



Diagnostizieren und Fördern im mathematischen Anfangsunterricht

Hintergrundwissen, Diagnose- und Förderanregungen
Arithmetik Klasse 1 und 2

Inhaltsverzeichnis

1 Diagnosegeleitete Förderung und förderorientierte Diagnostik mit den FÖDIMA-Materialien	4
2 Zahlverständnis im Zahlenraum bis 20	20
3 Zahlverständnis im Zahlenraum bis 100	24
4 Addition im Zahlenraum bis 20	27
5 Addition im Zahlenraum bis 100	33
6 Subtraktion im Zahlenraum bis 20	38
7 Subtraktion im Zahlenraum bis 100	43
8 Multiplikation	48
9 Division	54
Literatur	61
Impressum	62

1 Diagnosegeleitete Förderung und förderorientierte Diagnostik mit den FÖDIMA-Materialien

Im arithmetischen Anfangsunterricht der ersten beiden Schuljahre werden die Grundlagen für das weitere Mathematiklernen gelegt – insbesondere im Bereich *Zahlen und Operationen*. Um sicher und flexibel rechnen zu können, müssen Kinder über ein tragfähiges Zahl-, Stellenwert- und Operationsverständnis im Zahlenraum bis 100 verfügen. Dabei bauen die Lerninhalte unmittelbar aufeinander auf: Ein sicheres Zahlverständnis ist z. B. die Voraussetzung für ein tragfähiges Operationsverständnis zur Addition. Dieses ist wiederum die Voraussetzung für eine verstehensorientierte Erarbeitung und für die anschließende Automatisierung des sogenannten kleinen Einspluseins (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2020). Das kleine Einspluseins ist wiederum Voraussetzung, um im Zahlenraum bis 100 sicher rechnen zu können.

Damit bei allen Kindern ein systematischer Aufbau von Verstehensgrundlagen erfolgen kann, müssen individuelle Lernstände durch eine geeignete förderorientierte Diagnostik kontinuierlich erfasst werden (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen [MSB NRW], 2020, S. 10). Wenn beispielsweise ein Kind gegen Ende des 1. Schuljahres Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 nur zählend löst, muss diagnostiziert werden, warum das Kind zum Zählen als Lösungsweg greift, welche Ursachen dem zugrunde liegen und über welche Kompetenzen das Kind bereits verfügt, die als Ausgangspunkt für eine Ablösung vom zählenden Rechnen aufgegriffen werden können.

Eine anschließende Förderung orientiert sich am erfassten Lernstand und muss die notwendigen Verstehensgrundlagen aufbauen. Ein Üben von weiteren Aufgaben, die das Kind weiterhin zählend bearbeitet, oder das Nachahmen von vorgegebenen, unverstandenen Rechenprozeduren unterstützt den Verstehensaufbau hingegen nicht und wäre damit nicht zielführend.

Im Projekt **FÖDIMA** (**Förderorientierte Diagnostik im (inklusiven) mathematischen Anfangsunterricht**) (<https://pikas.dzlm.de/node/2556>) wurden – auf der Grundlage von Vorarbeiten der Projekte **PIKAS**, **Mahiko** (**Mathehilfe kompakt**), **GLUE** (**Gemeinsame Lernumgebungen entwickeln**), **ZebrA** (**Zusammenhänge erkennen und besprechen – rechnen ohne Abzählen**), **Mathe sicher können** und **Mathe inklusiv mit PIKAS** – zielgerichtete, informelle Materialien zur Diagnose und Förderung entwickelt, die sich kontinuierlich in den arithmetischen Anfangsunterricht integrieren lassen. In diesem Kontext sind *Standortbestimmungen* und

eine darauf abgestimmte *Kartei* mit diagnostischen Basisaufgaben und passenden Förderanregungen entstanden. Diese orientieren sich inhaltlich an den arithmetischen Basiskompetenzen, die unabdingbare Voraussetzung für das weitere Mathematiklernen sind. Das FÖDIMA-Material umfasst acht inhaltliche Bereiche aus dem arithmetischen Unterricht der Schuleingangsphase: *Zahlverständnis, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 sowie Zahlverständnis, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100, Multiplikation und Division.*

Materialien

Auf der Seite <https://pikas.dzlm.de/node/2558> finden sich alle FÖDIMA-Materialien:



- Standortbestimmungen inkl. weiterer Materialien zur Durchführung und Auswertung
- FÖDIMA-Kartei inkl. Materialien zur Durchführung
(Zahlenkarten, Aufgabenkarten, ...)

Sollten Lernende nicht über die vorschulischen Basiskompetenzen – im Lehrplan auch Vorläuferfähigkeiten genannt – verfügen, die für einen erfolgreichen Erwerb von Zahlverständnis notwendig sind, wird zusätzlich die Arbeit mit der Kartei *Mathematik am Schulanfang* (<https://pikas.dzlm.de/node/2315>) empfohlen.

Förderorientierte Diagnostik

Vorrangiges Ziel einer förderorientierten Diagnostik sollte es sein, die Denk- und Herangehensweisen der Lernenden prozessorientiert zu verstehen (Gaidoschik et al., 2021; Moser Opitz & Nührenbörger, 2023). So können die Kinder auf der Grundlage dieser diagnostischen Information beim Lernen unterstützt werden. Dazu sind angepasste Fördermaßnahmen notwendig, die fachlich angemessen an die individuell unterschiedlichen Lernstände anknüpfen (Götze et al., 2019, S. 19). Damit beides – gezielte Diagnostik und adaptive Förderung – in der komplexen Unterrichtssituation möglich wird, sollten Lehrkräfte über differenziertes Hintergrundwissen in Bezug auf das mathematische Denken der Lernenden verfügen (Götze et al., 2019, S. 21). Dies ist die Basis dafür, dass sich die Förderung nicht nur auf ein wiederholtes, wenig differenziert angelegtes Üben von Rechenfertigkeiten beschränkt, sondern dass die für nachhaltige Lernprozesse notwendige Verstehensorientierung im Vordergrund steht.



Abb. 1: Diagnose- und Förderkreislauf (<https://pikas-mi.dzlm.de/node/54>)

Eine aussagekräftige Diagnostik sollte geplant stattfinden: Es werden gezielt Aufgaben gestellt, die Lernstände und Denkprozesse der Lernenden sichtbar machen. Alleine durch zufällige Beobachtungen im Unterrichtsgeschehen lassen sich individuelle Schwierigkeiten und Potenziale der Lernenden nicht umfänglich feststellen. Das Projekt FÖDIMA hat es sich zum Ziel gesetzt, Lehrkräfte dabei zu unterstützen, fokussierte Diagnostik und die darauf aufbauende adaptive Förderung der Lernenden im Unterricht umzusetzen. Dabei werden die Fördermaßnahmen kontinuierlich an den Lernstand des Kindes angepasst (vgl. Abb.1).

Diagnostik im Unterrichtsalltag

Im Projekt FÖDIMA werden zwei miteinander kombinierbare Instrumente für die Diagnostik aufgegriffen, deren Einsatz im Folgenden erläutert wird: *Standortbestimmungen* und *diagnostische Basisaufgaben*.

Standortbestimmungen

„Standortbestimmungen geben den Lehrpersonen strukturierte Informationen über die Lernstände einzelner Kinder. Indem die individuellen Lernstände genauer beobachtet und besser verstanden werden, wird es leichter, den Unterricht daran zu orientieren und die Grundlage für eine individuelle Förderung zu schaffen“ (MSB NRW, 2020, S. 13).

Eine FÖDIMA-Standortbestimmung besteht aus mehreren informativen Aufgaben (vgl. Abb. 2), die zentrale Kompetenzbereiche des jeweiligen Themas, z. B. *Zahlverständnis im Zahlenraum bis 20* oder *Addition im Zahlenraum bis 100*, abdecken. Eine Standortbestimmung ist kein Abschlusstest, der bepunktet wird, bevor ohne das Ergreifen weiterer notwendiger Fördermaßnahmen zum nächsten Thema übergegangen wird. Im Sinne einer förderorientierten Diagnostik bietet sie der Lehrkraft stattdessen themenbezogene und fokussierte Informationen über individuelle Lernstände (Sundermann & Selter, 2013). Diese bilden die Grundlage

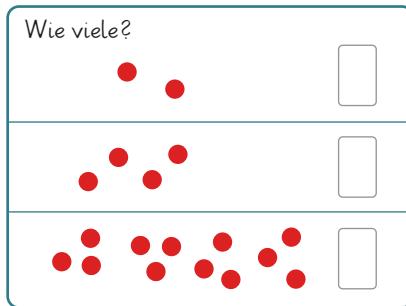


Abb.2: Aufgabe aus einer Standortbestimmung

für eine adaptive Förderung. Außerdem kann eine Standortbestimmung dazu beitragen, dass die Kinder in zunehmendem Maße ein informatives Feedback über ihr eigenes Lernen erhalten: „Was kann ich schon? Was habe ich gelernt? Was muss ich noch lernen? Wie kann ich es lernen?“ (<https://pikas.dzlm.de/node/808>).

Im Gegensatz zu mündlichen Standortbestimmungen lassen sich schriftliche Standortbestimmungen mit größeren Gruppen durchführen, und es kann bei der Analyse der Lösungen auf die dauerhaft vorliegenden schriftlichen Dokumente zurückgegriffen werden. Hierbei lassen sich im Wesentlichen vier Einsatzmöglichkeiten unterscheiden, die auch miteinander kombiniert werden können.

Wenn die Standortbestimmung oder Teile davon als *Eingangsstandortbestimmung* genutzt werden, um die Lernausgangslage zu einem anstehenden Thema zu erfassen und den nachfolgenden Unterricht entsprechend zu planen, sollte die Lehrkraft die Aufgaben ggf. so an den Leistungsstand ihrer Klasse anpassen, dass bei den Lernenden keine Frustrationen entstehen.

Es ist auch möglich, nach der ersten Begegnung mit einem Rahmenthema im Unterricht, bei der dann z. B. typische Darstellungsweisen schon besprochen wurden, eine solche Erhebung der jeweiligen Lernstände als *Zwischenstandortbestimmung* durchzuführen.

Wird eine Standortbestimmung im Anschluss an die unterrichtliche Behandlung eines Themas als *Abschlussstandortbestimmung* eingesetzt, so ist das Ziel, Lernstände und Lernfortschritte zu erheben, um auch weiterhin passgenau fördern zu können.

Denkbar ist auch, eine Standortbestimmung oder Teile davon mit einem gewissen zeitlichen Abstand als *Rückblicksstandortbestimmung* einzusetzen, beispielsweise eine Standortbestimmung zum *Zahlverständnis im Zahlenraum bis 20*, wenn das Thema *Zahlverständnis im Zahlenraum bis 100* ansteht, um festzustellen, ob die erforderlichen Vorkenntnisse vorliegen.

Bei der Planung und der Durchführung sollte darauf geachtet werden, dass die Aufgaben und die verwendeten Darstellungen den Lernenden bekannt bzw. verständlich sind. Insofern müssen die Aufgaben der Standortbestimmungen des FÖDIMA-Materials im Bedarfsfall entsprechend adaptiert werden. Zusätzlich können Erklärungen zur Bearbeitung der Aufgabe, etwa durch die Vorgabe von Beispielen, sinnvoll sein.

Die Lehrkraft kann auch nur eine Auswahl aus den Aufgaben zusammenstellen. Möglich ist es ebenfalls, dass die Formatierung angepasst wird, z. B. als Heftchen mit einer Aufgabe pro Seite oder als Aufgabenblatt. Zudem können die Aufgabenstellungen an die Lesefähigkeiten der Kinder angepasst oder ggf. vorgelesen werden. Unter Umständen kann es sinnvoll sein, die Standortbestimmung nicht mit sämtlichen, sondern nur mit ausgewählten Lernenden durchzuführen, bei denen der Bedarf für eine weitere Förderung vermutet wird.

Standortbestimmungen ...

- können mit der ganzen Klasse durchgeführt werden,
- geben Information über individuelle Lernstände,
- können die Breite des Inhalts in den Blick nehmen,
- liegen als schriftliche Ergebnisse für Analysen vor,
- geben den Kindern Feedback über ihr eigenes Lernen,
- können auch wiederholt, zu verschiedenen Zeitpunkten der Behandlung eines Themas, durchgeführt werden.

Diagnostische Basisaufgaben

Mit den *diagnostischen Basisaufgaben* auf den Karteikarten der FÖDIMA-Kartei (vgl. Abb. 3) können die Lernstände von ausgewählten Lernenden durch gezieltes Nachfragen fokussierter betrachtet werden, als dies mit einer Standortbestimmung möglich ist. Sie können an geeigneten Stellen mehrfach im Verlauf des Unterrichts zur Diagnostik eingesetzt werden. Dieser Einsatz sollte vorab gezielt geplant werden, d. h. die Lehrkraft überlegt sich bei der Vorbereitung des Unterrichts, in welchen Phasen und in welcher Art bestimmte diagnostische Aufgaben bei ausgewählten Lernenden eingesetzt werden sollen. Die unterrichtsintegrierte diagnostische Aufgabe ist folglich eng mit dem jeweils gewählten Unterrichtsthema verknüpft.

Anzahlen (quasi-)simultan erfassen

ZR bis 20

Zahlverständnis

5

Diagnostische Basisaufgabe

- Wie viele Plättchen (Finger) hast du gesehen?
- Wie hast du das so schnell gesehen? Erkläre.



Kompetenzen

Das Kind kann ...

- Anzahlen (quasi-)simultan erfassen.
- Strukturen zur Anzahlerfassung nutzen und erklären, wie sie zur Anzahlerfassung verwendet werden können.

Beobachtungen

- Ermittelt das Kind die richtige Anzahl?
- Wie erfasst das Kind Anzahlen bis 4 (zählend, simultan)?
- Wie erfasst das Kind Anzahlen größer als 4 (zählend, quasi-simultan)?
- Kann das Kind unterschiedliche Strukturen zur quasi-simultanen Anzahlerfassung nutzen (z. B. Kraft der 5/Kraft der 10, Würfelbilder)?

Gezielte Impulse

- Woher weißt du, dass das 7 (4, 3) sind?
- Bei Schwierigkeiten: Ich zeige es dir nochmal etwas länger.
- Andere Darstellungsformen: Ich zeige es dir mal mit Fingern statt mit Plättchen. Wie viele Finger siehst du hier?
- Ich zeige dir jetzt nochmal eine andere Zahl. Welche Zahl bzw. wie viele hast du gesehen? Woran hast du das so schnell erkannt?

Abb. 3: Diagnostische Basisaufgabe mit Beobachtungen und weiteren Impulsen

Auf der Karteikarte finden sich *Beobachtungen* zu der diagnostischen Basisaufgabe, die der Lehrkraft helfen können, den Fokus auf verschiedene Teilaufgaben oder verschiedene Teilkompetenzen und mögliche Schwierigkeiten der Kinder zu legen. Außerdem sind dort *gezielte Impulse* aufgeführt, aus denen die Lehrkraft die für die Situation geeigneten auswählen kann, um noch mehr über die Denkwege der Kinder zu erfahren. Dabei können Impulse zum Nachdenken anregen oder auch als Hilfe angeboten werden.

Die diagnostischen Basisaufgaben der Kartei werden in der Regel mündlich gestellt und von den Kindern bearbeitet. Dabei geht es nicht darum, die Kinder durch geschicktes Fragen möglichst schnell zur richtigen Lösung zu führen. Das Ziel ist vielmehr, ihre Denkweisen zu verstehen. Impulse und Erklärungen zur Förderung sollten sich natürlich anschließen, aber es ist hilfreich, in einem ersten Schritt damit zurückhaltend zu sein und zuzuhören (Götze et al., 2019, S. 167).

Es ist aber auch möglich, zu einem geeigneten Zeitpunkt – z. B. zu Beginn oder am Ende einer Einführungssituation, am Ende einer Unterrichtsstunde oder einer Lerneinheit – eine spezifische diagnostische Aufgabe schriftlich festhalten zu lassen (MSB NRW, 2020, S. 12).

Diagnostische Basisaufgaben ...

- können einzeln an geeigneten Stellen im Lernprozess eingesetzt werden,
- fokussieren den Blick auf Lernstände einzelner Lernender,
- haben einen engen Bezug zum jeweiligen Unterrichtsthema,
- werden mündlich gestellt und besprochen,
- fordern Kinder dazu auf, ihre Denkweisen darzustellen und ermöglichen so einen tieferen Einblick in diese.

Umsetzung im Unterricht

Die Standortbestimmung kann genutzt werden, um zu einem Thema, z. B. die *Zahlenraumerweiterung bis 100*, den Lernstand aller Kinder im Überblick zu erfassen. Eine Vorlage für die Auswertung mit einer Klassenübersicht und ein Planungsraster für den Unterricht finden Sie bei den Materialien. Da die Inhalte der Standortbestimmungen und der Kartei eng aufeinander abgestimmt sind, kann an dieser Stelle die passende diagnostische Basisaufgabe aus der Kartei für eine gezieltere Diagnostik genutzt werden, um zu erfassen, über welche Kompetenzen einzelne Kinder bereits verfügen. Auf dieser Grundlage kann der weitere Unterricht vorbereitet werden, indem die Lehrkraft für den Klassen- oder den Förderunterricht weitere individuelle Fördermaßnahmen plant und dabei den Einsatz von didaktischem Material, die adaptive Aufgabenanpassung und differenzierte Austauschphasen berücksichtigt (vgl. folgende Abschnitte). Während des Unterrichts werden weitere vorab ausgewählte diagnostische Basisaufgaben aus der Kartei eingesetzt, um die Lernprozesse ausgewählter oder auch aller Kinder zu erfassen.

Die FÖDIMA-App

Die FÖDIMA-App ist ein digitales Zusatzangebot und beinhaltet die Aufgaben der Standortbestimmungen und der Kartei sowie ausgewähltes Hintergrundwissen aus der Handreichung in modifizierter Form. Sie kann dabei unterstützen, zielgerichtete Diagnosegespräche zu führen (vgl. Abb. 4), um sie für eine diagnosegeleitete und passgenaue Förderung auszuwerten. Sie bietet zudem Möglichkeiten, Aufgaben für eine Standortbestimmung gezielt zusammenzustellen, diagnostische Gespräche mit Kindern aufzuzeichnen und alle Diagnosen und Auswertungen gesammelt zu speichern. In der App werden die Ergebnisse der Diagnostik (*Standortbestimmung und Diagnostische Basisaufgaben*) mit fachdidaktischem Hintergrundwissen verknüpft, um bei der Auswahl geeigneter Förderentscheidun-

gen zu begleiten und zu unterstützen. Die App kann im App Store (iOS) kostenlos heruntergeladen werden.



