

Análisis del comportamiento estadístico de fuentes de luz con distintos tiempos de coherencia

Luciano Carullo Bedia
luchibedia@gmail.com

Tadeo Rodríguez
tadeorodriguez842@gmail.com

Joaquín Sequeira
joaquinetsequeira@gmail.com

Laboratorio 5, Cátedra Grosz, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

9 de Septiembre, 2024

Resumen

En este trabajo se analizó la estadística de la distintas fuentes de luz a intensidades bajas, utilizando una aproximación semiclásica para el tratamiento del efecto fotoeléctrico, considerando cuánticamente a los fotones y clásicamente al campo eléctrico. Se trabajó con fuentes con distintos tiempos de coherencia. Se obtuvieron resultados que mostraban la semejanza entre la estadística de la luz coherente y una distribución de Poisson, y la de la luz caótica como una distribución de Bose-Einstein.

1. Introducción

El estudio de la luz es un área de mucho interés para la física con aplicaciones en diversos campos. En muchas ocasiones se realizan experimentos que utilizan altas intensidades, tales que se mide con señales continuas. También es de interés analizar lo que ocurre cuando la intensidad es baja. Esto se acerca al límite cuántico, ya que se empieza a tener que tratar con fotones individuales. Aún así se pueden mantener algunos argumentos clásicos.

Generalmente en estas mediciones basadas en la óptica se utilizan detectores de intensidad. Cuando la luz es de alta intensidad sobre los detectores incide un número alto de fotones por unidad de tiempo. Esto se traslada a que la señal medida parezca continua. Si se usa un fotomultiplicador como el de la figura 1, se observa un número alto de fotones detectados por unidad de tiempo. Esto hace que se emita un número alto de electrones, que al multiplicarse en los dínodos producen una corriente analógica, que se detecta como una señal continua. Por el contrario, si la intensidad es lo suficientemente baja, el número de fotones por unidad de tiempo va a ser tal que los electrones emitidos van a estar temporalmente espaciados, y se van a detectar pulsos. Se produce una señal en la que los eventos que corresponden a los fotones, denominados cuentas, están discretizados. Esto permite estudiar la estadística de las cuentas por unidad de tiempo. Con este método, se trabaja mezclando conceptos clásicos y cuánticos. Al utilizar el efecto fotoeléctrico, se mira a las partículas desde un lente cuántico. Luego se mide el campo eléctrico desde un punto de vista clásico, analizando la corriente analógica generada por los electrones. El resultado es convertir una intensidad clásica que está promediada en un conteo discreto.

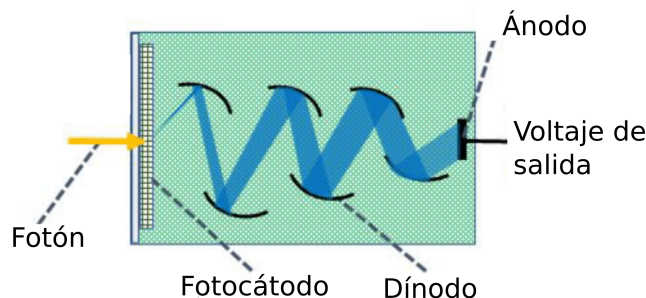


Figura 1: Esquema del tubo fotomultiplicador. Cuando un fotón ingresa al dispositivo, incide sobre el fotocátodo, que emite un electrón por efecto fotoeléctrico. Este electrón se multiplica al chocar con los dínodos, obteniéndose a la salida un voltaje suficientemente significativo para que sea medible con un osciloscopio.

Para llegar al análisis estadístico, es necesario conseguir las distribuciones de probabilidad de las cuentas. Si llamamos a la densidad de probabilidad de detectar un fotón en un dado tiempo $p(t)$, la probabilidad de detectarlo entre t y $t + dt$ es $p(t)dt$. Este método asume que es proporcional a la intensidad promediada en ese intervalo temporal $\hat{I}(t)$. Esto sigue la ecuación [1]

$$p(t)dt = \varepsilon \hat{I}(t)dt, \quad (1)$$

donde ε es la constante de eficiencia del fototubo. Desde esta expresión se puede llegar a la fórmula de Mandel [1], que dice que la probabilidad $P_m(T)$ de detectar m fotones en un intervalo de tiempo T

$$P_m(T) = \left\langle \frac{(\varepsilon \hat{I}(t, T)T)^m}{m!} \exp(-\varepsilon \hat{I}(t, T)T) \right\rangle. \quad (2)$$

