Integración de funciones

PID_00273999

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

Mireia Besalú

Licenciada en Matemáticas por la Universitat de Barcelona (2006) y doctora en Matemáticas por la Universitat de Barcelona (2011). Ha sido profesora asociada de la Universitat de Pompeu Fabra y profesora asociada y actualmente profesora lectora de la Universitat de Barcelona. Profesora colaboradora de la UOC desde el curso 2014-15. Centra su investigación en el análisis estocástico y análisis de supervivencia.

Joana Villalonga

Licenciada (2006) i Máster en Matemática Avanzada y Profesional (2007) por la Universitat de Barcelona, Diploma en Matemáticas para Secundaria (2009) por la Universitat Pompeu Fabra y Doctora en Educación (2017) por la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha sido profesora asociada a la Universitat Politècnica de Catalunya y es colaboradora docente de la Universitat Oberta de Catalunya desde el 2011 como consultora y editora de materiales para la asignatura de Iniciación a las matemáticas para la ingeniería. Su investigación se centra en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estos apuntes se basan en un trabajo previo de Ramon Masià y de Marc Guinjoan.

Tercera edición: febrero 2021

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Autoría: Mireia Besalú, Joana Villalonga
Producción: FUOC

12. Integración de funciones

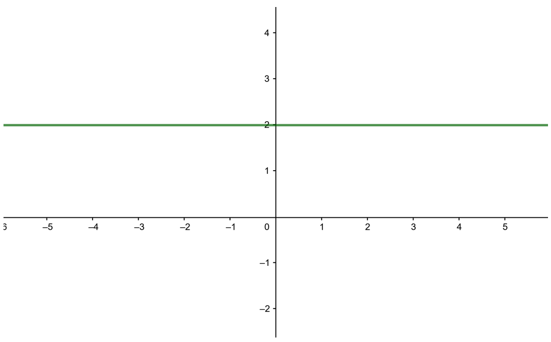
Índice

12.1. Integración de una función

12.1.1. Noción intuitiva

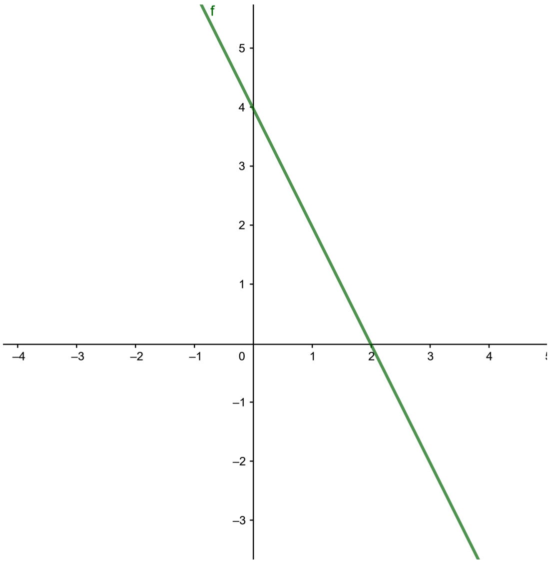
Dada una función $f(x)$ es posible encontrar su derivada $f'(x)$ usando la tabla de derivadas y las reglas pertinentes. Esta transformación sugiere una pregunta: dada una función $f(x)$, ¿es posible encontrar una función $F(x)$ cuya derivada sea la función inicial $f(x)$, es decir, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

Por ejemplo, si sabemos que la derivada de una función $F(x)$ tiene la gráfica siguiente, ¿qué podemos decir sobre la función $F(x)$?



Vemos en primer lugar que la derivada se corresponde con la función constante 2. Por lo tanto, sabemos que la función $F(x)$ podría ser $2x$. Pero también podría ser $2x + 5$ o, entre otras posibilidades, $2x - 8$. Entonces podemos decir que la función $F(x)$ será de la forma $2x + C$, donde C puede ser cualquier número real.

Consideremos un segundo ejemplo: supongamos que el gráfico siguiente nos muestra la derivada de una función $F(x)$



En este caso, primero tenemos que encontrar la expresión de la derivada. Vemos que la gráfica es una recta que pasa por los puntos $(0,4)$ y $(2,0)$ y por lo tanto podemos deducir que su expresión algebraica es $-2x+4$. Si pensamos en qué funciones tienen esta derivada, tenemos por ejemplo $-x^2+4x$, $-x^2+4x-5$ o también, entre otras, $-x^2+4x-8$. Todas estas funciones tienen la misma derivada $-2x+4$, y por lo tanto en este caso deducimos que $F(x)=-x^2+4x+C$, donde C será cualquier número real.

Podemos pensar en ejemplos más complicados. Dada la función $f(x) = 3x^2+5$, ¿podemos encontrar una función, $F(x)$, cuya derivada sea precisamente $f(x)$? En este caso, se puede comprobar que la función $F(x) = x^3+5x$ tiene como derivada $F'(x) = f(x) = 3x^2+5$. ¿Podríamos encontrar otra funció que cumpliera la misma condición? Notamos que la función $G(x) = x^3+5x+3$ también tiene como derivada $f(x)$. En general, toda función de la forma x^3+5x+C, donde C es un número, tiene la misma derivada, ya que la derivada de C siempre será 0.

12.1.2. Definición e interpretación

Un proceso de este tipo se denomina **integración** de la función $f(x)$, y la función resultante se denomina **primitiva** de $f(x)$. La integración es, por lo tanto, la operación opuesta a la derivación:

si $f(x)$ es la derivada de $F(x)$, $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Así, podemos afirmar que toda función de la forma $F(x)+C$, donde C es un número, también es una primitiva de $f(x)$. El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se denomina **integral indefinida** o simplemente integral de la función $f(x)$. Así, por ejemplo, la integral de la función $f(x) = 3x^2+5$ es x^3+5x+C (donde C es un número real cualquiera), porque cualquier primitiva de la función $f(x)$ se escribirá de esta manera. Es decir, la única diferencia entre una primitiva de esta función y otra será su término independiente.

Para expresar la integración de una función, se utiliza un símbolo de integral $\int$ antepuesto a la función **integrando**, y a continuación el símbolo dx, denominado

diferencial de x, que nos indica respecto de qué variable estamos integrando. Es decir, la integral indefinida de una función $f(x)$ se expresa así:

$$\int f(x)dx$$

Así, pues, el ejemplo anterior podemos expresarlo así:

$$\int (3x^2 + 5)dx = x^3 + 5x + C$$

12.1.3. Tabla de integrales inmediatas

Hay algunas integrales que se pueden obtener de manera inmediata si tenemos la integral de la derivada de una función. En este caso, basta con conocer las reglas de derivación de funciones para calcular la integral deseada. Estas integrales se llaman **integrales inmediatas**.

Presentamos una tabla de las integrales inmediatas más usuales. Recordemos que C denota un número real cualquiera.

