

Aprobado (Muy bueno). El informe está muy bien. Encontré varios errores y typos que se hubieran resuelto con una relectura atenta del PDF final. Es importante que puedan empezar a mejorar las referencias. En primer lugar, detallen más claramente el instrumental utilizado, lo que sirve también para incorporar manuales de referencia. En segundo lugar, les aconsejo buscar 2 o 3 artículos sobre experimentos (por ejemplo del AMERICAN JOURNAL of PHYSICS) y los citen, esto eleva bastante la calidad de los informes. Hay lugares donde no están bien puestas las unidades o directamente no están. Recuerden que las figuras no forman parte del cuerpo de texto, por ende no vale decir cosas tales como "la figura a continuación:", es decir, las figuras sólo se referencian de la forma "como se aprecia en la Figura X, ...". No se detalla la elección de parámetros, configuración del generador ni cómo se exploran frecuencias. Falta discutir la bondad del ajuste en base al chi-squared. La parte de resultados fue un poco pobre en las discusiones. Lo más grave se notó en referencia a la frecuencia de resonancia del RLC, ya que no les da bien y no discuten nada al respecto. No lo repitan, porque el lector puede asumir un montón de cosas (ninguna de ellas buena): el experimento está mal, no entiende lo que está haciendo, no da una hipótesis de discrepancia, etc.

Análisis de circuitos RC, RL y RLC

Luciano Carullo Bedia
luchibedia@gmail.com

Tadeo Rodríguez
tadeorodriguez842@gmail.com

Joaquín Sequeira
joaquinetsequeira@gmail.com

9 de Octubre, 2023

1. Resumen

Este trabajo busca analizar cómo la presencia de diversas impedancias altera la respuesta del circuito. Se realizaron estudios sobre circuitos del tipo RC, RL y RLC en el régimen transitorio. Se calcularon los tiempos característicos y se obtuvieron los valores de las impedancias. Por otro lado se analizó un circuito RLC a corriente alterna para el cual se halló la frecuencia de resonancia.

2. Introducción

Un circuito RC es aquel que posee una resistencia y un capacitor. Para el caso en el que la fuente alimenta al circuito con corriente continua, la ecuación diferencial de la cual se obtiene la corriente es la siguiente [1]:

$$V_0 = iR + \frac{1}{C} \int_a^b i dt + V_c(0). \quad (1)$$

La ecuación de carga del capacitor viene dada por [1]:

$$V_c(t) = V_c(0) + (V_0 + V_c(0))(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))e^x. \quad (2)$$

Y la de descarga [1]:

$$V_c(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3)$$

donde el tiempo característico es $\tau = RC$.

Un circuito RL es aquel que posee una resistencia y una inductancia. Al ser alimentado por una fuente de corriente continua, la ecuación diferencial que describe el comportamiento es [1]:

$$V_0 = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (4)$$

La caída de tensión para cuando se cierra o se abre el circuito es [1]:

$$V_L = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (5)$$

donde V_0 es una constante que cambia de signo para cada proceso. El tiempo característico queda en estos circuitos como $\tau = \frac{L}{R}$.

El circuito RLC es aquel que posee resistencia, inductancia y capacitancia. La ecuación diferencial que describe la corriente es la siguiente [1]:

$$0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i. \quad (6)$$

Se toma como solución $i(t) = e^{\lambda t}$ donde:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (7)$$

Para el caso subamortiguado [1]:

$$V(t) = e^{-t/\tau} \cdot \cos \left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right] \cdot t \quad (8)$$

Donde $\tau = \frac{2L}{R}$.

Para el sobreamortiguado se puede aproximar por la siguiente ecuación [1]:

$$V(t) = e^{-t/\tau} \quad (9)$$

Donde τ representa el tiempo característico de decaimiento.