Aquí toda la expresión está promediada sobre distintos t para variar el instante inicial. $\hat{I}(t, T)$ es la intensidad promediada entre t y $t + T$, calculada según

$$\hat{I}(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t') dt', \quad (3)$$

donde $I(t')$ es la intensidad instantánea a tiempo t' . El promedio se toma para evitar fluctuaciones que dependan del tiempo en el que comienza el intervalo sobre el que se integra. Esta expresión de $P_m(T)$ no es fácil de calcular, pero si se trabaja en ciertos regímenes se llega a algo más simple.

Este obstáculo puede superarse teniendo ciertas consideraciones para casos particulares. Una de las propiedades que caracterizan a la luz es su tiempo de coherencia τ . Es un indicador del tiempo que tarda la señal de la luz en dejar de estar significativamente correlacionada consigo misma. Si se emite luz a $t_0 = 0$, la superposición con la luz emitida a un $0 < t < \tau$ puede generar interferencia. Esto resulta en fluctuaciones de intensidad que no se detectan a tiempos más largos. Más adelante se verá como estimar τ .

En este trabajo es de interés el τ de la fuente de luz que incide sobre el fotodetector. Cuando se tiene $T \gg \tau$, se promedia la intensidad sobre un tiempo mucho más largo al de las fluctuaciones, haciendo que $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t') dt' \approx \hat{I}$. En esta aproximación la intensidad promediada no depende de t . La probabilidad se reduce a una distribución de Poisson de la siguiente forma

$$P_m(T) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}. \quad (4)$$

En esta expresión, el valor medio de las cuentas en un tiempo T es

$$\langle m \rangle = \varepsilon \hat{I}T. \quad (5)$$

Mientras más ventanas se tomen para un mismo T , más deberían acercarse los datos medidos a reproducir esta distribución.

Por otro lado, si se estudia un régimen con $\tau \gg T$ se tiene luz caótica, cuyas fluctuaciones predominan. La intensidad se vuelve función únicamente de t y la probabilidad de tener intensidad promediada en un ciclo entre $\hat{I}(t)$ y $d\hat{I}(t)$ es $p(\hat{I}(t))d\hat{I}(t) = \frac{1}{\hat{I}} \exp(\hat{I}(t)/\hat{I})$. Aquí \hat{I} es la intensidad promediada a tiempos largos que se usó para el caso anterior, que sirve para normalizar. Teniendo esto en cuenta, el promedio de la ecuación 2 queda

$$P_m(T) = \frac{\langle m \rangle^m}{(1 + \langle m \rangle)^{1+m}}. \quad (6)$$

Esta es una distribución discreta de Bose-Einstein. Este régimen tiene como problemática que está limitado por la resolución de los instrumentos de medición, porque las fuentes normalmente tienen un tiempo de coherencia demasiado bajo para medir sin equipamiento especializado. Para aumentar el valor del tiempo de coherencia se puede emular una fuente térmica utilizando un disco rotante, que funciona como un conjunto de dispersores en movimiento que aumentan el tiempo de coherencia de la luz que llega al fototubo. Esta técnica sirve para llegar a valores de τ del orden del milisegundo, que permiten tomar T varios órdenes de magnitud menor y aún así medir sin necesitar mayor resolución temporal que la de un osciloscopio.

Para saber cuál es el tiempo de coherencia de la luz emitida por esta fuente pseudo-térmica se puede analizar la función de autocorrelación g de la intensidad en función del tiempo. Para obtener esto es necesario que la intensidad sea lo suficientemente alta para que el detector mida una señal continua y no pulsos discretos. Para este tipo de fuentes g debería decaer exponencialmente con τ como tiempo de decaimiento. Esto permite estimar el tiempo de coherencia a partir de la función de autocorrelación, y en base a esto definir los valores de T para los que medir.

A partir de estas estimaciones del tiempo de coherencia se puede medir en cada uno de los regímenes mencionados, para observar las distintas fuentes de luz desde un punto de vista estadístico. En este trabajo se buscó constatar los resultados experimentales con las distribuciones esperadas y analizar el comportamiento teóricamente lineal de $\langle m \rangle$ con respecto a T .

