
Funciones trigonométricas

PID_00273989

Mireia Besalú
Joana Villalonga



Universitat
Oberta
de Catalunya

Mireia Besalú

Licenciada en Matemáticas por la Universitat de Barcelona (2006) y doctora en Matemáticas por la Universitat de Barcelona (2011). Ha sido profesora asociada de la Universitat de Pompeu Fabra y profesora asociada y actualmente profesora lectora de la Universitat de Barcelona. Profesora colaboradora de la UOC desde el curso 2014-15. Centra su investigación en el análisis estocástico y análisis de supervivencia.

Joana Villalonga

Licenciada (2006) i Máster en Matemática Avanzada y Profesional (2007) por la Universitat de Barcelona, Diploma en Matemáticas para Secundaria (2009) por la Universitat Pompeu Fabra y Doctora en Educación (2017) por la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha sido profesora asociada a la Universitat Politècnica de Catalunya y es colaboradora docente de la Universitat Oberta de Catalunya desde el 2011 como consultora y editora de materiales para la asignatura de Iniciación a las matemáticas para la ingeniería. Su investigación se centra en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estos apuntes se basan en un trabajo previo de Ramon Masià y de Marc Guinjoan.

Tercera edición: febrero 2021

© de esta edición, Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC)

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Autoría: Mireia Besalú, Joana Villalonga

Producción: FUOC

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea este eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares de los derechos.

8. Funciones trigonométricas

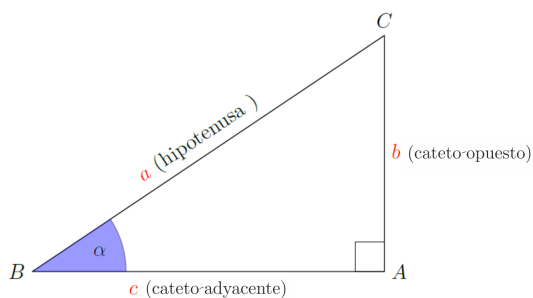
Índice

8.1. Razones trigonométricas	218
8.1.1. Razones principales de un ángulo agudo	218
8.1.2. Razones principales de un ángulo cualquiera	220
8.2. Funciones seno y coseno	223
8.2.1. Definición y ejemplos	224
8.2.2. Relación seno y coseno	225
8.2.3. Transformaciones	226
8.3. Funciones tangente y cotangente	228
8.3.1. Definición y ejemplos	228
8.4. Funciones secante y cosecante	230
8.4.1. Definición y ejemplos	230
8.5. Funciones inversas	231
8.5.1. Definición y ejemplos	231

8.1. Razones trigonométricas

8.1.1. Razones principales de un ángulo agudo

En un triángulo rectángulo ABC como el siguiente,



podemos definir las razones trigonométricas del ángulo agudo α de la manera siguiente:

seno del ángulo α es el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Se indica $\sin(\alpha)$ y se calcula así:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Se tiene que destacar que el seno es un número positivo nunca mayor que 1 porque un cateto no puede ser nunca superior a la hipotenusa: $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.



La trigonometría es una parte de las matemáticas que estudia la relación entre la medida de los ángulos y los lados del triángulo. De hecho, la propia palabra, trigonometría, tiene origen en ello: *tri* significa *tres*, *gono* significa *ángulo* y *metria* significa *medida*, es decir, trigonometría significa *medida de (figuras) con tres ángulos*.

coseno de este ángulo α es el cociente entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa se indica $\cos(\alpha)$ y se calcula así:

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

También hay que destacar que el coseno es un número positivo nunca mayor que 1 (un cateto no puede ser nunca superior a la hipotenusa) $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

tangente de este ángulo α es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo y se indica $\tan(\alpha)$ o $\text{tg}(\alpha)$ (se usan indistintamente los símbolos tg o \tan , a pesar de que durante el curso acostumbraremos a usar \tan), y se calcula así:

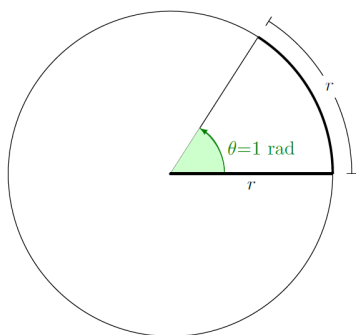
$$\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

No es difícil constatar que la tangente también puede calcularse como el cociente del seno entre el coseno:

$$\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

Razones trigonométricas de los ángulos más usados. Los ángulos se miden habitualmente en el sentido antihorario y en grados ($^\circ$) o bien en radianes (rad).

radián: Si en una circunferencia cogemos un arco de longitud igual a la del radio, el ángulo correspondiente tiene una medida que denominamos **radián (rad)**.



Su amplitud no depende del radio. De hecho, puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y el ángulo de una vuelta entera es 360° , tenemos

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Veamos una tabla con las razones trigonométricas de los ángulos más utilizados.

α (en rad)	α (en grados)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞

Las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo rectángulo escogido para definirlos.

¿Por qué el seno y el coseno de $\frac{\pi}{4}$ rad (45°) coinciden? Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual a $\frac{\pi}{4}$ rad, es evidente que el otro ángulo (aparte del recto) tiene que medir también $\frac{\pi}{4}$ rad. Por la misma razón, los dos catetos tienen que ser iguales, es decir, $b = c$. Por lo tanto, el seno y coseno coincidirán.

Teorema fundamental de la trigonometría. Dado un triángulo de catetos b y c , y de hipotenusa a se puede calcular

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$. En definitiva,

$$\boxed{(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1}$$

Es decir, para cualquier ángulo α la suma de los cuadrados del seno y el coseno es igual a 1. Esta igualdad también se escribe a menudo así:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Esta fórmula nos permite calcular el seno a partir del coseno (y al revés):

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

Del mismo modo, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$.

