



Tercera entrega parcial

Andrew McCallum
awmcc97@gmail.com

Joaquín Sequeira
joaquinetsequeira@gmail.com

Tadeo Rodríguez
tadeorodriguez842@gmail.com

24 de Abril, 2023

A lo largo de este informe se buscó caracterizar el comportamiento de ondas estacionarias en distintos medios de propagación. Concretamente, se buscó la velocidad de propagación de una onda en una cuerda y de una onda de sonido en el aire.



1. Introducción

Dada la ecuación de ondas para una dimensión [2]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

se encuentran soluciones estacionarias de la forma

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta), \quad (2)$$

donde A es la amplitud, k la frecuencia angular espacial, ω la frecuencia angular temporal y φ y θ fases iniciales respectivas. La función Ψ representa la perturbación de un elemento infinitesimal respecto de su posición de equilibrio. Se observa que, al ser la fase φ una constante, hay puntos en el espacio para los cuales Ψ se anula a todo tiempo. Es por eso que a estas soluciones se las denomina estacionarias.

Reemplazando esta solución en la ecuación de ondas clásica se llega a una relación de dispersión de forma

$$\omega = vk, \quad (3)$$

que se puede escribir en función de la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ y la frecuencia temporal $f = \frac{\omega}{2\pi}$ como

$$f\lambda = v. \quad (4)$$

La velocidad v depende del medio donde se propague la onda. Si se propaga en una cuerda resulta

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (5)$$

siendo T la tensión a la que esta sometida, y μ la densidad lineal de masa. Si la onda se propaga en aire, en cambio, la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_a}}, \quad (6)$$

siendo γ la constante adiabática del aire, P_0 la presión media y ρ_a la densidad del aire.

Volviendo a tratar con la ecuación de ondas clásica, encontramos que la solución mas general es una suma de soluciones estacionarias de la misma frecuencia y la misma fase que se denominan modos normales. La solución más general se escribe entonces

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(k_m x + \varphi_m) \cos(\omega_m t + \theta_m) \quad (7)$$

Es importante a la hora de tratar con ondas estacionarias conocer las condiciones de contorno, ya que estas definen la frecuencia y la longitud de onda con las que oscilaran los determinados modos normales. Las condiciones de contorno pueden ser fijos o libres, en el caso de cuerdas, y cerradas o abiertas, en el caso del tubo de Kundt, tratando con ondas de presión o desplazamiento en el aire. La condición de extremo fijo establece que

$$\Psi(x_0, t) = 0,$$

mientras que la de extremo libre establece

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x_0} = 0. \quad (8)$$

Usando estas condiciones para un caso con ambos extremos libres o ambos extremos cerrados se obtiene

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (9)$$

y

$$f_n = \frac{nv}{2L}. \quad (10)$$

Donde L es la distancia entre los extremos y n el número de modo (mayor o igual a uno). Las condiciones de un caso cerrado-abierto por otro lado resultan en

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad (11)$$

y

$$f_n = \frac{(2n-1)v}{4L}. \quad (12)$$

Es importante distinguir si se está analizando una onda de desplazamiento o de presión, ya que las condiciones de contorno que son fijas para un caso no lo son en el otro. Hay una relación que vincula estos dos tipos de onda, y establece

$$\psi_p = -\kappa \frac{\partial \psi_x}{\partial x}. \quad (13)$$

Esta ecuación, con ψ_p y ψ_x la onda de presión y de desplazamiento respectivamente, indica que hay un desfase de $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la posición entre ambas ondas. Un máximo en desplazamiento será un mínimo en presión, y lo mismo a la inversa. Llevándolo al caso de los contornos, también se ve que un extremo fijo es un extremo libre para la otra.


Al analizar ondas de sonido en un tubo cilíndrico abierto, se debe tener en cuenta que este último no es un extremo definido de la misma manera que uno cerrado. Esto hace que su longitud efectiva no sea la misma que su longitud natural. Para el caso abierto-cerrado, se tiene [1]

$$L_{ef} = L + 0,3a, \quad (14)$$

con L la longitud del tubo y a su radio.