2. Desarrollo experimental

El montaje experimental fue el ilustrado en la figura 2. Se puede ver la fuente de luz utilizada, un láser HeNe *MellesGriot*. El haz se orientaba con espejos. En su camino atravesaba dos polarizadores lineales para modular su intensidad. También pasaba por un disco de acrílico, conectado a un motor que permitía hacerlo rotar. Finalmente incidía sobre un tubo fotomultiplicador (o PMT) *Hamamatsu 1P28*. Todos los elementos anteriores se encontraban contenidos dentro de una caja cerrada para bloquear fuentes de luz externas. El PMT se alimentaba con una fuente de alta tensión *S.R.S PS350 5000V-25W* a 1100 V, y su salida se conectaba a un osciloscopio *Tektronix 1002B*. Para variar el tiempo característico del circuito, que alteraba el ancho de los pulsos, se conectaron resistencias en paralelo al osciloscopio. Se usaron distintas resistencias según la ventana. Esto permitió tener pulsos estrechos, facilitando el tratamiento posterior para contabilizar eventos.

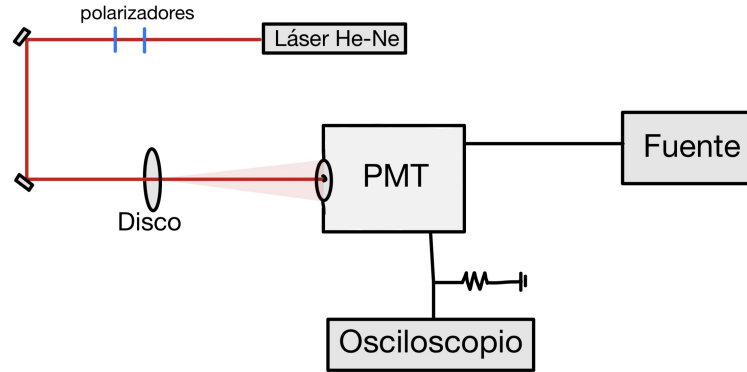


Figura 2: Se observa el sistema experimental utilizado. El láser atraviesa dos polarizadores y un disco de acrílico antes de incidir en el PMT. El PMT está conectado a una fuente de alta tensión, y a la salida a un osciloscopio. El osciloscopio está conectado en paralelo a una resistencia.

Para estudiar la estadística de cada fuente de luz se tomaron 200 mediciones de cada una de las distintas ventanas temporales, que fueron desde $1\text{ }\mu\text{s}$ hasta 1 ms. Para las ventanas temporales de entre $1\text{ }\mu\text{s}$ y $100\text{ }\mu\text{s}$ se utilizó una resistencia de $1\text{ k}\Omega$. Para las ventanas mayores a $100\text{ }\mu\text{s}$ se utilizó una resistencia de $9,9\text{ k}\Omega$.

Además de las mediciones con el láser prendido, se tomaron 100 mediciones del ruido (con el láser apagado) para cada ventana. Esto fue importante para la determinación del umbral, a partir del cual se consideraba que los eventos detectados eran fotones.

Para poder trabajar con luz caótica era necesario un estimador del tiempo de coherencia. Se conectó el disco a una fuente, y se lo hizo girar enviando distintos voltajes. Se aumentó la intensidad del haz abriendo los polarizadores hasta que la corriente a la salida del PMT fuese continua. Para estas señales se midió durante 100 ms. Se continuó con la fuente en $(3,1 \pm 0,1)\text{ V}$, que según el análisis de la función de autocorrelación correspondía a un $\tau \sim 20\text{ ms}$. Utilizando la resistencia de $1\text{ k}\Omega$ se midieron luego 400 veces para ventanas con T entre $1\text{ }\mu\text{s}$ y $100\text{ }\mu\text{s}$.

