Mathematik II für Informatik - Zusammenfassung

Jonas Milkovits

Last Edited: 29. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis Teil I - Konvergenz und Stetigkeit

1.1 Die reellen Zahlen

Definitionen

5.1.1	Die **Menge der reellen Zahlen** ist der kleinste angeordnete Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und das Vollständigskeitsaxiom *"Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Suprenum."* erfüllt.
5.1.3	Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt: a) nach **oben (unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt. b) **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
5.1.5	Die Funktion $\lvert \cdot \rvert : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{falls x} \geq 0 \\ -x & \text{falls x} < 0 \end{cases}$$ heißt **Betragsfunktion** und $\lvert x\rvert$ heißt Betrag von x.
5.1.8	**Intervalle:** Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen: • $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall • $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall • $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall • $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall **Halbstrahlen:** • $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ • $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ • $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ • $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ • $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Sätze

5.1.4	Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. (Umkehrung Vollständigkeitsaxiom)
5.1.6	**Rechenregeln Betragsfunktion:** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: a) $\lvert x\rvert \geq 0$ b) $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$ c) $\pm x \leq \lvert x\rvert$ d) $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$ e) $\lvert x\rvert = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ f) $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkungen

	Ein Körper mit Totalordnung $\leq$ heißt **angeordneter Körper**, falls gilt: • $\forall a, b, c \in K : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ • $\forall a, b, c \in K : (a \leq b \text{ und } 0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc$

1.2 Wurzeln, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Definitionen

5.2.1	**Ganzzahlige Potenzen:** Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist a) $x^n := x \cdot x \cdot x ... \cdot x$ (n-mal x) b) $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, falls $x \neq 0$ c) $x^0 := 1$
5.2.3	Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Die **eindeutige Zahl** $x^n \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ heißt n-te **Wurzel** von a und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. Für den wichtigsten Fall $n = 2$ gibt es die Konvention $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
5.2.5	Aus der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel (5.2.4) folgt: Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ und jedes $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ ist die **rationale Potenz** definiert durch: $$x^q = x^{\frac{n}{m}} := (\sqrt[x]{x})^n.$$
5.2.7	Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann wird die Zahl $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ als n **Fakultät** bezeichnet. Weiterhin definieren wir $0! := 1$. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** "n über k".

Sätze

5.2.2	**Existenz der Wurzel:** Für jedes $a \in R_+$ und alle $n \in N^*$ gibt es genau ein $w \in R_+$ mit $x^n = a$.
5.2.4	Es seien $q \in \mathbb{Q}$ und $m, \in \mathbb{Z}$, sowie $n, r \in \mathbb{N}^*$ so, dass $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$: $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{m})^p$.
5.2.9	Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ b) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$ c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (Binomialformel)

Bemerkungen

5.2.6	**Rechenregeln für Potenzen (auch rational)** $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ gilt: • $x^p x^q = x^{p+q}$ • $x^p y^p = (xy)^p$ • $(x^p)^q = x^{pq}$ • $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ • $\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p$
5.2.8	**Fakultät und Binomialkoeffizient** $n!$ ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von n unterschiedlichen Dingen. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n unterscheidbaren Dingen genau k auszuwählen.
	Zugriff auf **Binomialkoeffizienten** für binomische Formeln durch Pascal'sches Dreieck

1.3 Konvergenz von Folgen

1.3.1 Der Konvergenzbegriff und wichtige Beispiele

Definitionen

5.3.1	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Die Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen a, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exisitert mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** oder Limes von (a_n) und wir schreiben: $lim_{a\to\infty} = a$ oder $a_n \to a(n \to \infty)$. Ist (a_n) eine Folge $\mathbb{K}$, die gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, so heißt diese **divergent**.
5.3.4	Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so setzen wir weiter $sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := sup_{n=0}^{\infty} a_n := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := inf_{n=0}^{\infty} a_n := inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
5.3.13	**Bestimmte Divergenz:** Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ **divergiert bestimmt nach** $\infty(-\infty)$ und wir schreiben $lim_{n\to\infty} a_n = \infty(-\infty)$, wenn es für jedes $C \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq C(a_n \leq -C)$ für alle $n \leq n_0$ gilt.