La siguiente ecuación diferencial describe la corriente cuando el circuito es alimentado por una fuente alterna [1]:

$$V_0 \cos(\omega t) = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i. \quad (10)$$

Para analizar como se comporta la solución de la ecuación en el estacionario, hay que definir la impedancia propia de cada elemento del circuito.

$$Z = Z_R + Z_c + Z_L = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \quad (11)$$

Planteando la ley de Ohm:

$$V = I \cdot \left[R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right] \quad (12)$$

$$|I| = \frac{|V|}{[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2]^{1/2}}. \quad (13)$$

La frecuencia de resonancia es aquella que maximiza la corriente, para este valor la parte imaginaria de la impedancia total es igual a 0.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (14)$$

El hecho de que en la frecuencia de resonancia la parte imaginaria sea cero, habla además de que el desfase entre el voltaje y la corriente es cero. La relación entre el desfase y la corriente sigue la ecuación

$$\tan(\phi) = \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}. \quad (15)$$

3. Desarrollo experimental

Para el circuito RC (figura 1) se utilizó una capacitancia $(2,2 \pm 0,1) \mu\text{F}$ y una resistencia variable. Se conectó un osciloscopio en paralelo a la resistencia y se emitió desde un **generador de funciones una función cuadrada** a fin de analizar como se carga y se descarga el circuito en cada subida y bajada de tensión, midiendo la diferencia de potencial en el capacitor.

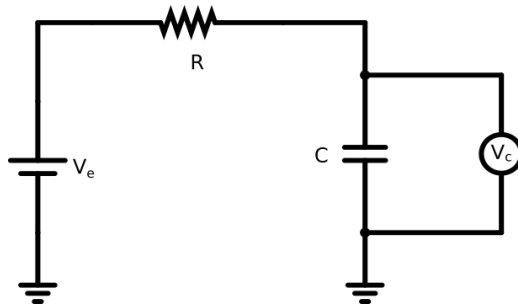


Figura 1: Esquema que muestra el circuito experimental para RC con **corriente continua**.

Para el circuito RL (figura 2) se utilizó una inductancia $(0,95 \pm 0,03) \text{mH}$ y una resistencia variable. El osciloscopio se conectó en paralelo a la inductancia y con el mismo propósito que en el circuito RC se emitió una función cuadrada. Se midió el voltaje en la inductancia.

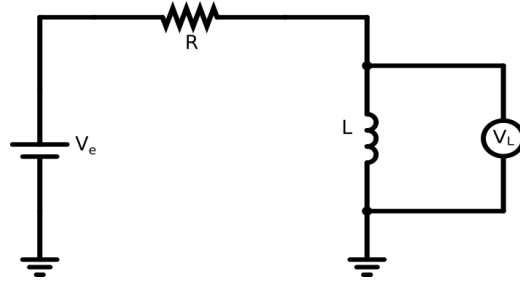


Figura 2: Esquema que muestra el circuito experimental para RL con corriente continua.

Para el circuito RLC transitorio (figura 3) se colocaron en serie una resistencia variable, una capacitancia $(0,51 \pm 0,02) \mu\text{F}$ y una inductancia $(0,0013 \pm 0,0001) \text{H}$. Al igual que en los circuitos anteriores se emitió una función cuadrada. En este caso se midió la caída de tensión en el capacitor.

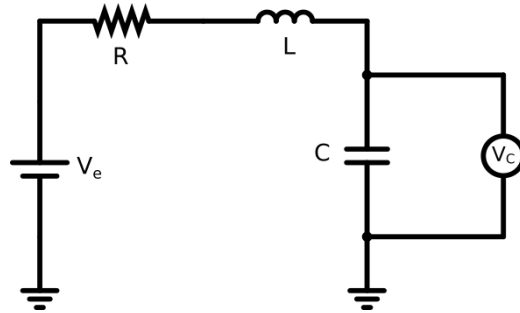


Figura 3: Esquema que muestra el circuito experimental para RLC con corriente continua.

Finalmente para el circuito de RLC conectado a corriente alterna (figura 4) se usó una $C = (10,1 \pm 0,1) \mu\text{F}$, un $L = (0,12 \pm 0,01) \text{H}$ y una $R = (1111 \pm 1) \Omega$. Teniendo en cuenta esto se emitió un potencial alterno con una forma sinusoidal y se hizo un barrido de frecuencias, midiendo el voltaje a través de la resistencia.

