

Estudio de las propiedades elásticas de una varilla y un alambre

Luciano Carullo Bedia
luchibedia@gmail.com

Tadeo Rodríguez
tadeorodriguez842@gmail.com

Joaquín Sequeira
joaquinetsequeira@gmail.com

*Laboratorio 4, Cátedra Cobelli, Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires*

7 de Julio, 2024

Resumen

En este trabajo se buscó encontrar el módulo de Young de una varilla observando su deformación al aplicar distintas fuerzas de torsión. Para poder medir los estiramientos se utilizó difracción, que permite medir variaciones pequeñas de distancia a partir de la interfranja. El patrón se analizó con dos métodos distintos, calculando la distancia entre los picos y mediante análisis de Fourier. El valor de módulo de Young fue de para el primer método (230 ± 10) GPa y para el segundo (286 ± 55) GPa, no presentándose diferencias significativas. Como segunda experiencia se propuso estudiar la deformación axial en un alambre de cobre, buscando observar linealidad entre su variación y la fuerza aplicada. No se pudieron comparar estos resultados con la teoría porque la parte del alambre donde incidía el haz no se deformó.

1. Introducción

En la física existe un área de estudio dedicada a las propiedades de los materiales. Un aspecto importante de los materiales es su comportamiento elástico. La elasticidad se refiere a la propiedad que tienen ciertos materiales de retomar su forma original cuando se deja de aplicar una fuerza le generó una deformación.

En el caso de que la fuerza aplicada sobre el material sea pequeña, el desplazamiento relativo de los diferentes puntos del cuerpo es proporcional a la tensión aplicada. En este régimen, para una fuerza F transversal a un cuerpo de área A y largo L , la deformación ΔL sigue la Ley de Hooke y tiene la forma

$$E \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

donde E es el módulo de Young. Su significado físico es la razón entre la deformación y la fuerza. No depende de las dimensiones del cuerpo.

Con la intención de estudiar este fenómeno, en este trabajo se analizará la deformación de una barra cilíndrica en voladizo (Figura 1). Cuando una barra en voladizo es flexionada por una fuerza F pequeña, la deformación se puede describir mediante la ecuación [1]

$$y(x) = \frac{32}{\pi d^4} \frac{F}{E} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right), \quad (2)$$

siendo $y(x)$ el apartamiento de la posición de equilibrio a una distancia x del extremo fijo, F la fuerza aplicada, d el diámetro de la barra y L el largo desde el punto fijo hasta el punto donde se aplica la fuerza. Sobre el extremo de la barra, queda

$$y = \frac{64}{3\pi d^4} \frac{F}{E} L^3. \quad (3)$$

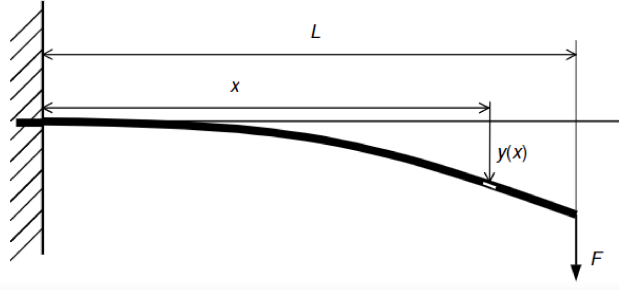


Figura 1: Barra en voladizo de largo L que es flexionada una distancia y en un punto x a partir de la aplicación de una fuerza F en su extremo libre.

En la segunda parte de la experiencia se estudiará la deformación en el diámetro de un alambre de cobre. Para estudiar este fenómeno en términos del comportamiento elástico se tomará como hipótesis que la deformación cumple con la ecuación [2]

$$\frac{\Delta d}{d} = -\alpha \frac{\Delta L}{L},$$

con L la longitud del objeto, d su diámetro y α un coeficiente. Esta hipótesis supone que la geometría del objeto se mantiene a pesar del estiramiento, y que la deformación en el material se distribuye homogéneamente. Juntando esta ecuación con la ecuación 1 se llega a

$$\frac{\Delta d}{d} = -\alpha \frac{F}{E}. \quad (4)$$

La validez de la hipótesis se buscará demostrar a partir de la linealidad entre la deformación y la fuerza aplicada.

