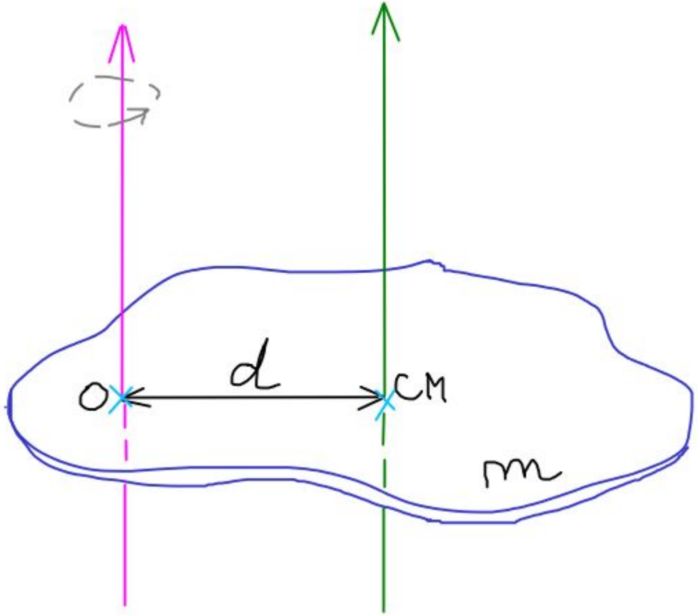
Laboratorio 1 – 2do cuatrimestre 2022 - Cátedra Goyanes
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

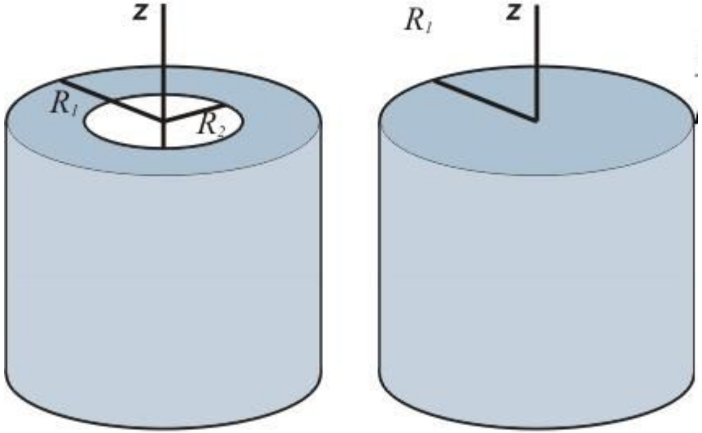
Validando el Teorema de Steiner

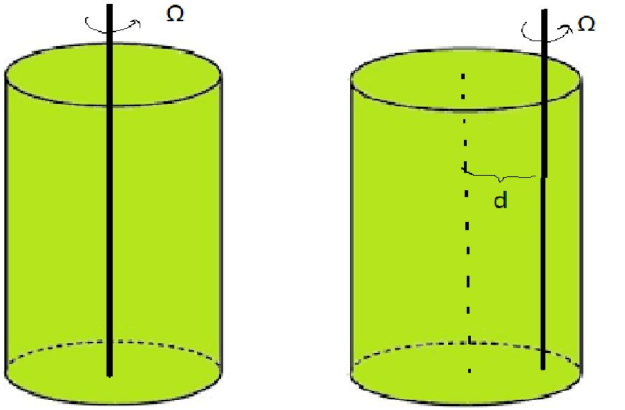


$$I^{(o)} = I^{(CM)} + md^2$$

Momento de Inercia, que es?

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \qquad I = \frac{1}{2}mR_1^2$$





Nuestro experimento tiene dos partes:

a) Calcular Icm del eje centrico. Comparar al teorico.
b) Usar a) como dato en el calculo de el I del cilindo con el eje corrido.

Marco teórico: ecuación de movimiento

Desde el centro de masa

Newton

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_R$$

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - \frac{F_R}{m}$$

Torques

$$\vec{r_p} \times \vec{F_R} = I_{cm}\dot{\Omega}(-\hat{z})$$

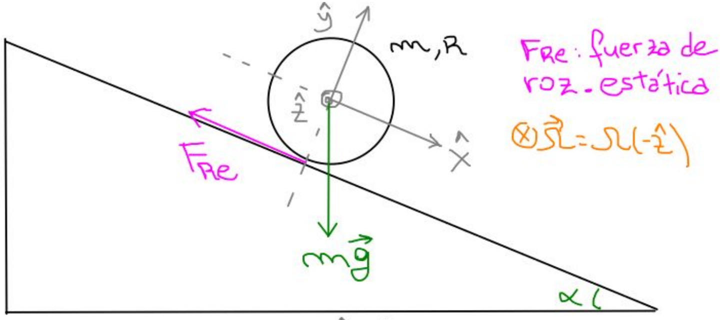
$$-R\hat{y} \times F_R(-\hat{x}) = I_{cm}\dot{\Omega}(-\hat{z})$$