Ejemplo. Aplicación del teorema fundamental de la trigonometría.

Si el seno de un ángulo α fuera 0.4, su coseno tendría que ser

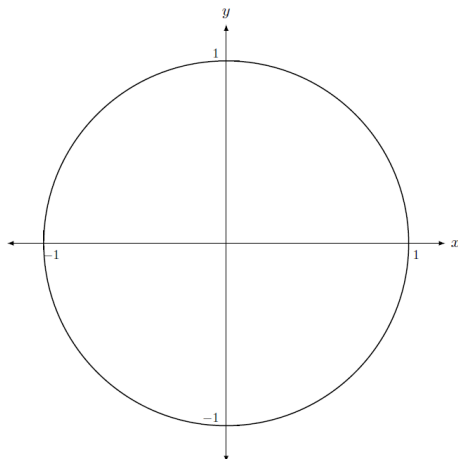
$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - 0.4^2} = 0.9165$$

Del mismo modo, si el coseno de un ángulo α fuera 0.8, su seno sería $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$

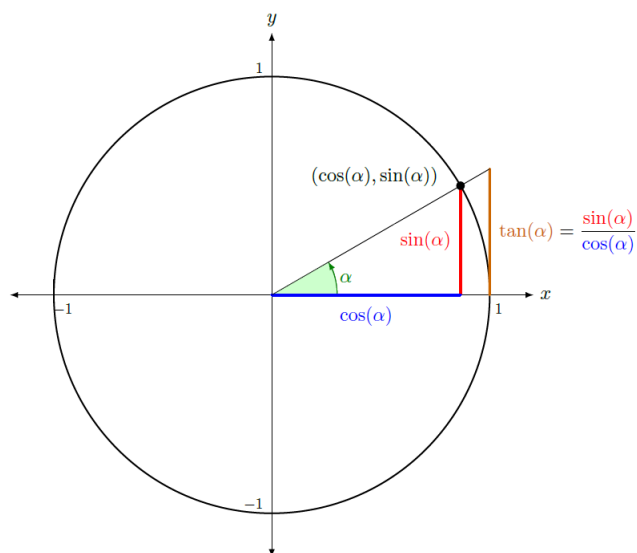
8.1.2. Razones principales de un ángulo cualquiera

Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden deducir a partir de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

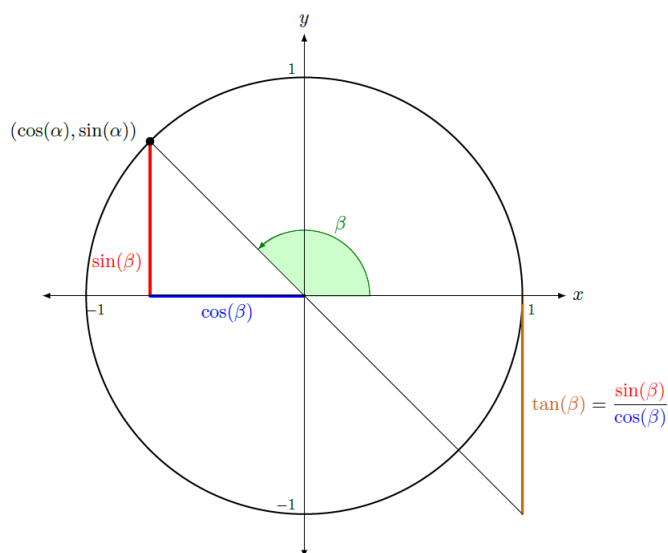
Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, sea agudo o no, trabajaremos con la **circunferencia unidad** (también llamada circunferencia goniométrica). Para lo cual, tenemos que dibujar en el plano cartesiano una circunferencia unitaria de centro el origen de coordenadas y radio 1.



Se dibuja el ángulo α del cual queremos calcular las razones trigonométricas con el vértice en el centro, el primer lado sobre el eje X y el segundo que corte la circunferencia unidad. Como que la hipotenusa coincide con el radio, que es 1, tenemos que el punto de corte con la circunferencia unidad tiene coordenadas $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

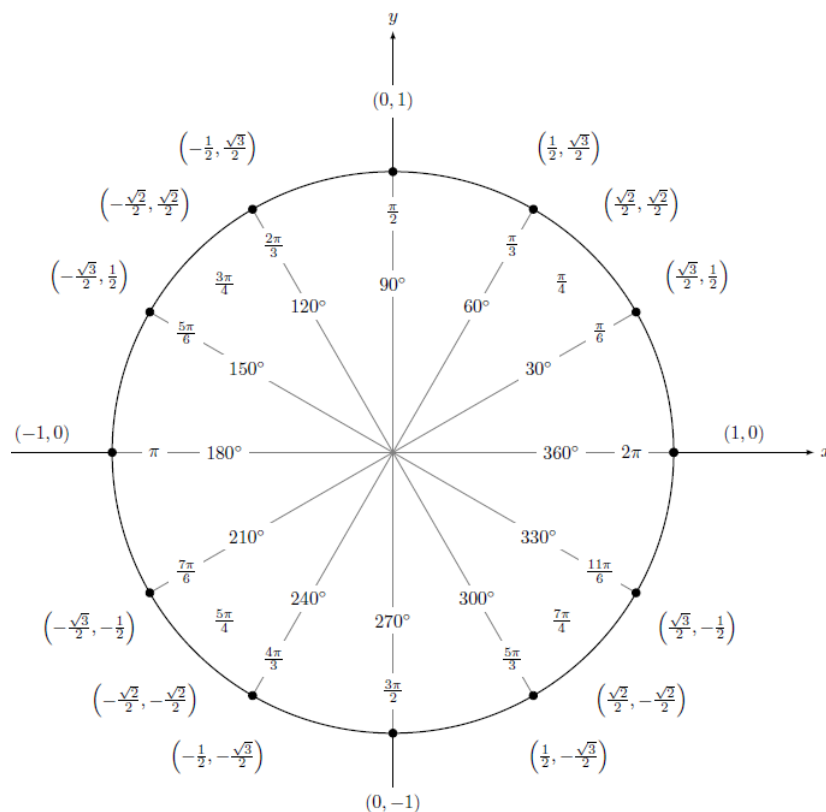


Ahora dibujamos un segundo ángulo β , esta vez obtuso. Como en el caso anterior, las coordenadas del punto de corte con la circunferencia son $(\cos(\beta), \sin(\beta))$.