Abb. 4: Diagnoseansicht der FÖDIMA-App

Förderung im Unterrichtsaltag – im Klassenverband!

Auf der Grundlage der Diagnostik wird die Förderung durch die Lehrkraft geplant und, soweit möglich, in den Unterricht integriert. In den folgenden Abschnitten wird das FÖDIMA-Material zur Förderung zunächst vorgestellt. Außerdem werden übergeordnete Prinzipien dargestellt, die eine unterrichtsintegrierte Förderung ermöglichen sollen.

Förderanregungen in der Kartei

Die FÖDIMA-Kartei bietet passend zu den Kompetenzen der diagnostischen Basisaufgaben und den Aufgaben der Standortbestimmungen gezielte Möglichkeiten zur Förderung. Haben Kinder im Rahmen der jeweiligen Diagnoseaufgabe Unsicherheiten oder langfristig nicht tragfähige Vorstellungen gezeigt, finden sich auf der Rückseite der Karteikarten entsprechende Förderanregungen. Um passgenau fördern zu können, ist es aber ggf. erforderlich, weitere diagnostische Basisaufgaben hinzuzuziehen, um zu ermitteln, an welcher Stelle die Förderung ansetzen muss. Die Förderanregungen auf den Karteikarten bieten sich für unterschiedlich große Gruppen oder auch für eine Einzelförderung an. Das (quasi-) simultane Erfassen von Anzahlen (vgl. Abb. 5) kann beispielsweise ritualisiert mit der ganzen Klasse zu Unterrichtsbeginn durchgeführt werden.

Die angebotenen Förderanregungen haben meist einen engen Bezug zu den Beobachtungshinweisen zur diagnostischen Basisaufgabe auf der Vorderseite. Die Anregungen verstehen sich als Ideen, die adaptiert werden sollten, damit sie für eine zielgerichtete Förderung eingesetzt werden können. Weiterhin können auch Zahlenräume und z. B. Spielregeln flexibel an die Vorkenntnisse angepasst

Anzahlen (quasi-)simultan erfassen

ZR bis 20

Zahlverständnis

5

FÖRDERANREGUNGEN

Strukturen vergleichen

Die Lehrkraft gibt eine Zahl vor, die alle Kinder mit Plättchen (und ggf. 5er- und 10er-Streifen) so legen sollen, dass auf einen Blick erkannt werden kann, wie viele es sind. Gemeinsam werden verschiedene Darstellungen verglichen und besprochen (z. B. 5 Plättchen nebeneinander und 2 mit etwas Abstand daneben, eine Würfel-Fünf und eine Würfel-Zwei).

Dann arbeiten die Kinder zu zweit und erhalten symbolische Zahlenkarten. Die erste wird aufgedeckt und beide Kinder stellen die Zahl mit Plättchen dar. Dann beschreiben und vergleichen sie die Darstellungen.

- Wie hast du die Zahl gelegt?
- Was ist gleich bzw. verschieden?
- Wie kann ich schnell sehen, wie viele es sind?



Spiel: Schnelles Sehen-Glücksspiel

Die Kinder erhalten ein 3x3-Feld mit unterschiedlichen Zahlen zwischen 0 und 20 oder füllen es selbst aus. Die Lehrkraft präsentiert kurz eine Anzahl (z. B. Plättchen im 20er-Feld) und Kinder, die die Zahl in ihrem

Feld stehen haben, streichen diese durch. Wenn ein Kind drei Zahlen in einer Spalte, Zeile oder Diagonale durchgestrichen hat, ruft es „Fertig“. Gemeinsam wird bei jeder Zahl über die Struktur und eine geschickte Anzahlerfassung gesprochen, um bei der nächsten Zahl schneller sein zu können.

- Wie konntest du schnell erkennen, wie viele es sind?
- Wer hat es noch anders gesehen?

Strukturen nutzen

Die Kinder sollen eine vorgegebene Anzahl an Plättchen (verdeckt) so anordnen, dass ein anderes Kind die Anzahl anschließend auf einen Blick erkennen kann. Einem anderen Kind wird die Zahldarstellung dann kurz gezeigt. Es nennt die Anzahl, beschreibt die Anordnung und begründet, warum es die Anzahl schnell erfassen konnte. Dann wechseln die Kinder.



Abb. 5: Förderanregungen zur Karteikarte aus Abb. 3

werden. Abbildung 5 zeigt beispielsweise die Förderanregungen zur (quasi-)simultanen Anzahlerfassung. Wenn Kinder noch keine Strukturen erkennen, kann es z. B. erforderlich sein, die eigenen Darstellungen der Kinder diagnostisch zu betrachten (*Karteikarte 4, Anzahlen zeichnen oder legen*) und ggf. hier mit der Förderung anzusetzen.

Diagnosegeleitete Förderung

Förderung sollte diagnosegeleitet, verstehensorientiert und kommunikationsfördernd angelegt sein (Selter et al., 2014). Diagnosegeleitet bedeutet, dass eine zielgerichtete Diagnostik die Grundlage für weitere Förderentscheidungen darstellen sollte. Es wird ermittelt, an welchem Punkt des Lernpfades das Kind steht, um daran anknüpfend zu fördern. Dabei geht es nicht in erster Linie um die Automatisierung, sondern zunächst um den Aufbau von Verständnis (verstehensorientiert), weil „gerade der Erwerb von Einsichten in grundlegende Strukturen der Arithmetik [...] für die Ablösung vom zählenden Rechnen zentral ist“ (Gaidoschik et al., 2021, S. 10).

Wichtig ist eine intensive Begleitung, die Bezüge zu bereits Gelerntem herstellt und die Reflexion anregt – durch die Lehrkraft, aber auch durch den Austausch mit anderen Kindern (kommunikationsfördernd).

Die Automatisierung oder die Sicherung der Geläufigkeit erfolgen im Anschluss, auch das ist Teil der Förderung: „Verstandene Zusammenhänge müssen hinreichend oft in produktiven Übungsformaten angewendet werden, um mit der nötigen Sicherheit, Schnelligkeit und Leichtigkeit abgerufen werden zu können“ (Gaidoschik et al., 2021, S. 11). Dies dient dem Aufbau der arithmetischen Basiskompetenzen (vgl. auch Orientierungsrahmen arithmetische Basiskompetenzen, S.18/19).

Didaktische Materialien einsetzen

Wichtig ist es, sich bei den Darstellungsmitteln sowohl für die Diagnostik als auch für die Förderung auf wenige zu beschränken, die über die Schuljahre hinweg anschlussfähig sind, indem sie die wesentlichen Strukturen veranschaulichen (Plättchen, 100er-Feld, 5er- und 10er-Streifen; lineare Darstellungen; Wittmann & Müller, 2018; Nührenbörger 2022).

Diese Darstellungsmittel sind Arbeits- und Veranschaulichungsmittel. Sie werden als Verstehenshilfe und auch als Kommunikationsmedium genutzt, d. h. sie sind wesentlich für die Diagnostik. Außerdem dienen sie in der Förderung dazu, Handeln in der Vorstellung zu ermöglichen (Gaidoschik et al., 2021, S. 11). Im Rahmen des Projekts FÖDIMA wurden zudem Zahlen- und Aufgabenkarten entwickelt. Diese können vor allem für die Darstellungsvernetzung und das Thematisieren von Aufgabenbeziehungen genutzt werden. Alle in der FÖDIMA-Kartei verwendeten Darstellungsmittel sowie Zahlen- und Aufgabenkarten können heruntergeladen und ausgedruckt werden (siehe Materialien, S. 5).

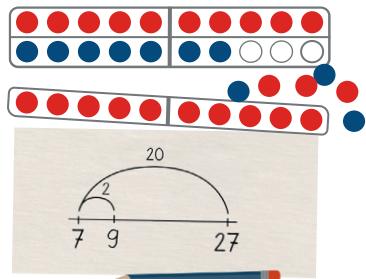


Abb. 6: Anschlussfähige Darstellungsmittel

Darstellungsvernetzung nutzen

Die kontinuierliche Vernetzung der Darstellungsformen (Handlung, Bild, Sprache, Symbole (Mathesprache)) ist ein wesentliches Element verstehensorientierten Unterrichts, das es Kindern ermöglicht, Vorstellungen aufzubauen (MSB NRW, 2020). Dazu müssen die Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen immer wieder explizit hergestellt und im Unterricht durchgehend genutzt werden,



Abb. 7: Mathe in den Kopf (<https://pikas.dzlm.de/node/1073>)

indem die Phasen des Vierphasenmodells (vgl. Abb. 7) flexibel und auch parallel berücksichtigt werden (Wartha & Schulz, 2012). Der Doppelpfeil soll zum Ausdruck bringen, dass es sich dabei nicht um eine Einbahnstraße handelt, sondern immer wieder auch (Rück-)Bezüge zu anderen Phasen hergestellt werden sollten. Die verschiedenen Darstellungsformen helfen aber auch,

- die Diagnostik zu strukturieren: Inwiefern gelingt den Kindern die Vernetzung zwischen den Darstellungsformen? Inwieweit haben sie „Vorstellungen im Kopf“ entwickelt?
- die individuelle Förderung umzusetzen: Kinder werden aufgefordert, ihre Handlungen am didaktischen Material zu versprachlichen, damit sie sich diese im weiteren Verlauf im Kopf vorstellen können und Strukturen immer besser nutzen können (vgl. Abb. 7).
- Aufgaben an den Lernstand der Kinder anzupassen (vgl. *Aufgaben adaptieren*).
- den Austausch untereinander (mit anderen Kindern oder im Plenum) zu ermöglichen (vgl. *Den Austausch fördern und unterstützen*).

Bei den FÖDIMA-Materialien ist die Darstellungsvernetzung in diesem Sinne immer mitgedacht und sollte entsprechend einbezogen werden.

Aufgaben adaptieren

Um eine angemessene Förderung im Klassenverband umsetzen zu können, ist es oft notwendig, Aufgabenstellungen zu adaptieren. Damit ist nicht vorrangig gemeint, unterschiedliche Aufgaben für die verschiedenen Lernstände zur Verfügung zu stellen (was sicherlich auch an einzelnen Stellen erforderlich ist), sondern durch das Nutzen von Analogien und vor allem durch den gezielten Rückgriff auf die Darstellungsvernetzung allen Kindern einen Zugang zur Aufgabe zu ermöglichen. So kann es beispielsweise beim Arbeiten mit den Zerlegungen der Zehn (vgl. Abb. 8) hilfreich sein, den Kindern die Zerlegungen an einem 10er-Streifen nahezulegen, indem dieser auf dem entsprechenden Arbeitsblatt mit abgebildet ist oder jedem Kind als Material zur Verfügung steht. Die Zerlegungen werden auch sprachlich begleitet, indem die Kinder zu zweit arbeiten und sich ihre Zerlegungen beschreiben. Kinder, die die Zerlegungen bereits im Kopf beherrschen, können den 10er-Streifen abdecken, werden aber immer angeregt, sich die Dar-

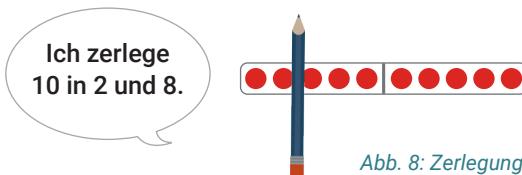


Abb. 8: Zerlegungen als Handlung am 10er-Streifen

stellung im Kopf vorzustellen. Die Aufgabe kann auch dahingehend adaptiert werden, dass Zerlegungen auf symbolischer Ebene und Zerlegungen an 10er-Streifen einander zugeordnet werden, dass sie also nicht selbst gefunden werden müssen (vgl. Abb. 9).

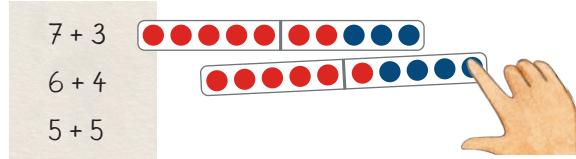


Abb. 9: Zerlegungen als Zuordnungsaufgabe

Den Austausch fördern und unterstützen

Individuelle Förderung kann in der Regel nicht bedeuten, dass Kinder in Einzelsituationen gefördert werden. Lernen im Diskurs ist bedeutsam für den individuellen Lernfortschritt (Gaidoschik et al., 2021). Damit dies im Unterricht umsetzbar ist, müssen die Aufgaben so gestellt sein, dass sie einen Austausch tatsächlich erfordern, also über den Ergebnisvergleich hinausgehen.

Darüber hinaus müssen die Kinder aufgrund ihres Lernstandes auch in der Lage sein, einander zu verstehen und sich einander verständlich zu machen. Dazu hilft es, sich erneut die unterschiedlichen Darstellungsformen zunutze zu machen. Indem beispielsweise eine Plättchendarstellung einbezogen wird und die Kinder immer aufgefordert werden, diese für Erklärungen zu nutzen, kann eine gemeinsame Gesprächsbasis geschaffen werden. Auch sprachliche Unterstützungen können hilfreich sein. Weitere Hinweise und praktische Beispiele dazu können der Handreichung *Mathematik sprachbildend unterrichten* (MSB NRW, im Erscheinen) entnommen werden.

So kann beispielsweise ein leistungsheterogenes Tandem zunächst in Einzelarbeit jeweils ein Aufgabenpäckchen bearbeiten, wobei die Kinder mit der (strukturell) einfachsten Aufgabe beginnen sollen (vgl. Abb. 10).

Beginne mit der
einfachsten Aufgabe. Rechne
aus. Vergleicht eure
Aufgaben.

13 - 6 =	43 - 6 =
13 - 7 =	43 - 7 =
13 - 8 =	43 - 8 =
13 - 9 =	43 - 9 =
13 - 10 =	43 - 10 =

Abb. 10: Aufgabenstellung für ein leistungsheterogenes Tandem (vgl. Häsel-Weide et al. 2013)

Anschließend sind die Kinder aufgefordert, ihre Aufgabenpäckchen miteinander zu vergleichen. Ziel ist es, dass sie die Analogien erkennen und nutzen.

Möglicherweise gelingt es den Lernenden jedoch nicht, über die Päckchen in den Austausch zu kommen, weil die Analogien vor allem für das schwächere Kind nicht erkennbar sind. Eine leichte Adaption der Aufgabenstellung unter Einbezug der Darstellungsvernetzung (vgl. Abb. 11) kann dann einen Zugang zu der Struktur ermöglichen, indem die Kinder über die Darstellungen sprechen können. Die Zehnerstruktur ist in beiden Darstellungen erkennbar, Analogien können am Material verdeutlicht werden. Zusätzlich ermöglicht der Einbezug der bildlichen Darstellung am didaktischen Material auch eine Einordnung, was mit „einfachste Aufgabe“ gemeint ist: Es geht darum, die dekadische Struktur für das geschickte Rechnen zu nutzen.

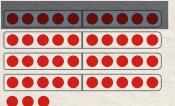
$13 - 6 =$	Zu welcher Aufgabe	$43 - 6 =$	Zu welcher Aufgabe
$13 - 7 =$	passt diese Darstellung?	$43 - 7 =$	passt diese Darstellung?
$13 - 8 =$	Überlege: Was verändert sich bei den anderen Aufgaben?	$43 - 8 =$	Überlege: Was verändert sich bei den anderen Aufgaben?
$13 - 9 =$		$43 - 9 =$	
$13 - 10 =$		$43 - 10 =$	
			

Abb. 11: Aufgabenadaption durch Darstellungsvernetzung

In den folgenden Abschnitten werden die didaktischen Grundlagen zu den einzelnen inhaltlichen Bereichen des arithmetischen Anfangsunterrichts kurz dargestellt. Dabei wird der konkrete Einsatz der FÖDIMA-Materialien im Unterricht jeweils durch ein praktisches Beispiel veranschaulicht.

Anfangsunterricht Mathematik

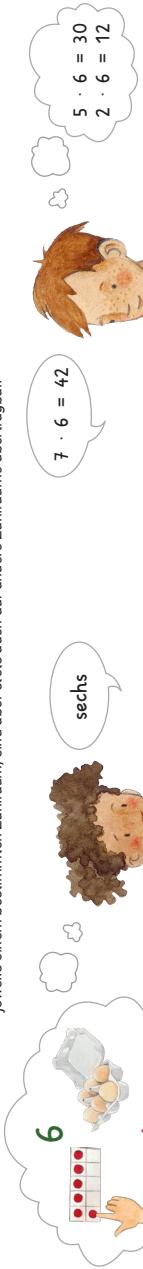
In der vorliegenden Handreichung wird das fachdidaktische Hintergrundwissen der arithmetischen Basiskompetenzen knapp dargestellt. Der Orientierungsrahmen Arithmetische Basiskompetenzen (vgl. Abb. S.18/19) bietet einen Überblick über die aufzubauenden Verstehensgrundlagen und Grundfertigkeiten. Ausführlichere Informationen können den Handreichungen *Rechenschwierigkeiten vermeiden* (MSB NRW, 2020) und *Mathematik gemeinsam lernen* (MSB NRW, 2022) sowie den Grundlagenvideos des Projekts Mahiko (<https://mahiko.dzlm.de>) entnommen werden.

Orientierungsrahmen

Arithmetische Basiskompetenzen

Verstehensgrundlagen und Grundfertigkeiten für erfolgreiches Mathematiklernen in der Primarstufe und darüber hinaus

Im Folgenden werden arithmetische Basiskompetenzen beschrieben, die die Lernenden im Verlauf der Primarstufe erwerben können. Die Beispiele entstammen zwar jeweils einem bestimmten Zahlraum, sind aber stets auch auf andere Zahlräume übertragbar.