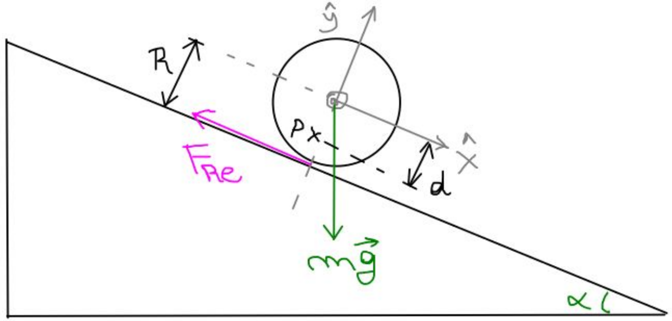
$$F_R = I_{cm}\frac{\dot{\Omega}}{R}$$

Rigidez

$$\vec{v_{cm}} = \vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_{cm}} - \vec{r_p})$$

$$\dot{x}\hat{x} = 0 + \Omega(-\hat{z}) \times R\hat{y} = \Omega R\hat{x} \underbrace{\Longrightarrow}_{\frac{d}{dt}} \dot{\Omega} = \frac{\ddot{x}}{R}$$





Desde otro eje

Torques

$$-mgd\,\mathrm{sen}\,\alpha + RF_R = I_p\dot{\Omega}$$

Rigidez

$$\ddot{x} = \dot{\Omega}R$$

Integrando, con X_0 y V_0 condiciones iniciales:

$$X(t) = X_0 + V_0 t + kt^2$$

Con $k = \frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I_{CM}}{mR^2}}$

$$I_{CM} = mR^2[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$I_p = mR^2[\frac{g\sin\alpha(1-\frac{d}{R})}{2\tilde{k}} - 1]$$

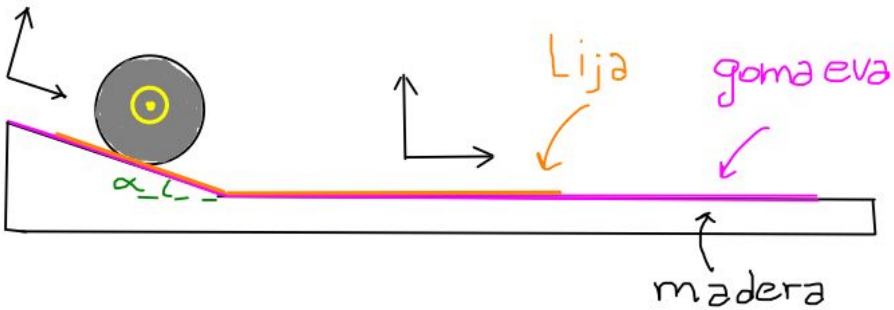
Integrando, con X_0 y V_0 condiciones iniciales:

$$X(t) = X_0 + V_0 t + \tilde{k}t^2$$

Con $\tilde{k} = \frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha[1-\frac{d}{R}]}{1+\frac{I_p}{mR^2}}$

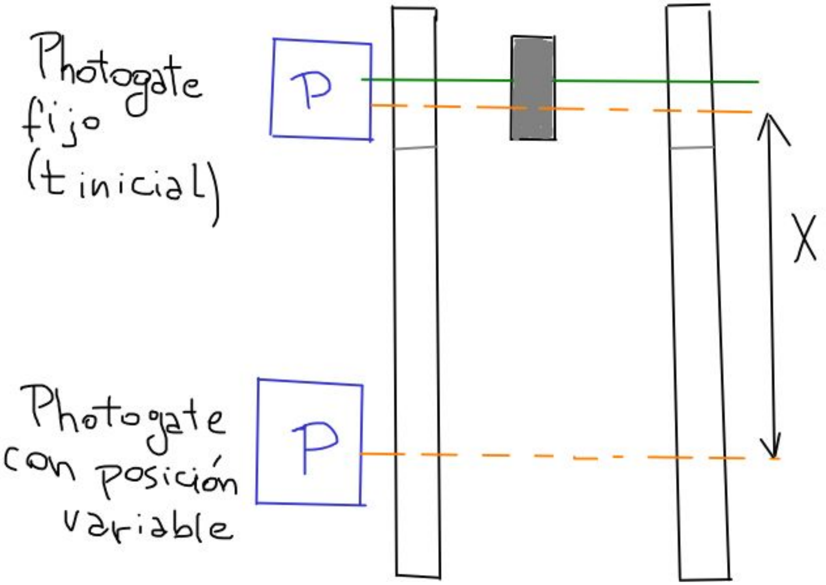
Desarrollo experimental

De costado



- Disco de porcelana fría $m = (81.08 \pm 0.01)g \gg$ masa palillo $= (1.00 \pm 0.01)g$
- Rampa de madera con inclinación $\alpha = (16° \pm 1°) = (0.28 \pm 0.02)rad$
- Goma eva para suavizar la rampa y lija para ayudar al rozamiento