Todas las ecuaciones presentadas previamente toman como hipótesis que la fuerza aplicada es pequeña. Esta hipótesis hace que las ecuaciones y la teoría sean más simples, pero presenta una dificultad a la hora de pasarlo a un experimento, ya que fuerzas pequeñas implican deformaciones pequeñas. Para medir estos estiramientos se requiere un método adecuado, porque no cualquier instrumento tiene la resolución necesaria.

Como una solución a esto puede usarse la difracción, que permite medir con precisión longitudes de este orden de magnitud. La expresión para el patrón de intensidades de una onda plana difractada por una rendija puede escribirse como

$$z_n = \frac{D\lambda n}{a},$$

y la interfranja i como

$$i = \frac{D\lambda}{a}. \quad (5)$$

Aquí z_n es la posición del mínimo de orden n , a el tamaño de la abertura, D la distancia entre la rendija y la pantalla y λ la longitud de onda del haz difractado. Para llegar a esta expresión es necesario usar la aproximación para campo lejano, que tiene como condición que se cumpla

$$\frac{a^2}{D\lambda} \ll 1.$$

Para una rendija de ancho $a_0 + \Delta a$, y una fuerza $F = mg$ correspondiente a un peso colgando del extremo de la barra, juntando las ecuaciones 3 y 5 se llega a

$$\frac{D\lambda}{i} = \frac{64}{3\pi} \frac{L^3}{d^4} \frac{mg}{E} + a_0. \quad (6)$$

El principio de Babinet establece una relación entre el patrón de difracción de dos objetos complementarios. Los patrones de intensidad serán idénticos a excepción del orden central, donde se verá la imagen del objeto. Usando este principio se pueden estudiar de la misma forma la interfranja generada por una rendija que la generada por un alambre del mismo ancho.

2. Desarrollo experimental

Para poder estudiar las torsiones de una barra y la dilatación del diámetro de una alambre se utilizó la difracción de un láser con una longitud de onda $\lambda = 670$ nm. Para todas las experiencias se colocó un colimador

en forma de iris para mejorar la imagen proyectada. Todas las capturas del patrón se llevaron a cabo con la cámara de un celular y mediante videos.

El láser en su recorrido atravesaba un chopper, que interrumpía el haz con una frecuencia de 21 Hz. El chopper se colocó con la intención de usar la detección homodina. Esta técnica de detección permite eliminar el ruido de fuentes de luz externas y posibilita medir con la luz prendida, facilitando la manipulación del dispositivo experimental. El patrón de difracción, como consecuencia de la obturación, estaba modulado por una señal armónica. Esto permitía que al integrar la señal en el tiempo, primero por un coseno y luego por un seno, se eliminaran por ortogonalidad las señales con cualquier otra frecuencia, incluyendo las luces de techo del laboratorio. El resultado final era una imagen para cada video.

Los videos se grabaron todos con el celular en la misma posición, y por separado se tomó una foto con una distancia de referencia. Esto se hizo para luego poder calibrar el dispositivo de medición, conociendo la relación entre píxeles del video y distancia en la pantalla. Los detalles de la calibración se pueden ver en la figura 9 del apéndice.

2.1. Estudio de la barra

Se utilizó una barra con sección circular de longitud en equilibrio $L = (40,1 \pm 0,1)$ cm y diametro $d = (5,00 \pm 0,01)$ mm. Como se puede ver en la figura 2 se alineó el láser con dos espejos, direccionando el haz para hacerlo incidir en la rendija, pasando antes por el obturador. La rendija estaba formada por una hoja afilada fija a la mesa óptica con un microposicionador y otra hoja pegada a la barra. En la punta de la barra se aplicaron distintos pesos que la torcían y modificaban la distancia entre ambas hojas. El patrón de difracción se proyectó en una hoja cuadriculada recta a una distancia $D = (1,425 \pm 0,001)$ m. Para captar el patrón, a una distancia de $(23,0 \pm 0,1)$ cm se colocó un trípode con un celular *iPhone 11*. Este se configuró para que grabe videos con una resolución de $1080 \times 1920p$ y 240 fps.