Zahlverständnis

GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN

Lernende erfassen Zahlen sowohl kardinal (als Anzahlen/Mengen) als auch ordinal (als Positionen in einer Reihe). Es werden insbesondere flächige (z. B. Punktekfeld) und lineare Darstellungen (z. B. Zahlstrahl oder Rechenstrich) genutzt und miteinander vernetzt, die die Strukturen des Zahnsystems verkörpern.



DARSTELLUNGEN VERNETZEN

Lernende vernetzen Darstellungen von Zahlen (Handlung, Bild, Sprache, Matthesprache) kontinuierlich miteinander, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten. Zahlen werden durch Materialien und Rechenstrichen genutzt und miteinander vernetzt, die die Strukturen des Zahnsystems verkörpern.

Zahlverständnis

Schnelles Kopfrechnen

BASISFAKTOREN ABRUFEN

Lernende rufen Basisfaktoren sicher ab. Dabei steht nicht nur die Automatisierung von einzelnen Aufgaben im Vordergrund, sondern insbesondere auch die Steigerung der Geläufigkeit bei der Nutzung von Ableitungsstrategien (Basisfakten). Es werden schwierige aus einfachen und Eindurchscheins (Basisfakten) abgeleitet. Sie werden mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht und ihre Nutzung wird sprachlich begleitet.



Operationsverständnis

GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN

Lernende ordnen Aufgaben der vier



AUFGABENBEZIEHUNGEN NUTZEN

Lernende nutzen Beziehungen zwischen



Zahlenrechnen

RECHENSTRATEGIEN VERWENDEN

Lernende verwenden Rechenstra-



SICHER RECHNEN

Lernende bewältigen bei geigne-

Grundrechenarten und (Alltags-) Bedeutungen – wie hinzufügen oder wegnehmen – einander zu. Sie beschreiben innere Bilder von Rechenoperationen. Zur Ausbildung von Grundvorstellungen werden ineara und flächige Darstellungen genutzt, die auch für den weiterführenden Mathematikunterricht bedeutsam sind.

von Operationen (Handlung, Bild, Sprache, Matthesprache) kontinuierlich miteinander; indem sie diese einzelnen Aufgaben/Rechenoperatoren für das Erlernen von Ableitungs- bzw. Rechenstrategien. Grundlagen bilden hier Rechengesetze: wie das Kommutativgesetz ($2 + 4 = 4 + 2$), das Assoziativgesetz ($(3 + 5) = 3 + (2 + 3)$) oder das Distributivgesetz ($6 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 1 \cdot 8$) ebenso wie die Zusammenhänge zur jeweiligen Umkehroperation.



Stellenwertverständnis

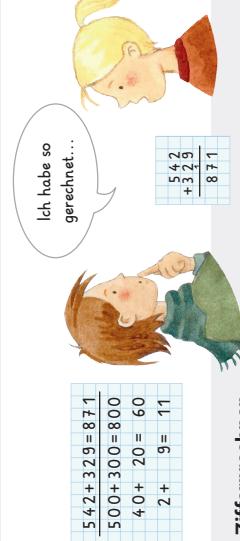
VORSTELLUNGEN BESITZEN

Lernende fassen jeweils zehn Objekte zu einem Bündel höherer Ordnung zusammen (bündeln) und machen diese Operation rückgängig (entbündeln). Dabei nutzen sie das Prinzip des Zahlenwerts (**zwei Ziffern**) und das Prinzip des Stellenwerts (**zwei Zehner**). Zum Verständnis dieser Konventionen ist die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (Teil-Ganzen-Beziehung) wichtig.

STRUKTUREN NUTZEN

Lernende nutzen Strukturen von (vorrangig flächigen) Darstellungen für das schnelle Sehen durch quasi-simultane Anzahl erfassung größerer Anzahlen (6 Zehner und 7 Einer). Tätigkeiten des schnellen Sehens vertiefen das Verständnis für das Dezimalsystem: Gebundene Einheiten wie Zehner oder Hunderte werden nicht einzeln abgezählt, sondern können als Einheit gedacht werden.

tegieren für mündliches oder halbschriftliches Rechnen und können ihre Vorgehensweisen erläutern. Die Rechenstrategien werden auf der Grundlage eines tragfähigen Operationsverständnisses mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht. Dabei erfolgt kein vorfrühes Abkopeln und ausschließlich Verwendung des Symbolischen.

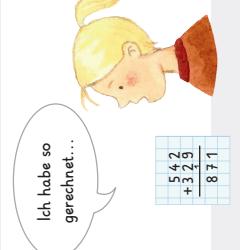


Ziffernrechnen

ALGORITHMEN NACHVOLZIEHEN

Lernende verwenden die Algorithmen des schriftlichen Rechnens und kennen ihre Vorgehensweisen erläutern. Da Fehler häufig auf Verständnisdefiziten beruhen, wird im Unterricht gemeinsam über die einzelnen Schritte gesprochen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede der halbschriftlichen Strategie (Schriftweise / Ausnahme bei der Division; Schriftweise) und des Algorithmus werden besprochen.

ten Aufgaben enthalten weiterführende Literaturhinweise. PIKAS-Team (2020) enthält zudem Anregungen zur unterrichtlichen Umsetzung. Hinweise zu Diagnose und Förderung finden sich unter <https://pikas.dzim.de/node/1660>. Ausführliche Hintergrundinformationen und zahlreiche Übungsanregungen bietet <https://mathik.dzim.de/>.



ALGORITHMEN VERSTÄNDIG NUTZEN
Lernende bearbeiten Aufgaben zum schriftlichen Rechnen – mit Ausnahme von Aufgaben zur schriftlichen Division – sicher. Die Entwicklung eines Aufgabenblicks trägt dazu bei, dass das schriftliche Rechnen nicht unverstanden ausgeführt, sondern flexibel angewendet wird.

Hier gibt es mehr Infos und Anregungen zur Förderung mathematischer Basiskompetenzen: <https://pikas.dzim.de/node/2410>



tu technische universität
dortmund



Literatur:
SMWK (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern! Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Standigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SMWK)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/KMK/SMWK/2022/SMWK-2022-Gutachten_Grundschule.pdf
PIKAS-Team (2020). *Rechenschwierigkeiten vermeiden. Hintergrundwissen und Unterrichtsanregungen für die Schuleingangsphase*. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). <https://pikas.dzim.de/node/1219>

2 Zahlverständnis im Zahlenraum bis 20

Zentrale Kompetenzen

Für ein tragfähiges Zahlverständnis müssen die Kinder...

- **Grundvorstellungen besitzen**, also...
 - verstehen, was Zahlen alles bedeuten können und wie sie sich denken lassen,
 - die Zahlwortreihe sicher aufsagen können (auch rückwärts oder von größeren Zahlen beginnend, in Schritten), Größer-Kleiner-Beziehungen beschreiben und erklären,
 - Anzahlen simultan bzw. quasi-simultan erfassen können.
- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Zahlen identifizieren.
- **Zahlbeziehungen nutzen**, also...
 - sich an der 20er-Reihe und am 20er-Feld orientieren,
 - Zahlen zerlegen und zusammensetzen (Teile-Ganzes-Beziehungen),
 - die Fünfer- und Verdopplungsstruktur ebenso wie Nachbarschaftsbeziehungen beschreiben, darstellen und nutzen.

Grundvorstellungen besitzen

Für den Erwerb tragfähiger Grundvorstellungen sind der Aufbau und die Festigung eines *kardinalen* und *ordinalen* Zahlverständnisses von Bedeutung.

Ein *kardinale*s Zahlverständnis meint, dass Anzahlen zunächst gruppenweise, später auch in flächigen Darstellungen (z. B. im Punktefeld) erfasst werden (vgl. Abb. 12).



Abb. 12: „Sieben Plättchen“: Zahl als Mengenangabe

Bei kleineren Mengen (bis zu vier) können Anzahlen in der Regel noch „auf einen Blick“ erfasst werden (*simultan*). Bei größeren Mengen gelingt dies nur dann, wenn die Menge als Zusammensetzung unterschiedlicher Teilmengen gesehen werden kann (*quasi-simultan*).



Abb. 13: „Das dritte Kind“: Zahl als Position in der Reihe

Die Zahlwortreihe gehört zur *ordinalen* Zahlvorstellung, dieser Zahlaspekt bezieht sich also auf eine lineare Vorstellung von Zahlen (vgl. Abb. 13). Auch hier sind die Beziehungen der Zahlen zueinander wesentlich.



- 1*, *Zahlwortreihe aufsagen*
- 2, *Abzählen*
- 5, *Anzahlen (quasi-)simultan erfassen*
- 6, *Ordnungszahlen nutzen*

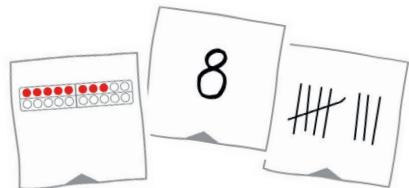


Abb. 14: Verschiedene Darstellungsformen

Darstellungen vernetzen

Zahlen lassen sich auf unterschiedliche Weise darstellen: durch Handlungen mit

Material, durch Bilder, Sprache oder Symbole (Mathesprache). Eine Vernetzung dieser Darstellungsformen durch gezieltes und bewusstes Wechseln zwischen den Formen ist die Verstehensgrundlage für die Nutzung der mathematischen Symbole. Zahlen werden mit Plättchen in unterschiedlichen Zerlegungen dargestellt, und es wird das schnelle Erfassen der Darstellungen auf einen Blick geübt. Dabei spielt die Kraft der Fünf eine wichtige Rolle, die am 10er- und 20er-Feld ebenso sichtbar ist wie in Fingerbildern und der 20er-Reihe.

Darauf baut die Darstellung des Zehners als zwei Fünfer auf. Im Zahlenraum bis 20 müssen die Kinder grundlegende Einsichten in die Struktur des Zahlaufbaus erwerben, die im Verlauf der Grundschulzeit auf größere Zahlenräume übertragen werden.



- 3, *Darstellungen vernetzen*
- 4, *Anzahlen zeichnen oder legen*

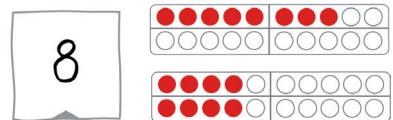


Abb. 15: Strukturierte Plättchendarstellungen im Zwanzigerfeld

* Die Zahlen verweisen auf die zugehörigen Karten aus der FÖDIMA-Kartei.

Zahlbeziehungen nutzen

(An-)Zahlen können unterschiedlich zerlegt werden. Das Zerlegen von Zahlen beruht auf dem Teile-Ganzes-Konzept: Eine Menge (und somit jede Zahl) lässt sich in kleinere Teilmengen (z. B. fünf und eins) zerlegen bzw. solche Teilmengen lassen sich auch wieder zu einem Ganzen (sechs) zusammensetzen. Das automatisierte Zerlegen aller Zahlen bis zehn gilt als Voraussetzung für das flexible, nicht-zählende Rechnen. Im Verlauf der Grundschulzeit kommt dann dem stellengerechten Zerlegen von Zahlen eine zentrale Bedeutung zu.

Ein weiterer Aspekt ist das Vergleichen von Zahlen, um sie zueinander in Beziehung zu setzen. Sie können dabei als Anzahlen („6 ist kleiner, weil 6 einer weniger ist als 7“), aber auch als Positionen („6 ist kleiner, weil 6 auf dem Zahlenstrahl vor 7 liegt“) verstanden und miteinander verglichen werden.



- 7, Zahlenreihe
- 8, Anzahlen vergleichen
- 9, Zahlen zerlegen



Abb. 16: Zerlegen mit dem Zerlegefäch

Standortbestimmung*

Die Aufgaben der Standortbestimmung sollten gemeinsam bearbeitet werden, da die Kinder die Aufgabenstellungen noch nicht lesen können. Das Aufsagen der Zahlwortreihe ist in der Standortbestimmung nicht als Aufgabe enthalten, da es nur mündlich festgestellt werden kann.

Um einen Einblick in die Fähigkeiten der Kinder zur *quasi-simultanen Anzahlerfassung* zu erhalten, sollte eine entsprechende Darstellung (vgl. Abb. 17) z. B. an der (digitalen) Tafel vorbereitet werden, die dann kurz gezeigt wird. Die Kinder notieren oder zeichnen die erfasste Anzahl in der Standortbestimmung.

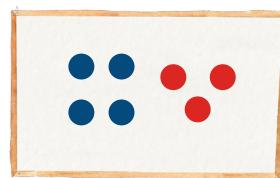


Abb. 17: Tafeldarstellung zur quasi-simultanen Anzahlerfassung

* Die vollständige, bearbeitbare Standortbestimmung steht auf der Website zur Verfügung. An dieser Stelle finden sich nur zusätzliche Anmerkungen, die für die Durchführung wichtig sind.

Aus der Praxis

Lisa bearbeitet die Aufgabe *Anzahlen zeichnen/legen* der SOB wie folgt:

8



8



Anhand der schriftlichen Lösung ist nicht klar ersichtlich, ob Lisa nur diese eine Möglichkeit kennt, die Zahl acht im 20er-Feld darzustellen. Um darüber hinaus weitere Einblicke zu erhalten, wählt die Lehrkraft die passende diagnostische Basisaufgabe der FÖDIMA-Karteikarte 4, *Anzahlen zeichnen oder legen*, aus: „Lege 7 Plättchen in das 20er-Feld.“ Lisa gelingt es, die sieben Plättchen im 20er-Feld durch einen 5er-Streifen und zwei Plättchen darzustellen. Sie nutzt dabei die Struktur des 5er-Streifens.



Mithilfe des Impulses: „Kannst du die 7 auch anders legen?“ möchte die Lehrkraft erfassen, inwiefern Lisa Darstellungen im 20er-Feld flexibel deuten kann. Nachdem Lisa selbstständig keine andere Darstellung finden kann, legt die Lehrkraft sieben Plättchen als Blockdarstellung (in zwei Reihen untereinander) und gibt den Impuls: „Kann man 7 auch so legen?“. Dadurch gelingt es der Lehrkraft, zu erfassen, dass Lisa die dargestellte Zahl von der Position und nicht von der Anzahl der Plättchen abhängig macht. Dies deutet auf eine eher ordinale Zahlvorstellung hin. Diese Vermutung sollte durch die Darstellung weiterer Zahlen im 20er-Feld überprüft werden.

Da Lisa eine vorrangig ordinale Zahlvorstellung zeigt, wird in der Förderung an den flexiblen Darstellungen von Anzahlen im 20er-Feld gearbeitet. Dazu wiederholt die Lehrkraft mit ihr zunächst die Strukturen des 20er-Feldes. Im Klassenunterricht achtet sie darauf, flexible Interpretationen der Darstellungen stärker zu berücksichtigen und Lisa hier öfter einzubeziehen: „Wie kann man es noch legen?“ Außerdem macht Lisa regelmäßige Übungen zum schnellen Erfassen von Anzahlen mit einem anderen Kind, um die kardinale Anzahlerfassung zu stärken.

3 Zahlverständnis im Zahlenraum bis 100

Zentrale Kompetenzen

Für ein tragfähiges Zahlverständnis müssen die Kinder...

- **Vorstellungen besitzen**, also...

- verstehen, was Stellenwerte bedeuten und wie sie sich denken lassen (Bündeln und Entbündeln),
- Zahlen lesen und darstellen,
- strukturierte Zahldarstellungen (am 100er-Feld bzw. mit 10er-Streifen und Plättchen) schnell erfassen,
- die Zahlwortreihe sicher aufsagen (auch in Schritten, von anderen Zahlen beginnend, rückwärts).

- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Zahlen identifizieren.

- **Zahlbeziehungen nutzen**, also...

- zum nächsten Zehner bzw. Hunderter ergänzen,
- Zahlen am Zahlenstrahl bzw. Rechenstrich einordnen.

Vorstellungen besitzen

Zu den bereits im Zahlenraum bis 20 genannten Aspekten zum Zahlverständnis kommt im Zahlenraum bis 100 das *Stellenwertverständnis* hinzu. Dieses wird durch die Strukturierung in Zehner und Einer natürlich schon im Zahlenraum bis 20 grundgelegt, gewinnt nun aber zunehmend an Bedeutung. Von einem sicheren Stellenwertverständnis kann erst im größeren Zahlenraum gesprochen werden, da erst hier das Prinzip des fortgesetzten Bündelns und das Prinzip des Zahlen- und des Stellenwerts wirklich deutlich werden. Um Stellenwerte zu verstehen, müssen die Kinder wissen, dass Objekte immer zu Zehnerbündeln (Zehner, Hunderter, Tausender usw.) zusammengefasst werden. Die Position einer Ziffer gibt an, welche Bündelungseinheit gemeint ist. Die Ziffer gibt an, wie viele Bündel es sind.



- 10, *Zahlwortreihe aufsagen*
- 11, *Zahlen notieren*
- 12, *Zehner und Einer*
- 13, *Anzahlen strukturieren*
- 14, *Strukturierte Anzahlen erfassen*

Darstellungen vernetzen

Für das Zahlverständnis im Zahlenraum bis 100 ist insbesondere die Thematisierung und Vernetzung verschiedener Zehner-/Einerdarstellungen (vgl. Abb. 18) im Hinblick auf das stellengerechte Schreiben und Deuten von Anzahlen zentral. Im Deutschen ergibt sich die Herausforderung der inversen Sprechweise von Zahlwörtern. Kinder sollen dennoch erst den Zehner und dann den Einer schreiben. Hier ist die gezielte Vernetzung von Zahlwort, Schreibweise und Zahldarstellung mit Material unter Nutzung der Zehnerstruktur wichtig.



- 15, Darstellungen vernetzen

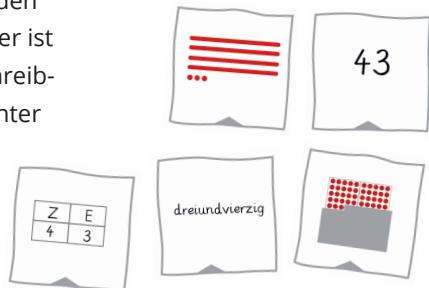


Abb. 18: Verschiedene Darstellungsformen

Zahlbeziehungen nutzen

Zum Darstellen und Erkennen von Anzahlen am 100er-Feld sowie mit 10er-Streifen und Plättchen müssen Strukturen gemeinsam erarbeitet und genutzt werden. Darüber hinaus ist auch im Zahlenraum bis 100 die bewusste Auseinandersetzung mit Zahlbeziehungen wichtig. Die Zahl 52 ist beispielsweise der Vorgänger von 53 und Nachfolger von 51, die Nachbarzehner sind 50 und 60. Des Weiteren ist 52 das Doppelte von 26 und zwei mehr als 50. 52 lässt sich in fünf Zehner und zwei Einer zerlegen und liegt in der Nähe von 50.