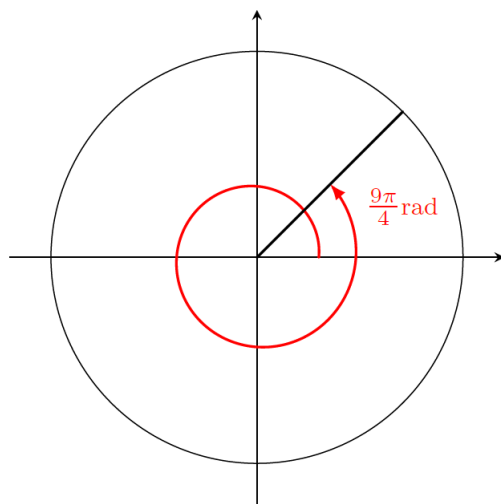


Vemos que aquí el coseno de β será negativo, mientras que el seno de β será positivo. Ahora bien, su valor absoluto no puede ser, en ningún caso, mayor que 1.

En general, se pueden definir de esta manera las razones trigonométricas de cualquier ángulo entre 0 y 2π rad (de manera equivalente, entre 0 y 360°), donde el seno y el coseno de cualquier ángulo son números comprendidos entre -1 y 1. Lo vemos en el gráfico siguiente, donde recordamos que cada punto de la circunferencia tiene coordenadas $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



Por otro lado, cualquier ángulo más grande que 2π rad (o en grados 360°) se corresponde con un ángulo entre 0 y 2π rad (de manera equivalente, entre 0° y 360°), tal como se muestra en la imagen siguiente:



Vemos que los ángulos $\frac{9\pi}{4}$ rad y $\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4}$ tienen las mismas razones trigonométricas.

En general, si α es un ángulo entre 0 y 2π rad (de manera equivalente, entre 0° y 360°),

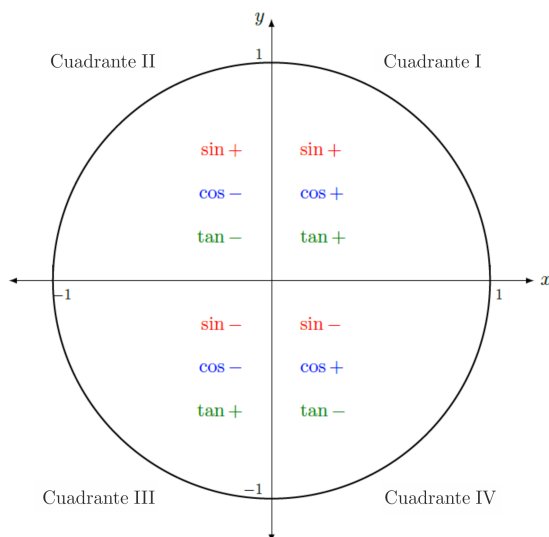
$$\sin(\alpha) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \dots$$

$$\cos(\alpha) = \cos(2\pi + \alpha) = \cos(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \dots$$

es decir, las razones trigonométricas se repiten cuando se suma 2π a un ángulo. Así, por ejemplo (en grados),

$$\sin(8342^\circ) = \sin(23 \cdot 360^\circ + 62^\circ) = \sin 62^\circ.$$

Cuadrantes. Cada cuarto del plano dividido por las dos rectas reales se denomina **cuadrante**. Así, pues, en la circunferencia unidad hay cuatro cuadrantes, que se numeran del 1 al 4 en el sentido antihorario. En cada cuadrante cambia el signo de las razones trigonométricas, tal como se puede ver a partir de las coordenadas $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ de cada punto. Lo resumimos en la imagen siguiente:



En todo caso, las razones trigonométricas de cualquier ángulo se pueden encontrar conociendo únicamente las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante. Podemos observar las relaciones siguientes si α es un ángulo del primer cuadrante:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observamos que el ángulo $-\alpha$ es el mismo que el ángulo $2\pi - \alpha$.

Vemos que en cualquier caso la propiedad fundamental de la trigonometría se cumple, es decir, para cualquier ángulo α ,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Esto es así porque en último término el seno y el coseno de un ángulo cualquiera siempre se calculan a partir del seno y el coseno de un ángulo agudo: la única modificación es el signo, que no es importante cuando se eleva el valor al cuadrado.

8.2. Funciones seno y coseno

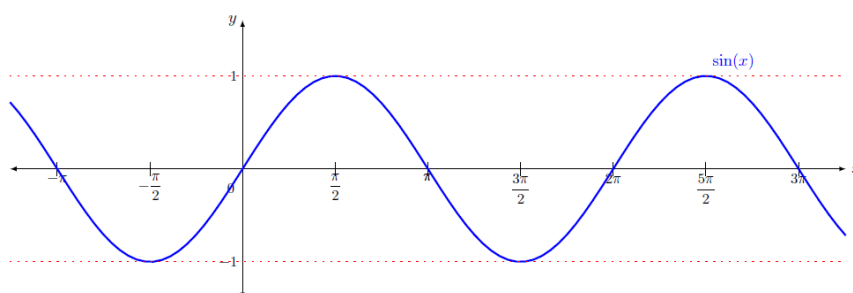
Las funciones circulares o trigonométricas son las asociadas a las razones trigonométricas. Las más importantes son la seno, la coseno y la tangente. La variable de estas funciones circulares se expresa habitualmente en radianes y no en grados sexagesimales.

