Análisis de la linealidad de la Ley de Ohm a distintas frecuencias

Joaquín Sequeira
joaquinetsequeira@gmail.com

Luciano Carullo Bedia
luchibedia@gmail.com

Tadeo Rodríguez
tadeorodriguez842@gmail.com

11 de Septiembre, 2023

En este trabajo se exponen los resultados de un experimento cuya intención fue estudiar la reacción de un circuito a frecuencias altas. Se buscó establecer bajo que condiciones son despreciables los efectos de impedancias desconocidas del sistema. Para esto, se partió de la Ley de Ohm, y se evaluó la linealidad para distintas frecuencias utilizando la métrica del r^2. Además, se buscó hallar el valor de estas impedancias. Con este objetivo, se calculó, en el rango en que resulta adecuado utilizar la Ley de Ohm, la resistencia $R_2 = (1{,}25 \pm 0{,}03)\,\mathrm{k\Omega}$. El valor obtenido para la capacitancia parásita fue de $C = (259 \pm 6)\,\mathrm{pF}$.

1. Introducción

La teoría circuital tiene su base fundamental en la Ley de Ohm, que establece que la diferencia de potencial a través de una resistencia está dada por

$$V = IR. \tag{1}$$

Con V el voltaje, I la corriente y R la resistencia del circuito. Si se tiene una fuente con potencial V_0 y no hay elementos con reactancias capacitivas o inductivas en el circuito, se cumple que $I = \frac{V_0}{R_{eq}}$, con R_{eq} la resistencia equivalente del sistema. A partir de esto se puede expresar la corriente que pasa por una resistencia en particular como $I = \frac{V_i}{R_i}$. Juntando estas dos expresiones se llega a la ecuación

$$V_0 = V_i \left(\frac{R_{eq}}{R_i} \right), \tag{2}$$

donde V_i es la caída de tensión ~~el el tramo de~~ la resistencia correspondiente R_i.

Cuando aparece una capacitancia en el circuito, las caídas de tensión se van a distribuir entre la misma y las resistencias. Esto hace que el voltaje a través de una resistencia sea menor al caso únicamente resistivo. El decaimiento de la amplitud está dado por

$$V_{max} = \frac{V_0}{1 + \omega\tau} \tag{3}$$

con $\tau = RC$ el tiempo característico del circuito. Este es un resultado de aplicar la transformada de Laplace al sistema para pasar del espacio de tiempos al espacio de frecuencias.

2. Desarrollo experimental

El circuito que se estudió en este experimento se puede observar en la figura 1. Para alimentarlo se utilizó un generador de funciones enviando una señal periódica con forma de sierra. Contó con dos resistencias, $R_1 = (4{,}84 \pm 0{,}05)\,\mathrm{k\Omega}$ calculada previamente al armado utilizando un multímetro, y la incógnita R_2. El voltaje de la fuente V_0 y el de la resistencia R_2 V_m, se midieron con un osciloscopio.

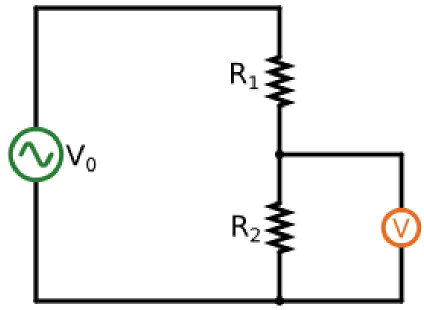
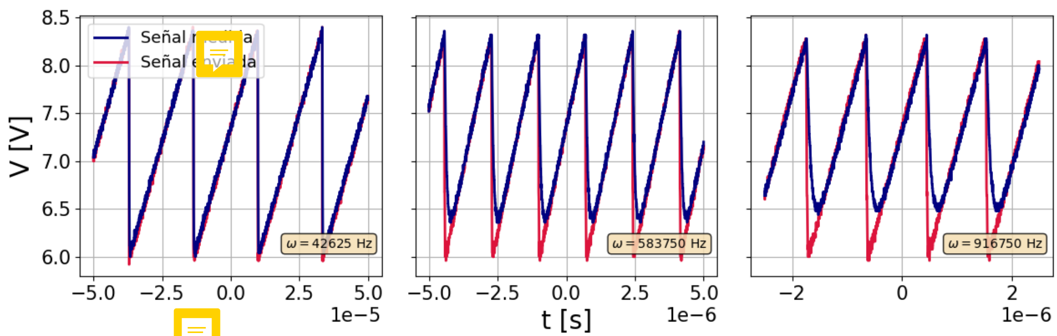


Figura 1: Esquema del circuito. Se envió a distintas frecuencias una función en forma de sierra. El circuito cuenta con 2 resistencias y en paralelo a la R_2, un osciloscopio que mide la caída de tensión en la resistencia.