- 16, Zahlen am Zahlenstrahl
- 17, Zahlen am Rechenstrich
- 18, Ergänzen bis 100

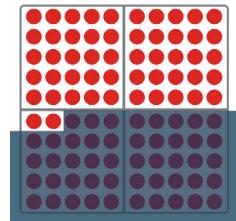


Abb. 19: Zahldarstellung durch Abdecken am 100er-Feld

Standortbestimmung

Bei der Aufgabe *Zahlen notieren* diktiert die Lehrkraft den Kindern Zahlen, die sie aufschreiben. Bei der Aufgabe *Strukturierte Anzahlen erfassen* wird eine Darstellung an der (digitalen) Tafel kurz eingeblendet.

Aus der Praxis

Die Lehrkraft hat schon öfter bemerkt, dass Nils Schwierigkeiten beim Schreiben von Zahlen hat. Ausgehend davon führt die Lehrkraft die diagnostische Basisaufgabe auf *Karteikarte 11, Zahlen notieren*, durch. Tatsächlich zeigt sich, dass Nils Zehner und Einer oft vertauscht und unsicher in der Zuordnung ist. Außerdem fällt der Lehrkraft auf, dass Nils bei den Zahlen die Einer zuerst schreibt – er schreibt also invers.

Die Lehrkraft macht sich mit den Förderanregungen vertraut und bereitet für die nächste Stunde die Übung *Zahlen sprechen, hören, schreiben* vor. Da sich die Aufgabe gut für die Arbeit zu zweit eignet, erklärt die Lehrkraft Esra und Nils die folgenden Schritte. Esra sagt eine Zahl und spricht sie dabei betont deutlich aus: „drei-und-zwan-zig“. Nils soll beschreiben, wie viele Einer und Zehner er hört („Ich höre 3 Einer und 2 Zehner“) und die Zahl anschließend mit 10er-Streifen und Plättchen legen. Danach legen sie die Zahl mit den Zahlenbaukarten und schieben diese übereinander. Nun schreibt Nils die Zahl auf ein Blatt und spricht dazu: „2 Zehner und 3 Einer, also 23“.



Wenn es Nils gut gelingt, die gehörten Zahlen mit Material zu legen, soll er Esra nur noch beschreiben, was sie mit den 10er-Streifen und den Plättchen legen soll und welche Zahlenbaukarten sie benötigt. In einem nächsten Schritt legt sie hinter einem Sichtschutz. Wichtig ist, dass Nils immer am Schluss die Zahl noch einmal schreibt und spricht.

Ziel ist es, dass er sich bei jedem Schreiben von Zahlen bewusst macht, wie viele Zeh-

ner und Einer er hört, und sich im Kopf die entsprechende Darstellung vorstellt. Bei Schwierigkeiten wird er aufgefordert, sein Bild im Kopf zu beschreiben („Wie viele Zehner und Einer hörst du? Wie sieht die Zahl mit Zehnern und Einern aus?“) bzw. auf die entsprechenden Darstellungsmittel zurückzugreifen (vgl. MahikoKids-Lernvideo *Zahlen hören, sprechen und schreiben*, <https://mahiko.dzlm.de/node/321>).

4 Addition im Zahlenraum bis 20

Zentrale Kompetenzen

Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- **Grundvorstellungen zur Addition besitzen**, also verstehen, was „plus“ bedeutet.
- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Aufgaben identifizieren.
- **einfache Aufgaben rechnen**, also...
 - die Kernaufgaben des kleinen Einspluseins sicher und schnell darstellen, beschreiben und lösen,
 - sicher zur Zehn ergänzen.
- **Ableitungsstrategien nutzen**, also Beziehungen und Strukturen zwischen Aufgaben beschreiben und nutzen.
- **Basisfakten abrufen**, also (am Ende des Lernprozesses) die Aufgaben des kleinen Einspluseins automatisieren.

Grundvorstellungen zur Addition besitzen

Die Kinder sollen lernen, welche Handlungen mit der Addition verknüpft sein können: Das *Zusammenfassen* von Mengen, das *Hinzufügen* einer Menge zu einer anderen oder in der linearen Vorstellung auch das *Weitergehen* von einer Position um eine gewisse Anzahl an Stellen. Das Ergebnis beschreibt die Gesamtmenge bzw. die erreichte Position.

Alltagsbilder können als Ausgangspunkt für Gespräche genutzt werden, da sie unterschiedliche Grundvorstellungen in mehrdeutigen Kontexten ansprechen. Neben dem Finden oder Malen von Aufgaben ist das Verändern der Summanden mit der entsprechenden Auswirkung auf das Bild ein wichtiger Aspekt, um die Operationsvorstellung der Addition zu fördern und zu vertiefen: „Was bleibt gleich? Was verändert sich?“



- 19, Alltagssituationen
- 20, Rechengeschichten

• Am Strand stehen zwei Kinder. Fünf Kinder kommen gerade aus dem Wasser dazu (Hinzufügen).
 • Sechs Kinder spielen im Wasser, vier Kinder sitzen auf der Luftmatratze (Zusammenfassen).
 • Am Strand spielen sieben Kinder. Im Wasser sind drei Kinder mehr.
 Wie viele Kinder spielen im Wasser (Vergleichen)?

Abb. 20: Alltagsbild zur Anregung der Grundvorstellungen

Darstellungen vernetzen

Ein mathematischer Sachverhalt kann durch verschiedene Darstellungsformen ausgedrückt werden. Der Term $5 + 3$ (Mathesprache) kann durch das Legen von fünf blauen und dem Hinzufügen von drei roten Plättchen (Handlung) dargestellt werden, er kann sprachlich beschrieben werden und in eine Rechengeschichte (Sprache) oder eine bildliche Darstellung (Bild) übersetzt werden. Diese Vernetzung sollte immer explizit hergestellt werden: „Warum passt die Aufgabe $5 + 3$ zu diesem Bild? Wie viele Plättchen musst du noch dazulegen? Was verändert sich, wenn Anna eine Birne mehr findet?“.



- 21, Zwanzigerfeld

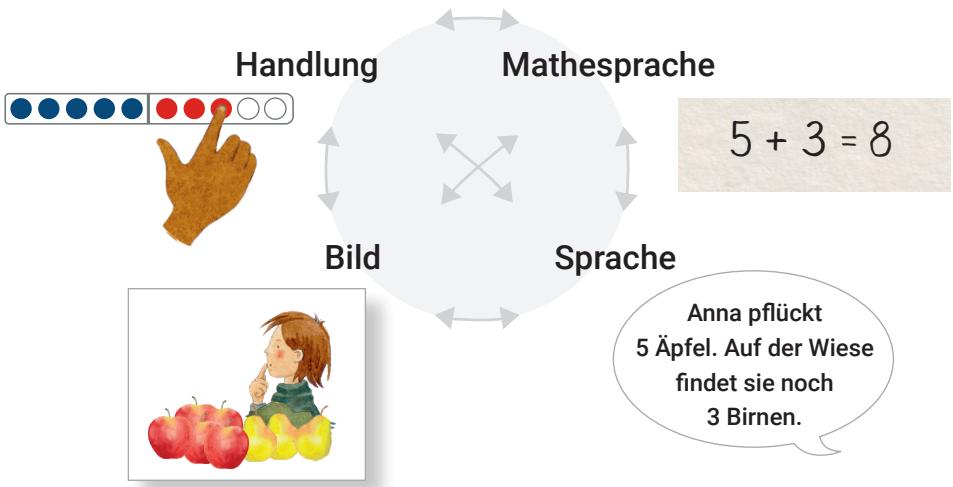


Abb. 21: Darstellungen vernetzen bei der Addition

Einfache Aufgaben rechnen

Einfache Additionsaufgaben sind die Aufgaben, die aufgrund der bereits bekannten Zahlstrukturen einfach gelöst werden können. Durch die Vernetzung von Handlungen am strukturierten Material (20er-Feld, 10er- und 5er-Streifen, Plättchen) und sprachlicher Begleitung werden mentale Vorstellungen von strukturell einfachen Aufgaben aufgebaut. Diese werden im Folgenden Kernaufgaben genannt. Bei der Addition sind das die Aufgaben **mit 10 als Ergebnis** (Zerlegungen der Zehn), Aufgaben **mit 10 als 1. oder 2. Summand** (Hinzufügen eines 10er-Streifens), die **Verdopplungsaufgaben** und **Aufgaben mit 5 als 1. oder 2. Summand** (durch Rückgriff auf die Fünferstruktur). Bei der Erarbeitung der Kernaufgaben sollten die Strukturen eines Aufgabentyps am 20er-Feld erarbeitet und gefestigt werden (Wittmann et al., 2017a).



- 23, Einfache Aufgaben
- 24, Einfache Aufgaben rechnen

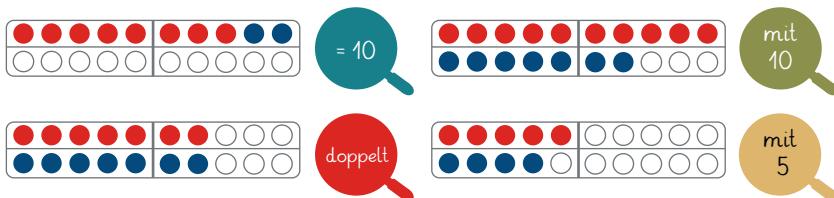


Abb. 22: Kernaufgaben der Addition

Ableitungsstrategien nutzen

Ausgehend von den Kernaufgaben werden andere Aufgaben z. B. durch Verschieben, Hinzufügen oder Weglassen einzelner Plättchen abgeleitet. Dabei ist es wichtig, dass Veränderungen als Handlung am Material und symbolisch durchgeführt sowie stets sprachlich begleitet werden. Im weiteren Verlauf werden Ergebnisse bereits beherrschter Aufgaben zur Berechnung anderer Aufgaben genutzt. Beziehungen zwischen Aufgaben sind von zentraler Bedeutung für die Entwicklung eines tragfähigen Operationsverständnisses und Voraussetzung für die Entwicklung und Nutzung flexibler Rechenstrategien.



- 22, Tauschaufgaben
- 25, Ableitungsstrategien nutzen

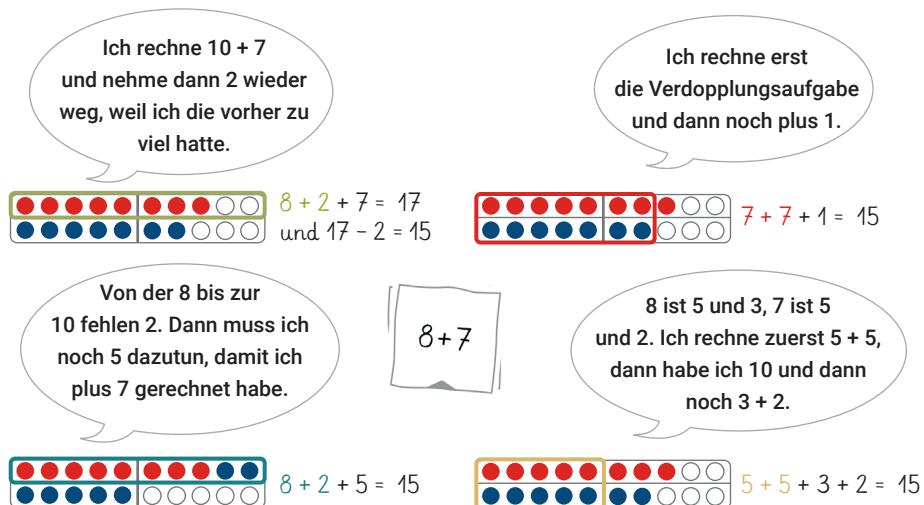


Abb. 23: Ableitung der Aufgabe 8 + 7 aus den Kernaufgaben

Basisfakten abrufen

Gerade Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sind darauf angewiesen, inhaltliche (mathematische) Stützen aufzubauen, die ihnen eine tragfähige Grundlage bieten. Zunächst werden die Kernaufgaben aufgrund der erarbeiteten Strukturen automatisiert und Ableitungsstrategien entwickelt. Auf dieser Basis erfolgt dann eine Automatisierung sämtlicher Aufgaben des kleinen Einspluseins. Hierzu können die FÖDIMA-Aufgabenkarten (vgl. Abb. 24) genutzt werden, um auch unterschiedliche Darstellungen am 20er-Feld einbeziehen zu können.

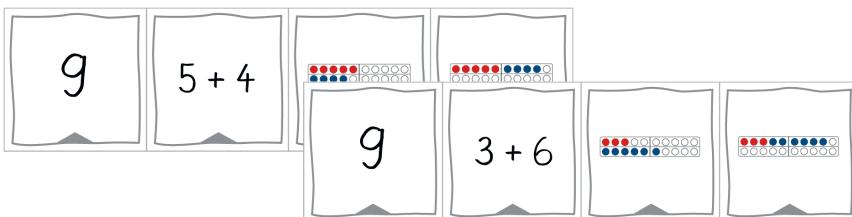


Abb. 24: FÖDIMA-Aufgabenkarten zur Addition

Wichtig ist es, zu Beginn des 2. Schuljahres zu erheben, inwieweit die Aufgaben des kleinen Einspluseins von den Kindern bereits automatisiert gelöst werden und ob sie Vorstellungen aufgebaut haben.

Standortbestimmung

Die Aufgabe *Additionsaufgaben finden* der Standortbestimmung ist als offene Aufgabe konzipiert und kann der Lehrkraft einen Überblick geben, in welchem Zahlenraum das Kind bereits rechnen kann und ob es beim Finden von Aufgaben systematisch vorgeht.

Die Aufgabe *Einfache Aufgaben (rechnen)* kann nach Bedarf gekürzt oder durch weitere Aufgaben ergänzt werden.

Aus der Praxis

Seit ein paar Wochen steht im Mathematikunterricht das Arbeiten mit Material zur Automatisierung von Kernaufgaben im Vordergrund. Nach einer ausgiebigen Phase des anschaulichen Arbeitens möchte die Lehrkraft nun feststellen, inwiefern die Kinder Strukturen von Kernaufgaben schon nutzen und diese automatisieren könnten, da sie für das Lösen von schwierigeren Aufgaben hilfreich sein können. Mithilfe der Standortbestimmungsaufgabe *Einfache Aufgaben (rechnen)* möchte die Lehrkraft sich einen Überblick über individuelle Leistungen der ganzen Klasse verschaffen. Bei der Durchsicht der Standortbestimmungen erkennt sie, dass Sarah noch Schwierigkeiten bei den Verdopplungsaufgaben zeigt und Max sich bei einigen Aufgaben mit 5 verrechnet.

Während der Rest der Klasse im Mathebuch arbeitet, führt die Lehrkraft ein Diagnosegespräch mit Sarah und Max durch. Dabei stellt sie den Kindern in Anlehnung an die FÖDIMA-Karteikarte 24, *Einfache Aufgaben rechnen*, verschiedene Kernaufgaben und fragt sie, wie sie die Aufgabe lösen. Die Lehrkraft beobachtet, dass die beiden die Aufgaben zählend rechnen. Scheinbar haben sie die entsprechenden Fünfer-, Zehner- und Verdopplungsstrukturen noch nicht verinnerlicht.

Name	
Sarah	$4 + 1 = \underline{5}$ $7 + 10 = \underline{17}$ $3 + 3 = \underline{6}$ $9 + 3 = \underline{12}$
Max	$6 + 5 = \underline{11}$ $7 + 7 = \underline{14}$ $6 + 4 = \underline{10}$ $5 + 8 = \underline{13}$

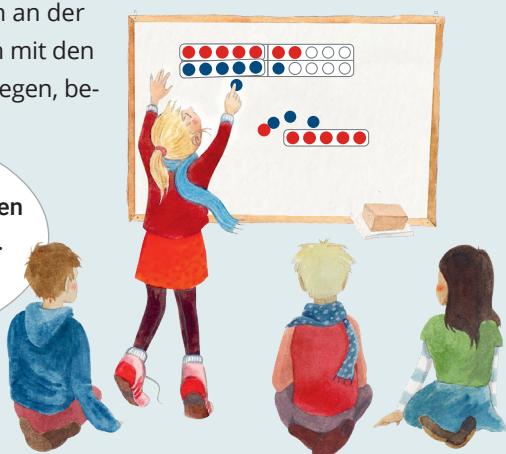
Name	einfache Aufgaben
Sarah	Mit 10 gut, Aufgaben < 10 richtig, über 10 zährend? (Immer 1 zu wenig) Auch bei Verdopplung
Max	Sicher bei Verdopplung und Aufgaben mit 10 Schwierige Aufgaben / Aufgaben mit 5: 7-1 Fehler (zährend?)

Die Lehrkraft möchte weiter feststellen, ob sie die Strukturen beim Legen mit Material nutzen, was eine Voraussetzung für die mentale Handlung darstellt. Als sie die Kinder dazu anregt, legen sie auch die Zahldarstellungen Plättchen für Plättchen.

Um Sarah und Max im Klassenunterricht zur Nutzung der Strukturen anzuregen, greift die Lehrkraft mit der ganzen Klasse im Kreis das schnelle Erfassen von Anzahlen bis 20 erneut auf und thematisiert dabei besonders die Fünferstruktur der Zahlen. Auch die eigene schnelle und geschickte Darstellung von Zahlen am 20er-Feld wird im Kreis noch einmal wiederholt, wobei jedes Kind ein eigenes 20er-Feld nutzt. Gemeinsam werden im Kreis einfache Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 gelegt und gelöst. Es wird auf die Versprachlichung und Darstellung der Strukturen geachtet, insbesondere mit Blick auf Aufgaben mit 5. Kinder, die bereits sicher in der Vorstellung operieren, dürfen auf die konkrete Darstellung verzichten, sollen ihr „Bild im Kopf“ aber genau beschreiben. Max und Sarah sollen diese Beschreibungen dann jeweils am großen 20er-Feld legen.