2. Desarrollo experimental

2.1. Cuerdas

El sistema experimental (Figura 1) de la primera parte del trabajo consistió en una cuerda con un extremo fijo en una barra de metal y el otro extremo pasado por una polea con un punto de apoyo previo a la polea. La cuerda a su vez, en el extremo del punto fijo pasa por un oscilador (wave driver) conectado a un generador de funciones. Este le transmitía una señal oscilante. El en otro extremo un platillo con peso que le generaba una tensión. 

Para caracterizar las cuerdas se midió su masa (m) en una balanza y se midió su longitud (l) con un metro. A partir de ahí se sacó $\mu = m/l$ definida como la densidad lineal de masa.

Se pesaron también las masas y el platillo que las cargaba, para así obtener la tensión T a la cual estaba sometida la cuerda.

Con el objetivo de encontrar la frecuencia de los modos normales se usó la ecuación (10). Una vez hallada, se usó la frecuencia que excitaba el primer modo normal y se midió la distancia entre el primer nodo que se formaba después del forzante hasta el punto de apoyo. Luego se repitió el mismo procedimiento hasta llegar al sexto modo. Posteriormente, se repitió el mismo procedimiento con 5 masas distintas.

Después se cambio la cuerda por una con una densidad lineal diferente y se repitió todo el mismo procedimiento.

Con el fin de analizar las oscilaciones de una cuerda con una discontinuidad se propuso un segundo experimento. Se calculó la densidad lineal de cada cuerda y se encontró la frecuencia del primer modo normal para la primera parte de la cuerda. Esto se hizo usando las ecuaciones (10) y (5), con L la distancia entre el extremo fijo y el cambio de densidad. Luego, utilizando (10), se calculó la longitud de onda del segundo modo de la segunda cuerda. Este valor debía ser igual al largo del segundo segmento para que oscilase en el modo 2. Los datos de la primera cuerda para este experimento son $l_1 = (2,42 \pm 0,01)$ m y $m_1 = (1,17 \pm 0,01)$ g y para la segunda cuerda son $l_2 = (1,37 \pm 0,01)$ m y $m_2 = (0,0867 \pm 0,0001)$ g

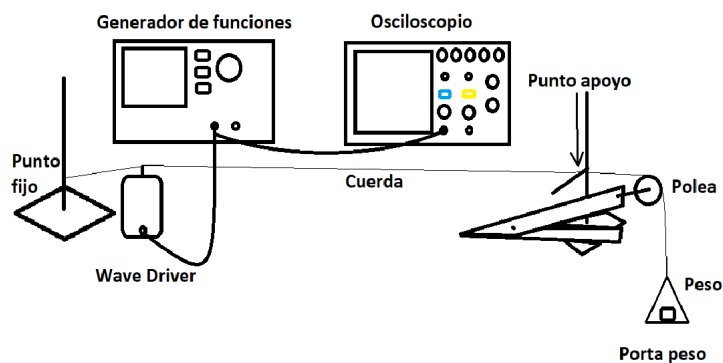


Figura 1: Sistema experimental con una cuerda con un extremo fijo y un punto de apoyo que pasa por una polea de la cual cuelga un platillo con peso, un oscilador (wave driver), el generador de funciones y un osciloscopio para ver la señal que se le estaba mandando al oscilador.

2.2. Tubo de Kundt

El sistema experimental (Figura 1) consistió en conectar un generador de funciones a un parlante que se encontraba pegado a un extremo de un tubo, cerrado por un pistón móvil en el otro extremo a una distancia $L = 80\text{cm}$. Dentro del tubo se encontraba un micrófono que podía ser movido a lo largo del tubo mediante un palillo. El cable del micrófono salía por el lado cerrado por el parlante, pasaba su señal por un amplificador y luego al osciloscopio.

