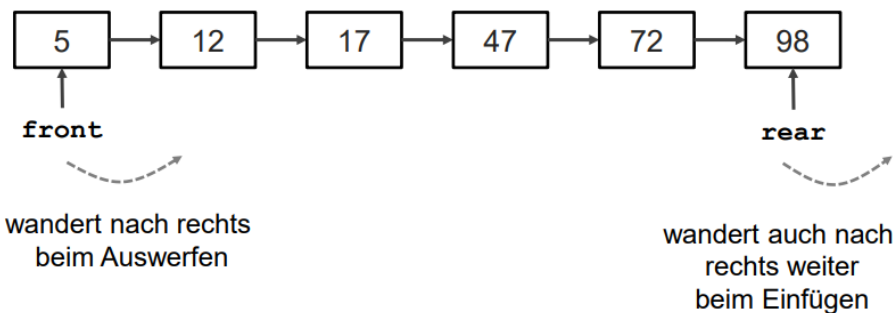
```
isEmpty(Q)
1 return Q.empty;
```

```
dequeue(Q)
1 IF isEmpty(Q) THEN
2   error 'underflow'
3 ELSE
4   Q.front=Q.front+1 mod MAX;
5   IF Q.front==Q.rear THEN
6     Q.empty=true;
7   return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

```
enqueue(Q,k)
1 IF Q.rear==Q.front AND !Q.empty
2 THEN error 'overflow'
3 ELSE
4   Q.A[Q.rear]=k;
5   Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
6   Q.empty=false;
```

- Queues durch einfach verkettete Listen

(einfach) verkettete Liste



Methoden:

```
new(Q)
1 Q.front=nil;
2 Q.rear=nil;
```

```
isEmpty(Q)
1 IF Q.front==nil THEN
2   return true
3 ELSE
4   return false;
```

```
dequeue(Q)
1 IF isEmpty(Q) THEN
2   error 'underflow'
3 ELSE
4   x=Q.front;
5   Q.front=Q.front.next;
6   return x;
```

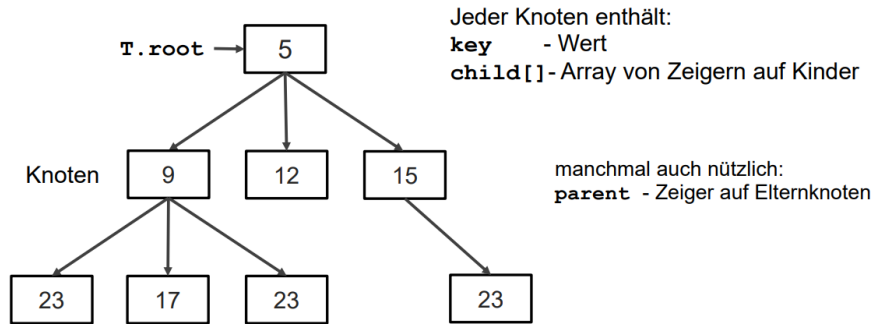
```
enqueue(Q,x)
1 IF isEmpty(Q) THEN
2   Q.front=x;
3 ELSE
4   Q.rear.next=x;
5   x.next=nil;
6   Q.rear=x;
```

- Laufzeit

- Enqueue: $\Theta(1)$
- Dequeue: $\Theta(1)$

3.4 Binäre Bäume

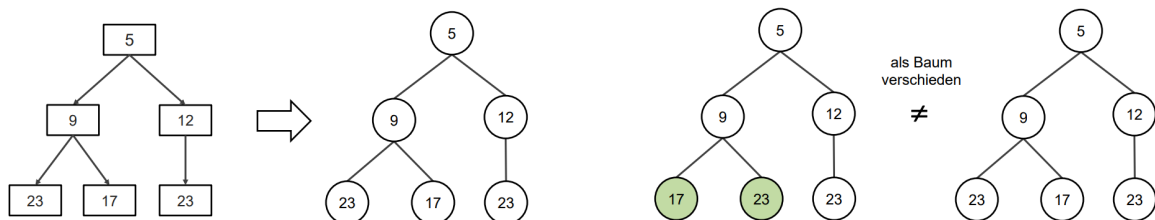
- Bäume durch verkettete Listen



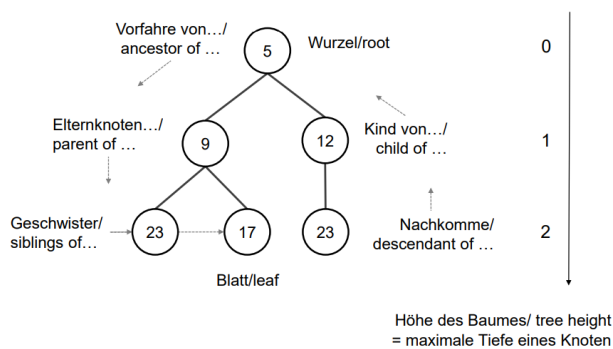
Baum-Bedingung: Baum ist leer oder...
es gibt einen Knoten r („Wurzel“), so dass jeder Knoten v von der Wurzel aus
per eindeutiger Sequenz von **child**-Zeigern erreichbar ist:
 $v = r.child[i_1].child[i_2]...child[i_m]$

Bäume sind "azyklisch" (Keine rückführende Spur")

- Darstellung als (ungerichteter) Graph

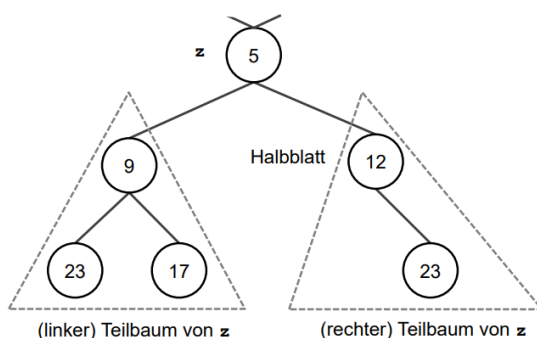


- Allgemeine Begrifflichkeiten



- Blatt: Knoten ohne Nachfolger
- Nachkomme von x :
Erreichbar durch Pfad ausgehend von x

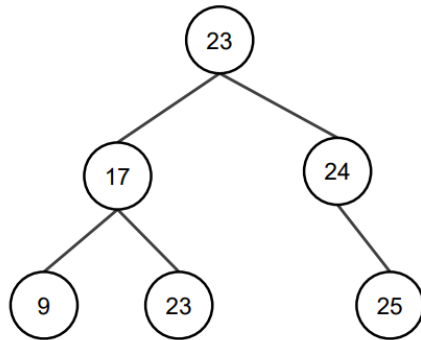
- Begrifflichkeiten Binärbaum



- Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder
 $left=child[0]$ und $right=child[1]$
- Ausgangsgrad jedes Knoten ist ≤ 2
- Höhe leerer Baum per Konvention -1
- Höhe (nicht-leerer) Baum:
 $\max\{\text{Höhe aller Teilbäume der Wurzel}\} + 1$
- Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

• Traversieren von Bäumen

- Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
- Laufzeit bei n Knoten: $T(n) = O(n)$
- Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
 1. Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
 2. Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
- Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
 1. Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
 2. Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses



inorder(T.root) ergibt

9 17 23 23 24 25

preorder(T.root) ergibt

23 17 9 23 24 25

postorder(T.root) ergibt

9 23 17 25 24 23

Code:

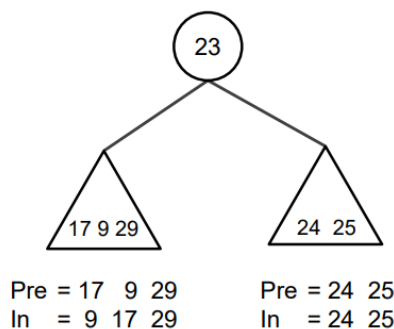
```
inorder(x)
IF x != nil THEN
  inorder(x.left);
  print x.key;
  inorder(x.right);
```

```
preorder(x)
IF x != nil THEN
  print x.key;
  preorder(x.left);
  preorder(x.right);
```