In der sich anschließenden Arbeitsphase arbeiten die Kinder in Dreiergruppen an der Automatisierung der Kernaufgaben mit den Aufgabenkarten. Sie sollen immer legen, be-

7 + 7 Lege oben einen Fünfer und 2 Plättchen und unten das Gleiche. 2 Fünfer sind 10. 2 und 2 sind 4. Zusammen sind es 14.



schreiben und lösen, ggf. ohne Sicht auf das Material. Sarah und Max arbeiten mit Sicht auf das Material und erhalten gezielte Unterstützung bei der Versprachlichung. Sie können sich dazu auch das entsprechende MahikoKids-Lernvideo ansehen (MahikoKids-Lernvideo *Einfache Plusaufgaben - Verdopplungsaufgaben*, <https://mahiko.dzlm.de/node/574>, und MahikoKids-Lernvideo *Einfache Plusaufgaben - mit 5*, <https://mahiko.dzlm.de/node/573>).

5 Addition im Zahlenraum bis 100

Zentrale Kompetenzen:

Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- ***einfache Aufgaben rechnen***, also...
 - Additionsaufgaben ($Z + Z$; $ZE + Z$; $ZE + E$) sicher darstellen, beschreiben und lösen,
 - Aufgabenbeziehungen nutzen.
- ***Rechenstrategien der Addition verstehen und verwenden***, also verschiedene halbschriftliche Rechenwege (schrittweise, stellenweise, mit Hilfsaufgabe) verstehen, erklären und nutzen.
- ***Rechenstrategien flexibel anwenden***, also (am Ende des Lernprozesses) flexibel rechnen.

Einfache Aufgaben rechnen

Einfache Aufgaben im Zahlenraum bis 100 sind Aufgaben des Typs $Z + Z$, $ZE + E$ und $ZE + Z$, die sich mithilfe von 10er-Streifen und Plättchen einfach vor- und darstellen lassen, z. B. $20 + 60$ oder $34 + 20$ oder $65 + 4$.



Abb. 25: Einfache Additionsaufgaben darstellungsvernetzt rechnen

Beim Legen und Lösen der Aufgaben helfen die Analogien zu den Aufgaben des kleinen Einsplus eins. Im Sinne der Darstellungsvernetzung werden die Aufgaben unter sprachlicher Begleitung mit 10er-Streifen und Plättchen oder auch bildlich in der Strichpunktschreibweise (vgl. Abb. 25) dargestellt.

In einem weiteren Schritt werden Aufgaben operativ verändert und in verschiedene Darstellungen übertragen, um Beziehungen zu verdeutlichen: „Was passiert, wenn es immer ein Einer mehr wird? Was passiert, wenn immer ein Zehner hinzukommt?“



- 26, *Einfache Aufgaben*
- 27, *Aufgaben ableiten*
- 28, *Verdoppeln und Halbieren*

Rechenstrategien der Addition verstehen und anwenden

Auf der Ebene des Zahlenrechnens gibt es im Bereich der Addition im Wesentlichen die Möglichkeiten, *schrittweise* und *stellenweise* zu rechnen oder eine *Hilfsaufgabe* zu nutzen. Die unterschiedlichen Rechenstrategien sollten mit allen Kindern materialgestützt, mit bildlichen Darstellungen und sprachlicher Begleitung erarbeitet werden und immer wieder neu erkundet und erprobt werden. Ein weiteres mögliches Darstellungsmittel, neben 10er-Streifen und Plättchen, ist der Rechenstrich, an dem sowohl das Rechnen mit Hilfsaufgabe als auch das schrittweise Rechnen gut dargestellt werden können.

Beim *schrittweisen Rechnen* wird der 2. Summand zerlegt und zum 1. Summanden hinzuaddiert.

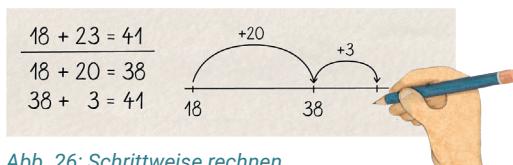


Abb. 26: Schrittweise rechnen

Ich gehe erst 20 weiter. Dann bin ich bei 38. Danach noch plus 3. Das Ergebnis ist 41.

Beim *stellenweisen Rechnen* werden alle Stellenwerte separat voneinander addiert und anschließend zusammengerechnet.

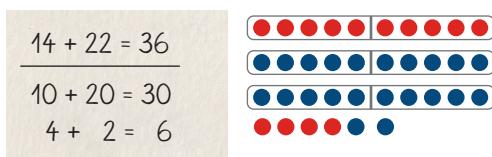
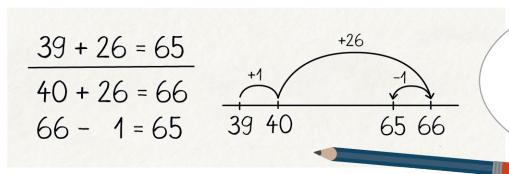


Abb. 27: Stellenweise rechnen

Ich rechne erst die Zehner zusammen. Das sind $10 + 20$, also 30. Dann die Einer: 4 + 2 sind 6. Zusammen sind es 36.

Beim Verwenden von *Hilfsaufgaben* werden auf der Basis von Aufgabenbeziehungen die Ergebnisse einfach zu ermittelnder Aufgaben zur Berechnung anderer Aufgaben genutzt.



**Ich rechne erstmal
40 + 26, das sind 66. Dann gehe ich
einen wieder zurück, weil ich bei 40
gestartet bin und nicht bei 39.
65 ist das Ergebnis.**

Abb. 28: *Hilfsaufgabe nutzen*

Die Kinder sollten verschiedene Rechenstrategien nachvollziehen und reflektieren. Die Wahl der Strategie hängt von der Aufgabe, aber auch von den jeweiligen Präferenzen der Kinder ab. Dabei können zudem Mischformen bzw. eigene Notationsweisen entstehen. Es ist jedoch nicht das Ziel, dass alle Lernenden alle Aufgaben mit allen Hauptstrategien lösen können.



- 29, *Schrittweise rechnen*
- 30, *Stellenweise rechnen*
- 31, *Hilfsaufgabe nutzen*

Rechenstrategien flexibel anwenden

Ziel ist es, dass alle Kinder zumindest einzelne der oben beschriebenen Rechenstrategien geschickt und flexibel in Relation zu den jeweiligen Zahlenwerten anwenden können. Um die Kinder für eine geschickte Wahl von Rechenstrategien zu sensibilisieren, bietet es sich an, über die jeweiligen Vor- und Nachteile einzelner Strategien in Abhängigkeit von der Aufgabe zu sprechen. Hierbei geht es nicht darum, zwischen *stellenweise* oder *schrittweise* zu unterscheiden, sondern vielmehr darum zu überlegen, wie möglichst geschickt gerechnet werden kann.



- 32, *Geschicktes Rechnen*

Standortbestimmung

Bei der Aufgabe *Schnelles Rechnen im Zahlenraum bis 20* wird überprüft, ob bzw. welche Kernaufgaben des kleinen Einspluseins automatisiert sind. Treten in diesem Bereich Unsicherheiten auf, sollten die Hinweise zu den einfachen Aufgaben bei der Addition im Zahlenraum bis 20 beachtet werden.

Zeigen Kinder Unsicherheiten in der Standortbestimmung, die sich nicht durch den höheren Zahlenraum erklären lassen, bietet es sich auch hier an, auf die Kartekarten aus dem Zahlenraum bis 20 zurückzugreifen.

Bei der Aufgabe *Aufgaben ableiten* sollte der Fokus bei der Auswertung darauf lie-

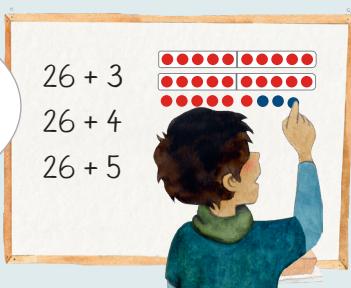
gen, an welchen Strukturen sich die Kinder bei ihren eigenen Aufgaben orientieren. Die Aufgabe *Geschicktes Rechnen* kann zu Beginn des Lernprozesses genutzt werden, um zu erheben, wie die Kinder eine solche, bisher unbekannte, Aufgabe von sich aus lösen. Die Aufgaben zu den verschiedenen Rechenstrategien (stellenweise, schrittweise, mit Hilfsaufgabe) eignen sich erst in späteren Phasen, wenn diese bereits erarbeitet wurden.

Aus der Praxis

Nachdem der Zahlenraum bis 100 eingeführt wurde, will die Lehrkraft nun mit der Addition im Zahlenraum bis 100 beginnen. In der Abschlussstandortbestimmung zum Zahlverständnis im Zahlenraum bis 100 zeigt sich, dass die Kinder Zahlen in Zehner und Einer zerlegen und Zahlen operativ verändern können. Auf dieses Vorwissen greift die Lehrkraft bei der Thematisierung der Addition zurück. Sie nutzt die Förderanregung *Mit Einern rechnen* der FÖDIMA-Karteikarte 26, *Einfache Aufgaben*. Um allen Kindern einen Zugang zu ermöglichen, werden die Darstellungen der Zahlen mit 10er-Streifen und Plättchen konsequent einbezogen. In der Einstiegsphase im Stuhlkreis soll Theo die erste Aufgabe eines schönen Päckchens legen und beschreiben. Danach werden am Material und auf symbolischer Ebene passende Veränderungen von der ersten zur zweiten Aufgabe vorgenommen.

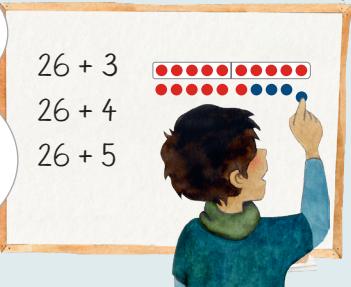
Ich lege 2 Zehner und 6 Einer. Es kommen 3 Einer dazu. Zusammen sind es 29.

$$\begin{array}{r} 26 + 3 \\ 26 + 4 \\ 26 + 5 \end{array}$$



Jetzt kommen 4 Einer dazu. Das ist ein Einer mehr. 29 und einer dazu sind 30. Aus den Einern wird ein neuer Zehner.

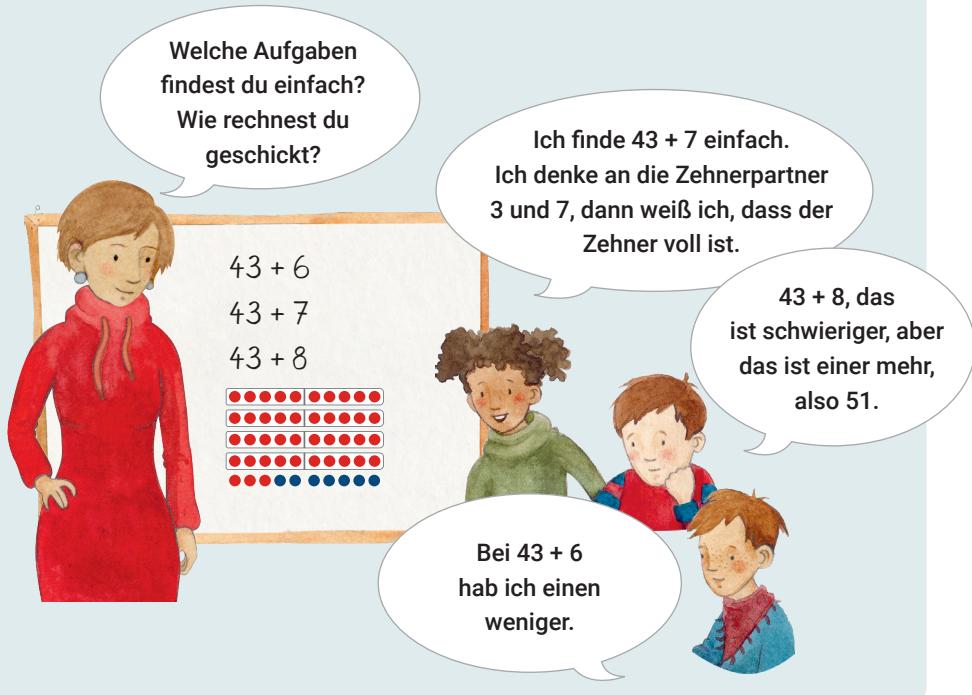
$$\begin{array}{r} 26 + 3 \\ 26 + 4 \\ 26 + 5 \end{array}$$



Was verändert sich, wenn du daraus jetzt die zweite Aufgabe legst?



Auch die Veränderungen zur dritten Aufgabe werden am Material erkundet und besprochen. In der darauffolgenden Arbeitsphase bekommen die Kinder von der Lehrkraft verschiedene schöne Päckchen des Typs ZE + E, die sie zu zweit mit Material legen und rechnen. Dabei liest ein Kind die Aufgabe und sagt dem anderen Kind, was es legen soll. Die Lehrkraft stellt einzelnen Kindern immer wieder gezielte Fragen: „Wie kann dir die Aufgabe zum Lösen der nächsten Aufgabe helfen?“ und „Was verändert sich in der Aufgabe/am Material?“. Stellt die Lehrkraft fest, dass die Kinder sichere Vorstellungen aufgebaut haben, können die Kinder mit einem Sichtschutz weiterarbeiten: Ein Kind muss dem anderen Kind nun ohne Sicht auf das Material beschreiben, was es legen soll. Leistungsstärkere Kinder können sich auch eigene ähnliche schöne Päckchen ausdenken. Zum Abschluss der Unterrichtsstunde wird im Stuhlkreis noch einmal die Struktur der einfachen Aufgaben thematisiert und dabei auch die Analogie zum Rechnen im Zahlenraum bis 20 hergestellt:



6 Subtraktion im Zahlenraum bis 20

Zentrale Kompetenzen:

Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- **Grundvorstellungen zur Subtraktion besitzen**, also verstehen, was „minus“ bedeutet.
- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Aufgaben identifizieren.
- **Einfache Aufgaben rechnen**, also die Kernaufgaben des kleinen Einsminus-eins sicher und schnell darstellen, beschreiben und lösen.
- **Ableitungsstrategien nutzen**, also Beziehungen und Strukturen zwischen Aufgaben beschreiben und nutzen.
- **Basisfakten abrufen**, also (am Ende des Lernprozesses) die Aufgaben des kleinen Einsminuseins automatisieren.

Grundvorstellungen zur Subtraktion besitzen

Die Kinder sollen lernen, welche Handlungen mit der Subtraktion verknüpft sein können: das *Abziehen*, das *Ergänzen* und das *Vergleichen*. Es ist wichtig, sich nicht nur auf abziehende Vorstellungen zu beschränken, damit Kinder in verschiedenen Kontexten flexibel denken und Rechenvorteile nutzen können.



Abb. 29: Alltagsbild zur Anregung der Grundvorstellungen

Im Unterricht werden Subtraktionsaufgaben als Bilder oder Rechengeschichten in alltagsnahe Kontexte eingebunden, die auch mehrdeutige Erzählsituationen zulassen. Gerade bei der Subtraktion sprechen viele Bilder nicht für sich, weil die Ausgangssituation im Bild nicht immer erkennbar ist. Erforderlich ist also eine inhaltliche Begründung, warum eine Aufgabe zum Bild oder ein Bild zu einer Aufgabe passt. Um die Operationsvorstellungen zur Subtraktion zu fördern und zu vertiefen, werden Aufgaben verändert und die Auswirkungen auf das Bild betrachtet: „Was bleibt gleich? Was verändert sich?“



- 33, Alltagssituationen
- 34, Rechengeschichten

Darstellungen vernetzen

Auch bei der Subtraktion ist das kontinuierliche Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Handlung, Bild, Sprache, Symbole (Mathesprache)) zur Darstellungsvernetzung wichtig. Der Term $9 - 3$ (Mathesprache) kann durch das Legen von neun Plättchen und das Wegnehmen oder Abdecken von drei Plättchen (Handlung) dargestellt werden, er kann sprachlich beschrieben und in eine Rechengeschichte (Sprache) oder eine bildliche Darstellung (Bild) übersetzt werden. Die Darstellungsvernetzung wird explizit thematisiert: „Warum passt die Aufgabe $9 - 3$ zu diesem Bild? Wie viele Plättchen musst du legen und wie viele musst du wegnehmen?“.

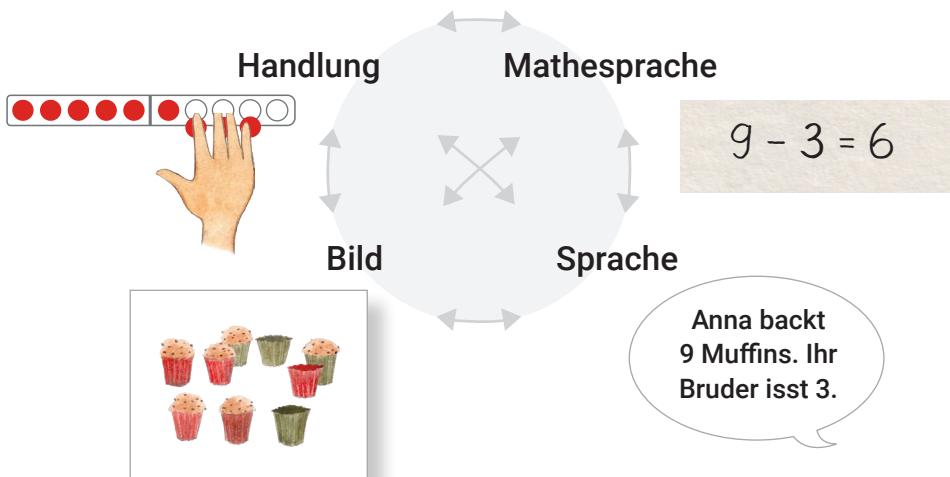


Abb. 30: Darstellungen vernetzen bei der Subtraktion

Zur Diagnostik und Förderung der Darstellungsvernetzung bieten sich auch die Diagnoseaufgaben zu *Karte 33, Alltagssituationen*, und zu *Karte 34, Rechengeschichten*, an, da auch hier auf den Wechsel zwischen Bild, Handlung, Sprache und Symbolen (Mathesprache) eingegangen wird.