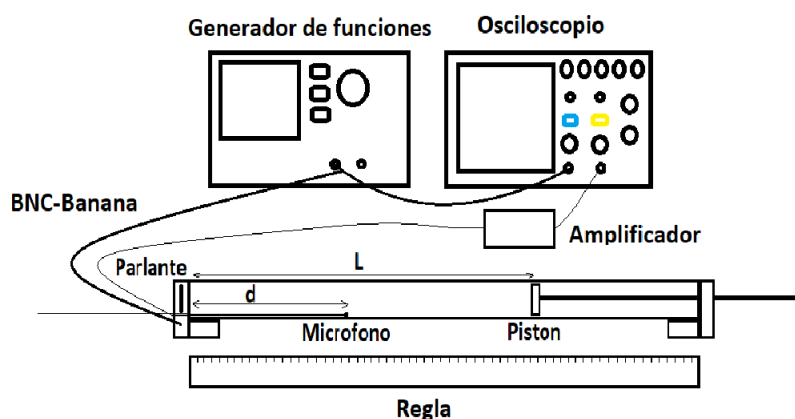


Figura 2: Sistema experimental. Se puede observar un tubo con ambos extremos cerrados. En el extremo izquierdo un parlante y a una distancia d un micrófono sobre un palillo móvil. En el extremo derecho un pistón móvil y removible que podía hacer variar L . El generador de funciones conectado al parlante y al osciloscopio con la misma señal a través de una T, y el micrófono conectado a un amplificador y luego al osciloscopio.

Con el objetivo de averiguar si las ondas que se medirían eran de presión o de desplazamiento se colocó el micrófono en el pistón (visto en la Figura 2 con $d \rightarrow L$). Las condiciones de contorno establecen que una onda de desplazamiento tiene un nodo en el extremo cerrado, mientras que para la de presión el mismo es un máximo. Luego se puso el micrófono en el parlante, con $d \rightarrow 0$, se observaron los resultados y se midió el resto del trabajo a partir de eso.

Para encontrar la frecuencia de modos normales (f_m) en el caso cerrado-cerrado se usó la ecuación (9), y para el caso abierto-cerrado la ecuación (11).

Se realizó un barrido de un ancho de 10 Hz alrededor de la frecuencia calculada para el primer modo normal. Se tomó como valor f_1 aquel en el cual se encontró el máximo de amplitud. Luego se midió a qué distancia estaba el nodo del parlante usando la regla interna al tubo. Luego se excitó el segundo modo normal y se midió la distancia entre el primer nodo y el próximo. De esta manera se midieron siete modos.

Para medir la amplitud de la onda se eligió el modo 3 y se fue moviendo el micrófono cada 1 cm midiendo

la amplitud.

Por último, con la intención de determinar la velocidad del sonido, se envió desde el parlante un pulso cuadrado de frecuencia de 10 Hz y $V_{pp} = 2V$. Colocando el micrófono a una distancia fija del parlante (40 cm), se recibieron las señales de sonido, que correspondían a la onda emitida y a los rebotes de la misma. Una vez registradas las señales en el osciloscopio, se calculó el tiempo que transcurría entre dos picos consecutivos.

3. Resultados

3.1. Cuerdas

Para calcular la densidad lineal de masa (μ) de cada cuerda se las midió, con $l_1 = (2,97 \pm 0,01) \text{ m}$ y $l_2 = (2,97 \pm 0,01) \text{ m}$, y se las pesó, obteniendo $m_1 = (1,37 \pm 0,01) \text{ g}$ y $m_2 = (0,18 \pm 0,01) \text{ g}$. Las densidades obtenidas fueron

$$\mu_1 = (0,457 \pm 0,002) \text{ g/m}, \quad (15)$$

$$\mu_2 = (0,060 \pm 0,002) \text{ g/m}. \quad (16)$$

A partir de las mediciones de la distancia entre el primer nodo cercano al forzante y el punto de apoyo se calculó λ_m usando la ecuación (9). Para los modos normales del 1 al 6 se obtuvieron los valores mostrados en la figura 3.a. Los mismos fueron ajustados por una hipérbola distinta para cada tensión a partir de la expresión (4). De esta ecuación se extrae que los coeficientes de decaimiento son la velocidad de propagación de cada onda.

Aplicando el mismo procedimiento a la segunda cuerda se llegó a los valores que se observan en la figura 3.b, en este caso para los modos del 1 al 6. ~~Nuevamente se ajustó por hipérbolas cuyos coeficiente son la velocidad de propagación.~~ Los ajustes se pueden ver en las respectivas figuras.