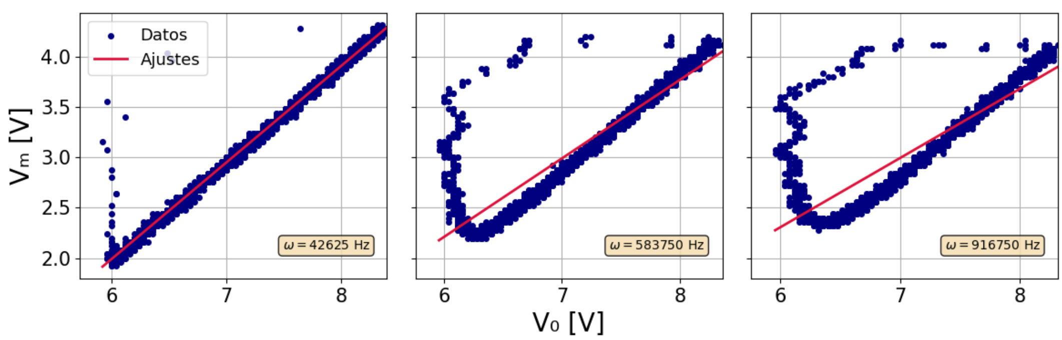
Con el objetivo de estudiar la respuesta del sistema a distintas frecuencias, se realizó un barrido desde 1000 Hz hasta 1 MHz, de 25 frecuencias equiespaciadas. Para cada una de ellas se obtuvieron con el osciloscopio los valores de V_m y V_0.

3. Resultados

Para cada una de las frecuencias del barrido se obtuvieron los valores de V_m y V_0. En la figura 2(a) se puede observar a modo de ejemplo, la evolución temporal de V_m y V_0 para tres frecuencias distintas: 42 625 Hz, 583 750 Hz y 916 750 Hz. Es apreciable a simple vista que la diferencia entre las dos señales es más significativa cuánto mayor sea la frecuencia. Sin embargo, hay también métricas que nos permiten establecer un punto en el cuál la relación entre las dos señales deja de ser como se esperaba.



(a)



(b)

Figura 2: En (a) se grafican la señal enviada y la señal medida en función del tiempo para 3 frecuencias distintas. En (b) se muestra el V_m medido en función del V_0 enviado y el ajuste lineal que se realizó. Los valores de r^2 son de 0,98, 0,79 y 0,70 respectivamente.

Partiendo de la ecuación 2, que establece que la relación entre ambos voltajes debe ser lineal, se ajustaron los datos de cada frecuencia por una recta. La figura 2(b) muestra los datos y los ajustes de las mismas tres señales que se mostraron previamente. La bondad de cada uno de los ajustes se evaluó calculando el r^2. En la figura 3 se muestran los r^2 de los ajustes para las 25 frecuencias del barrido. Se observa una clara tendencia; cuanto mayor es la frecuencia, menor es el r^2. Esto implica que no siempre es adecuado estudiar el sistema usando la Ley de Ohm, que falla en predecir el comportamiento cuando las frecuencias son altas. La relación entre V_m y V_0 depende de, por lo menos, un factor adicional.

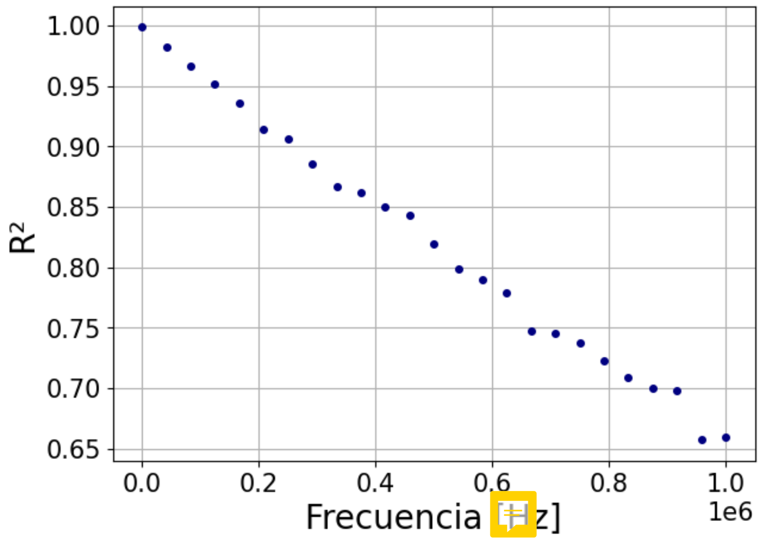


Figura 3: Se muestra el valor del r^2 obtenido para cada ajuste lineal en función de la frecuencia con la que se hizo el experimento. Se puede ver que cuanto mayor es dicha frecuencia la función lineal se ajusta de forma menos satisfactoria. Se eligieron 25 frecuencias desde 1000 Hz hasta 1 MHz.