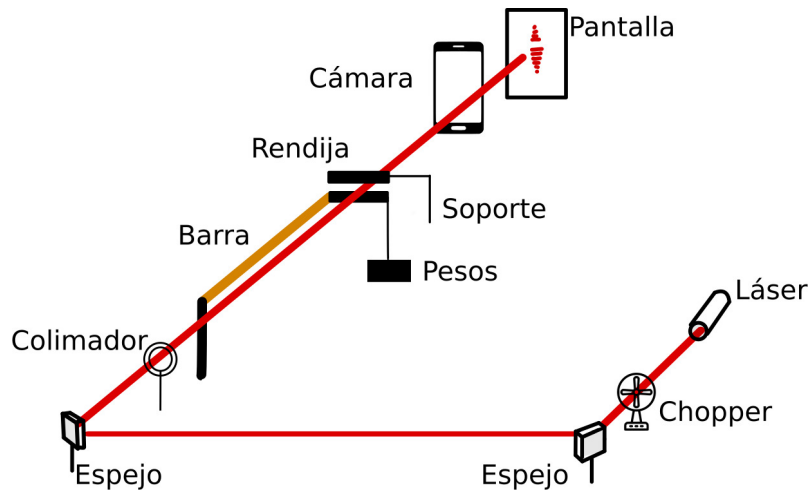


Figura 2: Montaje experimental con la barra en voladizo. Se observa el recorrido del láser, que antes de incidir sobre la rendija es alineado con dos espejos. Además, el láser pasa por un colimador y por un chopper, que lo modula con una frecuencia de 21 Hz. El patrón de difracción se proyecta sobre la pantalla, colocada a una distancia $d = (1,425 \pm 0,001)$ m de la rendija. La imagen se captura con un celular a $(23,0 \pm 0,1)$ cm de la pantalla.

2.2. Estudio del alambre

La segunda parte de la experiencia consistió en el estudio de la deformación axial de un alambre de cobre. Se utilizó el montaje experimental de la figura 3. El haz del láser se orientaba usando un espejo, y se lo hacía incidir perpendicularmente al alambre. El alambre se colocó atado a una torreta en un extremo. El otro extremo se pasó por una polea, de tal forma que se puedan colgar pesos. De esta forma se varió la fuerza de tensión, que variaba a su vez el ancho del alambre. Para la captura del patrón en la pantalla se utilizó el mismo sistema que el detallado en la sección anterior, pero con la pantalla a una distancia $(1,370 \pm 0,001)$ m.

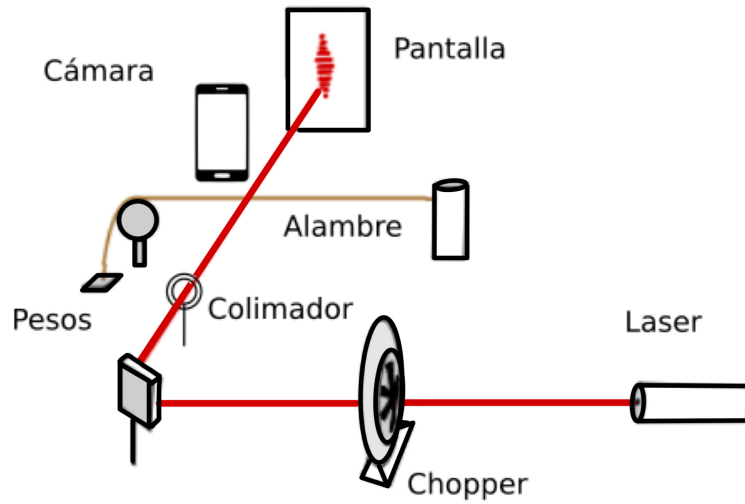


Figura 3: Montaje experimental con el alambre tensionado por masas en su extremo. Se observa que el láser es alineado con un espejo e incide perpendicularmente al alambre de cobre. Además es colimado con un iris y pasa por un chopper, que modula la frecuencia. El patrón se observa en la pantalla a 1,370 m y se captura con una cámara de celular.