- 35, *Zwanzigerfeld*

Einfache Aufgaben rechnen

Einfache Subtraktionsaufgaben sind die Aufgaben, die aufgrund der bereits bekannten Zahlstrukturen und der Vernetzung mit der Addition einfach gelöst werden können. Durch die Vernetzung von Handlungen am strukturierten Material (20er-Feld, 10er- und 5er-Streifen, Plättchen, Abdeckstreifen) und durch sprachliche Begleitung werden mentale Vorstellungen von strukturell einfachen Aufgaben (Kernaufgaben) aufgebaut. Bei der Subtraktion sind das die **Halbierungs-aufgaben** (als Umkehraufgaben der Verdopplungsaufgaben), Aufgaben mit **10 als Minuend** (unter Rückgriff auf die Zahlzerlegungen der Zehn), Aufgaben mit **10 als Subtrahend oder Ergebnis** (Darstellung mit 10er-Streifen im 20er-Feld) sowie Aufgaben mit **5 als Subtrahend bzw. Ergebnis** (durch Rückgriff auf die Fünferstruktur). Bei der Erarbeitung der Kernaufgaben werden die Strukturen eines Aufgabentyps an der Darstellung erarbeitet und gefestigt (Wittmann et al., 2017a).

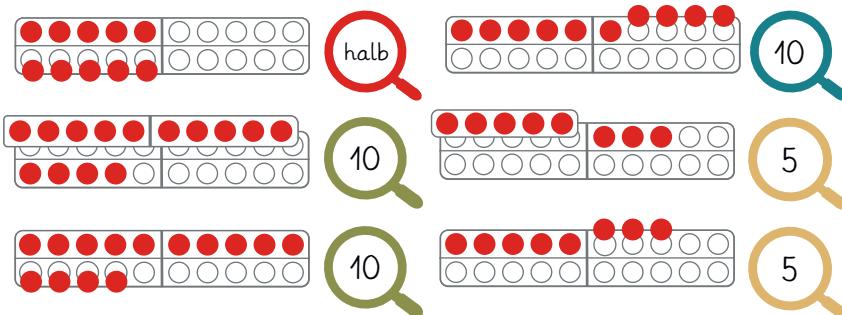


Abb. 31: Kernaufgaben der Subtraktion



- 36, *Einfache Aufgaben*
- 37, *Einfache Aufgaben rechnen*

Ableitungsstrategien nutzen

Ausgehend von den Kernaufgaben werden andere Aufgaben z. B. durch Verschieben, Hinzufügen oder Weglassen einzelner Plättchen abgeleitet. Dabei ist es wichtig, dass Veränderungen als Handlung am Material und symbolisch durch-

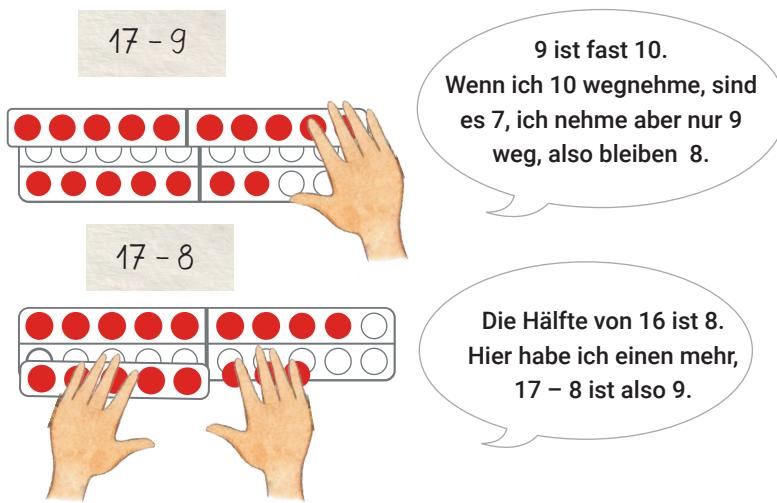
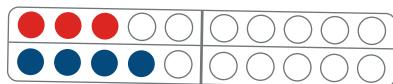


Abb. 32: Ableitung von Subtraktionsaufgaben aus den Kernaufgaben

geführt und stets sprachlich begleitet werden. Im weiteren Verlauf werden Ergebnisse bereits beherrschter Aufgaben zur Berechnung anderer Aufgaben genutzt. Zudem kann mit der Thematisierung von Aufgabenfamilien auch die Umkehraufgabe zur Lösung herangezogen werden. Die Nutzung von Beziehungen zwischen Aufgaben und zwischen den Rechenoperationen ist von zentraler Bedeutung für die Entwicklung eines tragfähigen Operationsverständnisses und Voraussetzung für die Entwicklung und Nutzung flexibler Rechenstrategien.



- 38, Ableitungsstrategien nutzen
- 39, Aufgabenfamilien



$3 + 4 = 7$	$7 - 3 = 4$
$4 + 3 = 7$	$7 - 4 = 3$



Abb. 33: Thematisierung von Aufgabenfamilien

Basisfakten abrufen

Zuerst werden Kernaufgaben auf der Grundlage der erarbeiteten Strukturen automatisiert, indem diese zu mentalen Vorstellungsbildern weiterentwickelt werden. In einem weiteren Schritt werden Ableitungsstrategien auf der Grundlage der Darstellungen erarbeitet. Erst wenn auch diese gesichert sind, sollte eine Automatisierung sämtlicher Aufgaben des kleinen Einsminuseins erfolgen.

Gerade Kinder mit Schwierigkeiten im Mathematikunterricht müssen inhaltliche (mathematische) Stützen aufbauen, die eine tragfähige Grundlage für flexibles

Rechnen ermöglichen.

Wichtig ist es, im 1. Halbjahr des 2. Schuljahres zu überprüfen, inwieweit die Aufgaben des kleinen Einsminuseins von den Kindern bereits automatisiert gelöst werden und ob sie dazu passende Vorstellungen aufgebaut haben.

Standortbestimmung

Die letzte Aufgabe *Subtraktionsaufgaben finden* ist als offene Aufgabe konzipiert und kann der Lehrkraft einen Überblick geben, in welchem Zahlenraum die Kinder bereits rechnen können und ob sie ggf. systematisch vorgehen, um Aufgaben zu finden.

Aus der Praxis

Die Lehrkraft möchte mithilfe der FÖDIMA-Karteikarte 33, *Alltagssituationen*, feststellen, inwiefern die Kinder bereits über ein Operationsverständnis zur Subtraktion verfügen. Dazu hat sie sich im Vorfeld mit den Beobachtungshinweisen und Impulsen vertraut gemacht und sich notiert, worauf sie achten möchte. Im Kinositz präsentiert sie den Kindern ein Wimmelbild als Anlass zum Finden verschiedener Aufgaben. Nachdem einige Kinder Plusaufgaben genannt haben, bittet die Lehrkraft Luca, eine Minusaufgabe zu suchen.



Für Luca scheint die Bildung von Subtraktionsaufgaben analog zur Addition zu verlaufen: Er bildet aus den Teilmengen fünf und zwei die Aufgabe 5 - 2, statt die Darstellung zeitlich im Sinne des Abziehens zu interpretieren. Die Lehrkraft notiert sich, dass sie Luca in Bezug auf die Grundvorstellungen zur Subtraktion gezielt beobachten muss: „Geht er immer so vor?“ Falls ja, könnte eine separate Förderschleife erforderlich sein. Auch die anderen Kinder werden gefragt, welche Aufgaben sie in dem Ausschnitt erkennen. Zur Förderung wird die Situation nachgespielt (von sieben Dosen fallen zwei herunter). Wichtig ist es dabei, die Bedeutung der Ausgangsmenge (hier die sieben Dosen) zu verdeutlichen und auch sprachlich den Prozess zu erfassen: „Wie viele Dosen standen vorher auf dem Tisch? Was ist dann passiert? Was sehe ich jetzt im Bild?“ Im Sinne der Darstellungsvernetzung wird parallel auch am 20er-Feld gelegt und symbolisch notiert. Zur Vertiefung wird die Aufgabe variiert: „Wie muss das Bild verändert werden, wenn die Aufgabe nicht 7 - 2 heißt, sondern 7 - 3?“ Es ist möglich, dass ein solches Klassengespräch auch für Luca schon ausreicht, um seine Grundvorstellung des Abziehens weiter aufzubauen. Dies sollte jedoch im weiteren Unterricht überprüft werden.

7 Subtraktion im Zahlenraum bis 100

Zentrale Kompetenzen

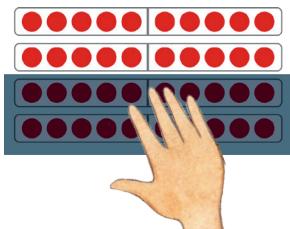
Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- **einfache Aufgaben rechnen**, also...
 - Subtraktionsaufgaben ($Z - Z$, $ZE - E$, $ZE - Z$) sicher darstellen, beschreiben und lösen,
 - Aufgabenbeziehungen nutzen.
- **Rechenstrategien der Subtraktion verstehen und verwenden**, also verschiedene halbschriftliche Rechenwege der Subtraktion verstehen, erklären und nutzen.
- **Rechenstrategien flexibel anwenden**, also (am Ende des Lernprozesses) Rechenstrategien flexibel anwenden.

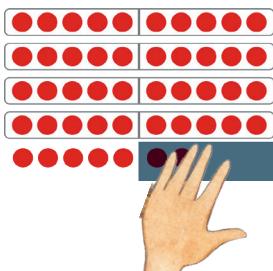
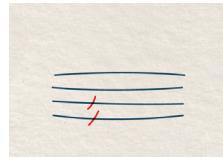
Einfache Aufgaben rechnen

Aufgaben des Typs $Z - Z$, $ZE - E$ und $ZE - Z$ sind diejenigen, die sich mit 10er-Streifen und Plättchen einfach dar- und vorstellen lassen, also beispielsweise $60 - 20$ oder $34 - 20, 65 - 4$.

Beim Legen und Lösen der Aufgaben helfen die Analogien zu den Aufgaben des kleinen Einsminuseins. Im Sinne der Darstellungsvernetzung werden die Aufgaben unter sprachlicher Begleitung mit 10er-Streifen und Plättchen oder auch bildlich in der Strich-Punkt-Schreibweise dargestellt.



$40 - 20$
Ich lege 4 Zehner und decke
2 Zehner ab. Es bleiben 2
Zehner übrig, also 20.



$47 - 2$
Ich habe 4 Zehner und 7
Einer. Wenn ich 2 Einer ab-
decke, habe ich noch 45.



Abb. 34: Einfache Subtraktionsaufgaben darstellungsvernetzt rechnen

Nun werden Aufgaben operativ verändert und in verschiedene Darstellungen übertragen, um Beziehungen zu verdeutlichen: „Was passiert, wenn immer ein Einer mehr abgedeckt oder weggenommen wird? Was passiert, wenn immer ein Zehner weniger abgedeckt oder weggenommen wird?“

Das Abdecken der Plättchen durch einen transparenten Streifen hat im Gegensatz zum Wegnehmen den Vorteil, dass der Subtrahend sichtbar bleibt und auch verändert werden kann. Ausgehend von der Rechnung sowie der Darstellung am Material sollte ebenfalls thematisiert werden, wie die Rechnung bildlich z. B. durch Durchstreichen dargestellt werden kann. Wieder werden nun einfache Aufgaben genutzt, um aus diesen schwierigere abzuleiten. Dabei sollen die Kinder materialgestützt verstehen, wie sich z. B. die Veränderung des Subtrahenden auf das Ergebnis auswirkt.



- 40, Einfache Aufgaben
- 41, Aufgaben ableiten

Rechenstrategien der Subtraktion verstehen und verwenden

Beim Zahlenrechnen gibt es im Bereich der Subtraktion im Wesentlichen die Möglichkeiten, *schrittweise* oder *stellenweise* zu rechnen oder eine *Hilfsaufgabe* zu nutzen. Dabei kann immer auch *ergänzend* gedacht werden.

Das *schrittweise Rechnen* kann sowohl mit Material als auch mit dem Rechenstrich visualisiert werden. Hier wird der Subtrahend in die einzelnen Stellenwerte zerlegt und vom Minuenden subtrahiert.

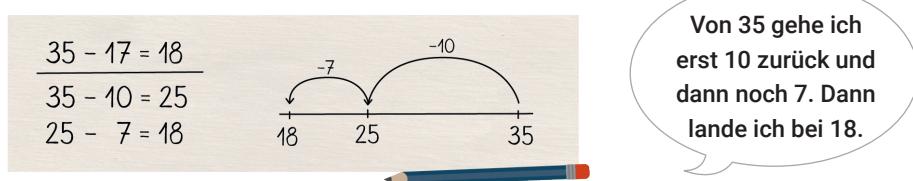


Abb. 35: Schrittweise Rechnen

Beim *stellenweisen Rechnen* werden alle Stellenwerte separat voneinander subtrahiert und anschließend zusammengerechnet. Bei der Subtraktion ergibt sich dann eine Schwierigkeit, wenn der Einer des Subtrahenden größer ist als der des Minuenden.

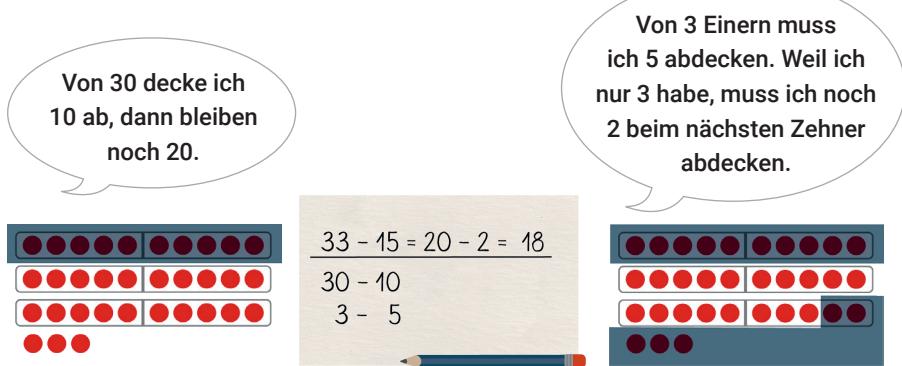
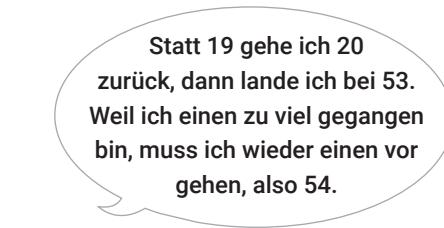


Abb. 36: Stellenweise Rechnen

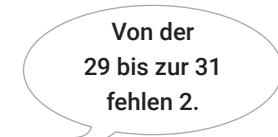
Da Lernende diese Strategie oft verwenden, weil sie bei der Addition gut funktioniert, ist es wichtig, diesen Rechenweg materialgestützt mit allen Kindern zu besprechen. Dabei wird das Minuszeichen im Ergebnis als Rechenzeichen gedeutet, das anzeigen, wie viel vom nächsthöheren Stellenwert noch wegzunehmen ist. Um zu umgehen, dass es Irritationen bei der Notation gibt, kann auf das Aufschreiben der Zwischenergebnisse verzichtet und diese nur als Zwischenrechnung festgehalten werden.

Beim Verwenden von *Hilfsaufgaben* werden Minuend oder Subtrahend so verändert, dass eine einfache Aufgabe entsteht. Die Veränderung muss anschließend beim Ergebnis ausgeglichen werden. Liegen Minuend und Subtrahend nahe beieinander, bietet es sich an, die Subtraktionsaufgabe durch *Ergänzen* zu lösen.



$$\begin{array}{r} 73 - 19 = 54 \\ 73 - 20 = 53 \\ 53 + 1 = 54 \end{array}$$

Abb. 37: Hilfsaufgabe nutzen



$$\begin{array}{r} 31 - 29 = 2 \\ 29 + 2 = 31 \end{array}$$

Abb. 38: Ergänzen

Die Kinder sollten verschiedene Rechenstrategien nachvollziehen und reflektieren. Die Wahl der Strategie hängt von der Aufgabe, aber auch von den jeweiligen Präferenzen der Kinder ab. Dabei können zudem Mischformen bzw. eigene Notationsweisen entstehen. Es ist jedoch nicht das Ziel, dass alle Lernenden alle Aufgaben mit allen Hauptstrategien lösen können.



- 42, Schrittweise rechnen
- 43, Stellenweise rechnen
- 44, Hilfsaufgabe nutzen
- 45, Ergänzen

Rechenstrategien flexibel anwenden

Ziel ist es, dass alle Kinder zumindest einzelne der oben beschriebenen Rechenstrategien geschickt und flexibel in Relation zu den Zahlenwerten anwenden können. Um die Kinder zu sensibilisieren, bietet es sich an, Aufgaben mit unterschiedlichen Strategien zu lösen und über die Vor- und Nachteile zu sprechen.



- 46, Geschicktes Rechnen

Standortbestimmung

Bei der Aufgabe *Schnelles Rechnen im Zahlenraum bis 20* soll festgestellt werden, ob bzw. welche Kernaufgaben des kleinen Einsminuseins schon automatisiert sind. Treten in diesem Bereich Unsicherheiten auf, sollten die Hinweise zur Sub-

traktion im Zahlenraum bis 20 beachtet werden.

Zeigen Kinder in der Standortbestimmung Unsicherheiten, die sich nicht durch den höheren Zahlenraum ergeben, bietet es sich auch hier an, auf die entsprechenden Karteikarten aus dem Zahlenraum bis 20 zurückzugreifen.