Tabla de integrales inmediatas		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Ejemplos**
k constante	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	

12.1.4. Reglas de cálculo

El cálculo de la primitiva de una función cualquiera no es tan sencillo como el de la derivada, ya que las únicas reglas inmediatas que se pueden aplicar son:

- La integral de la suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las integrales de las funciones.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de la función.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx$, entonces $g'(x) = f(x)$.
- La regla de la cadena ($(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$) nos permite escribir

$$\boxed{\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de la última regla podemos generalizar la tabla de integrales inmediatas anterior a las integrales que se llaman a menudo **integrales casi inmediatas**.

Integrales casi inmediatas	
Integral	**Ejemplos**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2-3x+13\rvert + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

12.1.5. Métodos de integración

En general, para calcular la integral de una función no es suficiente con conocer las integrales inmediatas y las reglas de integración que acabamos de ver, sino que necesitaremos utilizar algunos métodos y técnicas que pueden ayudar en el cálculo. Con todo, no siempre es posible llegar a encontrar una expresión algebraica que resuelva la integral planteada.

Veamos las dos técnicas más utilizadas para calcular integrales no inmediatas. El objectivo de los dos métodos es simplificar la integral para poderla calcular como una integral inmediata o casi inmediata.

Método de sustitución (o de cambio de variable). Con este método se cambia la variable de integración por una función suya, con el objetivo de obtener una nueva integral más simplificada que la primera. Veamos cómo se aplica este método de forma general.

Supongamos que queremos resolver la integral de $f(x)$, o sea, queremos encontrar una primitiva $F(x)$ (si esta existe). Es decir, buscamos que

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Entonces, el punto de partida de este método consiste en considerar un cambio $x = g(t)$, en el que la función $g(t)$ y su derivada $g'(t)$ sean funciones continuas.

Con este cambio tenemos que $F(x) = F(g(t))$. Por otro lado, de la definción de integral sabemos que $F'(x) = f(x)$, así que también tenemos que $F'(g(t)) = f(g(t))$. Con todo esto, podemos derivar $F(x) = F(g(t))$ aplicando la regla de la cadena y obtenemos

$$F'(x) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$$

que utilizando las igualdades anteriores podemos reescribir como

$$f(x) = F'(x) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Finalmente, integramos ambos lados de la igualdad y obtenemos la fórmula de lo que se conoce como *método de sustitución*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Podemos resumir la aplicación de este método con los pasos siguientes:

1) Sustituimos x por $u(t)$ y dx por $u'(t)dt$

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt$$

2) Resolvemos la nueva integral, que será inmediata o casi inmediata.

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aislamos la variable t de la igualdad $x = u(t)$ y obtenemos $t = u^{-1}(x)$.

4) Deshacemos el cambio y obtenemos

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Veamos unos cuantos ejemplos de cómo aplicar este método.

Ejemplo. Integración por cambio de variable (1).

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

En este caso, no sabemos calcular directamente esta integral, pero observamos que si tomamos $t = \sqrt{x-1}$ podemos aislar x de manera que obtenemos $x = 1+t^2$ y su derivada $dx = 2tdt$. Así, si aplicamos este cambio nos queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C$$

Finalmente, deshacemos el cambio (sustituimos $t = \sqrt{x-1}$ en la solución) y tenemos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C$$

Ejemplo. Integración por cambio de variable (2).

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

En este caso tomamos $t = \ln(x)$ y, por tanto, $dt = \frac{1}{x} dx$. Así pues, tenemos

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C$$

Por lo tanto, deshaciendo el cambio,

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

Ejemplo. Integración por cambio de variable (3).

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Podemos hacer el cambio $x = \sin(t)$ y, por tanto, $dx = cos(t)dt$. Así, pues,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

Podemos calcular la integral planteada recordando que $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos(t)\cdot\cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\, dt + \frac{1}{2}\int \cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{2\sin(t)\cdot\cos(t)}{4} + C$$

donde hemos utilizado $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. Si deshacemos el cambio, como que $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ y $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$. Si sustituimos en la expresión, tenemos

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Observamos que en los dos primeros ejemplos los cambios de variable pueden ser intuitivos si pensamos que la idea es simplificar las integrales. En cambio, en el último ejemplo el cambio de variable requiere alguna indicación (o mucha práctica).

Método de integración por partes. Este método se basa en la regla de la derivación del producto. Recordamos que si f y g son dos funciones, sabemos que la derivada de su producto es

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Y, de hecho, podemos reescribir esta expresión de la forma

$$f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$$

Si ahora integramos en ambos términos de la igualdad, tenemos

$$\int \left[f(x)\cdot g'(x)\right]dx = \int \left[(f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)\right]dx$$

Y, por tanto, de aquí obtenemos la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int \left[f(x)\cdot g'(x)\right]dx = (f(x)\cdot g(x)) - \int \left[f'(x)\cdot g(x)\right]dx}$$

Esta fórmula se tiene que aplicar cuando la integral del miembro de la derecha es más sencilla que la de la izquierda (por esto, esta última tiene que descomponerse en el producto de dos funciones; una de estas, $g'(x)$, tiene que ser la derivada de otra función g, que, además, tiene que ser fácil de encontrar).

Muchas veces, para simplificar la fórmula de integración por partes se utilizan las variables u en lugar de $f(x)$, y v en lugar de $g(x)$, de manera que se escribe

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Normalmente, el orden en el que se elige la función u según las funciones que tengamos en la integral inicial es: funciones logarítmicas, funciones potencia, funciones trigonométricas y, finalmente, funciones exponenciales.

Veamos unos cuantos ejemplos de este método de integración.

Ejemplo. Integración por partes (1).

$$\int xe^x dx$$

Elegimos $u = x$ y, por lo tanto, $du = 1\cdot dx$ y $dv = e^x dx$ y, por lo tanto, $v = \int e^x dx = e^x$. Si ahora aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx$$

de manera que la nueva integral de la derecha ahora es inmediata y, por lo tanto, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Ejemplo. Integración por partes (2).

$$\int \ln(x)dx$$

Elegimos $u = \ln(x)$ y, por lo tanto, $du = \frac{1}{x}\cdot dx$ y $dv = 1\cdot dx$ y, por lo tanto, $v = \int 1dx = x$. Si ahora aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot xdx = x\ln(x) - \int 1dx$$

de manera que la nueva integral de la derecha ahora es inmediata y, por lo tanto, obtenemos

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C.$$

Ejemplo. Integración por partes (3).

$$\int e^x \sin(x)dx$$

Igual que en las anteriores integrales, elegimos $u = \sin(x)$ y, por lo tanto, $du = \cos(x)$ y $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. Así, a partir de la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

En este caso, no obtenemos una integral inmediata y por tanto volvemos a integrar por partes la integral que hemos obtenido. Elegimos $u = \cos(x)$ y, por lo tanto, $du = -\sin(x)$ y $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx \\ &= e^x \sin(x) - \left[e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx\right] \\ &= e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) - \int e^x \sin(x)dx\end{aligned}$$