```
postorder(x)
IF x != nil THEN
  postorder(x.left);
  postorder(x.right);
  print x.key;
```

• Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen

- Nur In-,Pre-,Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen
 ⇒ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig



Pre = 17 9 29
In = 9 17 29

Pre = 24 25
In = 24 25

Bilde Teilbäume rekursiv

Preorder = 23 17 9 29 24 25

(1) Identifiziert Wurzel

Inorder = 9 17 29 23 24 25

(2) Identifiziert Werte im linken und rechten Teilbaum

- **Abstrakter Datentyp Baum**

- Abstrakter Aufbau:

- `new T()`
 - Erzeugt neuen Baum namens `t`
- `t.search(k)`
 - Gibt Element `x` in Baum `t` mit `x.key == k` zurück
- `t.insert(k)`
 - Fügt Element `x` in Baum `t` hinzu
- `t.delete(x)`
 - Löscht `x` aus Baum `t`

- Suche nach Elementen

- Laufzeit = $\Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)
- Starte mit `search(T.root, k)`
- Code:

```
search(x,k)
IF x == nil THEN return nil;
IF x.key == k THEN return x;
y = search(x.left,k);
IF y != nil THEN return y;
return search(x.right,k);
```

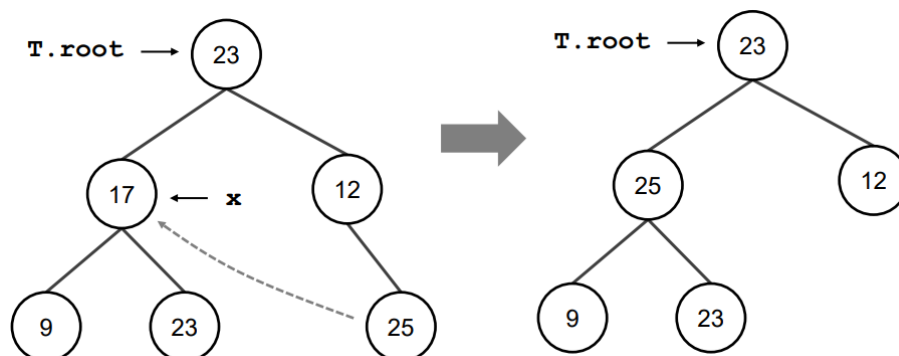
- Einfügen von Elementen

- Laufzeit = $\Theta(1)$
- Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum)
- Code:

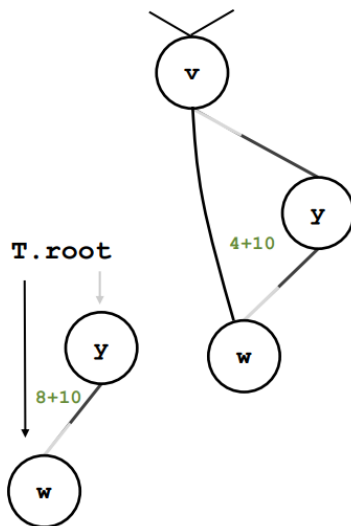
```
insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;
IF T.root != nil THEN
    T.root.parent = x;
    x.left = T.root;
T.root = x;
```

- Löschen von Elementen

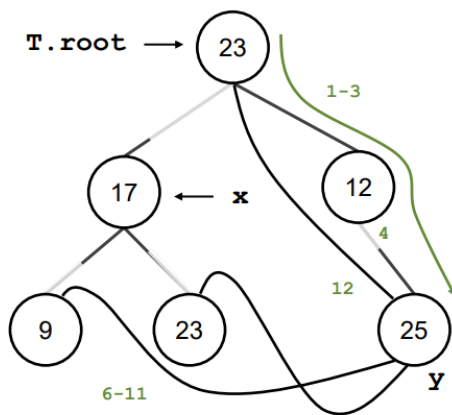
- Laufzeit = $\Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)
- Hier: Ersetze `x` durch Halbblatt ganz rechts



- Connect-Algorithmus:



- Delete-Algorithmus:



- Laufzeit = $\Theta(1)$

```

connect(T,y,w) // Connects w to y.parent
v = y.parent;
IF y != T.root THEN
    IF y == v.right THEN
        v.right = w;
    ELSE
        v.left = w;

ELSE
    T.root = w;

IF w != nil THEN
    w.parent = v;

```

```

delete(T,x) // assumes x in T
y = T.root;
WHILE y.right != nil DO
    y = y.right;

connect(T,y,y.left);

if x != y THEN
    y.left = x.left;
    IF x.left != nil THEN
        x.left.parent = y;
    y.right = x.right;
    IF x.right != nil THEN
        x.right.parent = y;
    connect(T,x,y);

```

3.5 Binäre Suchbäume

- Definition

- Totale Ordnung auf den Werten
- Für alle Knoten z gilt:
 Wenn x Knoten im linken Teilbaum von z , dann $x.\text{key} \leq z.\text{key}$
 Wenn y Knoten im rechten Teilbaum von z , dann $y.\text{key} \geq z.\text{key}$
- Preorder/Postorder + eindeutige Werte \Rightarrow Eindeutige Identifizierung

- Suchen im Binären Suchbaum

- Laufzeit = $O(h)$ (Höhe)

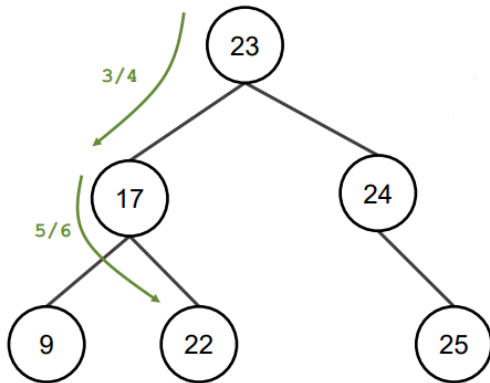
- Code:

```
search(x,k) // 1. Aufruf x = root
IF x == nil OR x.key == k THEN
    return x;
IF x.key > k THEN
    return search(x.left,k);
ELSE
    return search(x.right,k);
```

- Iterativer Code:

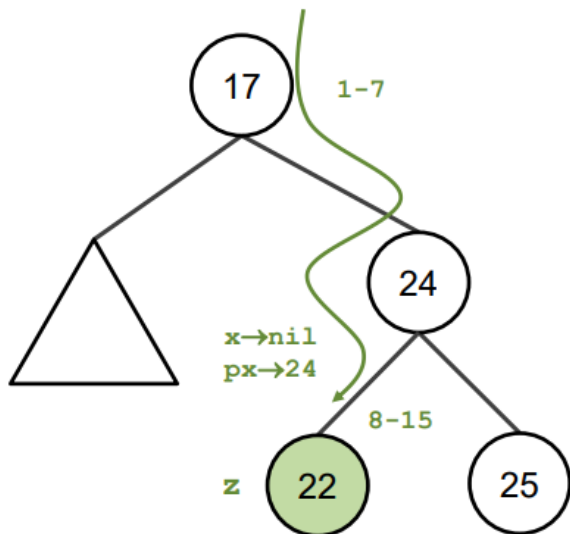
```
iterative-search(x,k)
WHILE x != nil AND x.key != k DO
    IF x.key > k THEN
        x = x.left;
    ELSE
        x = x.right;
return x;
```

search(T.root, 22)



- Einfügen im Binary Search Tree

insert(T, z)



- Laufzeit = $O(h)$

- Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss

- Code:

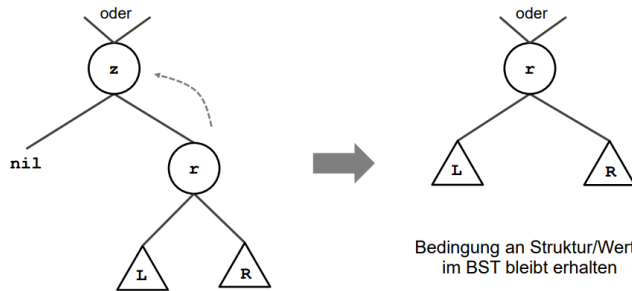
```
insert (T,z) // z.left == z.right == nil;
x = T.root;
px = nil;
WHILE x != nil DO
    px = x;
    IF x.key > z.key THEN
        x = x.left;
    ELSE
        x = x.right;
z.parent = px;
IF px == nil THEN
    T.root = z;
ELSE
    IF px.key > z.key THEN
        px.left = z;
    ELSE
        px.right = z;
```

• Löschen im BST

- Verschiedene Fälle:

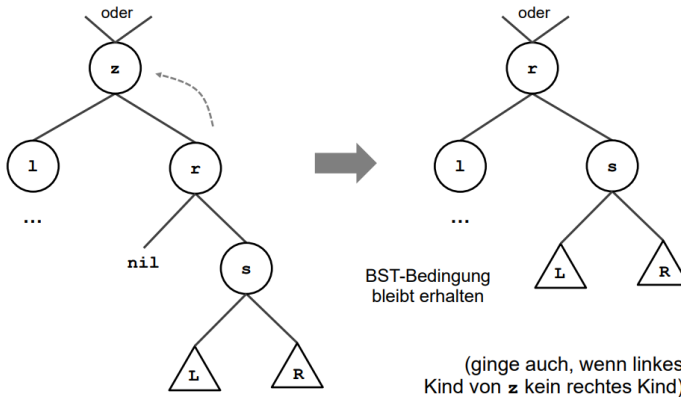
Löschen im BST (I)

zu löschender Knoten z hat maximal ein Kind



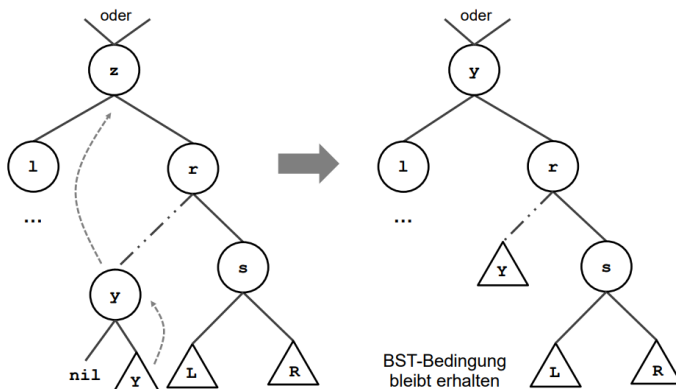
Löschen im BST (II)

rechtes Kind von Knoten z hat kein linkes Kind



Löschen im BST (III)

„kleinster“ Nachfahre vom rechten Kind von z



- Code (Transplantation)

// Hängt Teilbaum v an Parent von u

`transplant(T,u,v)`

`IF u.parent == nil THEN`

`T.root = v;`

`ELSE`

`IF u == u.parent.left THEN`

`u.parent.left = v;`

`ELSE`

`u.parent.right = v;`

`IF v != nil THEN`

`v.parent = u.parent;`

`delete(T,z)`

`IF z.left == nil THEN`

`transplant(T,z,z.left)`

`ELSE`

`IF z.right == nil THEN`

`transplant(T,z,z.left)`

`ELSE`

`y = z.right;`

`WHILE y.left != nil DO y = y.left;`

`IF y.parent != z THEN`

`transplant(T,y,y.right)`

`y.right = z.right;`

`y.right.parent = y;`

`transplant(T,z,y)`

`y.left = z.left;`

`y.left.parent = y;`

- Laufzeit = $O(h)$
- Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und h klein relativ zu n

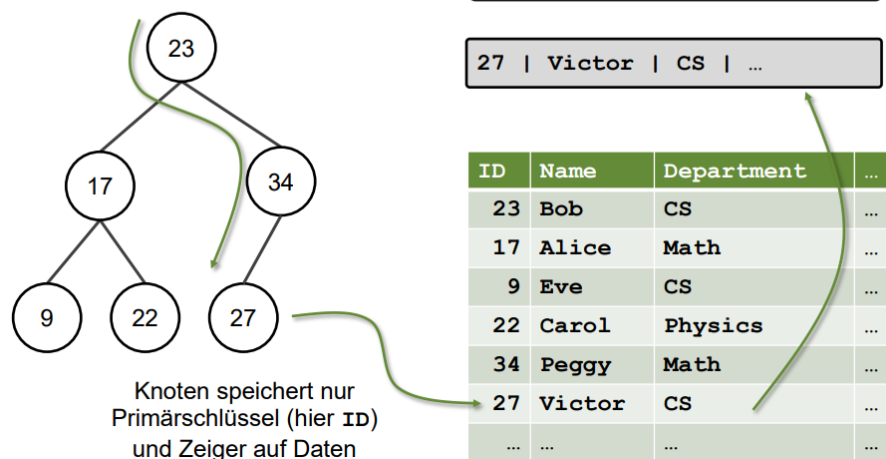
- **Höhe eines BST**

- Best Case:
 - Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
 - $h = O(\log_2 n)$
 - Laufzeit = $O(\log_2 n)$
- Worst Case:
 - Degenerierter Baum (lineare Liste)
 - $h = n - 1$
 - Laufzeit = $\Theta(n)$
- Durchschnittliche Höhe:
 - Erwartete Höhe: $\Theta(\log_2 n)$

- **Suchbäume als Suchindex**

- Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
- Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatzbedarf

Suchbäume als Suchindex



4 Advanced Data Structures

4.1 Rot-Schwarz-Bäume

- **Definition**

- Binärer Suchbaum mit Zusatzeigenschaften
- Zusatzeigenschaften:
 - Jeder Knoten hat die Farbe rot oder schwarz
 - Die Wurzel ist schwarz
 - Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz ("Nicht-Rot-Rot-Regel")
 - Für jeden Knoten hat jeder Pfad zu einem Blatt die selbe Anzahl an gleichen schwarzen Knoten
- Halbblätter im RBT sind schwarz
- Schwarzhöhe eines Knoten:

Eindeutige Anzahl von schwarzen Knoten auf dem Weg zu einem Blatt im Teilbaum des Knoten
- Für leeren Baum gibt Schwarzhöhe = 0 ($SH(nil) = 0$)
- Höhe eines Rot-Schwarz-Baums
 - $h \leq 2 \cdot \log_2(n + 1)$ (n Knoten)
 - In jedem Unterteilbaum gleiche Anzahl schwarzer Knoten

- Maximal zusätzlich gleiche Anzahl roter Knoten auf diesem Pfad
- Einigermaßen ausbalanciert \Rightarrow Höhe $O(\log n)$
- Alle folgenden Algorithmen arbeiten mithilfe eines Sentinels (zeigt auf sich selbst)

• Einfügen

- Laufzeit: $\Theta(h)$ (h jedoch $\log n$)
1. Finde Elternknoten wie im BST (BST-Einfüge Algorithmus)
 2. Färbe den neuen Knoten rot
 3. Wiederherstellen der Rot-Schwarz-Bedingung

`fixColorsAfterInsertion(T,z)`

```

WHILE z.parent.color == red DO           // solange der Elternknoten rot ist
    IF z.parent == z.parent.parent.left THEN // Linkes Kind (if-Fall)
        y = z.parent.parent.right;
        IF y != nil AND y.color == red THEN // Fall 1
            z.parent.color = black;
            y.color = black;
            z.parent.parent.color = red;
            z = z.parent.parent;           // rekursiv nach oben weiterführen
        ELSE                               // Fall 2
            IF z == z.parent.right THEN    // Zwischenfall (2.1)
                z = z.parent;
                rotateLeft(T,z);
                z.parent.color = black;
                z.parent.parent.color = red;
                rotateRight(T, z.parent.parent);
            ELSE                           // Rechtes Kind (else-Fall)
                // Tauschen von rechts und links
        T.root.color = black;             // Setzen der Wurzel auf Schwarz

```

- Hilfsmethode rotateLeft

```

rotateLeft(T,x)