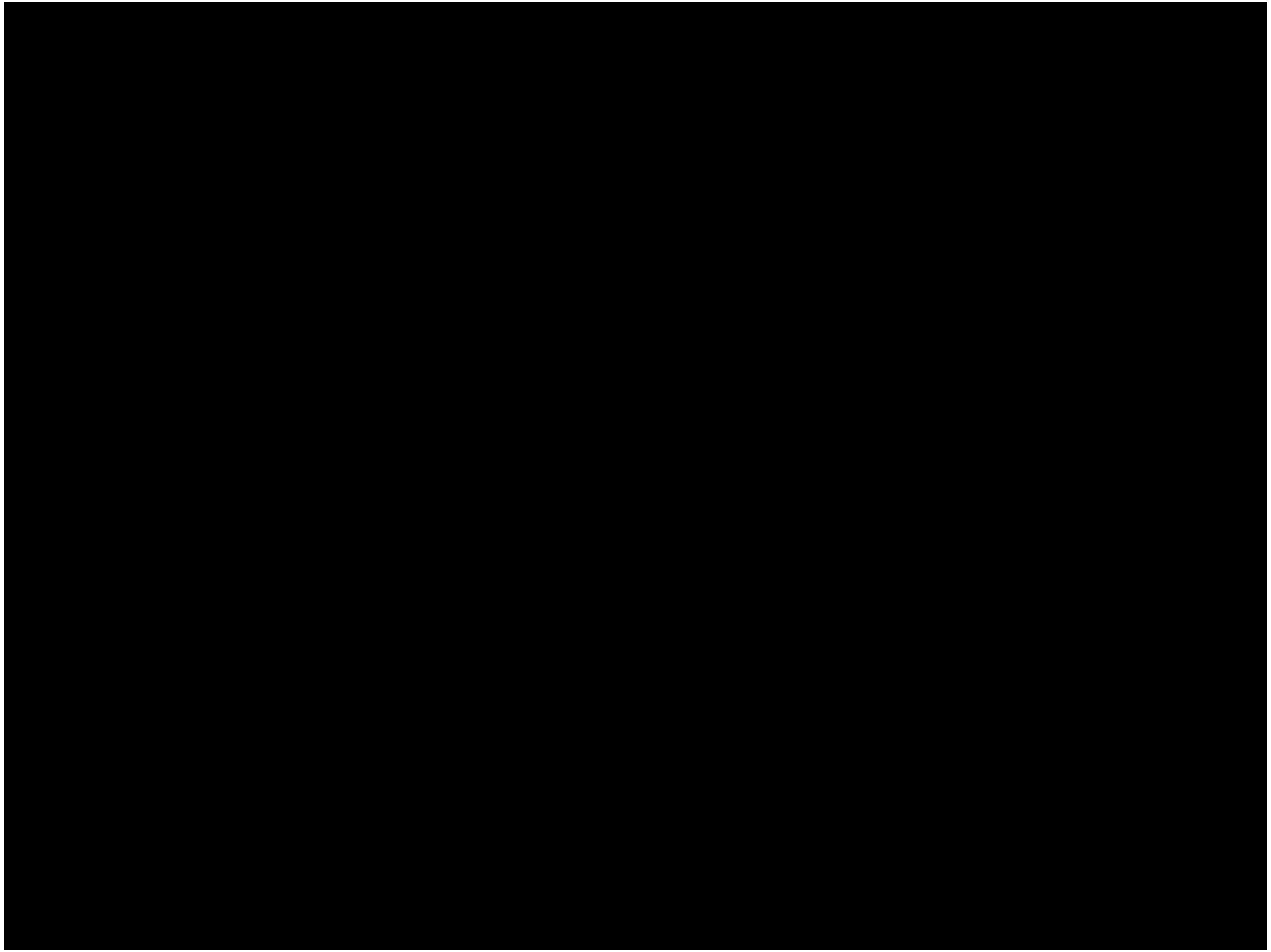
De arriba



- R discos = (37.301 ± 0.005) mm
- d = (2.000 ± 0.005) mm

Tanto para el eje en el centro de masa como el corrido, calculamos la diferencia de tiempos entre dos posiciones del disco durante su movimiento, utilizando los photogates para 10 posiciones distintas. Cada posición la medimos 3 veces.