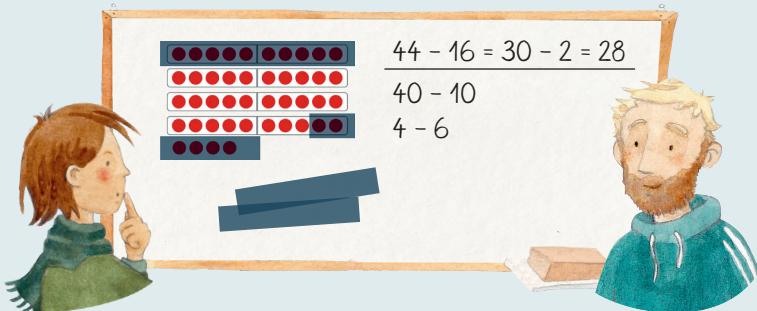
Bei der Aufgabe *Aufgaben ableiten* sollte der Fokus bei der Auswertung darauf liegen, an welchen Strukturen sich die Kinder bei ihren eigenen Aufgaben orientieren. Die Aufgabe *Geschicktes Rechnen* kann zu Beginn des Lernprozesses genutzt werden, um zu erheben, wie die Kinder eine solche, bisher unbekannte, Aufgabe von sich aus lösen. Die Aufgaben zu den verschiedenen Rechenstrategien eignen sich erst in späteren Phasen, wenn diese bereits erarbeitet wurden.

Aus der Praxis

In der Klasse 2b haben die Kinder in den vergangenen Wochen unterschiedliche halbschriftliche Rechenwege bei der Addition erarbeitet und geübt. Nun will die Lehrkraft mit der Subtraktion im Zahlenraum bis 100 beginnen. Dazu stellt sie allen Kindern im Sinne einer Standortbestimmung die Aufgabe 44 - 16. Jedes Kind bekommt einen Zettel, auf dem es seine Lösung der Aufgabe mit Rechenweg notieren sollen. Dabei zeigen sich viele unterschiedliche Vorgehensweisen. Es fallen mehrere Kinder auf, die stellenweise rechnen und dabei die Einer des Minuenden und des Subtrahenden vertauschen. Auf Nachfrage erklärt Lene, dass es ja nicht anders gehe:



Bei der Planung der Unterrichtseinheit orientiert sich die Lehrkraft an der *FÖDIMA-Karteikarte 43, Stellenweise rechnen*, um bei den Kindern einen verstehensorientierten Einsatz der Strategie zu fördern – auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang. Die Lehrkraft legt besonderen Wert darauf, die symbolische Aufgabe sprachlich begleitet in eine Materialdarstellung zu übertragen, indem sie entsprechende Impulsfragen stellt und die Handlungen von Lene im Sitzkreis durchführen lässt: „Welche Zahl müssen wir zuerst legen? Was wird weggenommen? Decke zuerst die Zehner mit der Folie ab.“ Parallel dazu wird die Aufgabe symbolisch notiert. Auch die Einer sollen von Lene mit einer Folie unter sprachlicher Begleitung ab-



gedeckt werden: „Wir haben nur 4 Einer, müssen aber 6 wegnehmen. Zeige das an den Plättchen.“ Durch die Materialnutzung kann Lene sehen, wie sie die sechs Einer wegnehmen kann: „Wir decken die 4 Plättchen ab und brauchen dann noch weitere 2 von dem Zehner. Ich muss also noch 2 mehr abdecken.“

Es werden weitere Aufgaben gemeinsam besprochen. Dabei legen unterschiedliche Kinder Aufgaben mit Demonstrationsmaterial und erklären die Vorgehensweise. Die Kinder werden auch aufgefordert, die Handlungen (ggf. zu zweit) an ihrem eigenen Material analog darzustellen. Dabei achtet die Lehrkraft besonders auf die Handlungen und Erklärungen von Lene, auch um zu beobachten, ob sie eine Operationsvorstellung zur Subtraktion aktiviert oder ob hier ggf. eine Förderung von Verstehensgrundlagen aus dem Zahlenraum bis 20 erforderlich ist.

8 Multiplikation

Zentrale Kompetenzen

Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- **Grundvorstellungen zur Multiplikation besitzen**, also verstehen, was „mal“ bedeutet.
- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Aufgaben identifizieren.
- **Einfache Aufgaben rechnen**, also die Kernaufgaben des kleinen Einmaleins sicher und schnell darstellen, beschreiben und lösen.
- **Ableitungsstrategien nutzen**, also andere Aufgaben des kleinen Einmaleins sicher und schnell ableiten.
- **Basisfakten abrufen**, also (am Ende des Lernprozesses) die Aufgaben des kleinen Einmaleins automatisieren.

Grundvorstellungen zur Multiplikation besitzen

Zu den Grundvorstellungen der Multiplikation gehören das *Wiederholen*, das *Zusammenfassen* und das *Vergleichen*. Beim Wiederholen wird eine Handlung des gleichen Umfangs mehrmals ausgeführt (*zeitlich-sukzessiv*). Beim Zusammenfassen werden Anzahlen gleicher Größe gruppiert (*räumlich-simultan*). Das Vergleichen beschreibt die multiplikative Beziehung zwischen Anzahlen oder Größen. Auch hier können Alltagsbilder als Ausgangspunkt für Gespräche genutzt werden.



Abb. 39: Alltagsbild zur Anregung der Grundvorstellungen

Dasselbe Prinzip aller Grundvorstellungen ist das Denken in gleich großen Gruppen. Dies sollte durch die Nutzung der Gruppensprache auch sprachlich deutlich gemacht werden: Es sind „3 Fünfer“, „4 Fünfer“, „3 Zweier“ usw.



- 47, Alltagssituationen
- 48, Rechengeschichten

Darstellungen vernetzen

Auch bei der Multiplikation ist das kontinuierliche gezielte Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Handlung, Bild, Sprache, Symbole (Mathesprache)) und das Gespräch darüber zum Aufbau von Grundvorstellungen wichtig. Es sollte in Verbindung mit der Gruppensprache im Zentrum der Förderung stehen. Bei der Multiplikation ergibt sich eine Vielfalt an möglichen Darstellungen: z. B. rechteckige Punktefelder, gleichlange Punktereihen oder -streifen, ordinale Darstellungen mit gleichlangen Sprüngen, Darstellungen von Alltagsmaterialien, Würfelbilder.

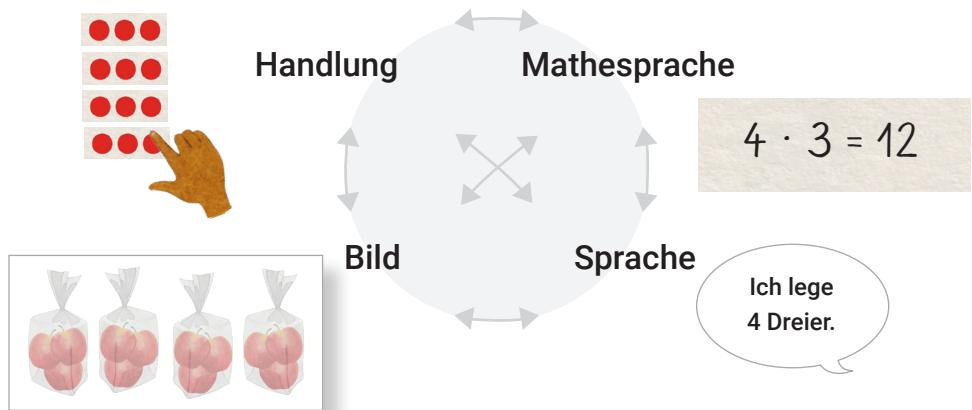


Abb. 40: Darstellungen vernetzen bei der Multiplikation

Bei allen Aktivitäten zur Darstellungsvernetzung ist es entscheidend, immer auch darüber zu reflektieren: „Warum passt das (nicht)? Was ändert sich, wenn es z. B. ein Dreier mehr wird? Wie würde das Bild bei der Aufgabe $4 \cdot 4$ aussehen? Was ist gleich? Was ist verschieden?“ Das heißt, dass Lernende darüber sprechen, wie sie die multiplikativen Strukturen in der jeweils anderen Darstellung sehen und wie sie sich Aufgaben im Kopf vorstellen können.

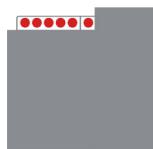


- 49, Punktebild
- 50, Punktereihe

Einfache Aufgaben rechnen

Die Kernaufgaben der Multiplikation sind die Aufgaben mit dem Faktor **1**, **2**, **5** oder **10**. Sie können über bereits bekannte Strukturen und Operationen hergeleitet werden (Wittmann et al., 2017b):

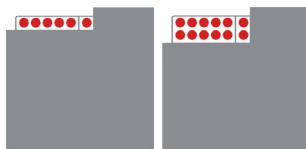
Anzahl bleibt gleich



mit
1

Es ist ein Sechser.

Verdopplungsaufgaben



mit
2

2 Sechser sind
das Doppel von
einem Sechser.



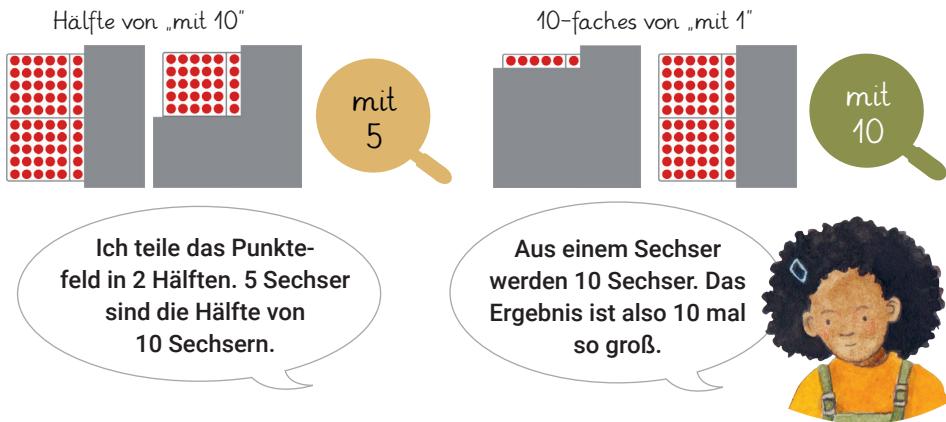


Abb. 41: Kernaufgaben der Multiplikation

Im Unterricht sollen die Kinder durch vielfältige Aufgaben zur Darstellungsvernetzung zunächst sichere Vorstellungsbilder zu den einfachen Aufgaben und ihren Beziehungen untereinander aufbauen. Erst danach sollen die einfachen Aufgaben automatisiert werden, um aus ihnen schwierigere Aufgaben abzuleiten.

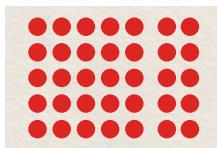


- 51, Einfache Aufgaben rechnen

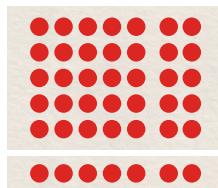
Ableitungsstrategien nutzen

Wenn Kinder die Beziehungen von Einmaleinsaufgaben untereinander herstellen und zum Rechnen nutzen, können sie die Ergebnisse langfristig verstehensorientiert abrufen. Dies wird insbesondere beim flexiblen Rechnen und beim Rechnen in größeren Zahlenräumen wichtig.

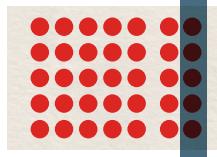
Aus den einfachen Aufgaben des kleinen Einmaleins lassen sich alle schwierigeren Aufgaben durch Vertauschen, Addieren, Subtrahieren, Halbieren oder Verdoppeln ableiten. Voraussetzung für das Ermitteln der Ergebnisse ist, dass die Kinder die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 sicher beherrschen. Wichtig ist auch hier die Darstellungsvernetzung bei der Herleitung der Ableitungsstrategien durch (Material-)Handlung, sprachliche Begleitung und Nutzung der Gruppensprache.



$$5 \cdot 7 = 35$$



$$6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7$$



$$5 \cdot 6 = 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1$$

5 · 7
sind 5 Siebener,
also 35.

6 · 7 ist
ein Siebener mehr,
also $35 + 7 = 42$.

Aus jedem
Siebener wird ein
Sechser, also 5 weniger.

Abb. 42: Ableitung von Multiplikationsaufgaben aus den Kernaufgaben

Eine besondere Eigenschaft der Multiplikation ist die der *Kommutativität*. Die Gleichheit von Tauschaufgaben sollte im Unterricht explizit thematisiert und inhaltlich am Material erarbeitet werden. Kinder sollten diese Gleichheit verstehen, statt sich unverstandene Regeln zu merken – zum Beispiel, indem sie aus unterschiedlichen Perspektiven auf dasselbe Punktebild schauen und ihre Entdeckungen beschreiben.



- 52, Ableitungsstrategien nutzen

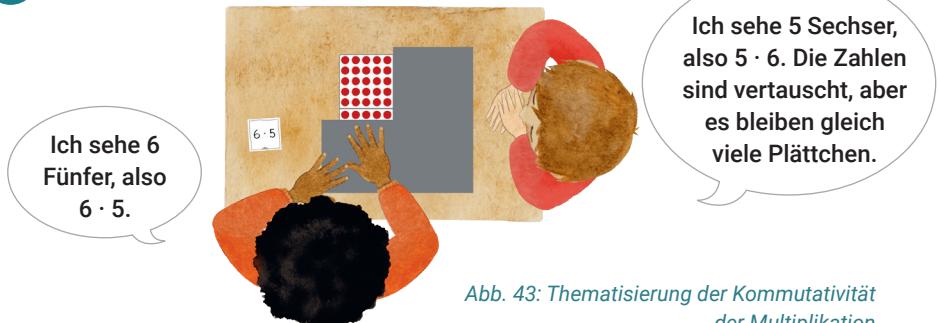


Abb. 43: Thematisierung der Kommutativität
der Multiplikation

Basisfakten abrufen

Erst wenn eine Vorstellung von der Multiplikation vorhanden ist, die Kernaufgaben gesichert sind und Ableitungsstrategien genutzt werden, erfolgt die Automatisierung aller Aufgaben des kleinen Einmaleins durch regelmäßige Übung, z. B. mithilfe der FÖDIMA-Aufgabenkarten (vgl. Abb. 44). Dabei werden Einmaleinsreihen nicht isoliert auswendig gelernt und womöglich immer wieder von vorne aufgesagt. Vielmehr sollten die Aufgaben durch wiederholtes Herleiten aus den einfachen Aufgaben automatisiert werden.



Abb. 44: FÖDIMA-Aufgabenkarten zur Multiplikation

Standortbestimmung

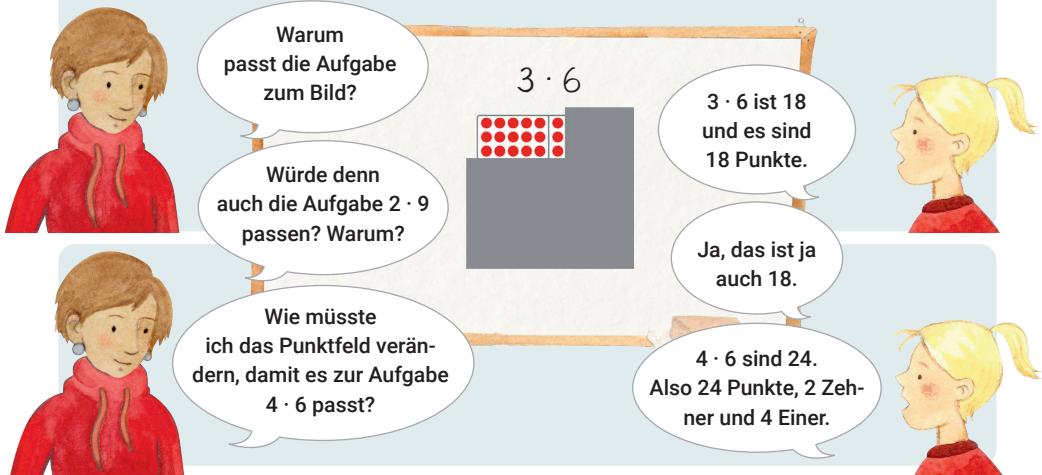
Bei der Aufgabe *Multiplikative Strukturen* erzeugen könnte es den Kindern zunächst schwerfallen, die einzelnen Punkte so einzukreisen, dass sie zur Aufgabe passen. Die unterschiedlichen Möglichkeiten, Gruppen zu bilden, sollten im Unterricht thematisiert werden.

Die Darstellung in der Aufgabe *Punktereihe* ist zu Beginn der Auseinandersetzung mit der Mutliplikation in der Regel nicht bekannt.

Aus der Praxis

Aylin ist von einer anderen Schule neu in die 2. Klasse gekommen. Es fällt auf, dass sie symbolisch gestellte Aufgaben richtig löst, aber keine passenden Darstellungen zeichnet bzw. zu Darstellungen keine passenden Aufgaben notieren kann. Nun will die Lehrkraft genauer diagnostizieren, wie Aylin die Ergebnisse ermittelt und worin die Schwierigkeiten bei der Darstellungsvernetzung liegen.

Um dies im alltäglichen Klassenunterricht umzusetzen, nutzt die Lehrkraft die FÖDIMA-Karteikarte 49, *Punktebild*. Alle Kinder der Klasse arbeiten an der Aufgabe, um ihr Multiplikationsverständnis zu vertiefen: Zu zweit sollen sie Karten mit Malaufgaben und Punktendarstellungen einander zuordnen und das Ergebnis bestimmen. In dieser Arbeitsphase beobachtet die Lehrkraft Aylin und nutzt die gezielten Impulse der Kartei.



Die Lehrkraft beobachtet, dass Aylin Multiplikationsaufgaben zwar schnell und sicher lösen kann, aber die Zuordnung der Punktefelder allein vom Ergebnis der Aufgaben abhängig macht. Die Vermutung liegt nahe, dass sie womöglich alle Aufgaben des kleinen Einmaleins auswendig gelernt hat, ohne über Grundvorstellungen zu verfügen – sie konnte weder in den Alltagsdarstellungen der Standortbestimmung noch in den Punktebildern multiplikative Strukturen erkennen. Wenn sich diese Vermutung bestätigt, sollte mit Aylin noch einmal die Idee der gleich großen Gruppen wiederholt werden, damit sie z. B. die drei Sechser oder die zwei Neuner in der Punktedarstellung zeigen kann. Dies ist Voraussetzung für das weitere Lernen. In den folgenden Stunden arbeitet Aylin mit der Förderanregung *Deutungen von Alltagsbildern thematisieren* der FÖDIMA-Karteikarte 47, *Alltagssituationen*. Sie soll im jeweiligen Alltagsbild zunächst eine Malaufgabe einkreisen, unter Nutzung der Gruppensprache beschreiben und dann die passende Aufgabe aufschreiben. Das Ergebnis der Aufgaben spielt bei der Förderung zunächst keine Rolle. Im weiteren Verlauf sollte Aylin auch mit didaktischen Materialien und Darstellungen (Punktebild, Punktereihe, Punktestreifen) arbeiten sowie Aufgaben damit legen und verändern.

