SHA25 - Problème 11
Calculotron

La boucle `while` de la fonction `calc_flag` peut être représentée par la somme suivante :

$$\sum_{d=0}^{c} \frac{b}{a^2 - (1+2d)a + d^2 + d} \tag{1}$$

On peut extraire le numérateur de la somme :

$$b \sum_{d=0}^{c} \frac{1}{a^2 - (1+2d)a + d^2 + d} \tag{2}$$

En factorisant le dénominateur, on obtient :

$$b \sum_{d=0}^{c} \frac{1}{(a-d)(a-d-1)} \tag{3}$$

$\frac{1}{(a-d)(a-d-1)}$ est de la forme $\frac{1}{X(X-1)}$ avec $x = a - d$, et peut donc se décomposer ainsi en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} \implies \frac{1}{(a-d)(a-d-1)} = \frac{-1}{a-d} + \frac{1}{a-d-1} \tag{4}$$

La somme devient donc :

$$b \sum_{d=0}^{c} \left(\frac{-1}{a-d} + \frac{1}{a-d-1} \right) = b \left(-\sum_{d=0}^{c} \frac{1}{a-d} + \sum_{d=0}^{c} \frac{1}{a-d-1} \right) \tag{5}$$

On peut réindicer la deuxième somme :

$$b \left(-\sum_{d=0}^{c} \frac{1}{a-d} + \sum_{d=1}^{c+1} \frac{1}{a-d} \right) \tag{6}$$

Les deux sommes sont télescopiques : tous les termes de 1 à c vont s'annuler car ils sont présents dans les deux sommes, dans la première avec le signe $-$ et dans la deuxième avec le signe $+$. Il reste donc le premier terme de la première somme (pour $d = 0$) et le dernier terme de la deuxième (pour $d = c + 1$) :

$$b \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a-c-1} \right) \tag{7}$$

Finalement :

$$\sum_{d=0}^{c} \frac{b}{a^2 - (1+2d)a + d^2 + d} = b \left(\frac{1}{a-c-1} - \frac{1}{a} \right) \tag{8}$$

En ajoutant le terme initial $^b/_a$ on obtient l'expression finale de la fonction `calc_flag` :

$$\frac{b}{a} + b \left(\frac{1}{a-c-1} - \frac{1}{a} \right) \tag{9}$$