y = x.right;
x.right = y.left;
IF y.left != nil THEN
    y.left.parent = x;
y.parent = x.parent;
IF x.parent == T.sent THEN
    T.root = y;
ELSE
    IF x == x.parent.left THEN
        x.parent.left = y;
    ELSE
        x.parent.right = y;
y.left = x;
x.parent = y;

```

• Löschen

- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$
- analog zum binären Suchbaum, aber neue Node erbt Farbe der alten Node
- Wenn neueNode schwarz war \Rightarrow Fixup
- Verschiedene Fälle, die auch gegenseitig Voraussetzungen füreinander sind
- Da das Ganze jedoch etwas umfangreicher ist, findet es sich nicht hier in der Zusammenfassung

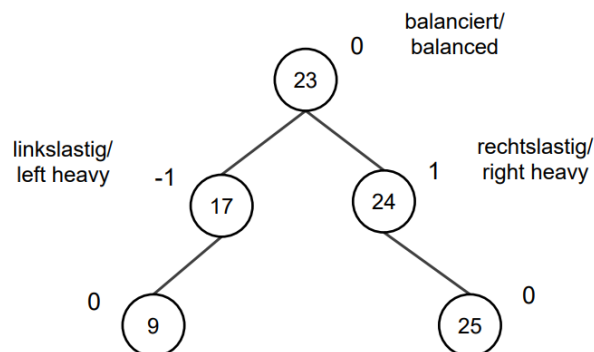
- **Worst-Case-Laufzeiten**

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$

4.2 AVL-Bäume

- **Definition:**

- $h \leq 1.441 \cdot \log n$ (optimierte Konstanten - 1,441 vs 2 (RBT))
- Binärer Suchbaum
- Allerdings Balance in jedem Knoten nur $-1, 0, 1$
- Balance für x : $B(x) = \text{Höhe}(\text{rechter Teilbaum}) - \text{Höhe}(\text{linker Teilbaum})$



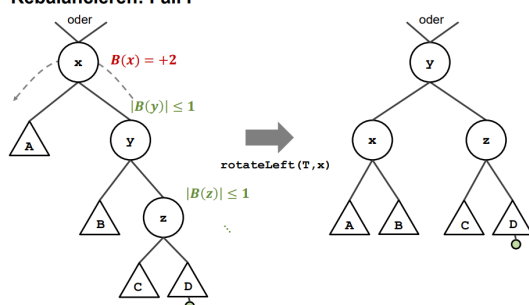
- **AVL vs. Rot-Schwarz**

- AVL:
 - Einfügen und Löschen verletzen in der Regel öfter die Baum-Bedingung
 - Aufwendiger zum Rebalancieren
- Rot-Schwarz:
 - Suchen dauert evtl. länger
- Konklusion:
 - AVL geeigneter, wenn mehr Such-Operationen und weniger Einfügen und Löschen
- Gemeinsamkeiten:
- $\text{AVL} \subset \text{Rot-Schwarz}$
- AVL Baum \Rightarrow Rot-Schwarz-Baum mit Höhe $\lceil \frac{h+1}{2} \rceil$
- Für jede Höhe $h \geq 3$ gibt es einen RBT, der kein AVL-Baum ist ($\text{AVL} \neq \text{RBT}$)

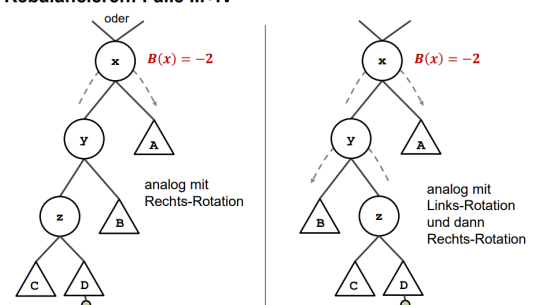
- **Einfügen**

- Einfügen funktioniert wie beim Binary Search Tree mit Sentinel
- Erfordert danach jedoch Rebalancieren weiter oben im Baum
- Rebalancieren: (verschiedene Fälle)

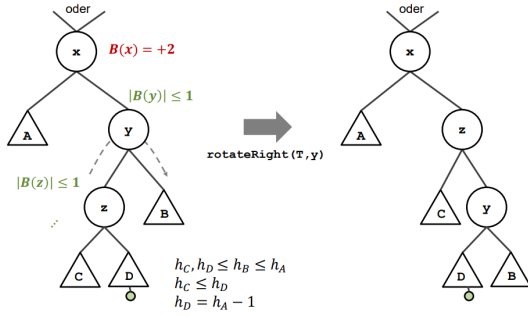
Rebalancieren: Fall I



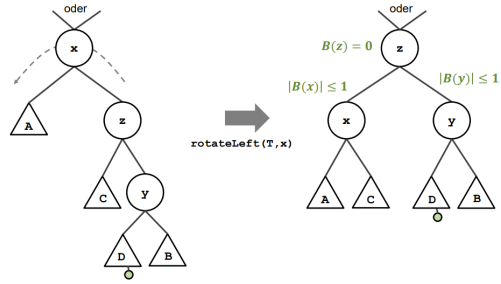
Rebalancieren: Fälle III+IV



Rebalancieren: Fall II (erste Rotation)



Rebalancieren: Fall II (zweite Rotation)



• Löschen

- Analog zum binären Suchbaum
- Rebalancieren bis eventuell in die Wurzel notwendig

• Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$
- theoretisch bessere Konstanten als RBT
- in Praxis aber nur unwesentlich schneller

4.3 Splay-Bäume

• Definition

- selbst-organisierende Listen
- Ansatz: Einmal angefragte Werte werden wahrs. noch öfter angefragt
- Angefragte Werte nach oben schieben
- Splay-Bäume sind Untermenge von BST

• Splay-Operationen

- Suchen oder Einfügen: Spüle gesuchten oder neu eingefügten Knoten an die Wurzel
- Splay: (Folge von Zig-, Zig-Zig-, Zig-Zag-Operationen)

splay(T, z)

WHILE z != T.root DO

 IF z.parent.parent == nil THEN

 zig(T, z);

 ELSE

 IF z == z.parent.parent.left.left OR

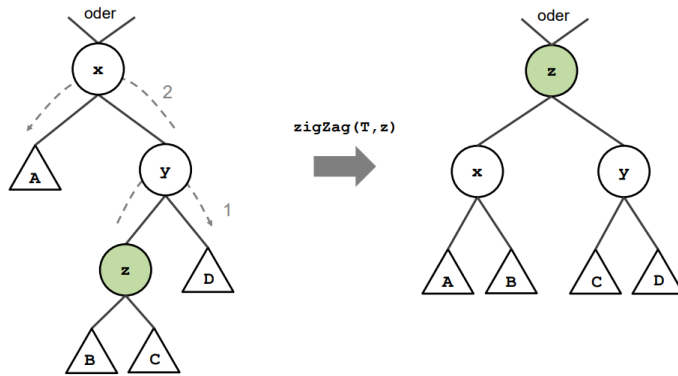
 z == z.parent.parent.right.right THEN

 zigZig(T, z);

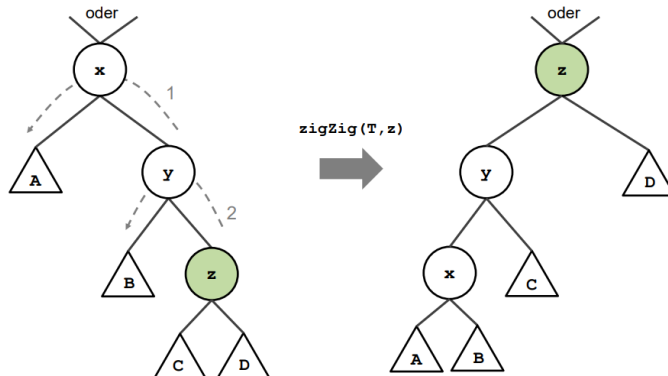
 ELSE

 zigZag(T, z);

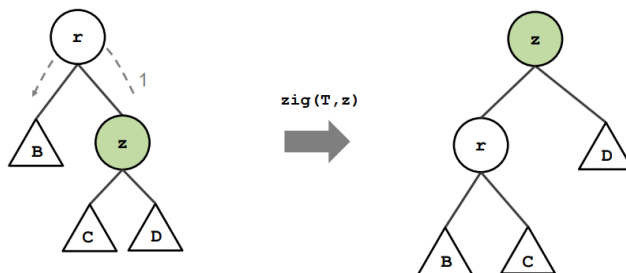
Zig-Zag-Operation =Rechts-Links- oder Links-Rechts-Rotation



Zig-Zig-Operation =Links-Links- oder Rechts-Rechts-Rotation



Zig-Operation =einfache Links- oder Rechts-Rotation



• Suchen

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche des Knotens wie im BST
- Hochspülen des gefundenen Knotens (alternativ zuletzt besuchter Knoten, falls nicht gefunden)

• Einfügen

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche der Position wie im BST
- Einfügen und danach hochspülen des eingefügten Knotens

• Löschen

- Laufzeit: $O(h)$
- 1. Spüle gesuchten Knoten per Splay-Operation nach oben
- 2. Lösche den gesuchten Knoten (Wenn einer der beiden entstehenden Teilbäume leer, dann fertig)
- 3. Spüle den größten Knoten im linken Teilbaum nach oben (kann kein rechtes Kind haben)
- 4. Hänge rechten Teilbaum an größten Knoten aus 3. an

• Laufzeit Splay-Bäume

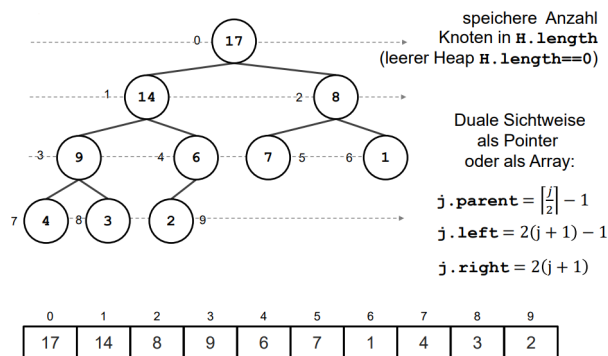
- Amortisierte Laufzeit: Laufzeit pro Operation über mehrere Operationen hinweg
- Worst-Case-Laufzeit pro Operation: $O(\log n)$

4.4 Binäre Max-Heaps

• Definition

- Heaps sind keine BSTs
- Eigenschaften binäre Max-Heaps:
 - bis auf das unterste Level vollständig und dort von links gefüllt ist
 - Für alle Knoten gilt: $x.\text{parent}.key \geq x.key$
 - Maximum des Heaps steht damit in der Wurzel
- $h \leq \log n$, da Baum fast vollständig

• Heaps durch Arrays



• Einfügen

- Idee: Einfügen und danach Vertauschen nach oben, bis Max-Eigenschaft wieder erfüllt ist
- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$

`insert(H,k) // als unbeschränktes Array`

`H.length = H.length + 1;`

`H.A[H.length-1] = k;`

`i = H.length - 1;`

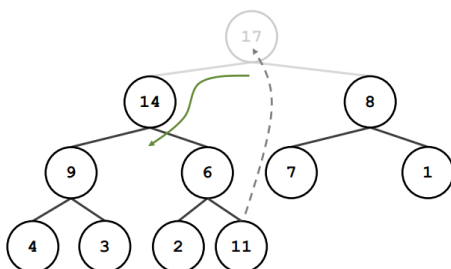
`WHILE i > 0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]`

`SWAP(H.A, i, i.parent);`

`i = i.parent;`

• Lösche Maximum

1. Ersetze Maximum durch letztes"Blatt
2. Vertausche Knoten durch Maximum der beiden Kinder (heapify)



`extract-max(H)`

`IF isEmpty(H) THEN return error "underflow";`
`ELSE`

`max = H.A[0];`

`H.A[0] = H.A[H.length - 1];`

`H.length = H.length - 1;`

`heapify(H, 0);`

`return max;`