Vemos como antes que la integral que obtenemos no es más fácil que las anteriores, pero esta vez podemos observar que es exactamente igual a la inicial, y por tanto lo que hacemos en este caso es pasar la integral al primer miembro, de manera que obtenemos

$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

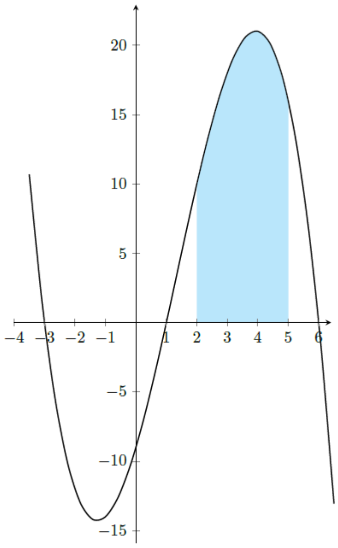
Y, por lo tanto, finalmente obtenemos

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

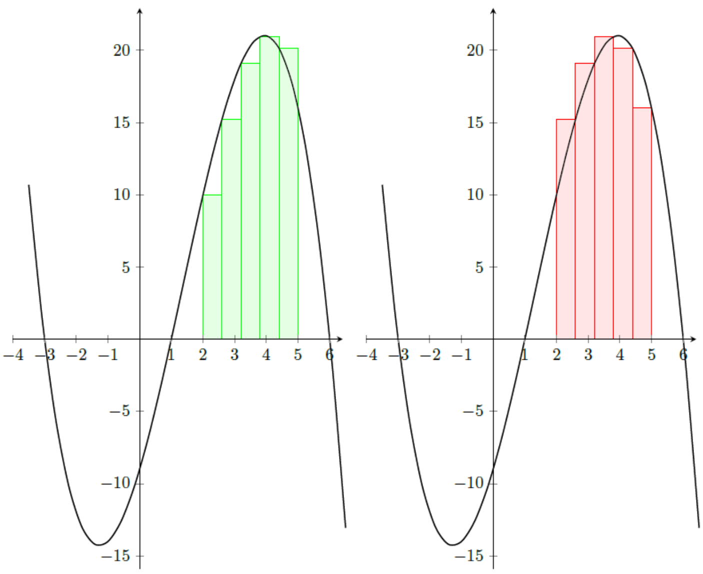
12.1.6. Integral definida. Regla de Barrow

Integral definida. La integral definida nace de la necesidad de calcular el área cerrada por una función y el eje X en un cierto intervalo. Esta área se puede aproximar sumando ciertos rectángulos, cuya base es constante y la altura es el valor de la función en ciertos puntos elegidos convenientemente. El límite de este cálculo cuando la base de estos rectángulos tiende a 0 es igual a la integral definida de esta función en este intervalo, es decir, el área que buscamos.

Veámoslo con un ejemplo y algunos gráficos. Queremos calcular el área limitada por la función $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)(x-1)(x+3)$ y el eje X entre 2 y 5, tal y como se muestra en la gráfica siguiente:

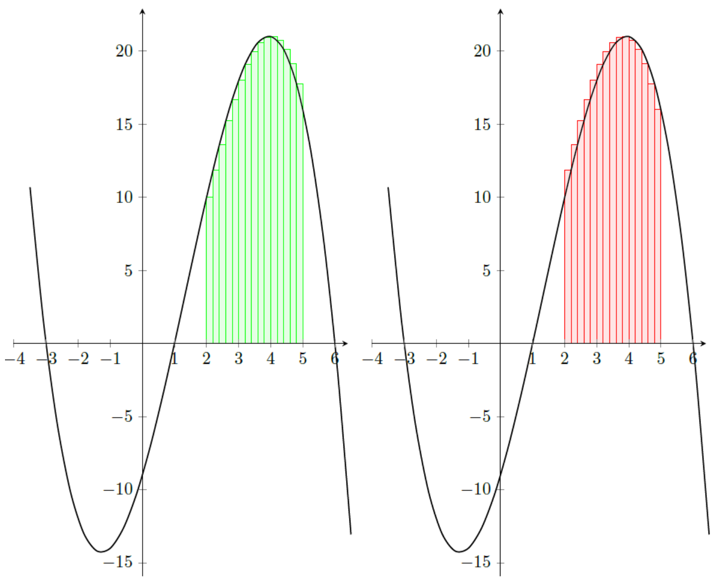


El área que cierra la gráfica entre los puntos 2 y 5 (la parte en azul) se puede aproximar por la suma del área de algunos rectángulos. Veamos en las gráficas siguientes dos ejemplos de formas de aproximar el área como suma de rectángulos. (Aunque presentamos solo dos ejemplos, hay otras formas de definir los rectángulos.)



En ambos casos, como en el otro, hemos dividido el intervalo $[2,5]$ en 5 partes. Para cada parte, hemos construido un rectángulo cuya altura coincide con la imagen del primer punto de la base en la primera gráfica y con la imagen del segundo punto de la base en el caso de la segunda gráfica.
De esta manera, las bases de todos los rectángulos son iguales: $\frac{5-2}{5} = 0.6$. Si nos fijamos en el primer rectángulo verde, su altura es $f(2) = -\frac{1}{2}(2-6)(2-1)(2+3) = 10$ y, por tanto, su área es $0.6 \cdot 10 = 6$. En cambio, si miramos el primer rectángulo rojo, la altura es $f(2.6) = -\frac{1}{2}(2.6-6)(2.6-1)(2.6+3) = 15.23$ y, por tanto, su área es $0.6 \cdot 15.23 = 9.13$

Si en lugar de 5 rectángulos hubiéramos dividido el intervalo en más partes, obtendríamos una mejor aproximación del área que queremos.



Así, en general, si queremos calcular el área de una función $f(x)$ en un intervalo (a, b), dividimos este intervalo en n partes y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los puntos resultantes, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Entonces, si construimos los rectángulos como en el ejemplo de los rectángulos en verde, tenemos

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Y, si lo hacemos como en el ejemplo de los rectángulos en rojo,

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

$\sum_{i=0}^{n}$ es el símbolo de sumatorio e indica que se tienen que sumar los términos del sumatorio desde $i = 0$ hasta $i = n$.

De hecho, el área que buscamos es exactamente igual a este límite:

$$A = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

es decir, el límite cuando la diferencia entre una x_i y la siguiente tiende a 0, es decir, cuando los rectángulos tienen una base tan pequeña como queramos y, por tanto, tenemos infinitos rectángulos.

Este límite se escribe normalmente en forma de integral cuando la función $f(x)$ es positiva:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

donde a y b se denominan **límites de integración**. Esta expressión recibe el nombre de **integral definida de extremos a y b**.