Sätze

5.3.5	Jede **konvergente Folge** in $\mathbb{K}$ ist **beschränkt**. Die Umkehrung dieses Satzes ist **falsch**. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.
5.3.7	**Grenzwertsätze** Es seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Dann gilt: a) Ist $lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ b) Gilt $lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $lim_{n\to\infty} b_n = b$ so gilt: i) $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ ii) $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ iii) $lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ iv) Ist zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt außerdem: c) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $lim_{n\to\infty} b_n = b$, so folgt $a \leq b$ d) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = a$, so ist auf die Folge (c_n) konvergent und es gilt $lim_{n\to\infty} c_n = a$ **(Sandwich-Theorem)**

Bemerkungen

	Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. (Für $X = \mathbb{R}$ reelle Folge, $X = \mathbb{C}$ komplexe Folge) Schreibweise: a_n statt $a(n)$. (n-tes Folgeglied) Ganze Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n) oder $(a_n)_{n>0}$
	Folgen haben maximal einen (eindeutiger) Grenzwert
	Bezeichnung von Folgen, für die der Grenzwert 0 ist: **"Nullfolge"**
5.3.7	c) ist falsch mit $<$, nur richtig mit $\leq$
5.3.10	**Wichtige konvergente Folgen** a) Ist (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a und gilt $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist für jedes $p \in \mathbb{N}^*$ auch $lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$. b) Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt: $lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \end{cases}$ Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$, so gilt ebenfalls $lim_{n\to\infty} q^n = 0$. c) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für jedes $c \in \mathbb{R}_+$. d) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. e) $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n := e$ $(n \geq 1)$. Beachte hier: Beide n gleichzeitig wachsen lassen, keine trägen oder eiligere n.

Beispiele

5.3.1	Folge $(a_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ Sei $\epsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\epsilon} < n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (beliebiges n immer größer). Für alle $n \geq n_0$ gilt dann: $$\lvert a_n - a\rvert = \lvert a_n - 0\rvert = \lvert a_n\rvert = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$ $\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0
5.3.9	Sei $p \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt und $a_n = \frac{1}{n^p}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Ungleichung $n \leq n^p$ und damit $$0 \leq a_n = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}.$$ Da sowohl die Folge, die konstant Null ist, als auch die Folge $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, ist damit nach Satz 5.3.7(d) auch die Folge (a_n) konvergent und ebenfalls eine Nullfolge.
5.3.9	Wir untersuchen $$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3},\ n \in \mathbb{N}.$$ Dazu kürzen wir durch Bruch durch die **höchste auftretende Potenz**: $$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1+0+0}{1+0} = 1\ (n \to \infty).$$ Dieses Verfahren ist bei allen Polynom in n geteilt durch Polynom in n"gut anwendbar.
5.3.12	$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (Differenz von zwei divergenten Folgen) Trick: Erweiterung mit der Summe von Wurzeln bei Differenzen von Wurzeln $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$ Sandwich: $lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.
5.3.12	**Geometrische Summenformel:** $$a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n,\ n \in \mathbb{N}$$ $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$.

1.3.2 Konvergenzkriterien

Definitionen

5.3.14	Eine reelle Folge (a_n) heißt: a) **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. b) **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. c) **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.
5.3.18	Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $$\lvert a_n - a_m\rvert < \epsilon, \text{ für alle } n, m \geq n_0$$

Sätze

5.3.15	**Monotonie Kriterium** Ist die reelle Folge (a_n) nach oben (nach unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist (a_n) **konvergent** und es gilt: $$lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ (bzw. } lim_{n\to\infty} a_n = inf_{n\in\mathbb{N}} a_n)$$
5.3.19	Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist eine **Cauchy-Folge**.
5.3.20	**Cauchy-Kriterium** Eine Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkungen

	Monotonieverhalten, deswegen hier nur in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{C}$ (keine Ordnung)
	Beide hier gesehenen Konvergenzkriterien funktionieren ohne vorherige Behauptung über den Grenzwert

Beispiele

5.3.16	Betrachtung einer rekursiv defininierten Folge $a_0 := \sqrt[3]{6}$ und $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}, n \in \mathbb{N}$ Damit folgt: $a_1 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}$, $a_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}$ Solche Folgen entstehen oft bei iterativen Näherungsverfahren. Behauptung: (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ Konvergenz Beweis: Induktion

1.3.3 Teilfolgen und Häufungswerte

Definitionen

5.3.22	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - a\rvert < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente hat.
5.3.23	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ist $\{n_1, n_2, n_3, ...\} \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge von Indizes mit $n_1 < n_2 < n_3...$, so heißt die Folge $(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).