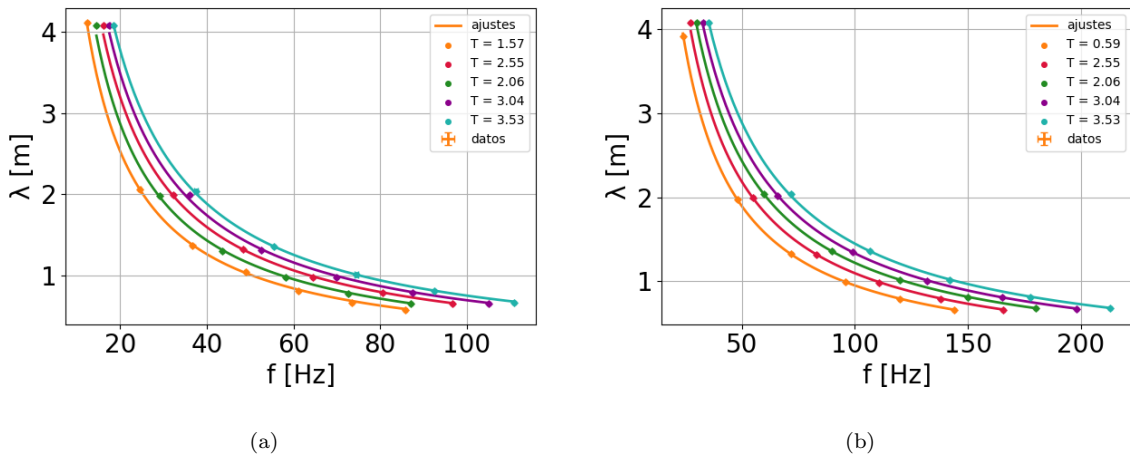


Figura 3: Gráfico de longitud de onda en función de la frecuencia para la primera cuerda (a) y para la segunda cuerda (b), medidas para cada modo y ajustadas por una hipérbola, cuyo coeficiente corresponde a la velocidad de propagación.

Como era de esperarse, los cambios en la tensión produjeron distintas curvas, pudiendo obtenerse de las mismas la velocidad de propagación para cada tensión. A partir de la colinealidad entre v^2 y T establecida por la ecuación (5) se pueden ajustar los datos, como se ve en la figura 4.a. Se puede obtener un valor de μ , que corresponde a la inversa de la pendiente de la recta:

$$\mu_1 = (0,625 \pm 0,007) \text{ g/m}. \quad (17)$$

Se procedió de la misma forma con los valores para la segunda cuerda, pudiendo ver los correspondientes datos y ajuste en la figura 4.b. La densidad lineal obtenida fue

$$\mu_2 = (0,066 \pm 0,002) \text{ g/m}. \quad (18)$$

Al comparar los valores obtenidos en los ajustes con los calculados según la expresión (5) se ve una mayor diferencia entre los de la primera cuerda que entre los de la segunda. Esto puede atribuirse a una mayor precisión de las aproximaciones realizadas para menores densidades.

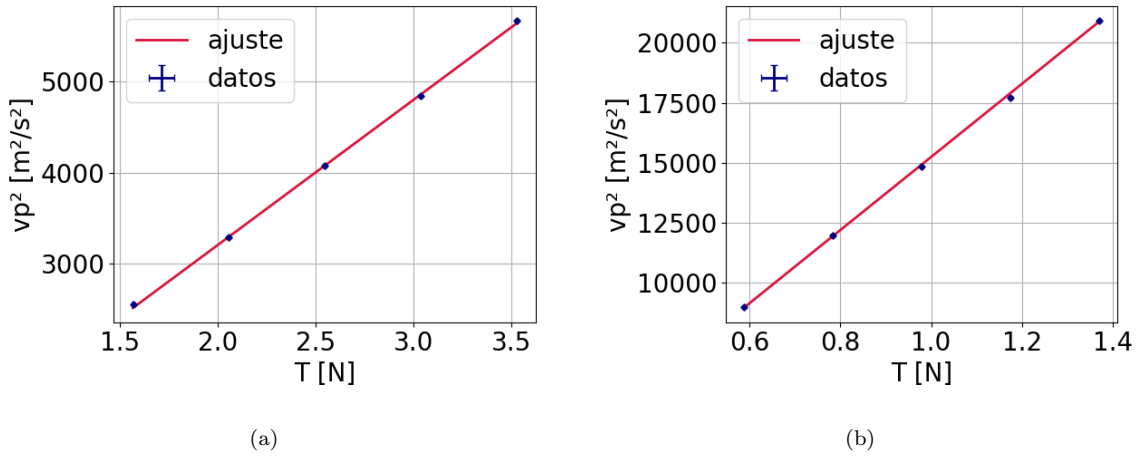


Figura 4: Gráfico de la velocidad de propagación elevada al cuadrado en función de la tensión de, la primera cuerda (a) y la segunda cuerda (b), ajustadas por una recta cuya pendiente es la inversa de la densidad lineal.