3. Resultados y discusión

3.1. Definición del umbral

Una vez tomados los datos, para empezar a estudiar la estadística del haz del láser, fue necesario determinar a partir de qué voltaje se consideraría un pico como una cuenta. Para esto es importante entender que el ruido de la señal estaba conformado por las fluctuaciones eléctricas y por cuentas oscuras. Las cuentas oscuras son pulsos a la salida del PMT que no se deben a fotones del haz incidente. Estas cuentas no forman parte de la estadística que se buscó medir pero tampoco son propias del ruido eléctrico. Filtrar cuentas oscuras de fotones no es posible; el PMT mide voltajes indistinguibles para ambos. El ruido eléctrico en cambio sí es posible de filtrar.

Para esto se realizaron histogramas de los datos medidos para cada ventana temporal, tanto para el láser apagado como para el láser prendido. Uno de estos gráficos (para $T = 10\text{ }\mu\text{s}$) se observa en la figura 3, donde se puede ver los histogramas de las mediciones con el láser apagado, y superpuesto el histograma de los datos con el láser prendido. Se calculó la desviación estándar σ_R para cada una de las señales del ruido. Se definió el umbral como la menor cantidad de σ_R de distancia a la media del ruido que no tomara picos de las fluctuaciones eléctricas como eventos. Para todas las ventanas, el número de σ_R que mejor cumplía con el criterio resultó en un umbral de $4\sigma_R$. Esto se ve en la figura 3 para una ventana de $10\text{ }\mu\text{s}$.

Cabe aclarar que para esa ventana, que era una de las ventanas más cortas, únicamente se registró ruido eléctrico, generando un histograma para la señal del láser apagado que decaía abruptamente. Para ventanas con esta característica, resultaba sencillo determinar el umbral que filtraba el ruido eléctrico.

Para ventanas mayores en cambio se detectaban cuentas oscuras. Para estas ventanas más largas, se determinó el umbral que filtrara el ruido eléctrico observando únicamente el ruido con voltaje negativo. Esto se hizo porque las cuentas oscuras, como los fotones, generan exclusivamente voltajes positivo. El ruido negativo es ruido eléctrico.

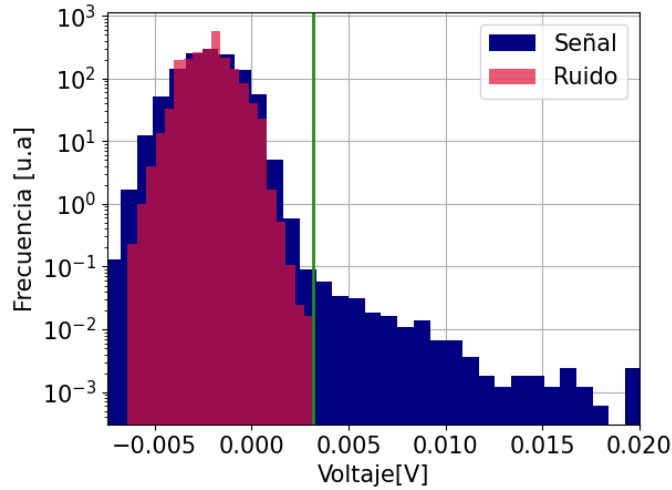


Figura 3: En la figura se observan los histogramas de cantidad de datos para cada voltaje de la ventana de $10 \mu s$. En rojo para las mediciones del ruido y en azul para las mediciones con el láser prendido. La línea vertical está a 4σ de la media del ruido. Se eligió porque era el umbral que mejor cumplía con el criterio de no tomar puntos del ruido eléctrico como fotones, pero sin sacrificar una cantidad representativa de cuentas detectadas.

Definir de esta forma el umbral hace que el ruido eléctrico no sea contado como fotones. El otro problema que podría modificar los estadísticos que se obtengan son las cuentas oscuras. Como las cuentas oscuras y los fotones generan voltajes indistinguibles, y filtrarlas no es posible, la solución es considerarlas como una fuente de incerteza experimental. La forma elegida para calcular la incerteza fue, para las mediciones con el láser apagado de cada ventana, obtener el promedio de cuentas oscuras registradas (la cantidad de picos con voltaje mayor al umbral). Ese valor promedio fue el que se consideró como incerteza experimental.

Una vez obtenido el umbral, los fotones se contabilizaron como la cantidad de picos en la señal con el láser prendido que tenían un voltaje mayor a este. Para obtener los picos se utilizó la función `scipy.optimize.find.peaks` [2], donde los parámetros se definían en busca de que por pulso solo se contabilice un solo punto.