```

heapify(H, i)

maxind = i;
IF i.left < H.length AND H.A[i] < H.A[i.left] THEN
    maxind = i.left;
IF i.right < H.length AND H.A[maxind] < H.A[i.right] THEN
    maxind = i.right;

IF maxind != i THEN
    SWAP(H.A, i, maxind);
    heapify(H, maxind);

```

• Heap-Konstruktion aus Array

- Blätter sind für sich triviale Max-Heaps
- Bauen von Max-Heaps für Teilbäume mithilfe Rekursion per `heapify`
- (Array nicht unbedingt in richtiger Reihenfolge)

```

buildHeap(H.A) // Array in H.A

H.length = A.length;
FOR i = ceil((H.length-1)/2) - 1 DOWNT0 0 DO
    heapify(H.A, i);

```

• Heap-Sort

- Idee: Bauen des Heaps aus Array und dann Extraktion des Maximums

```

heapSort(H.A)

buildHeap(H.A) // Bauen des Heaps
WHILE !isEmpty(H) DO
    PRINT extract-max(H); // Ausgabe des Maximums bis Heap leer ist

```

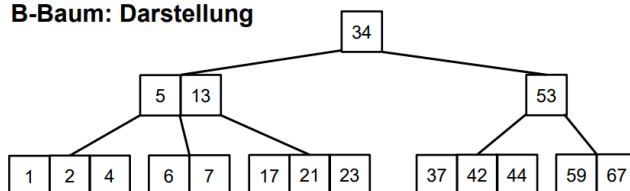
4.5 B-Bäume

• Definition

- Jeder B-Baum hat einen angegebenen Grad also z.B. $t = 2$
- Eigenschaften:
 - Wurzel zwischen $[1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - Knoten zwischen $[t - 1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - Werte innerhalb eines Knotens aufsteigend geordnet
 - Blätter haben alle die gleiche Höhe
 - Jeder innere Knoten mit n Werten hat $n + 1$ Kinder, sodass gilt:

$$k_0 \leq \text{key}[0] \leq k_1 \leq \text{key}[1] \leq \dots \leq k_{n-1} \leq \text{key}[n-1] \leq k_n$$

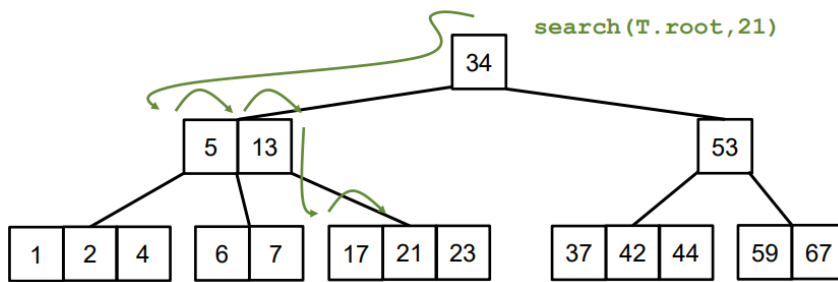
B-Baum: Darstellung



$x.n$ - Anzahl Werte eines Knoten x
 $x.\text{key}[0], \dots, x.\text{key}[x.n-1]$ - (geordnete) Werte in Knoten x
 $x.\text{child}[0], \dots, x.\text{child}[x.n]$ - Zeiger auf Kinder in Knoten x

- Höhe B-Baum: $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$ (Grad t und n Werte)
- B-Baum wird für größere t flacher

- Suche



search(x, k)

```

WHILE x != nil DO
  i = 0;
  WHILE i < x.n AND x.key[i] < k DO
    i++;
  IF i < x.n AND x.key[i] == k THEN
    return(x, i);
  ELSE
    x = x.child[i];
return nil;

```

- Einfügen

- Einfügen erfolgt immer in einem Blatt
- Falls das Blatt voll ist, muss jedoch gesplittet werden
- \Rightarrow Beim Durchlaufen des Baumes an jeder notwendigen (voll) Position splitten
- Splitten:
 - Bricht volle Node auf und fügt mittleren Wert zur Elternnode hinzu
 - Aus den anderen Werten entstehen nun jeweils eigene Kinder
 - An der Wurzel splitten erzeugt neue Wurzel und erhöht Baumhöhe um eins
- Ablauf zusammengefasst:
 1. Start bei Wurzel, falls kein Platz mehr splitten
 2. Durchlaufen des Baumes bis zur richtigen Position und immer, falls voll, splitten
 3. Einfügen der Node (fertig)

insert(T, z)

Wenn Wurzel schon $2t-1$ Werte, dann splitte Wurzel

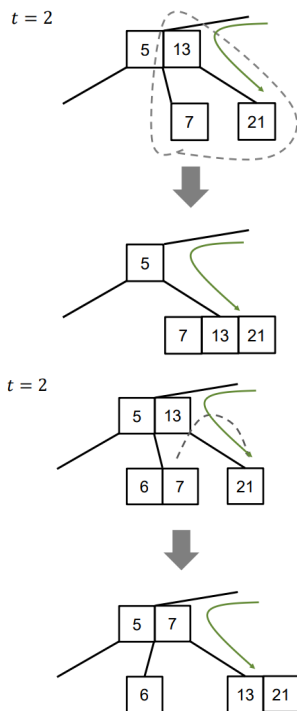
Suche rekursiv Einfügeposition:

Wenn zu besuchendes Kind $2t-1$ Werte, splitte es erst

Füge z in Blatt ein

- Löschen

- Wenn Blatt noch mehr als $t-1$ Werte, kann der Wert einfach entfernt werden
- Allerdings durchlaufen wir hier den Baum auch wieder von oben und stellen gewisse Voraussetzungen her
- Durchlaufen des Baumes von oben und Anwendung der folgenden Algorithmen



Allgemeines Verschmelzen:

- Kind und alle rechten/linken Geschwisterknoten nur $t - 1$ Werte
- Wenn Elternknoten vorher min. t Werte
 \Rightarrow keine Änderung oberhalb notwendig

Allgemeines Rotieren/Verschieben:

- Kind nur $t - 1$ Werte
- Geschwister jedoch mehr als $t - 1$ Werte
- keine Änderung oberhalb notwendig

- Code:

```
delete(T, k)
```

Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder $t-1$ Werte,
verschmelze Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)

Suche rekursiv **Löschposition**:

Wenn zu besuchendes Kind nur $t-1$ Werte,
verschmelze es oder rotiere/verschiebe

Entferne Wert k im inneren Knoten/Blatt

// Ohne Probleme, aufgrund vorheriger Anpassung

• Laufzeiten

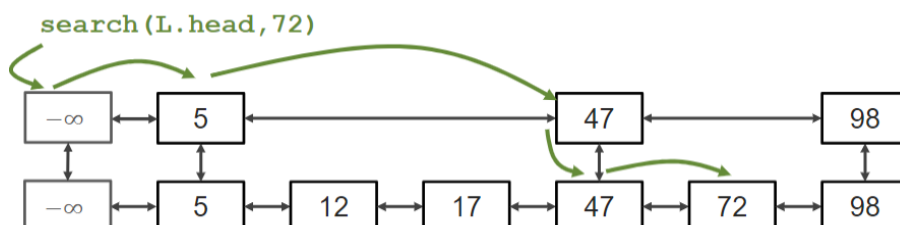
- Einfügen: $\Theta(\log_t n)$
- Löschen: $\Theta(\log_t n)$
- Suchen: $\Theta(\log_t n)$
- Nur vorteilhaft wenn Daten blockweise eingelesen werden
- O -Notation versteckt hier konstanten Faktor t für Suche innerhalb eines Knotens

5 Randomized Data Structures

5.1 Skip Lists

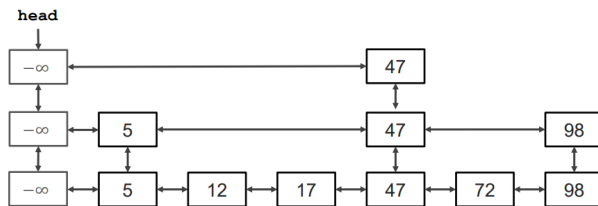
• Idee

- Einfügen von "Express-Liste" mit einigen Elementen
- Beginne mit Suche in der Express-Liste mit weniger Elementen
- Falls das suchende Element kleiner als nächstes Element in Express-Liste \Rightarrow weiter nach rechts
- Falls nicht \Rightarrow Eine Stufe nach unten wandern und dort weiter suchen



- Verbesserung: Zusätzliche Stufen an Express-Listen
- Anwendung:
 - Gut für parallele Verarbeitung z.B. Multicore-Systeme (Einfügen und Löschen)
 - Dafür logarithmische Laufzeit nur im Durchschnitt
- Auswahl von Elementen:
 - Abhängig von einer gewählten Wahrscheinlichkeit p
 - Element kommt mit Wahrscheinlichkeit p in übergeordnete Liste
 - Höhe: $h = O(\log_{\frac{1}{p}} n)$
 - Anzahl Elemente: $n \Rightarrow pn \Rightarrow p^2n \Rightarrow \dots$ (unten nach oben)

• Implementierung



L.head – erstes/oberstes Element der Liste
L.height – Höhe der Skiplist
x.key – Wert
x.next – Nachfolger
x.prev – Vorgänger
x.down – Nachfolger Liste unten
x.up – Nachfolger Liste oben
nil – kein Nachfolger / leeres Element

• Suche

- Laufzeit ist von Expresslisten abhängig
- ```

search(L, k)
current = L.head;
WHILE current != nil DO
 IF current.key == k THEN
 return current;
 IF current.next != nil AND current.next.key <= k THEN
 current = current.next;
 ELSE
 current = current.down;
return nil;

```

## • Einfügen

- Füge auf unterster Ebene ein
- Evtl. auf höheren Ebenen mit zufälliger Wahl mithilfe von  $p$  auf jeder Ebene

## • Löschen

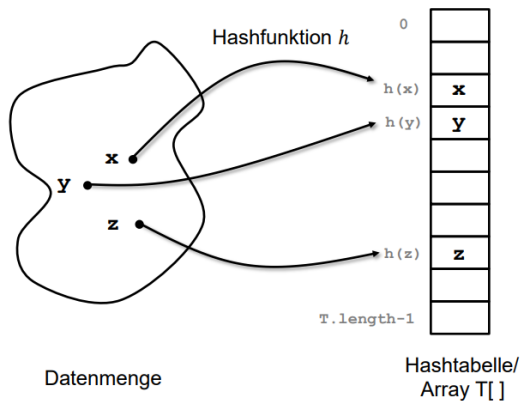
- Entferne Vorkommen des Elements aus allen Ebenen

## • Laufzeiten

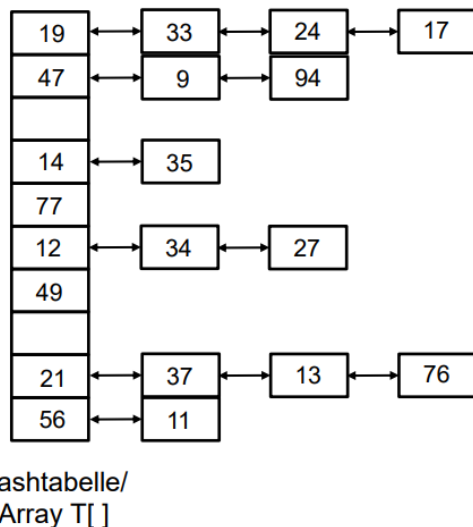
- Einfügen:  $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
- Löschen:  $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
- Suchen:  $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
- (Im Durchschnitt)
- $O$ -Notation versteckt konstanten Faktor  $\frac{1}{p}$
- Speicherbedarf im Durchschnitt:  $\frac{n}{1-p}$

## 5.2 Hashtables

- Idee



- Hashfunktion sollte gut verteilen
- $h(x)$  sollte uniform sein
- Unabhängig im Intervall  $[0, T.length - 1]$  verteilt
- Einfügen mit konstant vielen Array-Operationen



- Kollisionsauflösung z.B. mithilfe von LinkedLists
- Neue Elemente werden vorne angefügt
- Konstante Anzahl an Array-Operationen
- Soviele Schritte wie die Liste lang ist
- Uniforme Hashfunktion

$$\Rightarrow \frac{n}{T.length} \text{ Einträge pro Liste}$$

- Hash-Funktionen

- Universelle Hash-Funktion:
  - Wähle zufällige  $a, b \in [0, p - 1]$ ,  $p$  prim,  $a \neq 0$
  - $h_{a,b}(x) = ((a \cdot x + b) \bmod p) \bmod T.length$
- Kryptographische Hash-Funktionen:
  - MD5, SHA-1, SHA-2, SHA-3
  - $h(x) = MD5(x) \bmod T.length$

- Hashtables vs. Bäume

- Hashtables:
  - nur Suche nach bestimmten Wert möglich
  - meist größer als zu erwartende Anzahl Einträge
- Bäume:
  - schnelles Traversieren zu Nachbarn möglich
  - Bereichssuche möglich

- Laufzeiten

- Wählt mal  $T.length = n$  ergibt sich konstante Laufzeit
- Einfügen:  $\Theta(1)$
- Löschen:  $\Theta(1)$
- Suchen:  $\Theta(1)$
- (Im Durchschnitt, beim Einfügen sogar im Worst-Case)
- Speicherbedarf i.d.R. höher als  $n$ , meist ca.  $1,33 \cdot n$

## 5.3 Bloom-Filter

- Idee

- Speicherschonende Wörterbücher mit kleinem Fehler
- z.B. Vermeidung von schlechten Passwörtern
  1. Abspeichern aller schlechten Passwörter in kompakter Form
  2. Prüfe, ob eingegebenes Passwort im Bloom-Filter
- z.B. Erkennen von schädlichen Websites (Chrome früher)

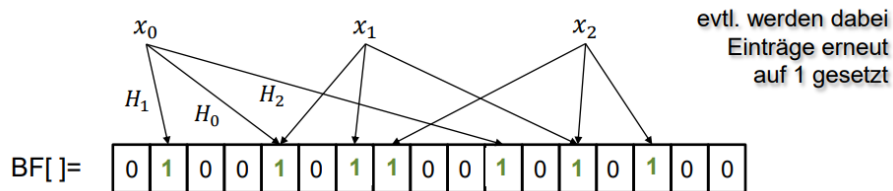
- Erstellen

- $n$  Elemente  $x_0, \dots, x_{n-1}$
- $m$  Bits-Speicher z.B. als Bit-Array
- $k$  gute Hash-Funktionen  $H_0, \dots, H_{k-1}$  mit Bildbereich  $0, 1, \dots, m-1$
- Empfohlene Wahl:  $k = \frac{m}{n} \cdot \ln 2$  (Fehlerrate von ca.  $2^{-k}$ )
- Code:

```
initBloom(X, BF, H) // H Array of hash functions
```

```
FOR i = 0 TO BF.length - 1 DO
 BF[i] = 0;
FOR i = 0 TO X.length - 1 DO
 FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
 BF[H[j](X[i])] = 1;
```

1. Initialisiere Array mit 0-Einträgen
2. Schreibe für jedes Element in jede Bit-Position  $H_0(x_i), \dots, H_{k-1}(x_i)$  eine 1

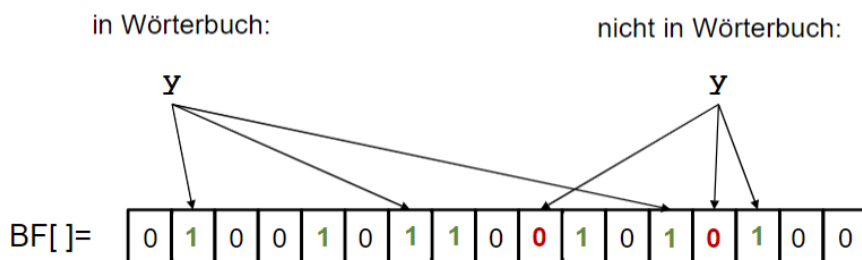


- Suche

```
searchBloom(BF, H, y)
```

```
result = 1;
FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
 result = result AND BF[H[j](y)];
return result;
```

- Gibt an, dass  $y$  im Wörterbuch, falls alle  $k$  Einträge für  $y$  in  $BF = 1$  sind



- Eventuell "false positives" (1, obwohl  $y$  nicht im Wörterbuch)
  - Passiert, falls die Einträge vorher von anderen Werten getroffen wurden
  - Daher gute Hashfunktionen und Filtergröße nicht zu klein



## 6 Graph Algorithms

### 6.1 Graphen

- **(Endlicher) gerichteter Graph**

- (endlicher) gerichteter Graph  $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge  $V$
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge  $E \subseteq V \times V$
- $(u, v) \in E$ : Kanten von Knoten  $u$  zu  $v$
- Kanten haben eine Richtung

- **Ungerichtete Graphen**

- (endlicher) ungerichteter Graph  $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge  $V$
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge  $E \subseteq V \times V$ , sodass  $(u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$
- Kanten haben keine Richtung

- **Pfadfinder**

- Knoten  $v$  ist von Knoten  $u$  erreichbar, wenn es einen Pfad gibt
- $u$  ist immer von  $u$  per leerem Pfad ( $k=1$ ) erreichbar
- Länge des Pfades =  $k - 1$  = Anzahl Kanten

- **Zusammenhänge**

- Ungerichtet: Zusammenhängend wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist
- Gerichtet: **Stark** zusammenhängend, wenn obiges auch gemäß Kantenrichtung gilt

- **Bäume und Subgraphen**

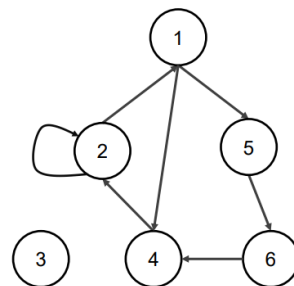
Graph  $G$  ist ein Baum, wenn  $V$  leer ist oder wenn es einen Knoten in  $V$  gibt, von dem aus jeder andere Knoten eindeutig erreichbar ist (Wurzel).

Graph  $G' = (V', E')$  ist Subgraph von  $G = (V, E)$ , wenn  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ .

- **Darstellung von Graphen**

- Als Adjazenzmatrix (1, wenn Kante von  $i$  zu  $j$  / 0, wenn keine Kante)
- Bei ungerichteten Graphen ist Matrix spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Speicherbedarf:  $\Theta(|V|^2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Auch darstellbar als Array mit verketteten Listen
- Speicherbedarf:  $\Theta(|V| + |E|)$

- **Gewichtete Graphen**

- gewichteter gerichteter Graph  $G = (V, E)$
- besitzt zusätzlich Funktion  $w : E \rightarrow R$
- Abspeichern des Werts einer Kante  $w((u, v))$

## 6.2 Breadth-First Search (BFS)

- Idee

- Besuche zuerst alle unmittelbaren Nachbarn, dann deren Nachbarn, usw.
- Anwendung: Webcrawling, Garbage Collection,..

- Algorithmus

```

BFS(G,s) //G=(V,E) s = source node in V

FOREACH u in V-{s} DO
 u.color = WHITE; // Weiß = noch nicht besucht
 u.dist = +∞ // Setzen der Distanzen auf Unendlich
 u.pred = nil; // Setzen der Vorgänger auf nil
s.color = GRAY; // Anfang bei Startnode
s.dist = 0;
s.pred = nil;
newQueue(Q);
enqueue(Q,s);
WHILE !isEmpty(Q) DO
 u = dequeue(Q);
 FOREACH v in adj(G,u) DO
 IF v.color == WHITE THEN
 v.color == GRAY;
 v.dist = u.dist+1;
 v.pred = u;
 enqueue(Q,v);
 u.color = BLACK; // Knoten abgearbeitet

```

- Laufzeit:  $O(|V| + |E|)$
- Nach Algorithmus steht in  $v$  die kürzeste Distanz von  $s$  nach  $v$

- Kürzeste Pfade ausgeben

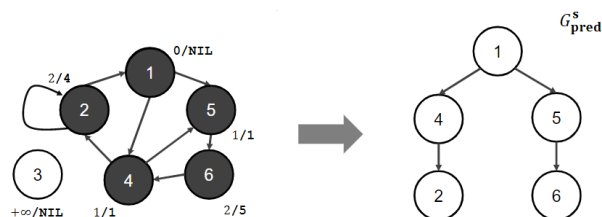
```

print-path(G,s,v) // Assumes that BFS(G,s) has already been executed

IF v == s THEN
 print s;
ELSE
 IF v.pred == nil THEN
 print 'no path from s to v'
 ELSE
 print-path(G,s,v.pred);
 print v;

```

- Abgeleiteter BFS-Baum



- Subgraph  $G_{pred}^s = (V_{pred}^s, E_{pred}^s)$  von  $G$ :
  - $V_{pred}^s = \{v \in V | v.pred \neq nil\} \cup \{s\}$
  - $E_{pred}^s = \{(v.pred, v) | v \in V_{pred}^s - \{s\}\}$
- $G_{pred}^s$  enthält alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten in  $G$
- Außerdem handelt es sich hier nur um kürzeste Pfade

## 6.3 Depth-First Search(DFS)

- Idee

- Besuche zuerst alle noch nicht besuchten Nachfolgeknoten
- "Laufe so weit wie möglich weg vom aktuellen Knoten"

- Algorithmus

```

DFS(G)

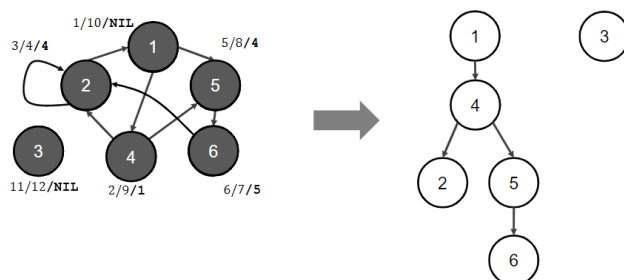
FOREACH u in V DO
 u.color = WHITE;
 u.pred = nil;
time = 0; // time hier als globale Variable
FOREACH u in v DO
 IF u.color == WHITE THEN
 DFS-VISIT(G,u) // Start eines rekursiven Aufrufs
DFS-VISIT(G,u)

time = time + 1;
u.disc = time; // discovery time
u.color = GRAY;
FOREACH v in adj(G,u) DO
 IF v.color == WHITE THEN
 v.pred = u;
 DFS-VISIT(G,v);
u.color = BLACK;
time = time + 1;
u.finish = time; // finish time

```

- DFS-Wald = Menge von DFS-Bäumen

- Subgraph  $G_{pred} = (V, E_{pred})$  von  $G$
- besteht aus  $E_{pred} = (v.pred, v) | v \in V, v.pred \neq nil$
- DFS-Baum gibt nicht unbedingt den kürzesten Weg wieder



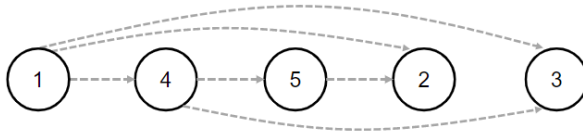
- Kantenarten

- Baumkanten: alle Kanten in  $G_{pred}$
- Vorwärtskanten: alle Kanten in  $G$  zu Nachkommen in  $G_{pred}$ , die nicht Baumkante
- Rückwärtskanten: alle Kanten in  $G$  zu Vorfahren in  $G_{pred}$ , die nicht Baumkante
- Kreuzkanten: alle anderen Kanten in  $G$  (inkl. Schleifen)

- Anwendungen DFS

- Job Scheduling (Job X muss vor Job Y beendet sein)
- Topologisches Sortieren

- nur für dag (directed acyclic graph)
- Kanten immer nur nach rechts
- Sortierung aber nicht eindeutig

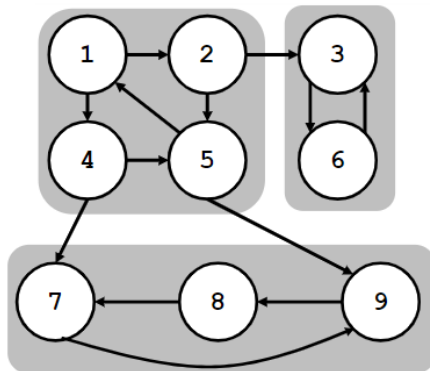


TOPOLOGICAL-SORT( $G$ )