En el último experimento sobre las cuerdas, se buscó analizar la oscilación de una cuerda con dos segmentos de diferente densidad. Para esto, se calculó la densidad de cada una, y sabiendo la tensión a la que estaba sometida, se encontró la velocidad de propagación de cada tramo. Se usó luego la ecuación (10) para encontrar, usando el largo como dato, la frecuencia del modo uno para el primer tramo de cuerda. La frecuencia que se encontró fue $f_1 = (21,3 \pm 0,1)$ Hz. Teniendo en cuenta que ambos tramos de la sogá oscilan con la misma frecuencia, la forma de hacer que se excite el modo dos para el segundo tramo es utilizar de nuevo la ecuación (10), pero ahora con la frecuencia como dato, para saber cuál es el largo L_2 necesario. Se hicieron estos cálculos y se encontró que la longitud del segundo segmento debía ser de $L_2 = (6,2 \pm 0,4)$ m. Esta longitud era mucho mayor de la que se utilizó para el experimento, por lo que en la segunda cuerda no se pudo observar el modo normal.

3.2. Tubo de Kundt

Usando el tubo con ambos extremos cerrados se acercó el micrófono al pistón, observando un máximo de amplitud. Al analizar este comportamiento se determinó que la onda era de presión. Luego, al colocar el micrófono pegado al parlante, también se vio un máximo, mostrando que se trataba de otro extremo cerrado.

Una vez encontradas las frecuencias de los modos normales y medidas las distancias entre los nodos, se calcularon los valores de la longitud de onda para cada modo utilizando la ecuación (9). Luego se ajustó λ en función de la frecuencia por una hipérbola, siguiendo la expresión (4). En la figura 5.a se observan los datos y el ajuste. El mismo tuvo un $\chi^2 = 10,2$.

A partir del ajuste se obtuvo un primer valor para la velocidad del sonido $v = (340 \pm 1)$ m/s.

Luego se ajustó $\frac{1}{\lambda}$ en función del número de modo y por una lineal. Estos datos y ajuste se pueden ver en la figura 5.b. Para este ajuste $\chi^2 = 1,3$ y $R^2 = 0,9995$. De la pendiente de la recta, a partir de la ecuación (9) se obtiene el valor para la longitud del tubo $L = (0,79 \pm 0,01)$ m. El mismo no presenta diferencias significativas con el medido en el laboratorio, $L = (0,80 \pm 0,01)$ m.

Para analizar en mayor profundidad un modo se eligió el 3, con $f = 214,5$ Hz. Se ajustó la amplitud en función de la posición del micrófono por el **módulo de una sinusoidal**. Se observó que los valores de los picos eran menores mientras más lejos del parlante se encontraba el micrófono, por lo que se agregó un decaimiento **exponencial**. Estos datos y el ajuste se pueden ver en la figura 6. El ajuste tiene un $\chi^2 = 608,6$. Este defecto se refleja en los cálculos posteriores. Para la longitud de onda se obtuvo $\lambda = (0,469 \pm 0,002)$ m, habiendo medido originalmente $(0,532 \pm 0,004)$ m. Para la velocidad del sonido se obtuvo $v = (302 \pm 2)$ m/s. Se pudo además determinar que la dependencia temporal de la onda era la misma a lo largo del tubo, al observarse solo cambios en la amplitud y no desfases.

Con el pistón retirado se pasó a una configuración abierto-cerrado. Se obtuvieron las frecuencias de la misma manera que para el caso cerrado-cerrado pero esta vez con la ecuación (12). Luego se calcularon las longitudes de onda de la misma manera que para el tubo con pistón y se volvió a ajustar por una hipérbola, viéndose todo esto en la figura 7.a. El ajuste presenta un $\chi^2 = 0,8$. A partir de este ajuste se obtiene $v = (340 \pm 1)$ m/s.

Se volvió a ajustar $\frac{1}{\lambda}$ en función del número de modo por una lineal, como se ve en la figura 7.b. Este ajuste presentó un $\chi^2 = 555,8$, y la **colinealidad**, $R^2 = 0,96$, no es tan alta como con las mediciones de ambos extremos cerrados. De la pendiente se obtiene la longitud efectiva del tubo $L_{ef} = (0,928 \pm 0,001)$ m.