3.2. Luz coherente

Si se mide en ventanas de T mucho mayor al tiempo de coherencia de la fuente, lo que se debe observar es una distribución de Poisson para los fotones detectados, como establece la ecuación 4. Se realizó, para 9 ventanas entre $1 \mu s$ y $1 ms$, un histograma de la frecuencia con la que se detectó cada número de eventos. En la figura 4 se puede ver la distribución obtenida para la ventana de $T = 500 \mu s$. Se ve también el ajuste por una distribución de Poisson.

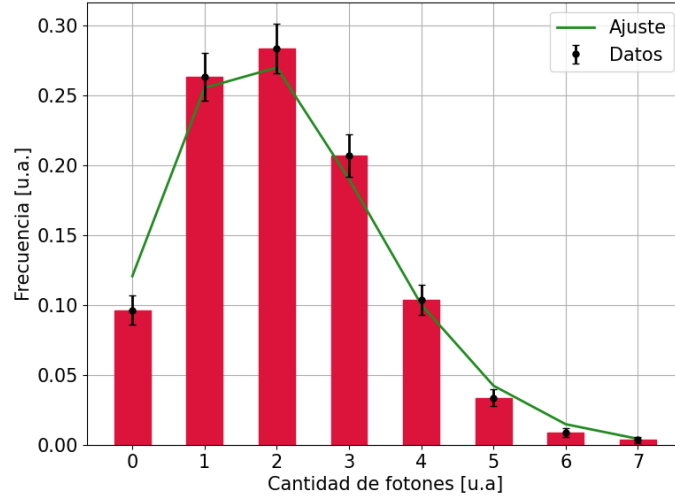


Figura 4: Se ven en azul los datos de la frecuencia en función de la cantidad de eventos para la ventana 500 μs . En verde se ve el ajuste por una distribución de Poisson.

El ajuste de la distribución se realizó para cada una de las ventanas, obteniendo para cada una un valor de la media. En la figura 5 se observa el valor de la media obtenido en función del tiempo de medición. Lo esperado teóricamente, de acuerdo con la ecuación 5 es una relación lineal entre la media y la duración T . Se realizó un ajuste lineal, que presentó un $P_{value} = 2\%$. Este valor **no refuerza** la hipótesis de que la relación entre la media y el largo de la ventana sea lineal. Las fuentes de esta discordancia entre la teoría y lo obtenido pueden ser varias. El proceso de filtrado no parece serlo, ya que en ninguna de las señales se toman puntos de ruido eléctrico como fotones. Otro punto en que se desarrolló confianza es en el proceso de selección de picos con *find_peaks*, ya que se verificó que para cada ventana los parámetros fueran óptimos y registraran los picos correctamente. A simple vista el gráfico parece ser lineal, por lo que una posible razón es una sub-estimación de los errores. Refuerza además la teoría de que la linealidad existe el hecho de que si se considera el punto de 100 μs como un outlier, el p_{value} aumenta al 22%, que ya no permite rechazar la hipótesis.

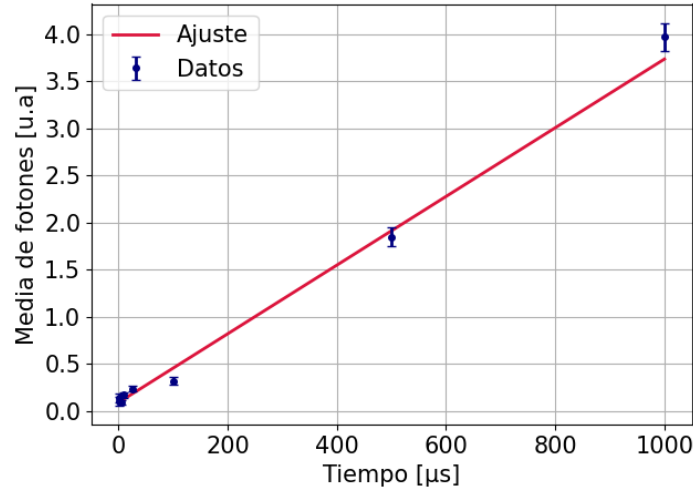


Figura 5: Gráfico de la media de la distribución en función de la ventana temporal. En rojo el ajuste de los datos, que resultó en un $p_{valor} = 2\%$.