Regla de Barrow. Se puede comprobar que tanto la integral definida como la indefinida utilizan prácticamente los mismos símbolos, con la diferencia de los límites de integración que utiliza la integral definida. Esto no es casual, porque la integral definida se puede calcular a partir de una primitiva de la función. De hecho, el cálculo de la integral definida se facilita a partir de la **Regla de Barrow**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Fijémonos en que podemos elegir la primitiva que queramos, pero la elegiremos habitualmente con $C = 0$ porque es más sencilla. Si eligiéramos cualquier otra, el resultado sería exactamente el mismo, ya que estarían restando la C y se cancelaría.

Para una función $F(x)$ escribiremos $F(x)]_a^b$ para denotar que la función $F(x)$ se evalua en b y en a y se restan los resultados, o sea que es equivalente a $F(b) - F(a)$.

Ejemplo. Regla de Barrow.
Calculamos la integral

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$$

Para calcular esta integral, tenemos que buscar una primitiva (tomaremos $C = 0$) y evaluarla en los extremos:

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x\Big]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 + 3 \cdot 1\right) = \frac{70}{3}$$

En el momento de la definición de la integral definida hemos supuesto $a < b$, pero también podemos considerar el caso $b < a$. Entonces tendremos

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Por lo tanto, los límites de integración pueden ser cualquiera.

El origen del símbolo integral es una S alargada, que indica que se trata de un sumatorio, mientras que el origen del símbolo diferencial, dx, proviene del hecho de que se trata de diferencias de x (si se toma la inicial de "diferencia" juntamente con la x, resulta, precisamente, dx).

Utilizando la regla de Barrow, podemos comprobar que las propiedades de la integral definida son muy parecidas a las reglas de cálculo establecidas para la integral indefinida.

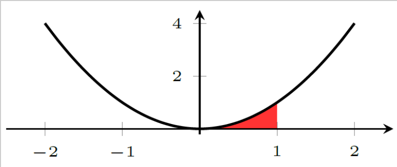
- $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- Sean a, b, c números arbitrarios

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A partir de la definición de la integral definida, podemos calcular el área bajo una función (positiva) en un intervalo. A continuación profundizaremos en este tema, pero veamos unos primeros ejemplos sencillos.

Ejemplo. Cálculo de área.

Queremos calcular el área bajo la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $(0,1)$, es decir, el área marcada en rojo en la gráfica siguiente:



Observamos que la función es positiva, y por lo tanto para encontrar el área tenemos que calcular la integral $\int_0^1 x^2 dx$. Podemos calcular primero la integral indefinida:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Y, de todas las primitivas, elegimos la más simple, es decir, con $C = 0$. Finalmente, tenemos que evaluar la integral en los dos extremos y restarlos:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el área que queríamos es $\frac{1}{3}\mathrm{u}^2$.

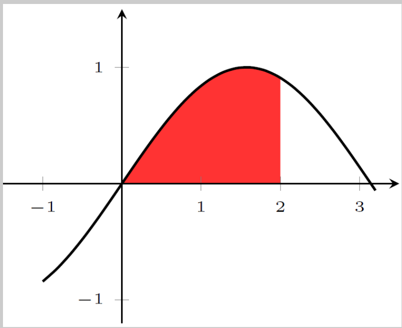
Observamos que si en lugar de tomar $C = 0$ húbiéramos tomado cualquier otro valor, el resultado habría sido exactamente el mismo:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3} + C\right]_0^1 = \frac{1}{3} + C - (0 + C) = \frac{1}{3}$$

Observamos que, como que calculamos áreas, el resultado final es en u^2, en donde u puede ser m, cm... dependiendo del contexto.

Ejemplo. Cálculo de área.

Queremos calcular el área bajo la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $(0,2)$, es decir, el área marcada en rojo en la gráfica siguiente:



Observamos que la función es positiva, y por lo tanto para encontrar el área, tenemos que calcular la integral $\int_0^2 \sin(x)dx$. En este segundo ejemplo podemos hacer los cálculos directamente sin calcular primero la integral indefinida. Así, pues, tenemos

$$\int_0^2 \sin(x)dx = -\cos(x)\big]_0^2 = -\cos(2) + \cos(0) = -(-0.41615) + 1 = 1.41615\mathrm{u}^2$$

Por lo tanto, el área es $1.41615\mathrm{u}^2$

12.2. Aplicaciones

12.2.1. Cálculo de áreas

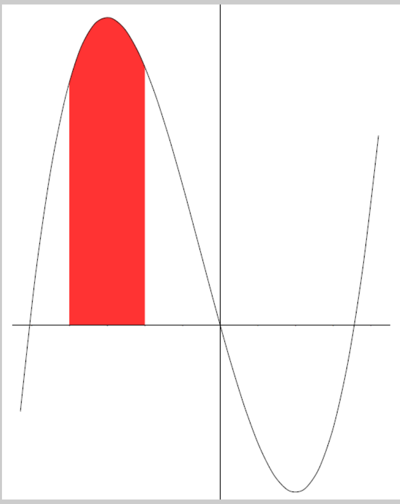
Ya hemos visto que la integral definida nos permite calcular áreas bajo la curva definida por $f(x)$ si $f(x)$ es positiva. Ahora veremos los diferentes casos en los que nos podemos encontrar. Recordemos siempre que el área tiene que ser un valor positivo (no puede ser nunca negativo, ya que es una medida).

Cálculo área si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x)$ es una función positiva en el intervalo $[a, b]$ (está siempre por encima del eje X), el área que encierra esta función y el eje X, dentro del intervalo $[a, b)]$, es igual a

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx}$$

tal como se desprende de manera inmediata de la definición de integral definida.

Ejemplo. Cálculo de área en $f(x) \geq 0$ a $[a, b]$.
Calculamos el área de la función $f(x) = 2x^3+3x^2-36x$ en el intervalo $[-4, -2]$



Como que vemos que la función es positiva en todo el intervalo $[-4, -2]$, el área que buscamos es

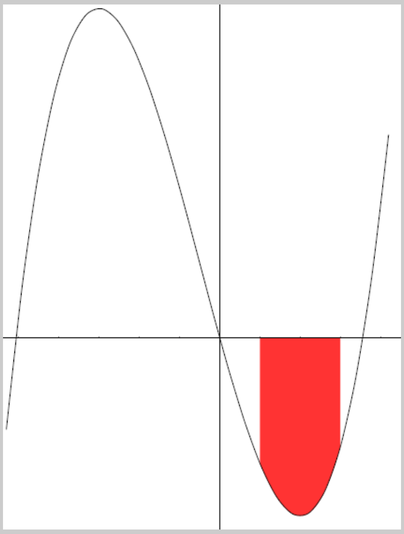
$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-4}^{-2} = 152$$

Vemos, pues, que el área es $152\mathrm{u}^2$.

Cálculo de área si $f(x) \leq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x)$ es una función negativa en el intervalo $[a, b]$ (es siempre por debajo del eje X), el área que encierra esta función y el eje X, dentro del intervalo $[a, b]$, es igual a

$$\boxed{\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)dx}$$

Ejemplo. Cálculo de área en $f(x) \leq 0$ a $[a,b]$.
Calculamos el área de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en el intervalo $[1,3]$:



Como vemos que la función es negativa en todo el intervalo $[1,3]$, el área que buscamos es

$$A = -\int_1^3 f(x)dx = -\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 78$$

Vemos, pues, que el área es $78\mathrm{u}^2$.