3. Resultados y discusión

3.1. Estudio de la barra

El primer método utilizado consistió en obtener un perfil de intensidad del patrón. Para esto se usó la librería de Python *skimage* y se obtuvo para cada píxel un valor correspondiente a la intensidad de la luz. Luego con una línea que atravesaba todo el patrón se obtuvo el perfil de intensidad del mismo, tal como se ve en la figura 4. El patrón de difracción no es simétrico a la izquierda y a la derecha del centro. Este desbalance puede deberse a alguno de los elementos ópticos o del procesado para hacer la detección homodina.

A continuación, se consiguió la posición de una serie de máximos de intensidad, se promedió la distancia entre estos y también se obtuvo la desviación estándar. Es importante aclarar que el gráfico tiene una cantidad significativa de ruido en la campana y en los ordenes más alejados. Teniendo en cuenta esto se optó por tomar únicamente los puntos más definidos en un rango acotado de intensidad.

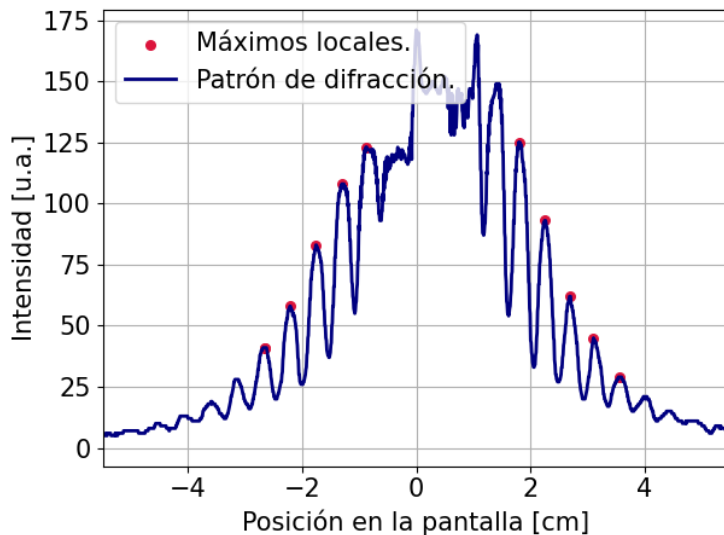


Figura 4: Gráfico de intensidad en unidades arbitrarias en función de la posición en la pantalla en *cm*. Marcados en rojo los máximos locales de cada uno de los ordenes de difracción seleccionados para analizar.

La distancia entre máximos, la interfranja, se relaciona con el ancho de la rendija según la ecuación 6. Teniendo en cuenta esta relación se ajustaron de forma lineal los datos y se obtuvieron los parámetros tal como

se ve en la figura 5. Se obtuvo una pendiente $M = (0,0341 \pm 0,0003) \text{ 1/mm} \cdot \text{g}$. Se obtuvo $\chi^2 = 0,95$ y un P valor de $P_v = 0,9955$.

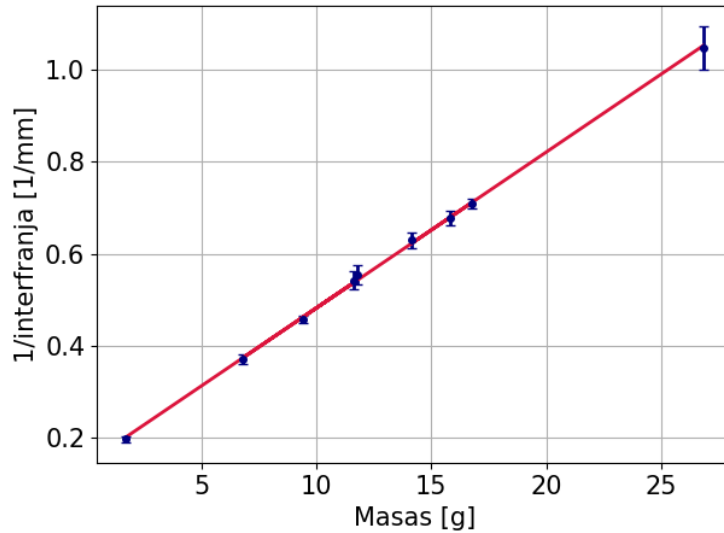


Figura 5: Ajuste lineal de la inversa de la interfranja en función de la masa colgada. Se obtuvo una pendiente $M = (0,0341 \pm 0,0003) \text{ 1/mm} \cdot \text{g}$. Se obtuvo $\chi^2 = 0,95$ y un P valor de $P_v = 0,9955$