Para el del eje en el centro de masa, medimos desde $(39.00 \pm 0.05)cm$ hasta $(21.00 \pm 0.05)cm$, equiespaciadas $(2.00 \pm 0.05)cm$ cada medición. Para el eje corrido, las mediciones fueron desde $(19.00 \pm 0.05)cm$ a $(14.50 \pm 0.05)cm$, equiespaciadas $(0.50 \pm 0.05)cm$.



Conseguir I : ¿linealizando?

Debería linealizar $x(t) = kt^2 + V_0 t + X_0 = At^2 + Bt + C$

Intentos:

- Completar cuadrados: $\frac{x}{A} = \underbrace{(t + \frac{B}{2A})^2}_{y} - \underbrace{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}}_{M} \Longrightarrow x(y) = Ay - AM$. ¡Necesito el valor de B y de A!
- Con logaritmo $\ln(x) = \ln[t(At + B) + C]$ ¿?

Si la ordenada y el término lineal fueran despreciables, tendría $x(t) = kt^2$

$$\underbrace{\ln(x)}_{y} = ln(k) + 2\,\underbrace{ln(t)}_{z} \Longrightarrow y(z) = ln(k) + 2z$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} \Longrightarrow \varepsilon_y = \frac{\Delta x}{x \ln(x)} \qquad \Delta z = \frac{\Delta t}{t} \Longrightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta t}{t \ln(t)}$$

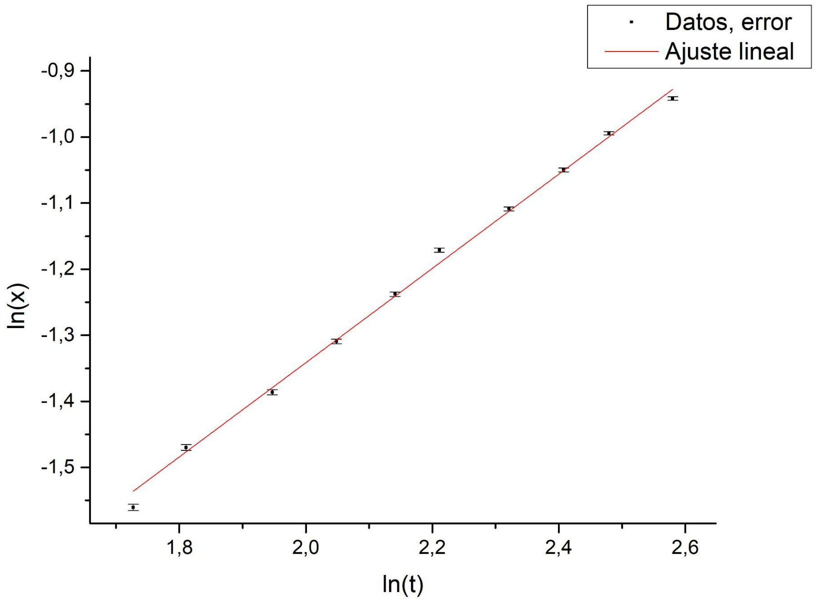
Estudiemos I_{CM}:

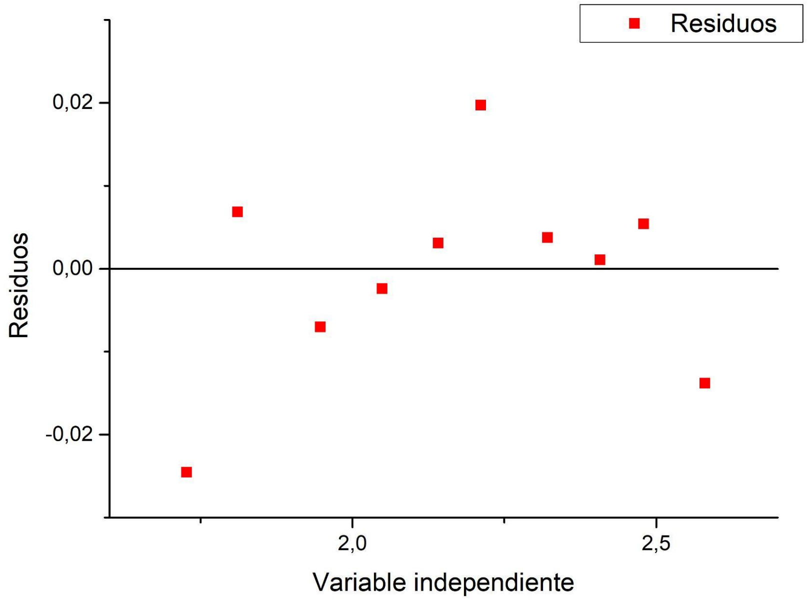
$$\underbrace{\ln(x)}_{y} = ln(k) + 2\,\underbrace{ln(t)}_{z} \Longrightarrow y(z) = ln(k) + 2z$$