Sätze

5.3.24	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt a) Ein $\alpha \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Häufungswert von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert, die gegen α konvergiert. b) Ist (a_n) konvergenz mit Grenzwert α, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a. c) Ist (a_n) konvergenz, so hat (a_n) genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert $lim_{n\to\infty} a_n$.

Bemerkungen

	Jeder Grenzwert ist auch Häufungswert.
	Häufungswert von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: 1, -1 (aber keine Grenzwerte)
	Häfungswert von (i^n): 1, i, -1, -i
	Keine Teilfolgen: $(a_0, a_0, a_2, a_2, ..)$ (keine doppelten Elemente) $(a_2, a_3, a_0, ..)$ (nicht umsortieren)

1.4 Asymptotik

Definitionen

5.4.1	a) Wir bezeichnen mit $F_+ := \{(a_n)$ Folge in $\mathbb{R} : a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ b) Es sei $(b_n) \in \mathbb{F}_+$. Dann definieren wir die Landau-Symbole durch • $O(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : \frac{a_n}{b_n}{}_{n\in\mathbb{N}}\}$ (b_n größer gleich a_n) • $o(b_n) := \{(a_n) \in \mathbb{F}_+ : lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\}$ (b_n echt größer als a_n)

Sätze

5.4.5	Es seien $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n) \in \mathbb{F}_+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt: a) Sind $a_n, b_n \in O(c_n)$, so ist auch $\alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$ b) Gilt $a_n \in O(b_n)$ und $c_n \in O(d_n)$, so ist $a_n c_n \in O(b_n d_n)$ c) Aus $a_n \in O(b_n)$ und $b_n \in O(c_n)$ folgt $a_n \in O(c_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$ genau dann, wenn $\frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$ e) Diese Aussagen gelten auch alle mit Klein-O anstatt Groß-O

Bemerkungen

5.4.2	a) =-Zeichen wird hier nicht bekannten mathematischen Sinne verwendet $\Rightarrow$ Kompromiss Notation $a_n \in O(b_n)$ b) Es gilt immer $o(b_n) \subseteq O(b_n)$. c) $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow a_n \in O(b_n)$ d) $a_n \in O(b_n)$: Folge a_n wächst höchstens so schnell wie ein Vielfaches von b_n
	Exponentielle Algorithmen sind viel schlechter als polynomiale.

Landau-Symbol	Bezeichnung	Bemerkung
$O(1)$	beschränkt	
$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a > 1$
$O(n)$	linear	
$O(n \log_a(n))$	„n log n“	$a > 1$
$O(n^2)$	quadratisch	
$O(n^3)$	kubisch	
$O(n^k)$	polynomial	$k \in \mathbb{N}^*$
$O(a^n)$	exponentiell	$a > 1$

1.5 Reihen

Definitionen

5.5.1	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_o + a_1 + a_2 + ...$ die **Reihe** über (a_n). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ heißt dann $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ die k-te Teilsumme oder **Partialsumme** der Reihe. Ist die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent, so nennen wir die Reihe **konvergent** mit dem Reihenwert: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := lim_{k \to \infty} s_k = lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$. Ist (s_k) divergent, so nennen wir auch die Reihe divergent.

Sätze

5.5.3	Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und es gilt $$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
5.5.4	Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
5.5.5	Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$, so ist (a_n) eine **Nullfolge** in $\mathbb{K}$.
5.5.6	Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$ Dann gilt: a) **Monotonie Kriterium** Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. b) **Cauchy-Kriterium** Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ existiert mit $$\lvert \sum_{n=l+1}^{k} a_n \rvert < \epsilon \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k > l \geq n_0.$$
5.5.7	**Leibniz-Kriterium** Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

Bemerkungen

5.5.5	Gilt nicht umgekehrt. Nullfolge ist eine Voraussetzung für eine konvergente Reihe, aber keine Garantie.

Beispiele

Reihen:

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$ *(Geometrische Reihe)*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = divergent$ *(Harmonische Reihe)*
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = ln(2)$ *(alternierende harmonische Reihe)* (Leibniz-Kriterium)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$: konvergent, wenn $\alpha > 1$, sonst divergent

1.5.1 Absolute Konvergenz

Definitionen

5.5.9	Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. (Summanden werden schnell genug klein, vorzeichenunabhängig)

Sätze

5.5.10	Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist auch konvergent in $\mathbb{K}$ und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung $\lvert \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rvert \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n \rvert$
5.5.12	Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen und $n_o \in \mathbb{N}$. • **Majorantenkriterium** Ist $\lvert a_n \rvert \leq b_n$ für alle $n \geq n_o$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. • **Minorantenkriterium** Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ und divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
5.5.16	Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. a) **Wurzelkriterium** Existiert der Grenzwert $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$, so ist die Reihe • absolut konvergent, wenn $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} < 1$ ist • divergent, wenn $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} > 1$ ist b) **Quotientenkriterium** Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert der Grenzwert $lim_{n\to\infty} \lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \rvert$, so ist die Reihe • absolut konvergent, wenn $lim_{n\to\infty} \lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \rvert < 1$ ist • divergent, wenn $lim_{n\to\infty} \lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \rvert > 1$ ist

Bemerkungen

5.5.10	Gilt nicht umgekehrt (alternierende harmonische Reihe)
5.5.10	Absolute Konvergenz: Reihenwert ist unabhängig von der Summationsreihenfolge
5.5.12	Die Vergleichsfolge heißt jeweils converente Majorante bzw. divergente Minorante.
5.5.16	Liefert Wurzel-/Quotientenkriterium genau Eins, kann man daraus keine Aussage ableiten

1.5.2 Das Cauchy-Produkt

Definitionen

5.5.21	Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z := E(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Sätze

5.5.19	Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei **absolut konvergente Folgen** in $\mathbb{K}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ **absolut** und es gilt für die Reihenwerte: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$ Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ heißt **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen.
5.5.20	Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z+w) = E(z)E(w)$.

1.6 Konvergenz in normierten Räumen

Definitionen

5.6.1	a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heißt **konvergent** gegen ein $a \in V$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $$\|\|a_n - a\|\|_V < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$ Die Folge heißt **divergent,** wenn sie nicht konvergent ist. b) Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $$\|\|a_n - a_m\|\|_V < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0$$ c) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in V heißt **konvergent** mit Reihenwert $s \in V$, wenn die Folge der Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, in V gegen s konvergiert. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|\|a_n\|\|_V$ in $\mathbb{R}$ so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**. Ist die Reihe nicht konvergent, so nennt man sie **divergent**.
5.6.2	Eine Menge $M \subseteq V$ heißt beschränkt, falls es ein ≥ 0 gibt, so dass $\|\|x\|\|_V \leq C$ für alle $x \in \mathbb{M}$ gilt.
5.6.8	a) Es seien $x_0 \in \mathbb{V}$ und $r \in (0, \infty)$. Dann heißt die Menge $B_r(x_0) := \{x \in V : \|\|x - x_o\|\|_V < r\}$ **(offene) Kugel** um x_0 (Mittelpunkt) mit Radius r. b) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt **offen**, falls es für jeden Punkt $x_0 \in M$ einen Radius $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x_0) \subseteq M$ gilt. c) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt **abgeschlossen**, wenn die Menge $M^c = V \ M$ offen ist. d) Es sei $M \subseteq V$. Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt **innerer Punkt** von M, falls es ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x_0) \subseteq M$ ist. Man nennt $M^o := \{x \in M : x \text{ innerer Punkt von } M\}$ das **Innere von** M.
5.6.13	Ist V ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heißt eine Teilmenge $M \subseteq V$ **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
5.6.15	Es sei (a_n) eine Folge in $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$. a) Ein $a \in V$ heißt **Häufungswert** von (a_n)m falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $$\{n \in \mathbb{N} : \|\|a_n - a\|\|_V < \epsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\epsilon(a)\}$$ unendlich viele Elemente hat. b) Ist $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von (a_n).
5.6.19	Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert. Ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum wird auch **Banachraum** genannt. Wird die Norm $\|\| \cdot \|\|_V$ außerdem durch eine Skalarprodukt auf V induziert, so nennt man V **Hilbertraum**.