De esta figura se puede observar lo siguiente: en primer lugar los datos parecen tener una relación lineal. Según $P_v = 0,9955$, no se puede rechazar que el modelo ajuste los datos. Directamente reemplazando las magnitudes medidas y la pendiente del ajuste en la ecuación 6, se obtiene el valor $E = (230 \pm 10) \text{ GPa}$

El segundo método consistió en tomar la transformada de Fourier bidimensional a la imagen. Para un patrón de difracción, el resultado debería tener un pico cuya posición tiene como módulo a la inversa de la interfranja. Esta posición es un vector y su dirección debería ser perpendicular al patrón, ya que la transformada 2D tiene en cuenta la dirección de oscilación (tanto positivas como negativas). Se hizo esto para las distintas imágenes de la barra, se pasó los espectros por un filtro gaussiano para realzar los máximos y se obtuvieron los picos. En la figura 6 se puede ver la imagen y su espectro (este último en escala logarítmica) para una masa de $(9,404 \pm 0,001) \text{ g}$. Se observa cómo la dirección de los vectores en el primer gráfico son perpendiculares al patrón y cómo sus módulos se solapan con el ancho de la interfranja, por lo que se puede considerar que los picos son los buscados.

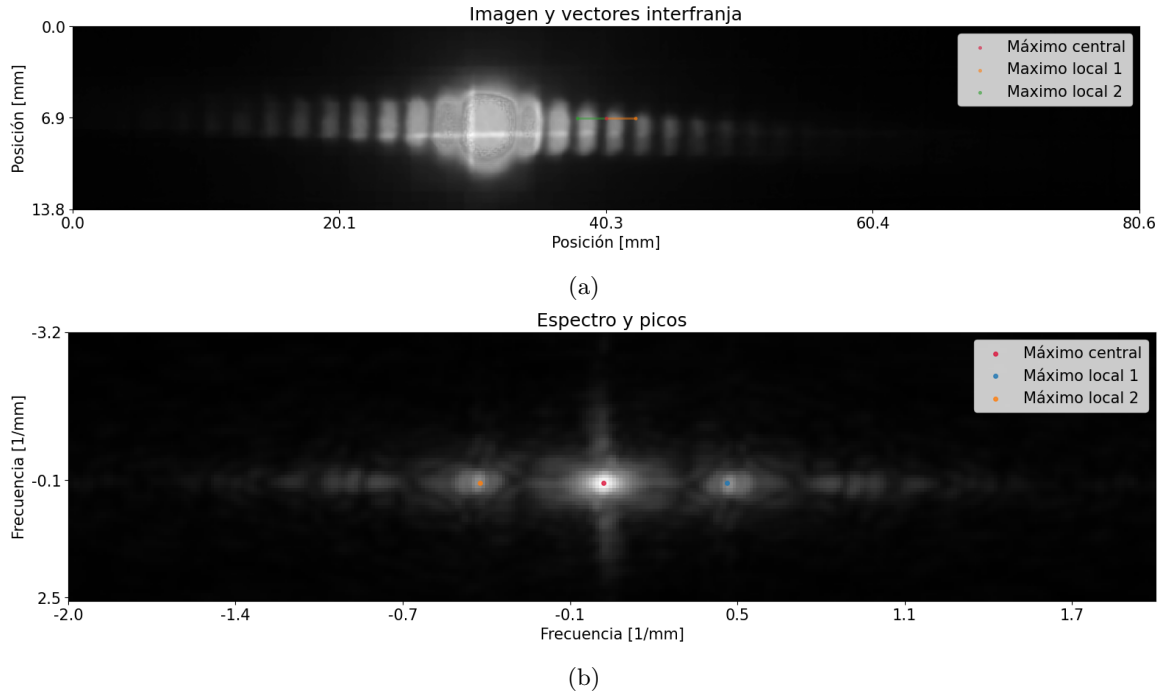


Figura 6: Para un peso colgante de $(9,404 \pm 0,001)$ g: (a) Imagen del patrón de difracción en escala de grises. Las líneas muestran los vectores asociados a los picos, con dirección perpendicular al patrón y módulo comparable con el tamaño de la interfranja. (b) Espectro del patrón de difracción tras pasar por un filtro gaussiano, con la intensidad en escala logarítmica. Se observa el máximo central y los picos locales.