Se cumple $\varepsilon_z \ll \varepsilon_y \qquad (\Delta z \underbrace{\frac{dy}{dz}}_{2} \ll \Delta y)$

(ejemplo: para el mismo dato, $|\varepsilon_y| = 0.003, \varepsilon_z = 0.0005$)

$$R^2 = 0.99607$$





I_{CM} experimental

$$\underbrace{\ln(x)}_{y} = ln(k) + 2\underbrace{ln(t)}_{z} \Longrightarrow y(z) = ln(k) + 2z$$

$$ln(k) = (-2.77 \pm 0.03)$$

$$k = e^{-2.77}$$

$$I_{CM} = mR^2[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$\Delta k : \text{Sea } A(k) = ln(k) \Longrightarrow \Delta A = \frac{\Delta k}{k}$$

$$\Longrightarrow \Delta k = k\Delta A = e^{-2.77}0.03403 = 0.0002$$

$$\Delta I_{CM}^{exp} = \sqrt{\sigma_e^2 + \Delta I_{prop}^2} = \sqrt{(\frac{\sigma_{med}}{\sqrt{30}})^2 + \Delta I_{prop}^2}$$

$$\Delta I_{prop} = \sqrt{\underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial m}\Delta m)^2}_{A} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial R}\Delta R)^2}_{B} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial \alpha}\Delta \alpha)^2}_{C} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial k}\Delta k)^2}_{D}}$$

$$A : \frac{\partial I_{CM}}{\partial m} = R^2[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$B : \frac{\partial I_{CM}}{\partial R} = 2mR[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$C : \frac{\partial I_{CM}}{\partial \alpha} = mR^2 g\frac{\cos\alpha}{2k}$$

$$D : \frac{\partial I_{CM}}{\partial k} = -mR^2 g\frac{\sin\alpha}{2K^2}$$

$$g = (9.7968520 \pm 0.0000003)\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta I_{prop}^2 = 0.00000003 \quad kgm^2$$

$$I_{CM}^{exp,ln} = (0.002 \pm 0.03)kgm^2$$

I_{CM} teórico

Discos y cilindros: $I_{CM}^{teo} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\Delta I_{CM}^{teo} = \sqrt{(\frac{\partial I}{\partial m}\Delta m)^2 + (\frac{\partial I}{\partial R}\Delta R)^2}$$

$$I_{CM}^{teo} = (0.0000567 \pm 0.0000002) kgm^2$$

$$\Delta I_{CM}^{teo} = \sqrt{(\frac{R^2}{2}\Delta m)^2 + (mR\Delta R)^2} = 0.0000002 \quad kgm^2$$

Precisión

$$\varepsilon_{teo}\,\% = 0.4\,\% \qquad \varepsilon_{exp}\,\% = 1500\,\%!!!$$

Diferencias significativas

Recuerdo: $A = (\bar{A} \pm \Delta A)$, $B = (\bar{B} \pm \Delta B)$ no presentan diferencias significativas si $|\bar{A} - \bar{B}| \leq \Delta A + \Delta B$

$$|0.002 - 0.0000567| \leq 0.0000002 + 0.03 \Longrightarrow 0.00194 < 0.03 \Longrightarrow \text{no presentan}$$

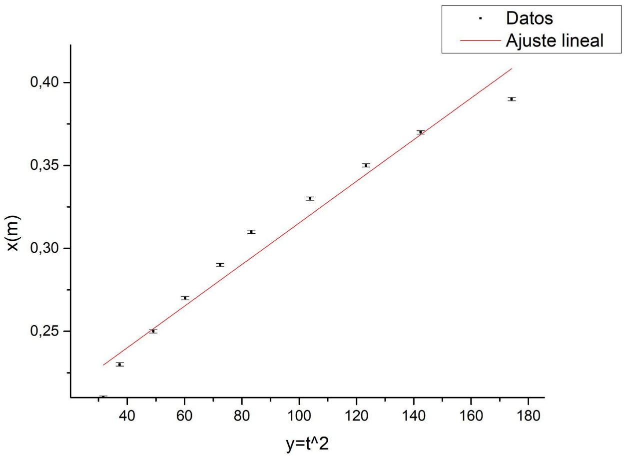
¿Que falló? ¿Cómo saber que no estuvo bien la suposición de $x(t) = kt^2$?