Cálculo de área si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a,b]$. En los dos casos anteriores hemos calculado el área de una función positiva o una función negativa en todo el intervalo $[a,b]$. En general, para encontrar el área que se forma entre el eje X y cualquier función $f(x)$, que toma valores positivos y negativos entre los límites a y b, tenemos que encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ que están dentro del intervalo $[a,b]$ y separar el intervalo $[a,b]$ en subintervalos que tengan por extremos estas raíces.

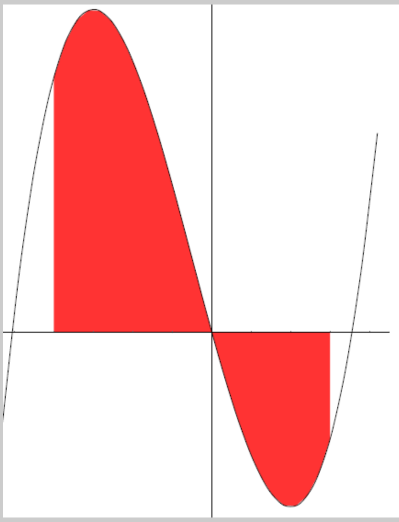
Así, si tenemos, por ejemplo, 3 raíces x_1, x_2, x_3 en el intervalo $[a,b]$ tales $x_1 < x_2 < x_3$, el área que buscamos es

$$\boxed{\mathrm{A} = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|}$$

Fijaos que el valor absoluto nos permite no tener que estudiar si la función está por encima o por debajo del eje X en cada uno de los intervalos.

Observamos que si sabemos que la función en el intervalo $[a,b]$ está siempre por encima o por debajo del eje X pero no sabemos cuál de los dos casos es, podemos calcularlo como
$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$
y así obtendremos siempre un valor positivo. Esto nos sirve si la función está siempre por encima o por debajo del eje X.

Ejemplo. Cálculo de área si $f(x)$ es positiva y negativa en $[a,b]$.
Calculamos el área de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en el intervalo $[-4,3]$:



Primero calculamos las raíces de $f(x) = 0$ y vemos que son 0 y aproximadamente -5.06 y 3.56. Nos fijamos que solo $x = 0$ está dentro del intervalo $[-4,3]$.
Así pues, el área que buscamos es

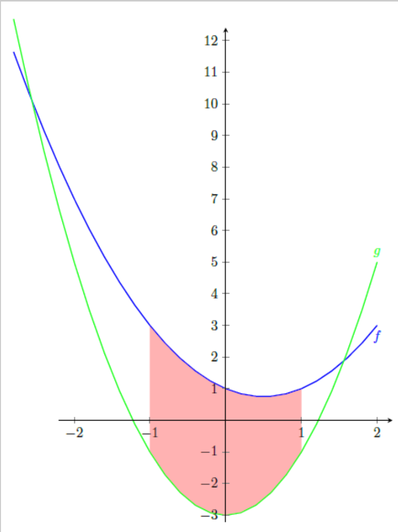
$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-4}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)dx\right| = \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0}\right| \\ &+ \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = 224 + 94.5 = 318.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área vale 318.5u^2.

Cálculo de área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$. En este caso podemos aplicar los casos anteriores con una sola función considerando la función diferencia $f(x) - g(x)$. Exactamente igual que hemos hecho antes, tendremos que separar los casos según si la diferencia es siempre positiva, siempre negativa o bien si cambia de signo dentro del intervalo $[a,b]$, y por lo tanto tendremos que separar el intervalo $[a,b]$ en los subintervalos correspondientes. Por lo tanto, tenemos que empezar buscando las raíces de $f(x) - g(x)$ (o sea que tenemos que resolver la ecuación $f(x) - g(x) = 0$) y ver si pertenecen al intervalo $[a,b]$. Hay que darse cuenta de que hablamos del signo de la diferencia de las funciones, no de si las funciones están por encima o por debajo del eje X.

El cambio de signo de la diferencia de funciones se dará cuando cambie la función de las dos que están por encima.

Ejemplo. Cálculo de área entre $f(x)$ y $g(x)$ en $[a,b]$.
Calculamos el área entre las funciones $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 3$ en el intervalo $[-1,1]$. Queremos calcular, por lo tanto, el área marcada en rojo en la gráfica



1) Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, y por lo tanto tenemos que resolver

$$x^2 - x + 1 = 2x^2 - 3$$

o sea que tenemos que resolver la ecuación $x^2 + x - 4 = 0$. Obtenemos dos soluciones que son aproximadamente -2.56 y 1.56. Como ninguna de las dos está en el intervalo $[-1,1]$ en nuestro intervalo la diferencia de las dos funciones no cambia de signo, o sea que no cambia el orden de la función que está por encima en todo el intervalo donde calcular el área.

2) Calculamos el área:

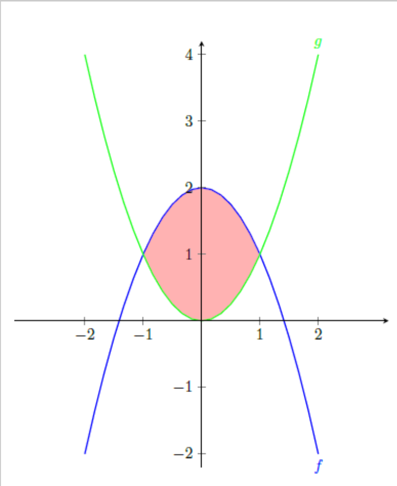
$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} [-x^2 - x + 4]dx \right| = \left| -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{1} \right| = \frac{22}{3}$$

Por lo tanto, el área que buscamos es $\frac{22}{3}\mathrm{u}^2$.
Habríamos podido sacar el valor absoluto si hubiéramos estudiado primero cuál de las dos funciones está por encima y, por lo tanto, si tenemos que de calcular la integral de $f(x) - g(x)$ o bien $g(x) - f(x)$.

Cálculo de área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$. En este caso, a diferencia de los anteriores, no nos limitamos al intervalo, y por lo tanto tendremos que estudiar los puntos en donde se cortan las dos funciones para encontrar los límites de integración. Por lo tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ y calcular el área de cada región limitada entre dos puntos de corte seguidos.

Ejemplo. Cálculo de área entre $f(x)$ y $g(x)$.