Estas funciones tienen la propiedad de ser **periódicas**, o sea que las mismas imágenes se repiten cada vez que al valor x le sumamos una cantidad fijada, que se llama **período**.

8.2.1. Definición y ejemplos

Función seno. La función seno es aquella función que asocia a un ángulo en radianes su seno. O sea que en cada valor del seno de la circunferencia unidad se traslada a su posición correspondiente en el valor del ángulo del eje de abscisas. Así, por ejemplo, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ o $\sin(\pi) = 0$.

De esta forma, se obtiene la gráfica siguiente, que vemos que se repite en cada intervalo de longitud 2π .



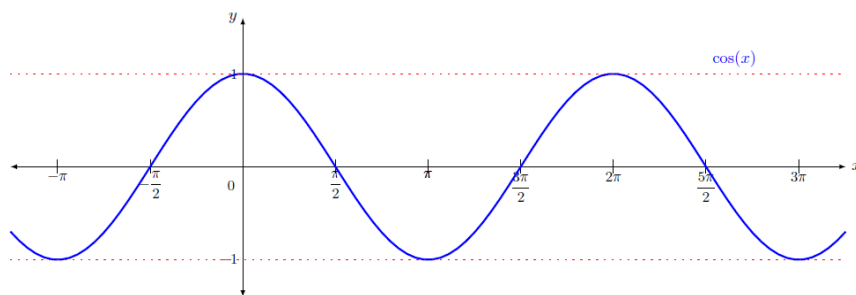
Algunas de las características fundamentales de la función seno son:

- La imagen de la función es el intervalo $[-1, 1]$.
- Tiene período 2π y, por lo tanto, basta con conocer los valores y características de la función en cualquier intervalo de longitud 2π , por ejemplo, en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Los puntos de corte con el eje X son: $\dots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$. Por lo tanto, en general son los puntos $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Es creciente en intervalos de longitud π , por ejemplo, en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$. De manera general es creciente en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Es decreciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene máximos en los puntos de abscisas $\dots -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ y mínimos en los puntos de abscisas $\dots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$. De manera general, tiene máximos en $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ y mínimos en $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función impar o simétrica respecto al origen porque cumple $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Función coseno. La función coseno es aquella función que asocia a un ángulo en radianes su coseno. La gráfica de esta función se construye de manera parecida a como se construye la del seno. Igual que con el seno, vemos que la gráfica se repite a cada intervalo de longitud 2π .

El término seno tienen una historia curiosa. Una antigua obra hindú sobre astronomía, Surya Siddhanta, presenta una tabla de medianas-cuerdas (muy útiles para calcular los movimientos de las estrellas) que coinciden con la idea del seno de un ángulo. Posteriormente, la obra Aryabhatiya d'Aryabhata, también hindú y del 500 dC aproximadamente, hace un estudio más profundo de las medianas-cuerdas, que denomina jiva (en sánscrito). Los árabes la tradujeron, y el término jiva fue transformado en el árabe jiba, pero escrito jb (ya que el árabe clásico no tiene vocales). Más adelante, los traductores de esta obra al latín tradujeron jb por seno, ya que pensaron que se refería a jaib (y no a jiba), y jaib significa "pecho" o "sina". Así, del significado original, "mediana-cuerda", se pasó, por una traducción errónea, a "seno".

El coseno surgió de la necesidad de calcular el seno del ángulo complementario. Así, originalmente, en 1620 Edmund Gunter escribió "co.seno" precisamente para indicar "seno del ángulo complementario" (que, como sabemos, es igual al coseno del ángulo). Un poco más tarde, John Newton (no Isaac Newton) estandarizó el término coseno, del cual proviene nuestro coseno.

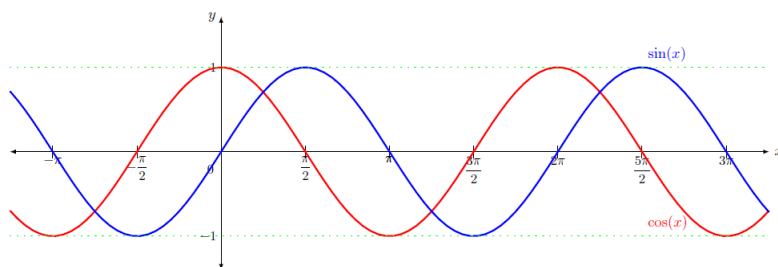


Algunas de las características de la función coseno son:

- La imagen de la función es el intervalo $[-1, 1]$.
- Tiene período 2π y, por lo tanto, basta con conocer los valores y características de la función en cualquier intervalo de longitud 2π , por ejemplo, en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Los dos puntos de corte con el eje X son: $\dots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$. Por lo tanto, en general, son los puntos $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Es creciente en intervalos de longitud π , por ejemplo, en los intervalos $(\pi, 0)$ o $(\pi, 2\pi)$. De manera general, se dice que es creciente en los intervalos $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Es decreciente en los intervalos $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene máximos en los puntos de abscisas $\dots -2\pi, 0, 2\pi \dots$ y mínimos en los puntos de abscisas $\dots -\pi, \pi \dots$. En general, tiene máximos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos en $(\pi + 2\pi k, -1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función par o simétrica respecto al eje X porque cumple $\cos(x) = \cos(-x)$.