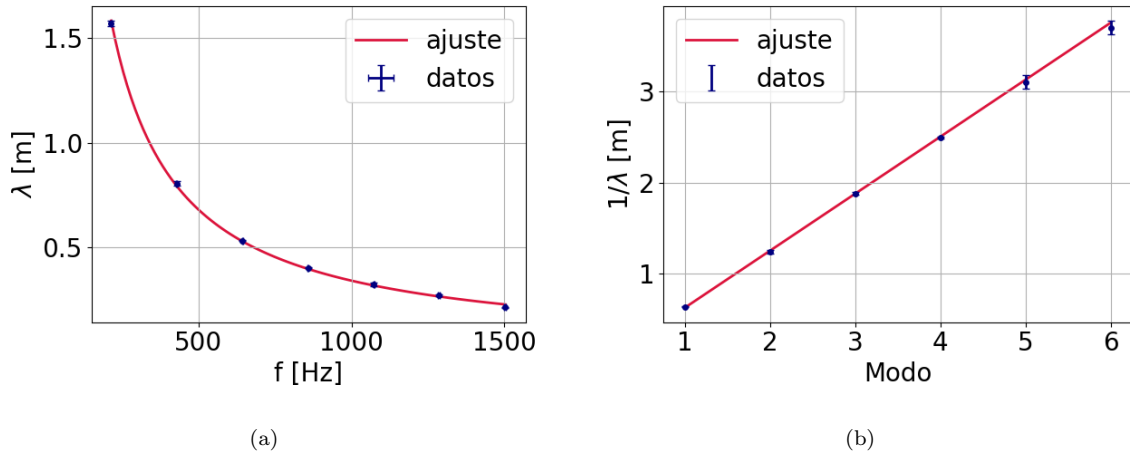


Figura 5: Figura (a) es la longitud de onda en función de la frecuencia, con los datos ajustados por una hipérbola cuyo coeficiente es la velocidad de propagación de la onda. Figura (b) es la inversa de la longitud de onda en función del número de modo, con los datos ajustados por una lineal cuya pendiente es $\frac{1}{2L}$.

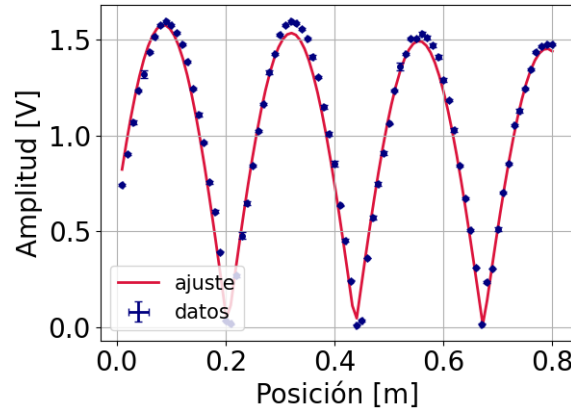


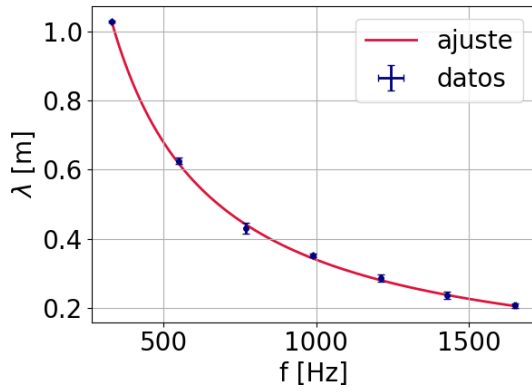
Figura 6: Amplitud de la onda en función de la posición del micrófono, con los datos ajustados por una el módulo de una sinusoidal multiplicado por una exponencial con argumento negativo

Podemos, a partir de la ecuación (14), calcular la longitud efectiva del tubo para compararla con el valor obtenido en el ajuste. Se midió $L = (0,90 \pm 0,01)$ m y $a = (0,031 \pm 0,001)$ m. A partir de esto, queda $L_{ef} = 0,913$ m, valor que no presenta diferencias significativas con el del ajuste.