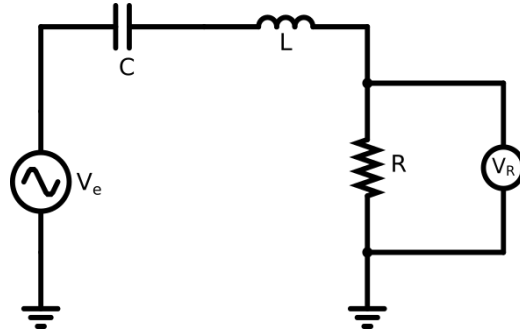


Figura 4: Esquema que muestra el circuito experimental para RLC con corriente alterna.

4. Resultados

En el estudio del régimen transitorio del circuito RC, en primer lugar se ajustaron los datos de carga y de descarga por las ecuaciones 2 y 3 respectivamente. Esto se hizo para distintos valores de resistencias, con el objetivo de encontrar mediante un ajuste lineal el valor de la capacitancia del sistema. Todo esto se puede ver en la figura 5, con ejemplos de las señales de carga y descarga con sus respectivos ajustes en el rango exponencial, y los ajustes del tiempo característico como función de la resistencia por una lineal. Estos últimos tuvieron $\chi^2_{carga} = 31,5$ y $\chi^2_{descarga} = 14,5$, obteniéndose respectivamente $C = (2,1 \pm 0,2) \mu\text{F}$ y $C = (2,1 \pm 0,1) \mu\text{F}$. Ambos valores no presentan diferencias significativas con el tabulado, $C = (2,2 \pm 0,2) \mu\text{F}$.