Para los valores obtenidos de las interfrancjas se hizo un ajuste lineal de su inversa como función de la masa, como se puede ver en la figura 7. Se obtuvo una pendiente $M = (0,028 \pm 0,005)$ 1/mm con $\chi^2 = 0,4$ y un P valor de $P_v = 0,996$. Se puede considerar que los errores, provenientes en su mayor parte de la resolución de la transformada, están sobreestimados. De estos datos se obtuvo $E = (286 \pm 55)$ GPa. Este valor no presenta diferencias significativas con el del método anterior.

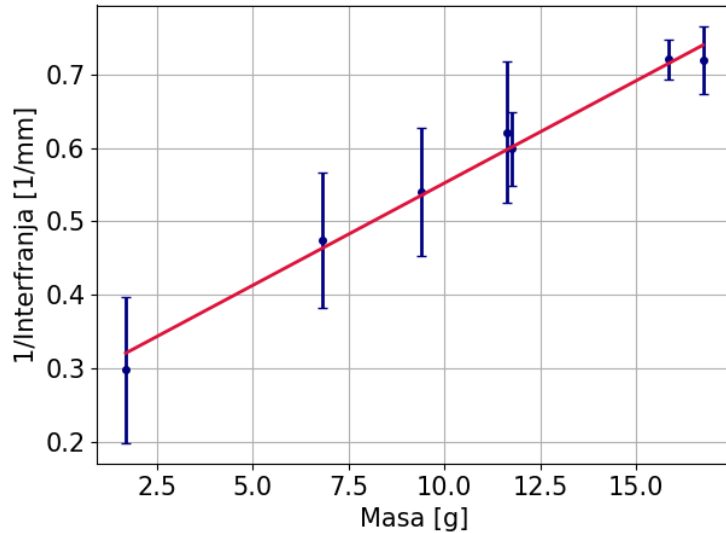


Figura 7: Ajuste lineal de la inversa de la interfranja en función de la masa colgada. Se obtuvo una pendiente $M = (0,028 \pm 0,005)$ 1/mm con $\chi^2 = 0,4$ y un P valor de $P_v = 0,996$

3.2. Estudio del alambre

Al igual que para la barra se hizo un análisis de los máximos locales y se obtuvo un promedio con una desviación estándar asociada para cada patrón de difracción. El resultado se puede ver en la figura 8.

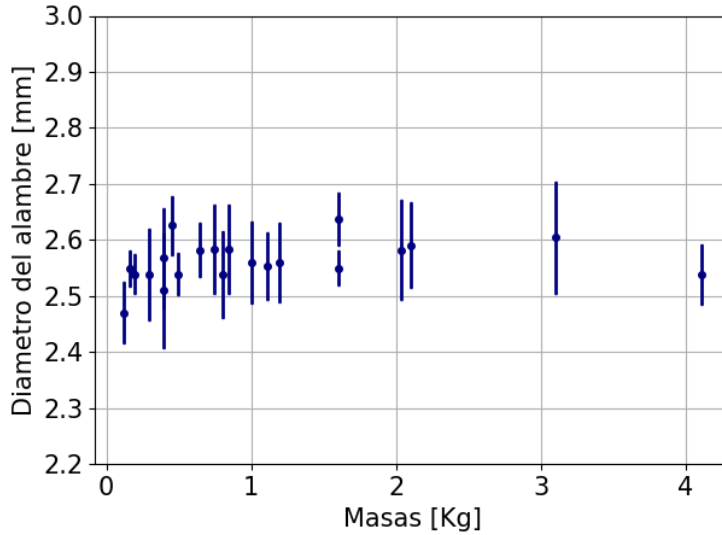


Figura 8: Se muestra el diámetro del alambre en función del peso que se colgó. No se puede apreciar ninguna variación en el diámetro al aumentar el peso.