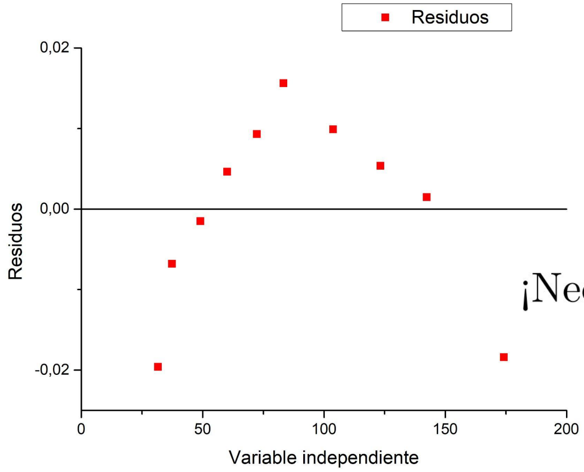
$$\underbrace{\ln(x)}_{y} = ln(k) + 2\underbrace{ln(t)}_{z} \Longrightarrow y(z) = ln(k) + 2z$$

pendiente $= (0.71 \pm 0.01) \neq 2 \Longrightarrow$ el modelo no se ajusta a los datos

Además, con $x = k\underbrace{t^2}_{y} \Longrightarrow x = ky \quad \Delta y = 2t\Delta t$

$\varepsilon_y \ll \varepsilon_x$ (ejemplo: para un mismo dato, $\varepsilon_y = 0.0008, \varepsilon_x = 0.003$) $\quad R^2 = 0.95733$





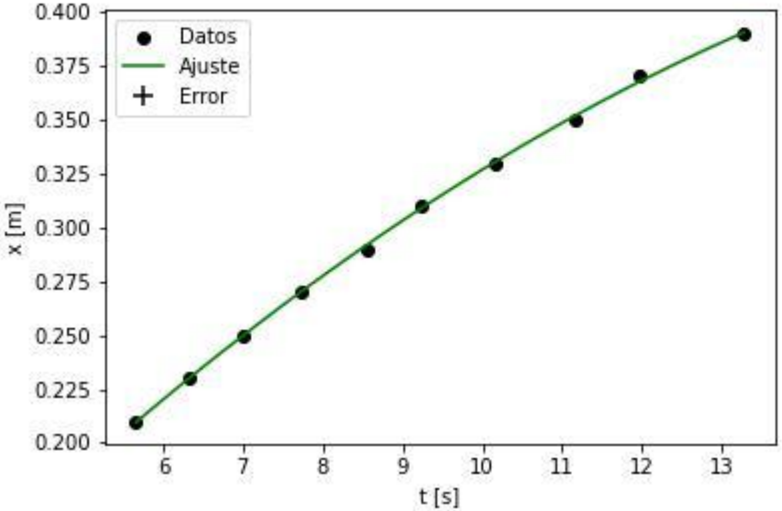
¡Necesitamos otro tipo de ajuste!

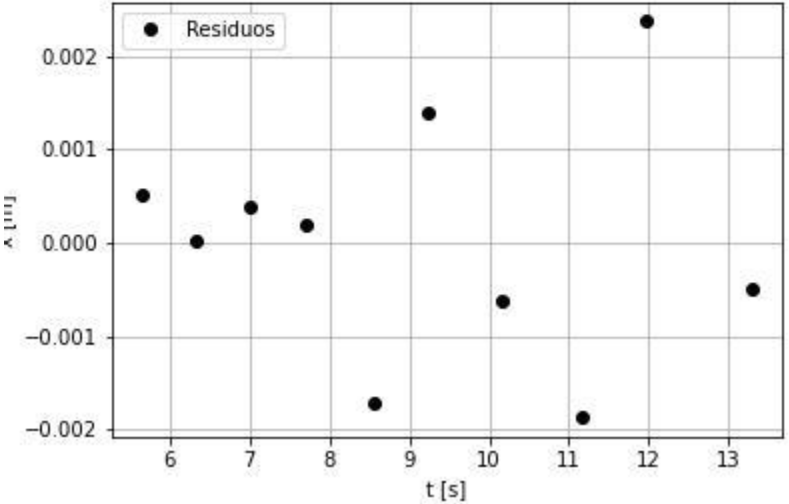
Otra forma: ajuste no lineal

$$\mathrm{MRUV} \longrightarrow X(t) = kt^2 + V_0 t$$

Con el eje en el centro de masa:

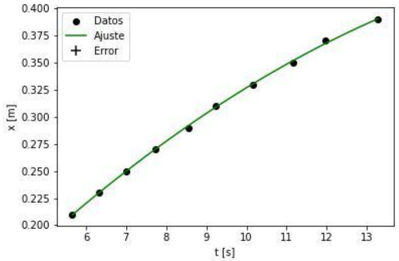
$R^2 = 0.99954$





Valor de I_{CM}

$$k = (-0.0009984000 \pm 0.0000000004)\frac{m}{s^2}$$



I_{CM} experimental

$$I_{CM} = mR^2[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$\Delta I_{CM}^{exp} = \sqrt{\underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial m}\Delta m)^2}_{A} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial R}\Delta R)^2}_{B} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial \alpha}\Delta \alpha)^2}_{C} + \underbrace{(\frac{\partial I_{CM}}{\partial k}\Delta k)^2}_{D}}$$

$$A: \frac{\partial I_{CM}}{\partial m} = R^2[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$B: \frac{\partial I_{CM}}{\partial R} = 2mR[\frac{g\sin\alpha}{2k} - 1]$$

$$C: \frac{\partial I_{CM}}{\partial \alpha} = mR^2 g\frac{\cos\alpha}{2k}$$

$$D: \frac{\partial I_{CM}}{\partial k} = -mR^2 g\frac{\sin\alpha}{2k^2}$$

$$\Delta I_{CM}^{exp} = 0.009 \quad kgm^2$$

$$I_{CM}^{exp} = (0.153 \pm 0.009)kgm^2$$

Valor de I_{CM}

I_{CM} teórico

Discos y cilindros: $I_{CM}^{teo} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\Delta I_{CM}^{teo} = \sqrt{(\frac{\partial I}{\partial m}\Delta m)^2 + (\frac{\partial I}{\partial R}\Delta R)^2}$$

$$I_{CM}^{teo} = (0.0000567 \pm 0.0000002)kgm^2$$

$$\Delta I_{CM}^{teo} = \sqrt{(\frac{R^2}{2}\Delta m)^2 + (mR\Delta R)^2} = 0.0000002 \quad kgm^2$$

Precisión

$\varepsilon_{exp}\,\% = 6.1\,\%$ $\varepsilon_{teo}\,\% = 0.3\,\%$

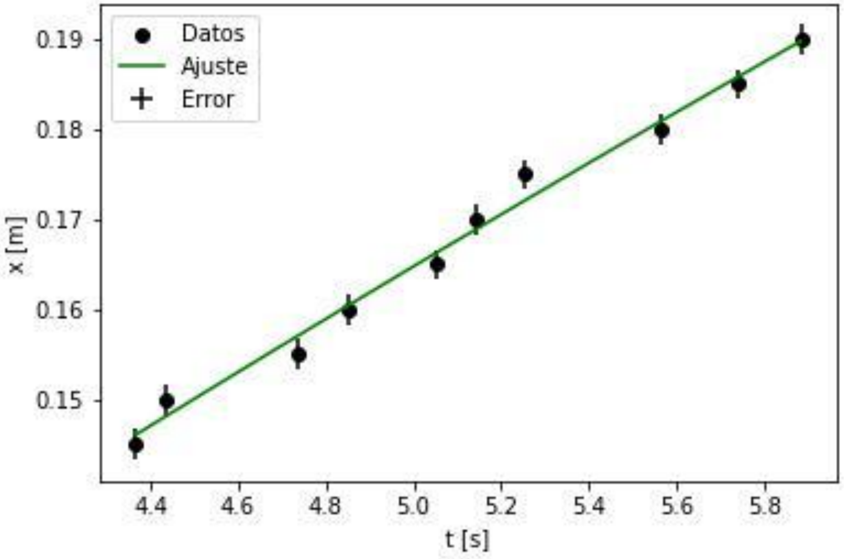
Diferencias significativas

Recuerdo: $A = (\bar{A} \pm \Delta A)$, $B = (\bar{B} \pm \Delta B)$ sí presentan diferencias significativas si $|\bar{A} - \bar{B}| > \Delta A + \Delta B$

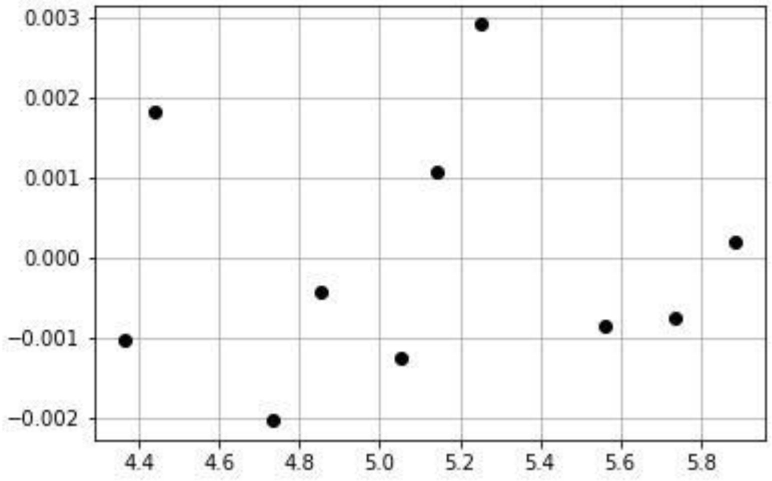
$|0.153 - 0.00005668| > 0.009 + 0.00000005 \iff 0.153 > 0.009 \implies$ sí presentan