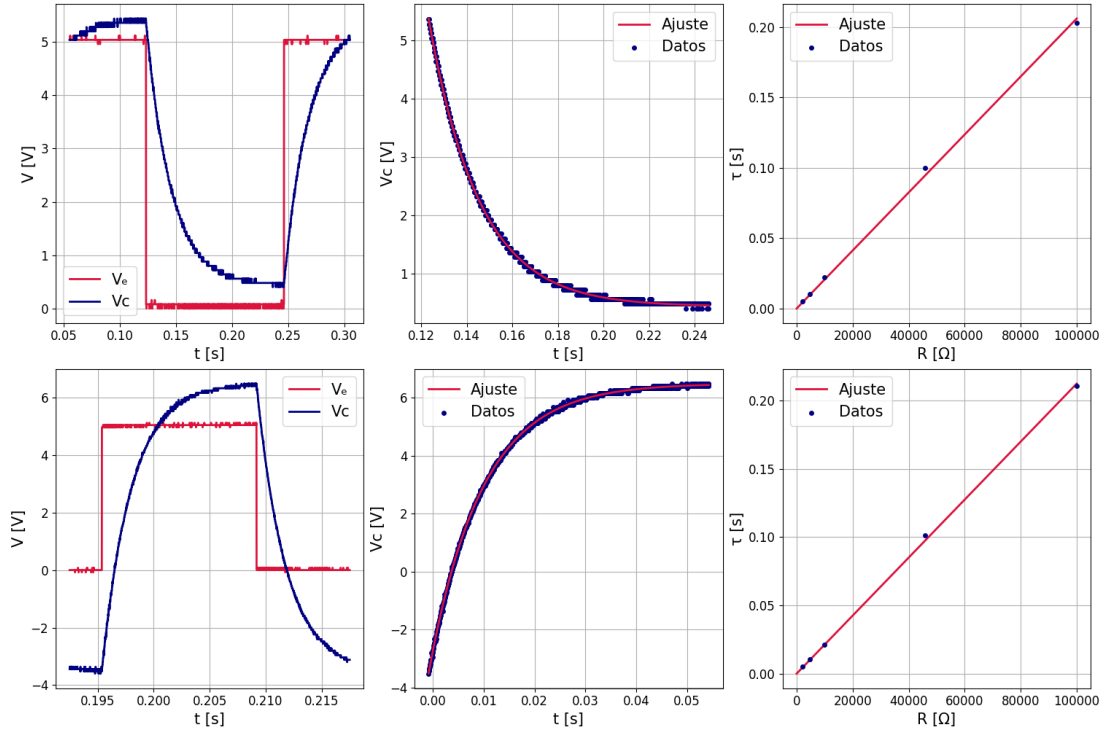


Figura 5: Se muestran los graficos correspondientes a la carga y la descarga del capacitor, para ambos casos se realizó un ajuste lineal para distintas resistencias a fin de encontrar el tiempo de carga o descarga característico.

En el circuito RL se procedió de la misma forma, ajustando el voltaje en función del tiempo según la ecuaciones 5. Nuevamente se varió el valor de la resistencia y se buscó calcular la inductancia. En la figura 6 se pueden ver ejemplos de encendido y apagado con sus respectivos ajustes, además de los ajustes por una hipérbola del tiempo característico en función de la resistencia. En el encendido se obtiene $\chi^2 = 10,9$ y $L = (0,92 \pm 0,04)$ mH. En el apagado, $\chi^2 = 63,5$ y $L = (0,97 \pm 0,03)$ mH. En ambos casos los valores de la inductancia no se obtienen diferencias significativas con el tabulado, $L = (0,95 \pm 0,03)$ mH.

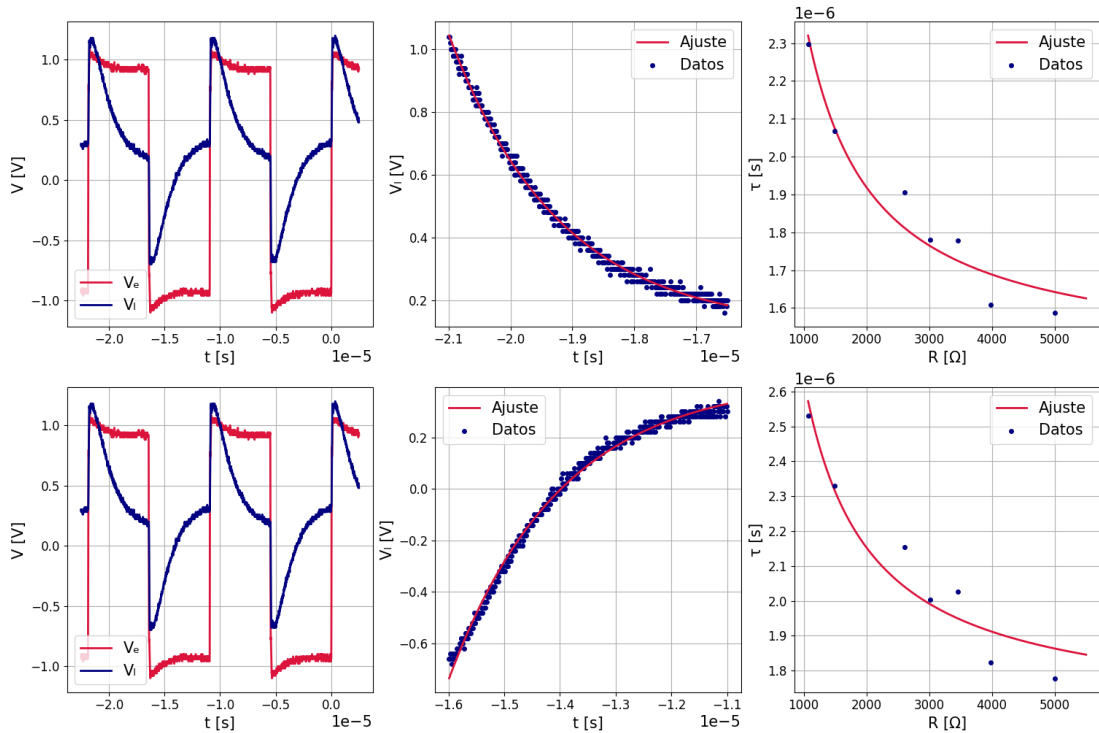


Figura 6: Gráficos de voltaje en función del tiempo para el encendido y apagado de la corriente, y del tiempo característico en función de la resistencia ajustado por una hipérbola cuyo coeficiente es la inductancia.