```
newLinkedList(L);
run DFS(G) but, each time a node is finished, insert in front of L
return L.head
```

### • Starke Zusammenhangskomponenten

- Knotenmenge  $C \subseteq V$ , so dass
  - es zwischen zwei Knoten  $u, v \in C$  einen Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt
  - und es keine Menge  $D \subseteq V$  mit  $C \subsetneq D$  gibt, für die obiges auch gilt.



Eigenschaften:

- Verschiedene SCC's sind disjunkt
- Zwei SCC's sind nur in eine Richtung verbunden

- Algorithmus:
  - DFS zweimal laufen lassen
    - Einmal auf Graph  $G$
    - Einmal auf Graph  $G^T = (V, E^T)$  (transponiert)
  - Dadurch bleiben die SCC's gleich, die Kanten drehen sich aber jeweils um
  - Code:
 

```
SCC(G)
```

```
run DFS(G)
compute G^T
run DGS(G^T) but visit vertices in main loop
 in descending finish time from 1
output each DFS tree from above as one SCC
```

## 6.4 Minimale Spannbäume

### • Definition

- Verbindung aller Knoten miteinander
- Minimaler Spannbaum  $\Rightarrow$  Minimales Gewicht

### • Allgemeiner Algorithmus

```
genericMST(G, w)
```

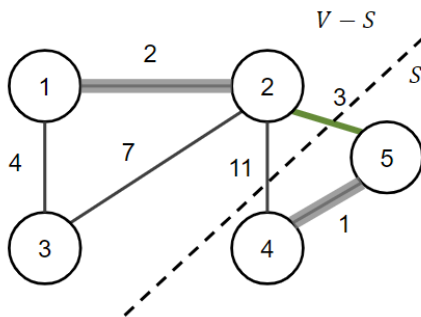
```
A = \emptyset
```

```

WHILE A does not form a spanning tree for G DO
 find safe edge {u,v} for A
 A = A \cup {{u,v}}
return A

```

Terminologie:



- Schnitt  $(S, V-S)$  partitioniert Knoten in zwei Mengen
- $\{u,v\}$  überbrückt Schnitt, wenn  $u \in S$  und  $v \in V - S$
- Schnitt respektiert  $A \subseteq E$ , wenn keine Kante  $\{u,v\}$  aus  $A$  den Schnitt überbrückt
- $\{u,v\}$  leichte Kante für  $(S, V-S)$ , wenn  $w(\{u,v\})$  minimal für alle den Schnitt überbrückenden Kanten
- $\{u,v\}$  sicher für  $A$ , wenn  $A \cup \{\{u,v\}\}$  Teilmenge eines MST

### • Algorithmus von Kruskal

- Lässt parallel mehrere Unterbäume eines MST wachsen
- In Worten: Suchen der "kleinsten" Kante und Zusammenfügen von Mengen, falls noch nicht geschehen
- Laufzeit:  $O(|E| \cdot \log|E|)$

MST-Kruskal( $G, w$ )

```

A = \emptyset
foreach v in V do
 set(v) = {v}; // Menge mit sich selbst
Sort edges according to weight in nondecreasing order
foreach {u,v} in E according to order do
 if set(u) \neq set(v) then // Mengen noch nicht verbunden
 A = A \cup {{u,v}};
 UNION(G,u,v); // Zusammenführen der Mengen aller Knoten aus den Sets
return A;

```

### • Algorithmus von Prim

- Konstruiert einen MST Knoten für Knoten
- Fügt immer leichte Kante zu zusammenhängender Menge hinzu
- Laufzeit:  $O(|E| + |V| \cdot \log|V|)$

MST-Prim( $G, w, r$ ) //  $r$  is given root

```

foreach v in V do
 v.key = $+\infty$;
 v.pred = nil;
r.key = $-\infty$
Q = V;
while !isEmpty(Q) do
 u = EXTRACT-MIN(Q); // smallest key value
 foreach v in adj(u) do
 if v \in Q and $w(\{u,v\}) < v.key$ then
 v.key = $w(\{u,v\})$;
 v.pred = u;

```

## 6.5 Kürzeste Wege in (gerichteten) Graphen

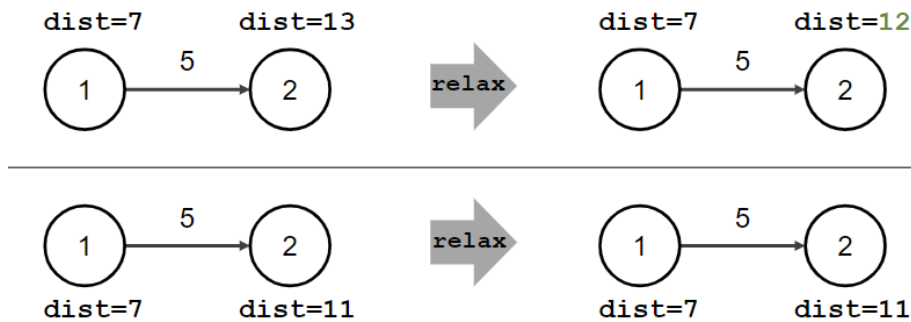
### • Definition

- SSSP - Single-Source Shortest Path

- Von Quelle  $s$  ausgehend die kürzesten Pfad zu allen anderen Knoten
- Kürzester Pfad: Minimales Gewicht von einem zum anderen Knoten
- BFS findet nur minimale Kantenwege (nicht Gewichtswege)
- MST minimiert das Gesamtgewicht des Baumes (nicht zu einzelnen Kanten)
- Negative Kantengewichte sind erlaubt, aber keine Zyklen mit negativem Gesamtgewicht

### • Gemeinsame Idee für Algorithmen - Relax

- Verringere aktuelle Distanz von Knoten  $v$ , wenn durch Kante  $(u, v)$  kürzer erreichbar



`relax(G, u, v, w)`

```
IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
 v.dist = u.dist + w((u,v));
 v.pred = u;
```

### • Bellman-Ford-Algorithmus

- Laufzeit:  $\Theta(|E| \cdot |V|)$

`Bellman-Ford-SSSP(G, s, w)`

```
initSSSP(G, s, w);
FOR i = 1 TO V-1 DO
 FOREACH (u,v) in E DO
 relax(G, u, v, w);
FOREACH (u,v) in E DO // Prüfung ob negativer Zyklus
 IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
 return false;
return true;

initSSSP(G, s, w)

FOREACH v in V DO
 v.dist = ∞;
 v.pred = nil;
s.dist = 0;
```

### • TopoSort für dag

- Erhalten des kürzesten Pfades durch das topologische Sortieren
- Laufzeit:  $\Theta(|E| + |V|)$

`TopoSort-SSSP(G, s, w)`     *// G muss dag sein*

```
initSSSP(G, s, w);
execute topological sorting
FOREACH u in V in topological order DO
 FOREACH v in adj(u) DO
 relax(G, u, v, w);
```

- Dijkstra-Algorithmus

- Voraussetzung: Keine negativen Kantengewichte
- Laufzeit:  $\Theta(|V| \cdot \log|V| + |E|)$

Dijkstra-SSSP( $G, s, w$ )

```
initSSSP(G, s, w);
 $Q = V$;
WHILE !isEmpty(Q) DO
 $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$; // smallest distance
 FOREACH v in $\text{adj}(u)$ DO
 relax(G, u, v, w);
```