9 Division

Zentrale Kompetenzen

Für ein tragfähiges Operationsverständnis müssen die Kinder...

- **Grundvorstellungen zur Division besitzen**, also verstehen, was „geteilt“ bedeutet.
- **Darstellungen vernetzen**, also z. B. in bildlichen Darstellungen passende Aufgaben identifizieren.
- **Aufgabenbeziehungen nutzen**, also...
 - die Einstudierungsaufgaben mit den Einmaleinsaufgaben in Beziehung setzen können und sie als Umkehrung verstehen,
 - die Kernaufgaben des kleinen Einstudierens sicher und schnell darstellen, beschreiben und lösen,
 - (am Ende des Lernprozesses) andere Aufgaben des kleinen Einstudierens sicher und schnell ableiten.

Grundvorstellungen zur Division besitzen

Zu den Grundvorstellungen der Division gehören das *Aufteilen* und das *Verteilen*. Beim *Aufteilen* wird die Anzahl der Teilmengen gesucht, während die Gesamtmenge und die Gruppengröße gegeben sind. Beim *Verteilen* ist es genau anders herum: Die Gruppengröße wird gesucht, während die Gesamtmenge und die Anzahl der Teilmengen gegeben sind. Diese beiden Möglichkeiten sollten getrennt thematisiert werden. Kinder müssen den Unterschied nicht explizit kennen.



Abb. 45: Grundvorstellungen der Division

Der Aufbau von Grundvorstellungen ist auch bei der Division wichtig, damit Kinder verstehen, was „geteilt“ überhaupt bedeutet. Über das Denken in gleichgroßen Gruppen in Verbindung mit der Nutzung der Gruppensprache („Es sind 3 Vierer“) lässt sich später auch die Bedeutung des Teilens mit Rest erschließen: „Es sind 3 Vierer und zwei Kastanien bleiben übrig“.

Über Wimmelbilder, Alltagssituationen und Rechengeschichten können Grundvorstellungen aufgebaut werden. Dabei sind Bilder oft schwieriger zu deuten, da sie nur den Ausgangs- oder Endzustand der Handlung darstellen können und es einen Kontext braucht, der eine Aufteil- oder Verteilsituation nahelegt. Aus dem folgenden Bild geht z. B. nur aus dem Tafelanschrieb hervor, wie die Lebensmittel aufgeteilt werden sollen.



- 53, Alltagssituationen
- 54, Rechengeschichten



Abb. 46: Alltagsbild zur Anregung der Grundvorstellungen

Darstellungen vernetzen

Auch bei der Division ist das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (*Handlung, Bild, Sprache, Symbole (Mathesprache)*) zur Darstellungsvernetzung wichtig und muss gezielt angesprochen und gefördert werden.

Je nach Grundvorstellung eignen sich bestimmte Darstellungen oder Handlungen: Das *Aufteilen* kann beispielsweise durch das Einkreisen gleichgroßer Gruppen („immer 3“), das Würfeln gleicher Augenzahlen („Wie viele Dreier?“) oder durch gleichgroße Sprünge an der Punktreihe („Wie viele Dreiersprünge?“) dargestellt werden. Für das *Verteilen* gibt es keine ordinalen Darstellungen. Hier bieten sich z. B. Handlungen oder Darstellungen mit Pfeilen an.



Abb. 47: Darstellungen vernetzen bei der Division

Bei allen Aktivitäten zur Darstellungsvernetzung ist es entscheidend, immer auch darüber zu reflektieren: „Warum passt das (nicht)? Was ändert sich, wenn es z. B. Sechser und keine Dreier sind? Wie würde das Bild bei der Aufgabe $15 : 3$ aussehen? Was ist gleich? Was ist verschieden?“. Das heißt, dass Lernende darüber sprechen, wie sie die Strukturen in der jeweils anderen Darstellung sehen und wie sie sich Aufgaben im Kopf vorstellen können.



- 55, *Punktebild*
- 56, *Punktereihe*

Aufgabenbeziehungen nutzen

Auch bei der Division lassen sich schwierigere Aufgaben von einfacheren unter Nutzung von Aufgabenbeziehungen ableiten. Wichtig ist auch hier die Darstellungsvernetzung durch (Material-)Handlung, sprachliche Begleitung und Nutzung der Gruppensprache.

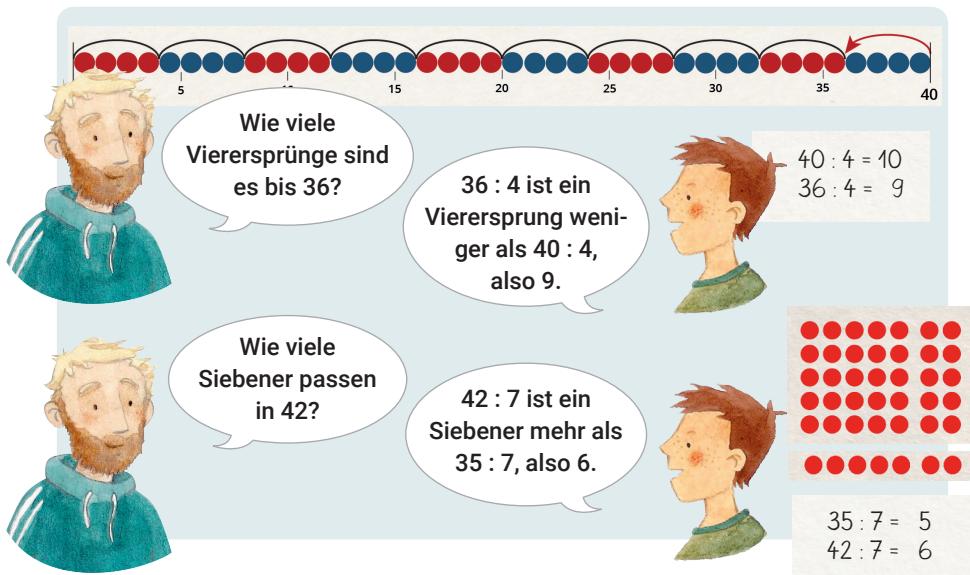


Abb. 48: Ableitung von Divisionsaufgaben aus den Kernaufgaben

Wenn die Kinder eine sichere Grundvorstellung der Division haben und die einfachen Aufgaben der Multiplikation automatisiert sind, können diese genutzt werden, um Divisionsaufgaben zu lösen. Die inhaltliche Vorstellung dahinter ist die Umkehrbarkeit: Eine Handlung kann wieder rückgängig gemacht werden. Es ist jedoch darauf zu achten, dass dies nicht die einzige Vorstellung der Division ist.

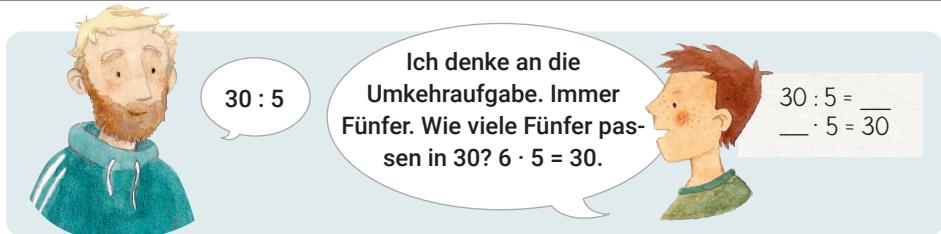


Abb. 49: Ableitung einer Divisionsaufgabe aus der Umkehraufgabe

In Form von Aufgabenfamilien sollen die Kinder zu einer Darstellung jeweils zwei passende Multiplikations- und Divisionsaufgaben finden. Wichtig ist auch hier die jeweilige sprachliche Erklärung, warum Aufgabe und Darstellung zueinander passen, was durch *Umkehrbarkeit* und *Kommutativität* (siehe Multiplikation) begründet werden kann.



- 57, Aufgaben rechnen
- 58, Aufgabenfamilien

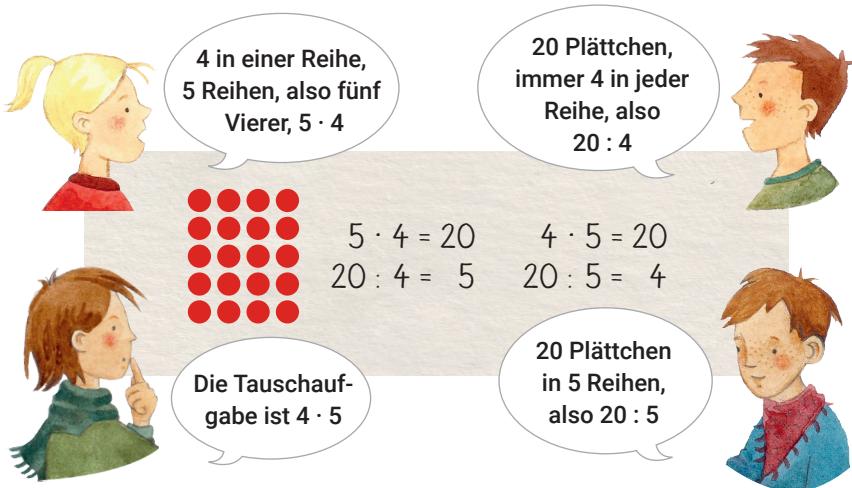


Abb. 50: Thematisierung von Aufgabenfamilien

Standortbestimmung

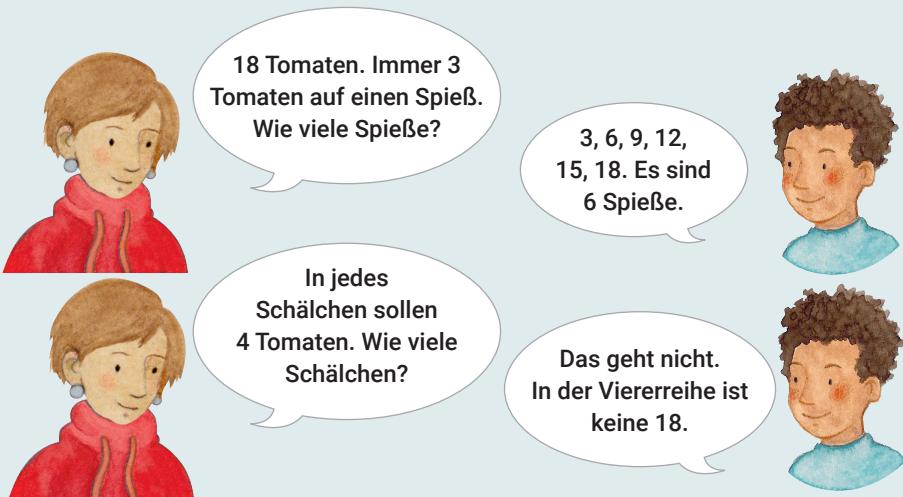
Das Zeichnen von Bildern zu Divisionsaufgaben könnte Kindern schwerfallen, da diese nicht immer eindeutig sind. Fällt dies bei einer Standortbestimmung auf, sollte der Darstellungswechsel ausführlich thematisiert werden.

Wenn Aufgaben zu Punktebildern gefunden werden sollen, ist es sinnvoll, darüber ins Gespräch zu kommen, inwieweit und warum eine Aufgabe passt bzw. nicht passt.

Aus der Praxis

Die Kinder haben im Unterricht gerade mit dem Thema Division angefangen. Es wurden verschiedene Alltagshandlungen durchgeführt und die Division als Umkehrung der Multiplikation erarbeitet.

Die Lehrkraft plant, im Sitzkreis auf der Grundlage der *FÖDIMA-Karteikarte 54, Rechengeschichten*, genauer zu diagnostizieren, inwiefern den Kindern die Darstellungsvernetzung gelingt. Generell können die meisten Kinder passende Divisionsaufgaben zu aufteilenden und verteilenden Situationen finden. Bei Tom fällt der Lehrerin auf, dass er beim Dividieren immer an den Fingern die Multiplikationsaufgaben abzählt und so mit seiner Strategie immer zu einem richtigen Ergebnis kommt – außer bei Aufgaben mit Rest.



Er scheint keine konkrete Divisionsvorstellung zu aktivieren. Um die Grundvorstellungen zu fördern, lässt die Lehrkraft die Kinder im Kreis einige Situationen nachspielen (vgl. Förderanregung: *Rechengeschichte finden und nachspielen*). Dazu notieren sie die passenden Divisionsaufgaben und begründen, warum Aufgaben und Geschichten zueinander passen.

Es wird besonderer Wert auf die Formulierung unter Nutzung der Gruppensprache und die Vorstellung der Division als „passen in“ gelegt: „Wie viele Vierer passen in 18?“ Es werden auch Aufgaben mit Rest gestellt und im Kontext als übrigbleibende Menge gedeutet. Dabei wird die Gruppensprache genutzt, um die Situation zu beschreiben und die Aufgabe symbolisch notiert. Die Kinder wer-

den immer wieder aufgefordert, die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Darstellungsformen explizit herzustellen. Ziel ist es zunächst, die Grundvorstellungen der Division zu sichern: „Wie viele Vierer passen in 18?“. „In 16 passen 4 Vierer. Dann bleiben noch 2 übrig. Es sind also 4 Spieße und 2 Tomaten bleiben übrig.“



Damit Tom Divisionsaufgaben nicht nur über das Abzählen von Einmaleinsaufgaben löst, müssen also die Kernaufgaben der Multiplikation und die Zusammenhänge zwischen Division und Multiplikation verstanden sein. Diese müssen vernetzt und an den linearen und flächigen Darstellungen erarbeitet werden.

Literatur

- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S). <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46>
- Götze, D., Selter, C., & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Klett Kallmeyer.
- Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen*. Klett Kallmeyer.
- Häsel-Weide, U. & Prediger, S. (2017). Förderung und Diagnose im Mathematikunterricht – Begriffe, Planungsfragen und Ansätze. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, Th. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & Ch. Selter (Hrsg.). *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten mit Beiträgen für den Primar- und Sekundarstufenzbereich*: Seelze: Friedrich/ Klett Kallmeyer, 167-181
- Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2020). Tragfähige Grundlagen: Mathematik. In U. Hecker, M. Lassek, & J. Ramseger (Hrsg.), *Kinder lernen Zukunft. Anforderungen und tragfähige Grundlagen* (S. 108-118). Grundschulverband.
- Heritage, M. (2007). Formative Assessment: What Do Teachers Need to Know and Do. *Phi Delta Kappan* (October), 140-145.
- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen [MSB NRW] (2020) (Hrsg.). *Rechenschwierigkeiten vermeiden. Hintergrundwissen und Unterrichtsanregungen für die Schuleingangsphase*. Tannhäuser. Erhältlich unter: <https://pikas.dzlm.de/node/1219>
- MSB NRW (2022) (Hrsg.). *Mathematik gemeinsam lernen. Leitideen, Unterstützungsvorschläge und Unterrichtsbeispiele für inklusive Lerngruppen*. Tannhäuser. Erhältlich unter: <https://pikas-mi.dzlm.de/node/713>
- MSB NRW (im Erscheinen) (Hrsg.) *Mathematik sprachbildend unterrichten*.
- Moser Opitz, E., & Nührenbörger, M. (2023). Diagnose und Förderung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl., S. 597-618). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3>
- Nührenbörger, M. (2022). Anfangsunterricht im Fach Mathematik. In M. Gutzmann, & U. Carle (Hrsg.), *Anfangsunterricht – Willkommen in der Schule!* (S. 168 - 180). Grundschulverband.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen*. Cornelsen.
- Sundermann, B., & Selter, Ch. (2013). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Cornelsen.
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1*. Klett-Kallmeyer.
- Wittmann, E. C., Müller, G. N., Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2017a) (Hrsg.). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*. Klett
- Wittmann, E. C., Müller, G. N., Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2017b) (Hrsg.). *Das Zahlenbuch 2. Lehrerband*. Klett

Herausgeber

FÖDIMA in Kooperation mit PIKAS

www.foedima.dzlm.de

www.pikas.dzlm.de

Fakultät für Mathematik / IEEM

Vogelpothsweg 87

44227 Dortmund

Fachbereich Mathematik und Informatik / GIMB

Johann-Krane-Weg 39

48149 Münster

Fachrichtung Psychologie / IPBE

Fliednerstr. 21

48149 Münster

Autorinnen und Autoren:

Celine Linker

Luise Eichholz

Antonia Giesen

Ben Weiß

Jana Schiffer

Janina Lenhart

Petra Heß

Larissa Aust

Marcus Nührenbörger

Christoph Selter

Elmar Souvignier

Abbildung & Gestaltung: Projekt FÖDIMA / PIKAS; Karoline Mosen

Druck: kern GmbH, Bexbach

Stand: Mai 2024



Dieses Material wurde durch das Projekt FÖDIMA in Kooperation mit dem Projekt PIKAS des Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) im Rahmen der Fachoffensive Mathematik des Schulministeriums NRW konzipiert und kann, soweit nicht anders gekennzeichnet, unter der **Creative Commons Lizenz BY-NC-SA: Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International** weiterverwendet werden. Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können, soweit nicht anders gekennzeichnet, genutzt und verändert werden, wenn die Urheber genannt, die Quellenhinweise aufgeführt bleiben, eine nicht-kommerzielle Nutzung erfolgt sowie das bearbeitete Material unter der gleichen Lizenz weitergegeben wird (<https://creativecommons.org/licenses/>).

Das den FÖDIMA-Materialien zugrunde liegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01NV2102A und 01NV2102B gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichungen liegt bei den Autor:innen.

Einige Abbildungen wurden unter Nutzung der Grundschrift erstellt.

© 2011 beim Grundschulverband e.V. und bei der Wissenschaftlichen Einrichtung der Laborschule Bielefeld

Alle Rechte vorbehalten.



FÖRDERUNG
DIAGNOSE
MATHEMATIK