Calculamos el área entre las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2$:



El primer paso que tenemos que hacer es buscar los puntos de corte de las dos funciones. Estos puntos de corte son los que nos darán los límites de integración. Igualamos las dos funciones y resolvemos la ecuación resultante:

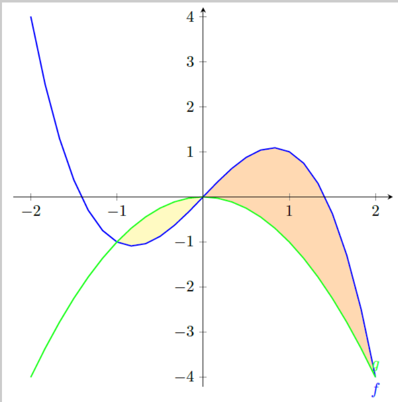
$$2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Por lo tanto, para obtener el área que queremos, tenemos que calcular la integral siguiente:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} [2 - 2x^2] dx \right| = \left| \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right| = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, el área que buscamos es $\frac{8}{3}\mathrm{u}^2$.

Ejemplo. Cálculo de área entre $f(x)$ y $g(x)$.
Calculamos el área entre las funciones $f(x) = 2x - x^3$ y $g(x) = -x^2$:



En este caso, ya podemos intuir gráficamente que tenemos que separar el área que queremos calcular en dos trozos porque las gráficas se cortan en 3 puntos y, por lo tanto, cambian la posició sobre cuál de las do está por encima de la otra.
Empezamos, pues, buscando los puntos de corte de las dos funciones:

$$2x - x^3 = -x^2 \Leftrightarrow 2x - x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_{0}^{2}[f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| \\ &+ \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}\mathrm{u}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área que buscamos es $\frac{37}{12}\mathrm{u}^2$.
Como antes, notamos que habríamos podido omitir el valor absoluto si hubiéramos estudiado el signo de $f(x) - g(x)$ en cada intervalo.

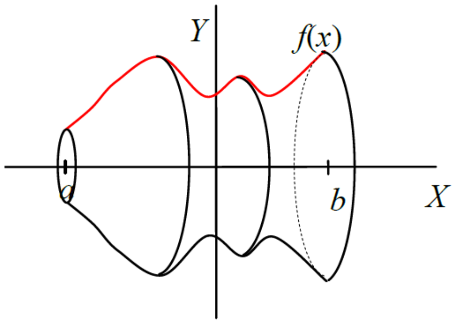
12.2.2. Cálculo de volúmenes

La interpretación de una integral como suma de infinitos sumandos infinitamente pequeños nos permite calcular áreas y también volúmenes.

Si $f(x)$ es una función positiva en un intervalo $[a, b]$, el cálculo del volumen de la figura que se obtiene al girar sobre el eje X esta función, o sea que la **figura de revolución** que tiene por **generatriz** la función $f(x)$ se puede calcular a partir de una integral.

Un cuerpo o figura de revolución es la figura sólida que resulta de hacer girar una curva plana (generatriz) alrededor de una recta (eje de simetría).

Queremos calcular, por ejemplo, el volumen del cuerpo de revolución que se genera al girar una función positiva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ sobre el eje X, tal como muestra esta gráfica:



Los planos perpendiculares al eje X dan lugar a secciones circulares del cuerpo de revolución. En particular, el plano que pasa por el punto $x = b$ da lugar a una sección circular de radio $f(x)$.

Por lo tanto, nos podemos mirar el cuerpo como formado por "rebanadas" en forma de cilindro. En particular, estos cilindros tienen:

Base: $\pi \cdot [f(x)]^2$

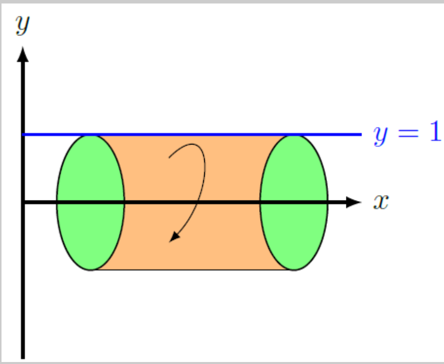
Altura: dx

Volumen: $\pi \cdot [f(x)]^2 dx$

Por lo tanto, si sumamos todos estos cilindros tendremos el volumen buscado:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Ejemplo. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.



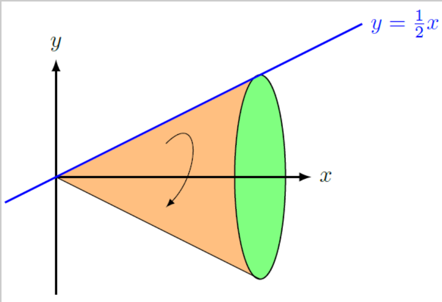
En este caso la función $f(x)$ es sencilla, $f(x) = 1$. Si queremos calcular el volumen del cuerpo de revolución que genera (un cilindro) en el intervalo $[1, 4]$, tenemos

$$V = \pi \int_1^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 1^2 dx = \pi \cdot x]_1^4 = 3\pi.$$

Por lo tanto, el volumen del cilindro propuesto es $3\pi\,\mathrm{u}^3$.

Observamos que ahora estamos calculando volúmenes, por lo tanto el resultado será en u^3.

Ejemplo. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.



En este segundo caso la función es $f(x) = \frac{1}{2}x$. Si queremos calcular el volumen del cono generado a partir de esta recta en el intervalo $[0,4]$ tenemos

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{12}\bigg]_0^4 = \frac{16}{3}\pi$$

Por lo tanto, el volumen del cono propuesto es $\frac{16}{3}\pi\,\text{u}^3$.

A partir de este segundo ejemplo podemos generalizar el cálculo del volumem de un cono de altura h y radio de la base r. La generatriz $f(x)$ tiene que cumplir

$$f(0) = 0 \quad f(h) = r$$

y, por lo tanto, la función lineal generatriz será $f(x) = \frac{rx}{h}$. Para encontrar el volumen, tenemos que integrar entre 0 a h:

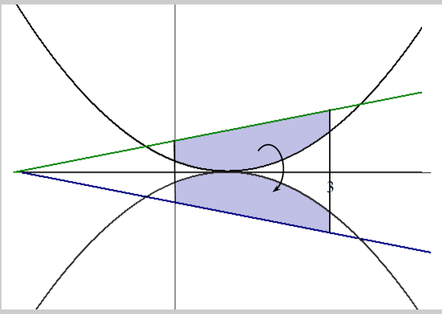
$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Finalmente, nos podemos encontrar en el caso de tener que calcular el volumen de una figura de revolución generada por el área encerrada por dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, en el intervalo $[a,b]$ donde $f(x)$, $g(x) \geq 0$. En este caso, basta con calcular el volumen de la figura de revolución generada por $f(x)$ y restarle el volumem de la figura de revolución generada por $g(x)$. Añadimos el valor absoluto porque no sabemos a priori cuál de las dos funciones está por encima. Entonces,

$$\boxed{V = \pi \left| \int_a^b (f(x))^2 dx - \int_a^b (g(x))^2 dx \right| = \pi \left| \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx \right|}$$

Ejemplo. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución engendrado por el área entre $f(x)$ y $g(x)$.