Se muestran a continuación los resultados del circuito RLC a corriente continua. En la figura 7 se puede ver el caso de subamortiguado para una resistencia de $(3,8 \pm 0,1) \Omega$. Una resistencia de esta magnitud sigue la ecuación 8. Se puede ver en la figura:

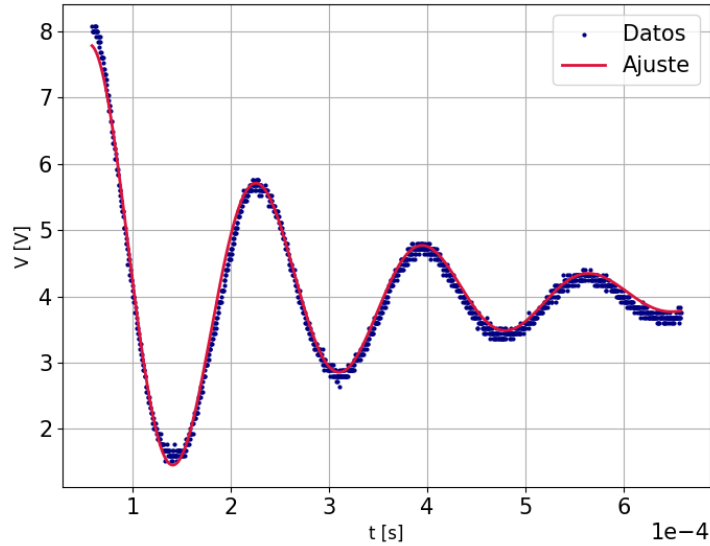


Figura 7: Caída de tensión en la resistencia en función del tiempo para el caso subamortiguado. Ajustado por la ecuación 8, por un $\chi^2 = 14,09$

La frecuencia ajustada es $\omega = 37135$. De aquí se puede despejar la resistencia que queda $R = (4,1 \pm 0,2) \Omega$

Por otro lado se realizó un sobreamortiguado con una $R = (12,78 \pm 0,01) k\Omega$. Se puede ver en la siguiente figura:

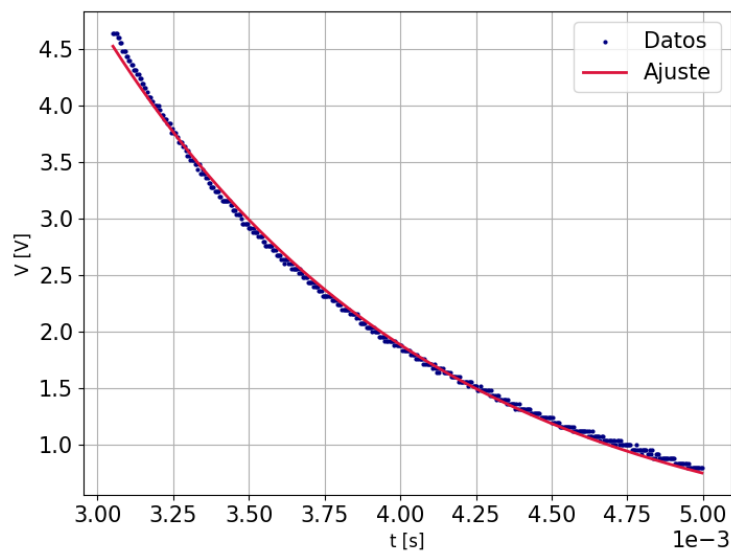


Figura 8: Caída de tensión en la resistencia en función del tiempo para el caso sobre amortiguado. Ajustado por la ecuación 9, con un $\chi^2 = 33,1$.