8.2.2. Relación seno y coseno

A primer vistazo, se puede comprobar que la función seno y la función coseno son muy parecidas. Si representamos ambas funciones en un mismo gráfico, este parecido se hace más patente:



Observamos que su forma es exactamente la misma, pero la función seno (en azul) está ligeramente “avanzada” (en $\frac{\pi}{2}$ respecto de la función coseno (en rojo)). Esto es así porque

Al estudiar las gráficas de las funciones seno y coseno hemos observado cómo éstas alcanzan un máximo y un mínimo que se alternan de forma periódica. La distancia entre estos dos extremos es el recorrido de la función y la mitad de este recorrido, en las funciones trigonométricas, recibe el nombre de amplitud. Así, podemos definir la amplitud de una función trigonométrica como la distancia entre el máximo y el mínimo de la función dividida entre 2. De acuerdo con ello, la amplitud de las funciones seno y coseno es 1.

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

En esta tabla se muestra esta relación de manera más detallada, describiendo cada una de las funciones según el cuadrante:

x	0	Cuadrante I	$\frac{\pi}{2}$	Cuadrante II	π	Cuadrante III	$\frac{3\pi}{2}$	Cuadrante IV	2π
$\sin(\mathbf{x})$	0	positiva creciente	1	positiva decreciente	0	negativa decreciente	-1	negativa creciente	0
$\cos(\mathbf{x})$	1	positiva decreciente	0	negativa decreciente	-1	negativa creciente	0	positiva creciente	1

8.2.3. Transformaciones

Tanto la función seno como la función coseno pueden verse transformadas si las sumamos o multiplicamos números reales. Estas transformaciones son similares a las que podemos encontrar en los otros tipos de funciones.

Veamos en qué consiste cada una.

Traslaciones verticales En este caso, las funciones cumplen las mismas propiedades que las funciones originales exceptuando los **puntos de corte con el eje X**.

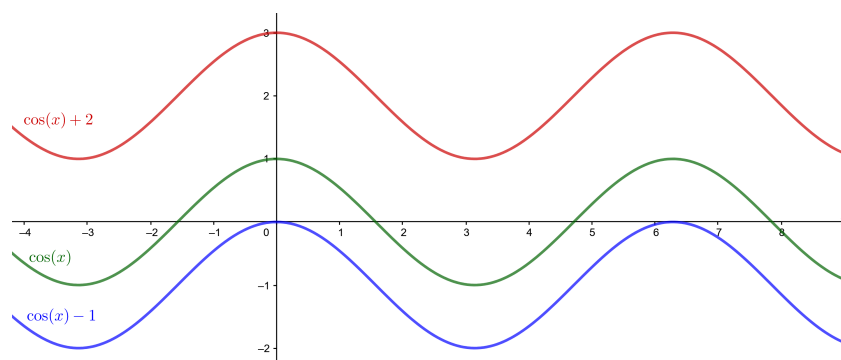
Encontraremos una traslación vertical en expresiones de la forma

$$f(x) = \sin(x) + k$$

$$g(x) = \cos(x) + k$$

donde k puede ser cualquier valor real.

Si el valor k que sumamos es positivo, la función se trasladará k unidades hacia arriba y, en cambio, si es un valor negativo, se moverá k unidades hacia abajo. Podemos comprobarlo con los ejemplos de la gráfica siguiente:



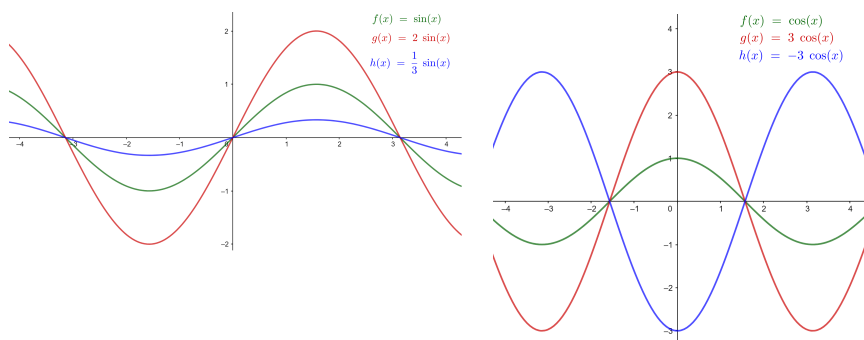
Dilataciones/contracciones verticales En este tipo de transformaciones vemos como cambia el **recorrido** de la función ampliándose o reduciéndose. Se mantiene el resto de propiedades. Encontraremos una contracción o dilatación vertical en expresiones de la forma

$$f(x) = C \cdot \sin(x)$$

$$g(x) = C \cdot \cos(x)$$

Si el valor $|C| < 1$, veremos que la función se contrae y el recorrido será menor que el inicial. En caso contrario, veremos una dilatación y el recorrido será más grande.

Tenemos que tener en cuenta también que en el caso de $C < 0$ tendremos una simetría respecto del eje X. Veamos unos cuantos ejemplos en las gráficas siguientes:

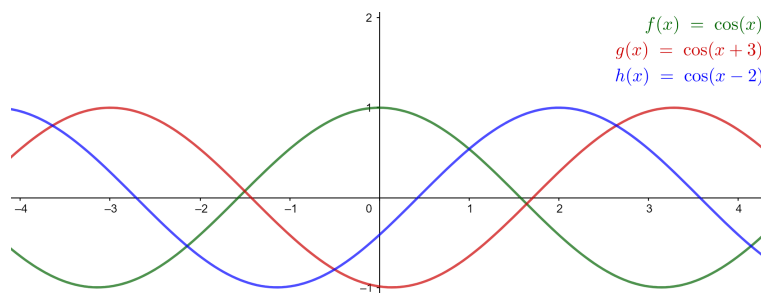


Traslaciones horizontales Podemos pensar este tipo de transformación como una composición de funciones sencilla. Conservamos las mismas propiedades, pero los **puntos de corte** con el eje X, los **máximos y mínimos**, **intervalos de crecimiento y decrecimiento** se han trasladado. Las translaciones horizontales son de la forma

$$f(x) = \sin(x + b)$$

$$g(x) = \cos(x + b)$$

En $b > 0$ la translación es hacia la izquierda (mueve la función hacia la izquierda). En $b < 0$ la translación es hacia la derecha (mueve la función hacia la derecha). Veámoslo en las gráficas siguientes:

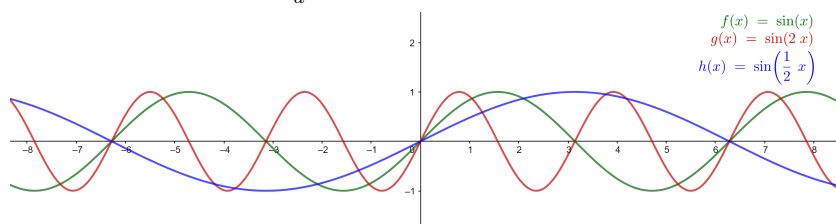


Dilataciones/contracciones horizontales Finalmente, estas transformaciones afectan al **período**, y con él los puntos de corte en el eje X y los **máximos y mínimos**, **intervalos de crecimiento y decrecimiento** que no se trasladan como en el caso anterior, pero los puntos de corte y otras características serán más cercanos o más distantes según la transformación. Las dilataciones o contracciones horizontales son de la forma

$$f(x) = \sin(a \cdot x)$$

$$g(x) = \cos(a \cdot x)$$

Vemos que en $0 < a < 1$ tendremos una dilatación de la función y el período será mayor. En cambio, en $a > 1$ tenemos una contracción y el período será menor. De hecho, el nuevo período será $\frac{2\pi}{a}$. Veámoslo gráficamente:



En resumen, las transformaciones que podemos tener son:

$$\begin{aligned} f(x) &= C \cdot \sin(ax + b) + k \\ g(x) &= C \cdot \cos(ax + b) + k \end{aligned}$$

- k Translaciones verticales.** La gráfica se desplaza k unidades verticalmente. Sube en $k > 0$ y baja en $k < 0$.
- C Dilataciones/contracciones verticales.** En $|C| < 1$ la gráfica se baja, y en $|C| > 1$ la gráfica se estira. En $C < 0$ hay una simetría respecto al eje X.
- b Translaciones horizontales.** La gráfica se desplaza b unidades horizontalmente. Hacia la izquierda en $b > 0$ y hacia la derecha en $b < 0$.
- a Dilataciones/contracciones horizontales.** Hay un cambio de período que afecta a todas las características de la función. En $0 < a < 1$ el período será mayor y en $a > 1$ el período será menor.

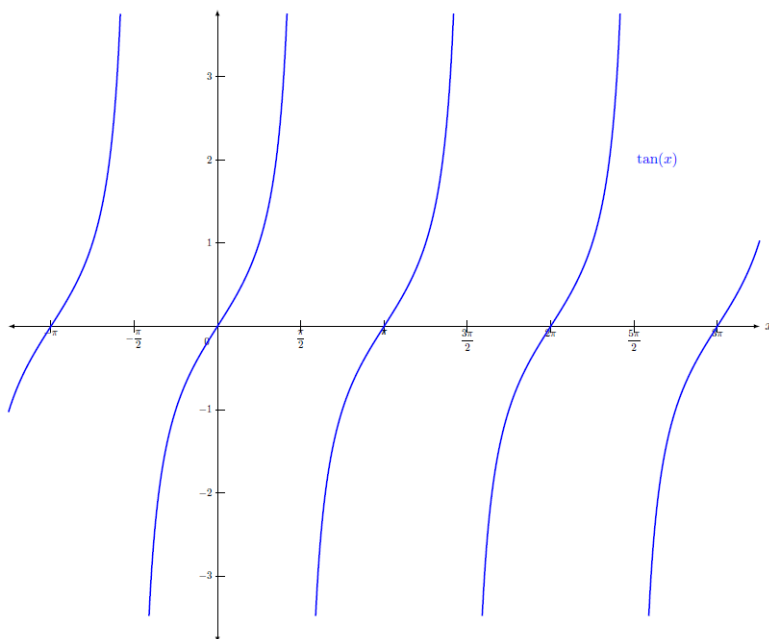
8.3. Funciones tangente y cotangente

8.3.1. Definición y ejemplos

Función tangente. La función tangente es aquella función trigonométrica que asocia a un ángulo en radianes su tangente. Para construirla, se tiene que tener en cuenta

$$\tan(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

La representación gráfica de esta función es



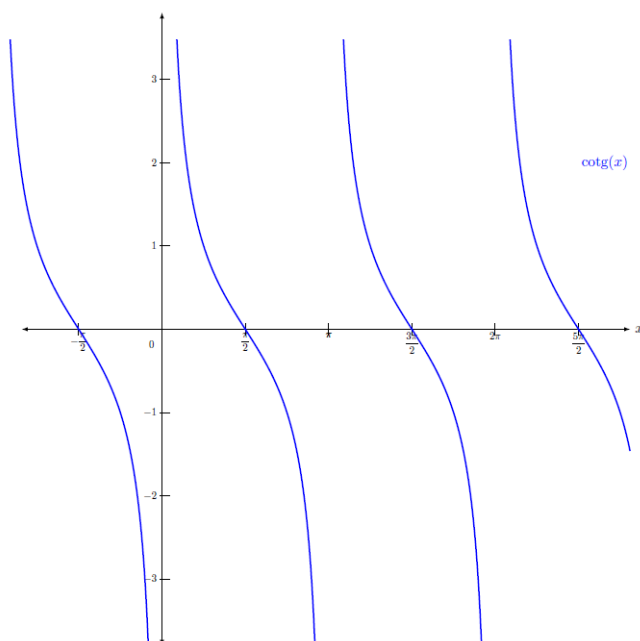
Algunas de las características fundamentales de la función tangente son:

- A diferencia de la mayoría de las funciones estudiadas hasta el momento, el dominio de esta función no incluye todos los números: para los valores en los cuales el coseno es 0, la función no existe (porque se tendría que dividir entre 0, cosa que es imposible). Esto pasa cuando x es igual a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. Es decir, para $\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$
- La imagen de la función son todos los números reales.
- Tiene período π , por lo tanto basta con conocer los valores y características de la función en cualquier intervalo de longitud π , por ejemplo, en el intervalo $[0, \pi)$.
- Los puntos de corte con el eje X son $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$. Por lo tanto, en general son los puntos $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función creciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.