Queremos calcular el volumen de una figura de revolución generada por el área limitada entre la recta $y = x + 3$ y la parábola $y = x^2 - 2x + 1$, tal como se observa en esta gráfica:



Evidentemente, se tienen que restar los volúmenes generados por la rotación de cada una de las funciones en el intervalo $[0, 3]$ teniendo en cuenta que la función más grande es siempre la recta:

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx = \pi \int_0^3 \left[(x+3)^2 - \left(x^2 - 2x + 1\right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left[-x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 10x + 8 \right] dx = \frac{282\pi}{5}$$

Por lo tanto, el volumen del cono propuesto es $\frac{282}{5}\pi\,\mathrm{u}^3$.

Resumen

Integración de funciones

Integral indefinida

Definición. La integración es la operación opuesta a la derivación:

si $f(x)$ es la derivada de $F(x)$, entonces $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Podemos afirmar que toda función de la forma $F(x)+C$ (donde C es un número) también es una primitiva de $f(x)$. El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se denomina **integral indefinida** o, simplemente, integral de la función $f(x)$.

Expresión. Para expresar la integración de una función, se utiliza el símbolo de integral $\int$ antepuesto a la función **integrando**, y a continuación el símbolo dx, denominado **diferencial** de x, que nos indica respecto de cuál variable integramos. Por lo tanto, la expresión de la integral indefinida de una función $f(x)$ es

$$\int f(x)dx$$

Tabla integrales inmediatas

Tabla de integrales inmediatas		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Ejemplos**
k constante	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arccos(x) + C$	

Reglas de cálculo. El cálculo de la primitiva de una función cualquiera no es tan sencillo como el de la derivada, ya que las únicas reglas inmediatas que se pueden aplicar son:

- La integral de la suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las integrales de las funciones.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de la función.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx$, entonces $g'(x) = f(x)$.
- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ nos permite escribir

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de la última regla podemos generalizar la tabla de integrales inmediatas anterior a las integrales, que se llaman a menudo **integrales casi inmediatas**.

Integrales casi inmediatas	
Integral	**Ejemplos**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2 - 3x + 12\rvert + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

Método de sustitución. Método para transformar una integral en una integral inmediata o casi inmediata mediante un cambio de variable. Los pasos a seguir son:

1) Sustituimos x por $u(t)$ y dx por $u'(t)dt$:

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt.$$

2) Resolvemos la nueva integral:

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aislamos la variable t de la igualdad $x = u(t)$ y obtenemos $t = u^{-1}(x)$.

4) Deshacemos el cambio y obtenemos

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Método de integración por partes. Método para transformar una integral en una integral inmediata o casi inmediata a partir de la regla de la derivación del producto.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si integramos a los dos lados y lo reescribimos, obtenemos

$$\boxed{\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int \left[f'(x) \cdot g(x)\right] dx}$$

Integral definida

La integral definida nace de la necesidad de calcular el área encerrada por una función y el eje X en un cierto intervalo. Esta área se puede aproximar sumando ciertos rectángulos cuya base sea constante y la altura el valor de la función en ciertos puntos elegidos convenientemente. El límite de este cálculo cuando la base de estos rectángulos tiende a 0 es igual a la integral definida de esta función en este intervalo, es decir, el área que buscamos.

El cálculo de la integral definida se facilita a partir de la **Regla de Barrow**:

> Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$,
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de áreas

1) **Cálculo de área entre $f(x)$ y el eje X si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a,b]$.**

$$\text{A} = \int_a^b f(x)dx$$

2) **Cálculo de área $f(x)$ y el eje X si $f(x) \leq 0$ en el intervalo $[a,b]$.**

$$\text{A} = -\int_a^b f(x)dx$$

De hecho, podemos unir los dos casos anteriores añadiendo un valor absoluto:

$$\text{A} = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

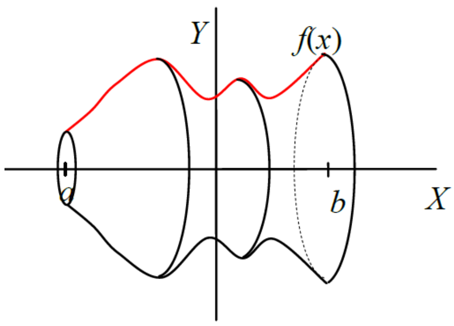
3) **Cálculo de área $f(x)$ y el eje X si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a,b]$.** Así, si tenemos, por ejemplo, 3 raíces x_1, x_2, x_3 en el intervalo $[a,b]$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$, el área que buscamos es

$$\text{A} = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$$

4) **Cálculo de área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$.** Podemos aplicar los casos anteriores con una sola función considerando la función diferencia $f(x)-g(x)$. Igual que hemos hecho antes, tendremos que separar los casos según si la diferencia es siempre positiva, siempre negativa o bien si cambia de signo dentro del intervalo $[a,b]$, y en este caso tendremos que separar el intervalo $[a,b]$ en subintervalos cuyos extremos son los puntos en donde la diferencia de las funciones cambia de signo.

5) **Cálculo de área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$.** En este caso, a diferencia de los anteriores, no nos limita el intervalo, y por lo tanto tendremos que estudiar los puntos en donde se cortan las dos funciones para encontrar los límites de integración. Por lo tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ y calcular el área de cada región limitada entre dos puntos de corte seguidos.

Cálculo de volúmenes. Si $f(x)$ es una función positiva en un intervalo $[a,b]$, el cálculo del volumen de la figura que se obtiene al girar sobre el eje X esta función, o sea que la figura de revolución que tiene por generatriz la función $f(x)$ se puede calcular a partir de una integral.



$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

En consecuencia, calcular el volumen de una figura de revolución generada por el área encerrada por dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, en el intervalo $[a,b]$, de manera que $f(x)$, $g(x) \geq 0$.

$$\boxed{V = \pi \left|\int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx\right| = \pi \left|\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx\right|}$$

Ejercicios resueltos

1. **Calcular las integrales siguientes:**

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$

(b) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$

(c) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}dx$

Soluciones

(a) Empezamos haciendo un cambio de variable $u = x^2$ y, por lo tanto, $du = 2xdx$. Así, nuestra integral nos queda

$$\int \frac{1}{2\cos^2(u)}du$$

Ahora solo hemos de recordar que la funció que tenemos que integrar es justamente la derivada de $\tan(u)$, y por lo tanto ya sabemos que el resultado de la integral es $\tan(u) + C$, Si deshacemos el cambio, tenemos que el resultado de la integral es

$$\frac{\tan(x^2)}{2} + C$$

(b) Antes de empezar a resolver la integral, utilizamos $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, por lo tanto la integral nos queda

$$\int \sin(x)\cos^2(x)(1-\cos^2(x))dx$$

Ahora utilizamos el método de sustitución tomando $u = \cos(x)$ y, por lo tanto, $du = -\sin(x)dx$. Así, obtenemos

$$\int u^2(u^2-1)du = \int (u^4-u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