3.3. Luz caótica

Para poder trabajar con luz caótica, fue necesario medir en ventanas de ancho temporal mucho menor al tiempo de coherencia del haz incidente sobre el fototubo. Para saber qué valores de T cumplen con esta condición no es necesario determinar el valor exacto de τ , alcanza con conocer su orden de magnitud. Para esto se puede analizar la función de autocorrelación de la señal de intensidad, y utilizar como estimador el tiempo que tarda en decaer a la mitad de su valor máximo. La función g se obtuvo usando el paquete de *python statsmodels*[3]. En la figura 6 se puede ver el gráfico para g con el disco rotando a distintas velocidades, que se variaban con el valor

del voltaje de la fuente a la que estaba conectado. En rojo los puntos que se consideraron como estimadores de τ . Como se continuó con la fuente en $V = (3,1 \pm 0,1) \text{ V}$, se estimó el tiempo de coherencia en $\tau \sim 20 \text{ ms}$. Teniendo esto en cuenta, realizar mediciones entre $1 \mu\text{s}$ y $100 \mu\text{s}$ cumplía con el rango buscado.

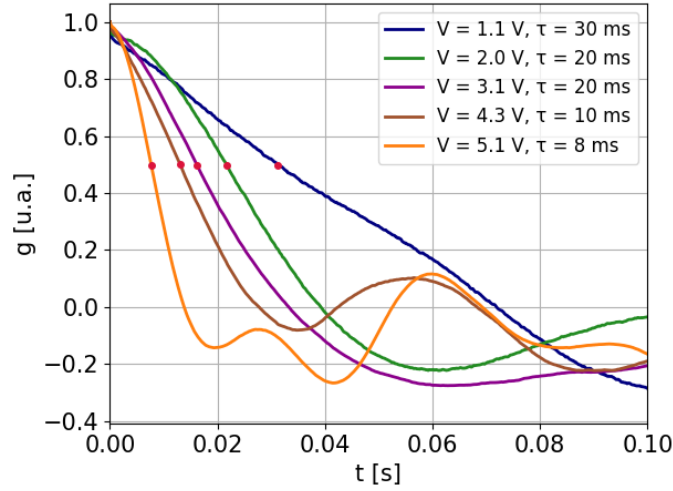


Figura 6: Gráfico de la función de correlación g en función del tiempo para distintos valores del voltaje de la fuente del disco. En rojo los puntos utilizados para estimar τ tomando el tiempo que tardaba la función en decaer a la mitad de su valor inicial.

En la figura 7 se puede apreciar para $10 \mu\text{s}$ el histograma que muestra la frecuencia con la que se midieron los fotones para las 400 mediciones. Para valores de la media bajos, las distribuciones de Poisson y Bose-Einstein tienen comportamientos similares. Esto significa que aunque unos datos ajusten correctamente por la ecuación 6, no deja de ser posible que también lo hagan por la ecuación 4. A partir de esto se decidió hacer ambos ajustes y comparar. En la figura 7, se ve en verde el ajuste según una distribución de Bose-Einstein y en azul el ajuste según una distribución de Poisson. El primero presenta un $p_{\text{valor}} = 57\%$, que no permite rechazar la hipótesis. Por otro lado, el segundo, presenta un $p_{\text{valor}} = 0,3\%$, lo que permite rechazar la hipótesis de que los datos correspondan a una distribución de Poisson. A partir de esto se puede considerar que esta fuente pseudo-térmica tiene un comportamiento estadístico que difiere del de una fuente coherente, y en particular se asemeja a una distribución de Bose-Einstein. Se obtuvieron resultados similares para todas las ventanas.