Este fenómeno se observa porque a altas frecuencias los elementos del circuito, particularmente el osciloscopio, presentan capacitancias. Estas, producto de los cambios en la corriente, generan que el voltaje medido con el osciloscopio no tenga la forma de la señal emitida y que la amplitud sea menor cuanto mayor es la frecuencia. Esto último es producto de cómo funciona la carga y descarga de un capacitor. Cuando se descarga, lo hace de forma exponencial, y a frecuencias altas no llega a descargarse de forma completa antes de que cambie la corriente. Es por esto que se ve también un decaimiento en la amplitud.

Con esto en mente, se buscó encontrar el valor de la capacitancia parásita del circuito. Para esto fue necesario encontrar el valor de la resistencia R_2. Observando que para frecuencias bajas la relación entre V_m y V_0 sí se corresponde con la teoría de la Ley de Ohm, y usando entonces la relación lineal que establece 2, se ajustaron los datos de los voltajes al igual que en la figura 2(b), pero para el valor de frecuencia más bajo ($\omega = 1000\,\mathrm{Hz}$). Este ajuste, con un $r^2 = 0.998$, permitió despejar un valor para la resistencia de $R_2 = (1{,}25 \pm 0{,}03)\,\mathrm{k\Omega}$.

Encontrar el valor de la capacitancia, sin embargo, no es posible limitándose a tratar el sistema de acuerdo con la Ley de Ohm; es necesario estudiarlo como un circuito RC. De acuerdo con la teoría de circuitos enmarcada en la introducción, la presencia de un capacitor implica un decaimiento en la amplitud que sigue la fórmula 3. Para cada frecuencia, se midió la amplitudes máxima alcanzada por V_m para cada frecuencia, y se realizó un ajuste de acuerdo con 3. En la figura 4 se pueden ver los datos de voltaje máximo y el ajuste realizado. De la variable del ajuste $\tau = RC$.

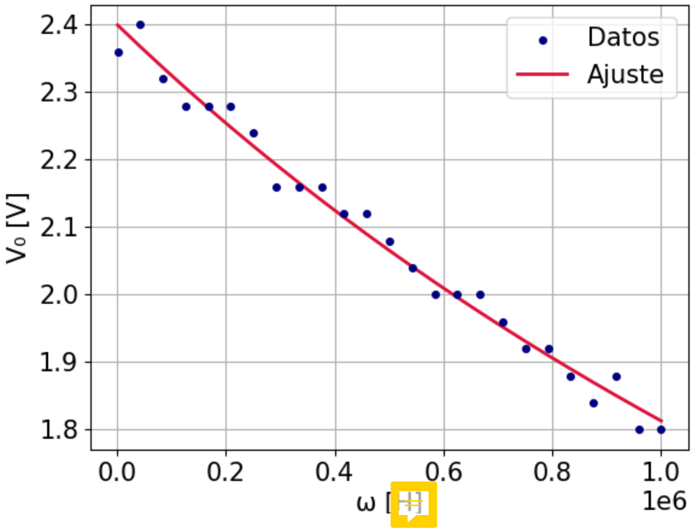


Figura 4: Se presenta la amplitud máxima medida en función de su respectiva frecuencia, se realizo un ajuste siguiendo 3

Al ajustar ~~el parámetro obtenido que corresponde al valor del tiempo característico,~~ se puede obtener el valor de la capacitancia. $C = (259 \pm 6)\,\mathrm{pF}$.

4. Conclusión

Se mostró un método posible para encontrar las impedancias del sistema. Para llegar a este resultado fue importante primero caracterizar correctamente la respuesta del sistema a distintas frecuencias. El criterio utilizado para la determinación del rango de validez de la Ley de Ohm, mediante la métrica del r^2, fue que para cualquier r^2 menor a 0,98, las impedancias intervenían de forma relevante en el sistema. Las frecuencias del orden de 0,1 MHz ya presentan un r^2 menos satisfactorio. Para frecuencias más bajas, con un r^2 mayor a 0.98 sigue siendo adecuado el tratamiento con la Ley de Ohm, y es en ese rango en el que se calculó la resistencia $R_2 = (1{,}25 \pm 0{,}03)\,\mathrm{k\Omega}$.

La causa de que a mayores frecuencias no se observe lo previsto por la teoría, es la presencia de una capacitancia parásita. La presencia de un capacitor genera que a grandes frecuencias este no alcance a cargarse y descargarse, por lo que el voltaje V_m decrece cuando aumenta la frecuencia. Se utilizó una fórmula que describe este decaimiento de amplitud en función de la frecuencia, la resistencia y la capacitancia, mediante un ajuste se encontró, finalmente, el valor de la capacitancia $C = (259 \pm 6)\,\mathrm{pF}$.

Este valor es esperable, ya que es alrededor de tres órdenes de magnitud menor al de muchos capacitores comerciales, pero sin ser demasiado menor hasta el punto en el que es totalmente despreciable, al haber sido observados sus efectos a lo largo del experimento.