Como se expresó en la formula 4, el diámetro de la barra debería decrecer de forma lineal con el aumento del peso. Esto no se observa en el gráfico y se puede deber a lo siguiente. En primer lugar los errores que presenta cada punto $Y_{err} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ proveen errores relativos grandes y no dejan ver una tendencia lineal. El modelo teórico con el que se contrasta al experimento supone que la deformación es homogénea. Esto puede no haber ocurrido, resultando en una deformación localizada. Esta posibilidad se ve reforzada por el hecho de que para la fuerza más grande el alambre se terminó cortando.

4. Conclusiones

Del experimento con la barra en voladizo se pudieron obtener dos valores para el módulo de Young. El valor correspondiente al análisis de la distancia entre máximos fue de (230 ± 10) GPa. El segundo resultado, correspondiente al análisis del patrón mediante la transformada de Fourier, resultó (286 ± 55) GPa. Estos resultados no presentan diferencias significativas. Los resultados de los módulos de Young están cerca del rango de los distintos tipos de acero, que rondan los 200 GPa [3]. Las dos formas de analizar los patrones presentan valores de incerteza distintos. El error del resultado obtenido a partir de la transformada de Fourier es significativamente mayor que el del análisis usando los máximos. Esto permite establecer que el análisis de los máximos es más preciso.

El análisis usando la transformada de Fourier depende más de la resolución del instrumento que el de la posición de los máximos. Esto pasa porque la información está concentrada en una región más pequeña para el dominio del espectro que para el de la imagen. Por eso el método de Fourier es el que tiene más lugar para mejorar.

Ambos métodos serían más precisos con un aumento en la resolución, pero el de los máximos se vería menos beneficiado. En el experimento realizado, obtener más resolución chocaba con la posibilidad de captar el patrón entero y con la capacidad de hacer foco del celular. Trabajar con una cámara más avanzada podría desbloquear estas posibilidades.

En cuanto a la experiencia del diámetro del alambre, no se pudo llegar a ningún valor numérico. Esto se debió a la inhomogeneidad en la deformación. El alambre se llegó a cortar pero no el punto el que incidía el láser. Dos posibilidades para mejorar esta experiencia son fijar de forma distinta los extremos del alambre e incidir con el láser en un punto específico donde se induzca el corte del alambre.

5. Apéndice

Para realizar la calibración, se tomó una imagen de la hoja cuadrículada de la pantalla y se le realizó la transformada de Fourier en la dirección vertical a lo largo de su ancho. Se calcularon los primeros picos no centrales, y se consideró que estos correspondían a las líneas de la hoja. Se obtuvo el ancho de un cuadrado en píxeles, (119 ± 4) , y se utilizó ese valor para pasar a centímetros teniendo en cuenta que cada cuadrado mide 0,5 cm.

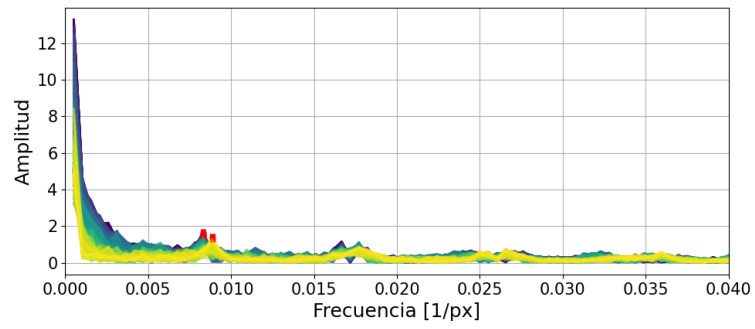


Figura 9: Gráfico del espectro de la hoja cuadrículada, con los picos correspondientes a la inversa del ancho de los cuadrados.

Referencias

- [1] Richard P. Feynman. *Feynman lectures on physics. Volume 2: Mainly electromagnetism and matter*. 1964.
- [2] Francisco M. Muñoz-Pérez et al. *A diffraction approach to assess the elastic properties of a nylon string*. 2024. arXiv: 2402.00919 [physics.ed-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2402.00919>.
- [3] Sonelastic. *Módulo elástico y coeficiente de Poisson de metales ferrosos*.