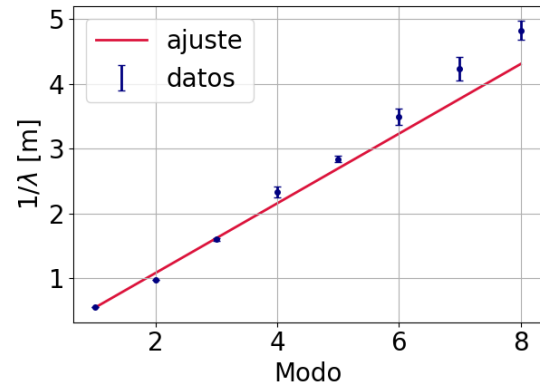
Nuevamente se midió la amplitud de la onda para el modo 3 ($f = 550$ Hz). Se ajustó únicamente por el módulo de una sinusoidal, al no ser apreciable el decaimiento en los picos. Los datos y el ajuste se pueden ver en la figura 8. El ajuste fue realizado a una mucha menor cantidad de puntos que en el caso cerrado-cerrado y presenta un $\chi^2 = 1104,4$. Estos problemas se reflejan en los cálculos derivados para la longitud de onda, con $\lambda = (0,594 \pm 0,002)$ m, y originalmente $(0,626 \pm 0,009)$ m; y para la velocidad del sonido, con $v = (327 \pm 1)$ m/s. Nuevamente no se observaron desfases en la dependencia temporal.

A partir de los datos del experimento del pulso cuadrado se calculó la velocidad del sonido. Se midieron el tiempo que transcurría entre los picos de amplitud registrados por el micrófono y la distancia que recorría el pulso. Teniendo esto en cuenta se realizó un ajuste lineal de las distancias en función del tiempo, mostrado en la figura 9. El ajuste presenta un $\chi^2 = 310,01$ y un $R^2 = 0,99970$. La pendiente de la recta es la velocidad del sonido, y se obtuvo $v = (352 \pm 1)$ m/s

Utilizando el tubo de Kundt se obtuvieron cinco valores distintos para la velocidad del sonido. Para la primera cuerda fueron $v = (340 \pm 1)$ m/s con la longitud de onda y con $v = (302 \pm 2)$ m/s la amplitud. Para la segunda, $v = (340 \pm 1)$ m/s con la longitud de onda y $v = (327 \pm 1)$ m/s con la amplitud. Para el pulso fue $v = (352 \pm 1)$ m/s. Los más cercanos al valor tabulado fueron los que se consiguieron al ajustar la longitud de onda por la frecuencia del modo. Por otro lado, el calculado con los datos del pulso fue mejor que los de los ajustes de la amplitud.



(a)



(b)

Figura 7: Figura (a) es la longitud de onda en función de la frecuencia, con los datos ajustados por una hipérbola cuyo coeficiente es la velocidad de propagación de la onda. Figura (b) es la inversa de la longitud de onda en función del número de modo, con los datos ajustados por una lineal cuya pendiente es $\frac{1}{2L}$.

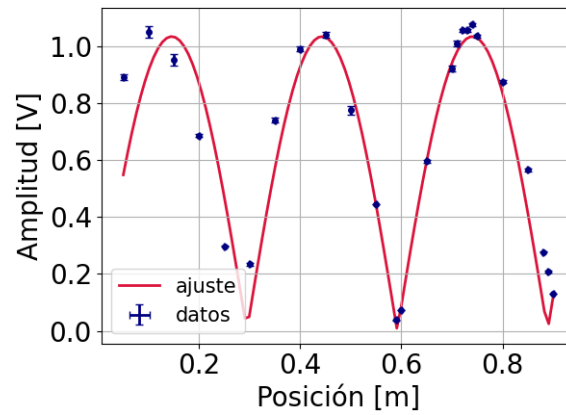


Figura 8: Amplitud de la onda en función de la posición del micrófono, con los datos ajustados por una el módulo de una sinusoidal.