Función cotangente. La función cotangente es aquella función trigonométrica que asocia a un ángulo en radianes su cotangente. Para construirla, se tiene que tener en cuenta

$$\cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

La representación gráfica de esta función es



Algunas de las características fundamentales de la función cotangente son:

- El dominio no incluye todos los números, como en el caso de la tangente: para los valores en los cuales el seno es 0, la función no existe (porque se tendría que dividir entre 0, cosa que es imposible). Esto pasa cuando x es igual a $k\pi$ (donde k es un número entero cualquiera). Es decir, para $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

- La imagen de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
- Tiene período π , y por tanto basta con conocer los valores y características de la función en cualquier intervalo de longitud π , por ejemplo, en el intervalo $[-\pi, \pi)$.
- Los puntos de corte con el eje X son $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, donde k es un número entero.
- Es una función decreciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.

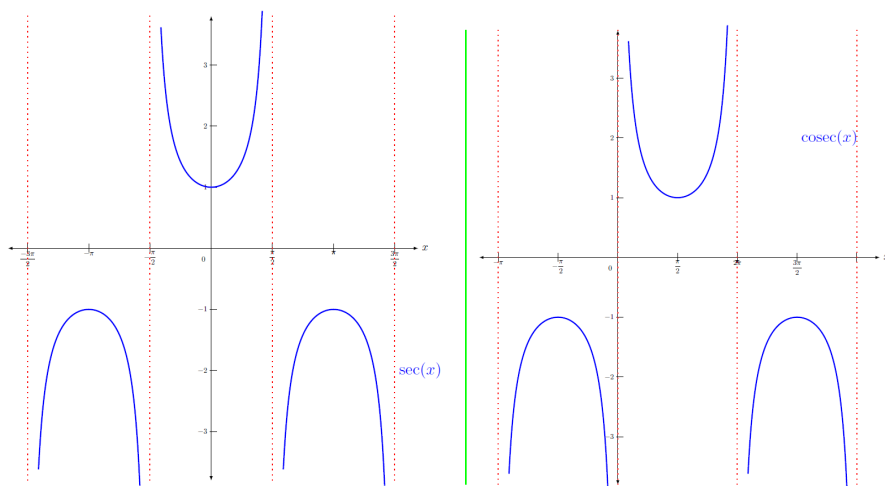
8.4. Funciones secante y cosecante

8.4.1. Definición y ejemplos

Las funciones secante y cosecante se definen de la manera siguiente:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Se pueden representar de la manera siguiente:



Se trata, pues, de dos funciones periódicas de período 2π , las características esenciales de las cuales son:

- Los dominios son:
 - La función secante: todos los números excepto $\frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un número entero.
 - La función cosecante: todos los números excepto $k\pi$, donde k es un número entero.
- La imagen se compone de todos los números reales, excepto el intervalo $(-1, 1)$.
- Los intervalos de crecimiento son (sin contar los puntos que no son del dominio):
 - La función secante: es creciente en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ y decreciente en $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, donde k es cualquier número entero.

- La función cosecante: es creciente en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ y decreciente en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$, donde k es cualquier número entero.
- Máximos y mínimos:
 - La función secante: tiene mínimos en $(2k\pi, 1)$, y máximos en $((2k+1)\pi, -1)$, donde k es un número entero.
 - La función cosecante: tiene mínimos en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y máximos en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, -1\right)$, donde k es un número entero.
- La secante tiene un único punto de corte con el eje Y en el punto $(0, 1)$ mientras que la cosecante no tiene ninguno.