Si ahora deshacemos el cambio, obtenemos

$$\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

(c) Para resolver esta integral, tendremos que aplicar la integración por partes dos veces. Tomamos $u = x^2$ y, por tanto, $du = 2xdx$ y $dv = e^{3x}dx$ y $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Así, tenemos

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

Volvemos a integrar por partes tomando $u = x$ y, por lo tanto, $du = dx$ y $dv = e^{3x}dx$ y $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Así, tenemos

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

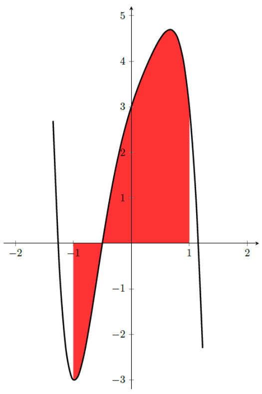
Si ahora unimos los dos resultados, tenemos que la integral que buscamos es

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = e^{3x}\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right] + C$$

2. **Calcular el área entre el eje X y la función $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ en el intervalo $[-1,1]$.**

Solución

En primer lugar, siempre que podamos es bueno hacer la gráfica de la función con la que trabajamos y el área que queremos calcular. En este caso tenemos la gráfica siguiente:



Vemos que tenemos una raíz de $f(x) = 0$ dentro del intervalo $[-1,1]$ y que tenemos trozos de la función por encima y por debajo del eje X. Por lo tanto, empezamos buscando las raíces de $f(x) = 0$ y tenemos que son $x = -0.5$ (dentro del intervalo) y aproximadamente $x = -1.264$ y

$x = 1.1557$ (fuera del intervalo). Por lo tanto, para calcular el área que queremos, tendremos que dividir el intervalo en dos subintervalos: $[-1,-0.5]$ y $[-0.5,1]$. Y entonces el área que buscamos será

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{-0.5}[-4x^5+3x^3-3x^2+4x+3]dx\right| + \left|\int_{-0.5}^{1}[-4x^5+3x^3-3x^2+4x+3]dx\right| \\ &= \left|-\frac{2x^6}{3}+\frac{3x^4}{4}-x^3+2x^2+3x\right]_{-1}^{-0.5}\Bigg| + \left|-\frac{2x^6}{3}+\frac{3x^4}{4}-x^3+2x^2+3x\right]_{-0.5}^{1}\Bigg| \\ &= \frac{59}{64}+\frac{315}{64}=\frac{187}{32} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área es $\frac{187}{32}\mathrm{u}^2$.

3. **Calcular el volumen de la figura de revolución obtenida al hacer girar sobre el eje X una circunferencia de radio 2 de ecuación**

$$x^2+y^2=4$$

Solución

En primer lugar tenemos que aislar la y de la expresión de la circunferencia. Fijaos que, de hecho, basta con aislar y^2, ya que la integral que nos permite calcular el volumen nos pide $f(x)^2$. Por lo tanto, obtenemos

$$y^2=4-x^2$$

Y podemos calcular el volumen a partir de una integral

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-2}^{2} \\ &= \pi\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}-\left(4\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right)=\frac{32\pi}{3}\mathrm{u}^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen será $\frac{32\pi}{3}\mathrm{u}^3$.

4. **Calcular el área encerrada entre las gráficas de $y=x^2-2x+1$ y $y=x+5$.**

Solución

En primer lugar, tenemos que calcular los puntos en los que se cortan ambas funciones para encontrar los límites de integración:

$$x^2-2x+1=x+5 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=4,\ x=-1$$

Los puntos en los que se cortan ambas funciones son, por lo tanto, $(-1,4)$, $(4,9)$. Además, la recta siempre es mayor que la parábola en este intervalo. Por lo tanto, el área será igual a la integral definida de la recta entre ambos puntos menos la integral de la parábola entre ambos puntos:

$$\int_{-1}^{4}x+5-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-1}^{4}-x^2+3x+4dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4\ x]_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$$

Por lo tanto, el área es $\frac{125}{6}\mathrm{u}^2$.

5. **Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el origen y delimita con la gráfica de $f(x)=x^3$ dentro del primer cuadrante generando una área de $4u^2$.**

Solución

Como buscamos una recta que pasa por el origen esta es de la forma $y=mx$.

La primera cosa que tenemos que calcular son los límites de integración, que serán los puntos de corte entre $f(x)=x^3$ y la recta $y=mx$

$$mx=x^3 \Leftrightarrow x(m-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad x=\pm\sqrt{m}$$

Por lo tanto, necesitamos que $m>0$, y como sabemos que están en el primer cuadrante, tomamos solo la solución $x=\sqrt{m}$ y así sabemos

$$4=\int_{0}^{\sqrt{m}}(mx-x^3)dx=\left[m\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{m}}=\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}$$

Por lo tanto, $4=\dfrac{m^2}{4}$ y entonces $m=\pm 4$, pero descartamos la solución negativa y, por lo tanto, tenemos $y=4x$.

6. **Calcular el área delimitada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ y el eje X en el intervalo $[0,4]$.**

Solución

En este caso, la función $\sqrt{x}$ es siempre positiva por lo tanto, el área que buscamos es

$$\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big]_{0}^{4}=\frac{2}{3}\sqrt{4^3}=\frac{16}{3}.$$

Por lo tanto, el área es $\frac{16}{3}\mathrm{u}^2$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

7. **Calcular las integrales siguientes:**

(a) $\int \left(3x^3 - 2x^2 + 4x - 4\right) dx$

(b) $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(d) $\int \sqrt{2x-6}dx$

(e) $\int 3e^{-2x+1}dx$

(f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(g) $\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx$

8. **Utilizar el método de integración por partes para calcular las integrales siguientes:**

(a) $\int 2xe^{-x}dx$

(b) $\int (x+1)\cos(2x)dx$

(c) $\int x\ln x dx$

(d) $\int x^2e^x dx$

9. **Calcular el área que se forma entre las gráficas de las funciones** $f(x) = \sqrt{x}$ **y** $g(x) = x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$**.**

10. **Calcular el área de la región delimitada por las parábolas** $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ **y la recta** $y = 4$**.**

11. **Encontrar el volumen de la** ***copa*** **que engendra la región comprendida entre la gráfica** $f(x) = \sqrt{x} - 1$ **y el eje X en el intervalo** $[0,4]$**.**

Soluciones

7. (a) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$
   (b) $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{8} + C$
   (c) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$
   (d) $\frac{\sqrt{(2x-6)^3}}{3} + C$
   (e) $-\frac{3}{2}\cdot e^{-2x+1} + C$
   (f) $\frac{(\ln x)^2}{2} + C$
   (g) $\frac{(\sin x)^2}{2} + C$
8. (a) $-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
   (b) $\left(\frac{x+1}{2}\right)\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4} + C$
   (c) $\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$
   (d) $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$
9. $\frac{1}{3}\text{u}^2$
10. 8u^2
11. $\frac{4}{3}\pi\text{u}^3$