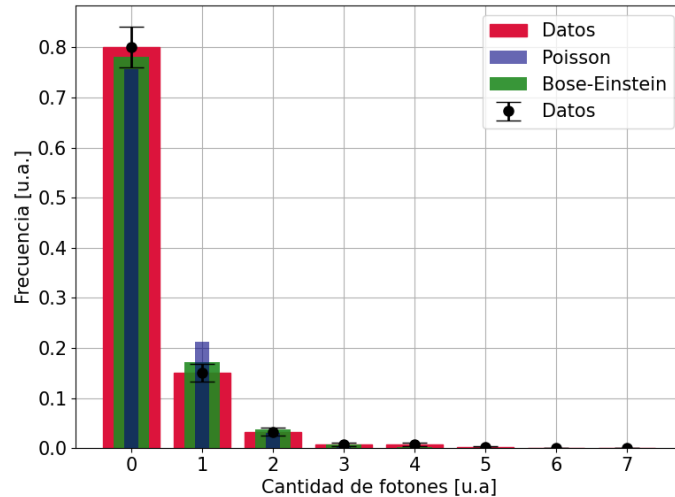


Figura 7: Se representa con un histograma la frecuencia con la que se midieron fotones para ventanas de $T = 10 \mu\text{s}$. En negro el centro de cada uno de los bins con su respectivo error estadístico e instrumental. En verde el ajuste según la fórmula 6, obteniendo un $p_{\text{valor}} = 57\%$. En azul un ajuste según 4, con un $p_{\text{valor}} = 0,3\%$.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se ajustó por una distribución de Bose-Einstein cada uno de los histogramas, para obtener las medias dependiendo del largo de la ventana. En la figura 8 se muestra la media de fotones medidos en función de la duración de la ventana. Los datos se ajustaron según la formula 5.

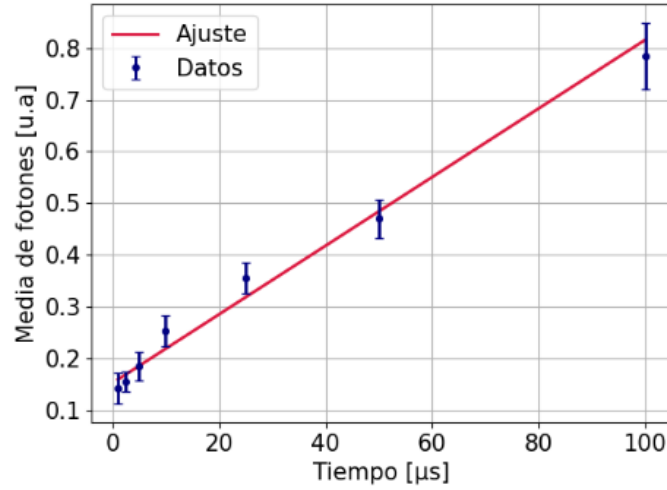


Figura 8: Se representa en el eje horizontal la duración de la ventana y en el vertical la media de fotones obtenidos. Se ajustaron los datos según la ecuación 5 y se obtuvo un $p_{valor} = 72\%$.

Según el $p_{valor} = 72\%$ que no rechaza la hipótesis y viendo la distribución de los datos en torno al ajuste, se observa un comportamiento lineal al variar el ancho temporal de la ventana con una intensidad del láser constante.

4. Conclusiones

Se realizó una caracterización para distintos tipos de fuentes de luz, coherentes y caóticas. Para cada una de ellas se estudió el comportamiento de la estadística. Para lograr esto se desarrollaron criterios para filtrar fotones del ruido, estableciendo un umbral a partir de las mediciones. Además, se estimó el error instrumental, para contemplar la existencia de las cuentas oscuras y como afecta esto los estadísticos.

Para el caso de la luz coherente se vio que una distribución poissoniana describe de forma acertada la probabilidad de medir un dado número de fotones en una ventana T . También se observó para tiempos de orden del μs una linealidad en el promedio de fotones medidos respecto a T .

Por otro lado, para valores de intensidad altas del láser con el detector midiendo una señal continua se analizaron los tiempos de coherencia. Se obtuvo, como se esperaba, que al variar la velocidad de giro del disco aumente el tiempo de coherencia hasta el orden de los milisegundos. Para la luz caótica se puede concluir que el comportamiento experimental es compatible con una descripción estadística de Bose-Einstein, habiendo constatado que tiene discrepancias con una distribución de Poisson. Para las distintas ventanas se vio un comportamiento lineal de los promedios de fotones obtenidos respecto a T .

Referencias

- [1] R. Loudon. «The Quantum Theory of Light». En: Oxford University Press, 2000. Cap. 3.
- [2] `scipy.signal.find_peaks`. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.find_peaks.html.
- [3] `statsmodels.tsa.stattools.acf`. <https://www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.tsa.stattools.acf.html>.