Sätze

5.6.5	Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,d})^T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der 2-Norm. Dann ist (a_n) in $\mathbb{R}$ genau dann **konvergent**, wenn für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ die Koordinatenfolge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **konvergent** ist. In diesem Fall ist $$lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \ldots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lim_{n\to\infty} a_{n,1} \\ lim_{n\to\infty} a_{n,2} \\ \ldots \\ lim_{n\to\infty} a_{n,d} \end{pmatrix}.$$ Falls eine Komponente im Vektor divergiert, divergiert die ganze Folge.
5.6.11	Eine Teilmenge M von V ist genau dann **abgeschlossen**, wenn für jede Folge in M, die in V konvergiert, der Grenzwert ein Element aus M ist.
5.6.17	**Satz von Bolzano-Weierstraß** Sei $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum und $M \subseteq V$ kompakt. Dann besitzt jede Folge in M eine **konvergente Teilfolge mit Grenzwert in** M.
5.6.22	**Banach'scher Fixpunktsatz** Es sei $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein Banachraum $M \subseteq V$ abgeschlossen und $f : M \to M$ eine Funktion. Weiter existiere ein $q \in (0, 1)$, so dass $$\|\|f(x) - f(y)\|\|_V \leq q\|\|x - y\|\|_V, \text{ für alle } x, y \in M$$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen: a) Es gibt genau ein $v \in M$ mit $f(v) = v$. (d.h. f hat genau einen Fixpunkt in M) b) Für jedes $x_0 \in M$ konvergiert die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen v und es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen für hedes $n \in \mathbb{N}^*$: $\|\|x_n - v\|\|_V \leq \frac{q^n}{1-q}\|\|x_1 - x_0\|\|_V$ (A-priori-Abschätzung) $\|\|x_n - v\|\|_V \leq \frac{q}{1-q}\|\|x_n - x_{n-1}\|\|_V$ (A-posterior-Abschätzung)

Bemerkungen

	Normierter Raum: V = normierter Vektorraum mit Norm $\|\| \cdot \|\|_V$ (ermöglicht Abstandsmessung) Hier als Vorstellung $\mathbb{R}^{\not\models}$ mit Standard(2)-Norm (normaler Abstand im Raum)
5.6.1	Genau dasselbe wie vorher, wir ersetzen nur den Betrag durch die jeweilige Norm
5.6.1	**Cauchy-Folge**: Abstand von je zwei Folgegliedern
	2-Norm: $\|\|x\|\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
5.6.5	Der Satz gilt im endlichen Raum für alle Normen. Wenn eine Folge bezüglich einer Norm konvergiert, dann auch bzgl jeder anderen. Grenzwerte bleiben gleich.
5.6.8	Menge **abgeschlossen**: Rand gehört zur Menge Menge **offen**: Rand gehört nicht zur Menge Die meisten Menge sind weder offen noch abgeschlossen, keine Umkehrschlüsse!
5.6.17	Ist $(V, \|\| \cdot \|\|_V)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum,so besitzt jede beschränkte Folge in V mindestens einen Häufungswert. (Unendliche viele Punkte in einer beschränkten Menge müssen irgendwo klumpen)
5.6.19	Standardvektorraum $\mathbb{R}$ ist für jedes $d \in \mathbb{N}^*$ mit jeder Norm ein **Banachraum**. Wählt man außerdem die durch das Skalarprodukt induzierte 2-Norm, so ist $(\mathbb{R}, \|\| \cdot \|\|_2)$ ein **Hilbertraum**.

Beispiele

5.6.3	$V = \mathbb{R}^{\nvDash}$, 1-Norm: $\|\|x\|\|_1 = \sum_{j=1}^{3} \|x_i\|$, $a_n := (1, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})^T$, $n \in \mathbb{N}^*$ Hier gilt $lim_{n\to\infty} a_n = (1,0,1)^T$. Zeige: Abstand von a_n zu Grenzwert belieblig klein: $\|\|a_n - (1,0,1)^T\|\| = \|0\| + \|\frac{1}{n}\| + \|\frac{n-1}{n} - 1\| = \frac{2}{n}$ (Abstand geht gegen 0) Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt: $\|\|a_n - (1,0,1)^T\|\|_1 = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$