El tiempo característico $\tau = (0,00108 \pm 0,00001) s$

El último de los resultados corresponde al experimento sobre un circuito RLC, alimentado ahora con una fuente de corriente alterna y analizando el régimen estacionario. Para estudiar esto se realizó un barrido de 75

frecuencias equiespaciadas, desde los 200 Hz hasta los 1550 Hz. Para cada una de estas frecuencias se obtuvieron los datos del voltaje enviado por la fuente y de la caída de tensión en la resistencia, ambos en función del tiempo. Para cada frecuencia se ajustaron ambas señales por una función sinusoidal. Primero se buscó la amplitud de cada señal medida en la resistencia, esperando observar una resonancia en la frecuencia natural del sistema. En segundo lugar, se obtuvieron las fases de cada una de las señales, para luego evaluar el desfase en función de la frecuencia.

Usando la ecuación 15 se decidió ajustar la diferencia de fase por un arco tangente. Los datos y el ajuste pueden observarse en la figura 9(a), se calculó que el desfase vale cero en $f = (792 \pm 1)$ hertz. El ajuste presenta un $\chi^2 = 180$. Para completar el análisis, se ajustó la amplitud del voltaje en función de la frecuencia de acuerdo con la ecuación 14. En la figura 9(b) se observa una campana de resonancia, con los datos del ajuste se calculó el máximo, que resultó $f = (785 \pm 1)$ Hz. Para este ajuste se obtuvo un $\chi^2 = 112$.

Estos datos de la frecuencia de resonancia no deberían presentar diferencias significativas con la calculada a partir de los datos reales del circuito, sin embargo cuando se calcula usando la ecuación 14, se obtiene un $f = (503,3 \pm 0,7)$ hertz

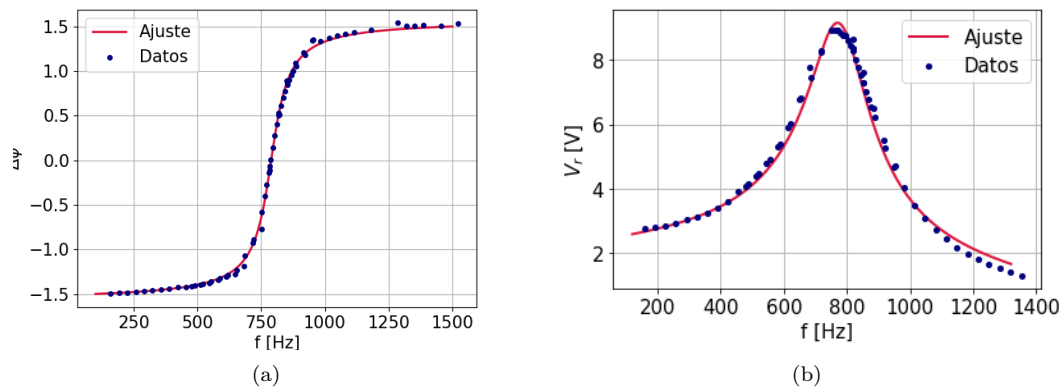


Figura 9: En la figura (a) se muestra el desfase entre el voltaje de la fuente y la corriente, con su ajuste por un arco tangente. En la figura (b) se observa la intensidad del voltaje medido en la resistencia en función de la frecuencia, ajustado por su correspondiente función.

5. Conclusiones

Se llevaron a cabo experimentos para caracterizar como afecta la caída de potencial en distintos elementos de circuitos para distintas disposiciones. Se pudo estudiar y caracteriza la carga y descarga de un capacitor en un circuito RC. También se analizó como la inductancia genera cambios en la corriente al encenderse o apagarse la fuente. Por otro lado se estudiaron los casos de subamortiguado y sobreamortiguado en un circuito de RLC. Finalmente se observó el comportamiento del RLC con una fuente alterna, se vio como cambia la fase y la amplitud en función de la frecuencia. Para todos los casos se compararon los valores obtenidos mediante ajustes con los valores tabulados de cada uno de los elementos de circuito.

Referencias

- [1] Félix Rodríguez Trelles. *Temas de Electricidad y Magnetismo*. 1984.