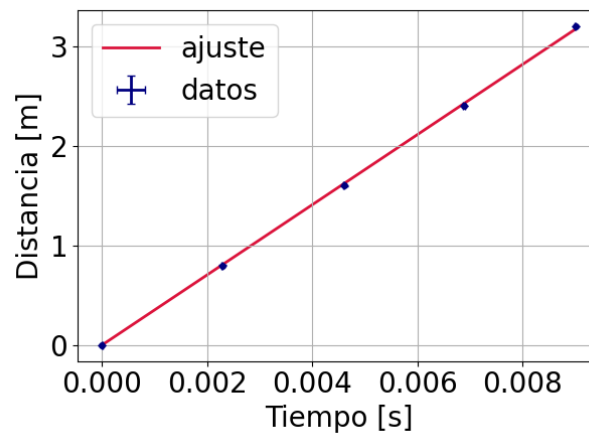


Figura 9: Distancia que recorre la onda en función del tiempo que tarda la señal.

4. Conclusión

La caracterización que se llevo a cabo en este trabajo concluyó en una serie de resultados para cada cuerda.

El cálculo de las densidades lineales, a través de la medición directa de la longitud y del peso, dio como resultado

$$\mu_1 = (0,457 \pm 0,002) \text{ g/m}, \quad (19)$$

para la cuerda uno, y

$$\mu_2 = (0,060 \pm 0,002) \text{ g/m}. \quad (20)$$

para la cuerda dos.

Las velocidades de propagación se obtuvieron indirectamente mediante dos formas. Por un lado usando la densidad lineal y las tensiones. Por otro lado usando el cálculo de las longitudes de onda y las frecuencias de los modos normales. ~~El coeficiente que relaciona los dos valores es la velocidad de propagación, que depende de la densidad lineal y de la tensión.~~ Como además de cambiar las densidades, se variaron los pesos que tensionaban, se encontró una velocidad de propagación para cada tensión y cada cuerda.

Por último, se obtuvieron, ajustando a partir (5), y usando las velocidades de propagación calculadas previamente, densidades lineales para cada cuerda. Se invirtió la pendiente de la recta de la Figura 4.a, y se encontró

$$\mu_1 = (0,625 \pm 0,007) \text{ g/m}. \quad (21)$$

Al invertir la pendiente de la recta de la Figura 4.b se encontró

$$\mu_2 = (0,656 \pm 0,002) \text{ g/m}. \quad (22)$$

Al compararlas, con la intención de corroborar las densidades lineales que fueron obtenidas a través del método de la medición de su peso y su largo, se encontró que los resultados presentan diferencias significativas y no se solapan.

Con respecto al trabajo sobre el tubo de Kundt, se buscó analizar una onda estacionaria de sonido. Para empezar, se la caracterizó como una onda de presión a través de la ubicación de los máximos y mínimos. Una vez definido el carácter de la onda, se obtuvo, para diferentes condiciones de contorno, la velocidad de propagación de la onda. La velocidad de propagación en el caso de ambos extremos cerrados resultó

$$v = (340 \pm 1) \text{ m/s}. \quad (23)$$

y en el caso de cerrado-abierto

$$v = (339,9 \pm 0,5) \text{ m/s}. \quad (24)$$

Además, para ambos casos se midió la amplitud de la onda para un modo normal en particular. El análisis de estos datos arrojó resultados sobre la longitud de onda y la frecuencia.

La experiencia del pulso cuadrado permitió calcular con otro método la velocidad del sonido. En este caso se obtuvo

$$v = (352,29 \pm 0,01) \text{ m/s} \quad (25)$$

Al comparar los resultados de las velocidades de propagación de cada experimento, se encontró que los calculados con el primer método no presentan diferencias significativas entre sí. El valor tabulado de la velocidad del sonido en la atmósfera terrestre, a 20 °C de temperatura, con 50 % de humedad, es de $V_s = 343,2 \text{ m/s}$. El valor obtenido difieren en un 0.93 % para el caso cerrado-cerrado y un 0.96 % para el caso cerrado-abierto. Por otro lado, la velocidad calculada mediante el experimento del pulso cuadrado presenta diferencias significativas con las otras y difiere en un 2.65 % con el valor tabulado.

En adición, al encontrar las frecuencias de oscilación de cada modo, se pudo encontrar la longitud efectiva para cada condición de contorno del tubo.

Referencias

- [1] Harold Levine y Julian Schwinger. «On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe». En: *Phys. Rev.* 73 (4 feb. de 1948), págs. 383-406. DOI: 10.1103/PhysRev.73.383. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.383>.
- [2] Oscar E. Martínez. *Ondas: Es Física*. 2008.