Desde otro eje

$$\text{MRUV} \longrightarrow X(t) = \tilde{k}t^2 + V_0 t$$

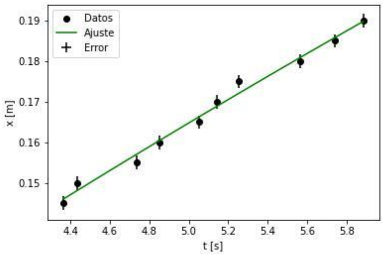


$R^2 = 0.98974$



Valor de I_p

$$\tilde{k} = (-0.00079132 \pm 0.00000004)\frac{m}{s^2}$$



I_p experimental

$$I_p = mR^2[\frac{g\sin\alpha(1-\frac{d}{R})}{2\tilde{k}} - 1]$$

$$\Delta I_p^{exp} = \sqrt{\underbrace{(\frac{\partial I_p}{\partial m}\Delta m)^2}_{A} + \underbrace{(\frac{\partial I_p}{\partial R}\Delta R)^2}_{B} + \underbrace{(\frac{\partial I_p}{\partial d}\Delta d)^2}_{C} + \underbrace{(\frac{\partial I_p}{\partial \alpha}\Delta \alpha)^2}_{D} + \underbrace{(\frac{\partial I_p}{\partial \tilde{k}}\Delta \tilde{k})^2}_{E}}$$

$$A: \frac{\partial I_p}{\partial m} = R^2[\frac{g\sin\alpha}{2\tilde{k}} - 1]$$

$$B: \frac{\partial I_p}{\partial R} = \frac{mg\sin\alpha}{2\tilde{k}}(2R-d) - 2mR$$

$$C: \frac{\partial I_p}{\partial d} = -\frac{mRg\sin\alpha}{2\tilde{k}}$$

$$D: \frac{\partial I_p}{\partial \alpha} = \frac{mR^2 g\cos\alpha}{2\tilde{k}}(1-\frac{d}{R})$$

$$E: \frac{\partial I_p}{\partial k} = -\frac{mR^2 g\sin\alpha}{2\tilde{k}^2}(1-\frac{d}{R})$$

$$\Delta I_p^{exp} = 0.003 \quad kgm^2$$

$$I_p^{exp} = (0.181 \pm 0.003) kgm^2$$

Valor de I_p

$$I_p^{steiner} = I_{cm}^{exp} + md^2 = (0.153 \pm 0.009)kgm$$

I_p teórico

Discos y cilindros para un eje corrido: $I_p^{teo} = \frac{1}{2}mR^2 + md^2$

$$\Delta I_p^{teo} = \sqrt{(\frac{\partial I}{\partial m}\Delta m)^2 + (\frac{\partial I}{\partial R}\Delta R)^2 + (\frac{\partial I}{\partial d}\Delta d)^2} \qquad I_p^{teo} = (0.0000564 \pm 0.0000002)kgm^2$$

$$\Delta I_p^{teo} = \sqrt{[(\frac{R^2}{2} + d^2)\Delta m]^2 + (mR\Delta R)^2 + (2md\Delta d)^2} = 0.0000002 \quad kgm^2$$

Precisión

$\varepsilon_{exp}\% = 1.8\%$ $\varepsilon_{teo}\% = 0.3\%$

Diferencias significativas

$$|0.181 - 0.0000564| > 0.003 + 0.0000002 \Longleftrightarrow 0.181 > 0.003 \Longrightarrow \text{sí presentan}$$

Bibliografía

- S. Gil y E. Rodríguez. *Física re-Creativa: experimentos de física usando nuevas tecnologías*.Buenos Aires, 2001. Capítulo 7: ”Métodos cuantitativos y regresión lineal”.
- Alonso, M. and Finn. *Física. Vol 1: Mecánica*. E.J. Addison-Wesley. 1970. Capítulo 10: ”Dinámica del cuerpo rígido”.
- Wikipedia. (Octubre de 2022). *Momento de inercia*.

¿Preguntas?

McCallum, Andrew William

Sequeira Vernengo, Joaquín Amaro

Grbec, Natasha