8.5. Funciones inversas

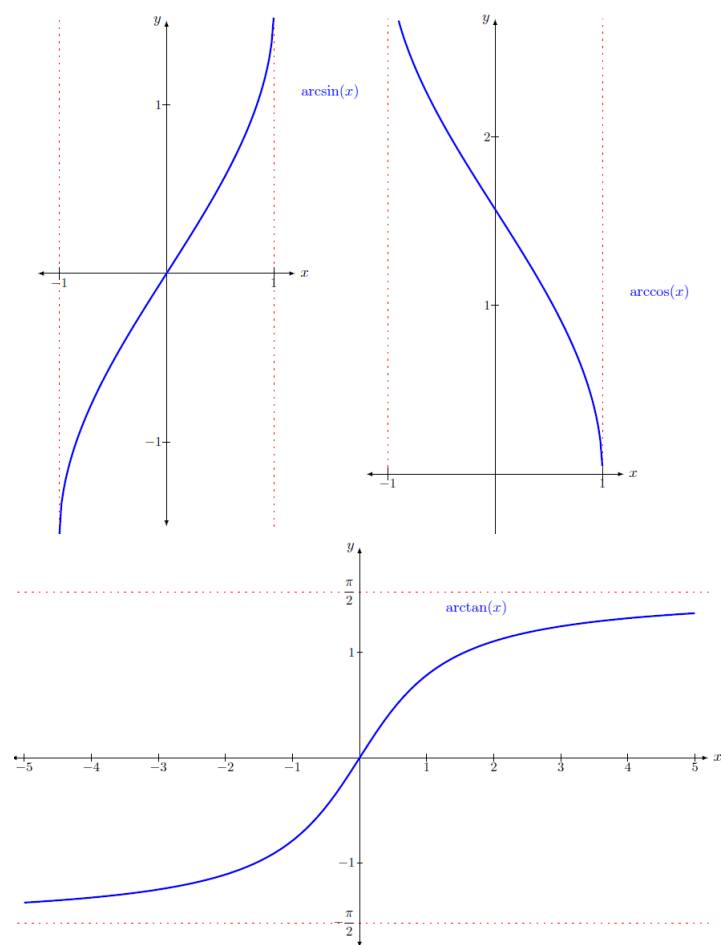
8.5.1. Definición y ejemplos

Todas las funciones trigonométricas tienen inversa en el intervalo de periodicidad propio de la función. En cualquier caso, las más importantes son las funciones inversas del seno, coseno y tangente. Para denominarlas, todas preceden el nombre de la función original del término **arco**.

- La función inversa de la función seno se denomina **arcoseno** y es una función que asigna a cada valor del intervalo $[-1, 1]$ el ángulo cuyo seno corresponde a este valor. Como hay muchos valores donde pasa esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Esta función se designa con el símbolo *arcsen*. Por ejemplo, $\arcsen(0) = 0$, ya que el ángulo que corresponde al valor del seno 0 es el ángulo 0 radianes.
- La función inversa de la función coseno se denomina **arcocoseno** y es una función que asigna a cada valor del intervalo $[-1, 1]$ el ángulo cuyo coseno corresponde a este valor. Como hay muchos valores donde pasa esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $[0, \pi]$. Esta función se designa con el símbolo *arccos*. Por ejemplo, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, ya que el ángulo que corresponde al valor del coseno 0 es el ángulo $\frac{\pi}{2}$ radianes.
- La función inversa de la función tangente se denomina **arcotangente** y es una función que asigna a cada valor real el ángulo cuya tangente corresponde a este valor. Como hay muchos valores donde pasa esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Esta función se designa con el símbolo *arctan*. Por ejemplo, $\arctan(0) = 0$, ya que el ángulo que corresponde al valor de la tangente 0 es el ángulo 0 radianes.

Muchas calculadoras usan \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} para referir se a *arcsin*, *arccos* y *arctan* respectivamente. Pero esta notación **no** quiere decir que sean las funciones $\frac{1}{\sin(x)}$, $\frac{1}{\cos(x)}$ ni $\frac{1}{\tan(x)}$, sino que son las funciones inversas.

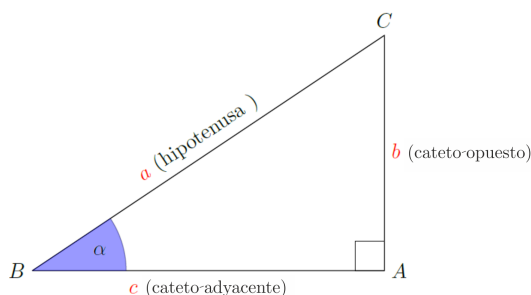
Estas son las representaciones de estas funciones que son funciones simétricas de la función original respecto de la recta $y = x$ por ser funciones inversas:



Resumen

Funciones Trigonómicas

En un triángulo rectángulo ABC como el siguiente,



podemos definir las razones trigonométricas del ángulo agudo α de la manera siguiente:

seno del ángulo α

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

coseno del ángulo α

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

tangente del ángulo α

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Los ángulos se pueden medir en grados ($^{\circ}$) o bien en radianes (rad).

Radián Si en una circunferencia cogemos un arco de longitud igual a la del radio, el ángulo correspondiente tiene una medida que denominamos **radián (rad)**.

Su amplitud no depende del radio y, de hecho, como que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y el ángulo da una vuelta entera de 360° , tenemos

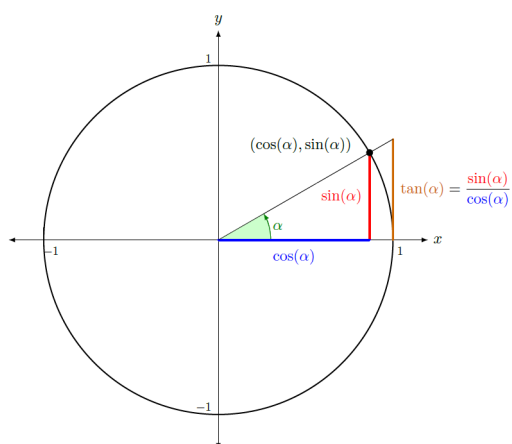
$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad.}$$

Teorema fundamental de la trigonometría

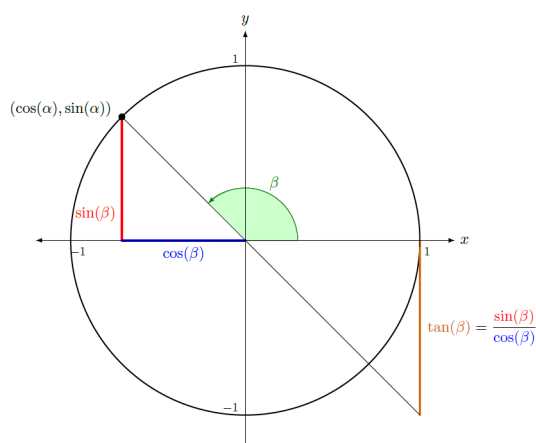
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Razones principales de un ángulo cualquiera. Trabajaremos con la circunferencia unidad. Por eso, se dibuja el ángulo α del cual queremos calcular las razones trigonométricas, con su vértice en el centro, su primer lado sobre el eje X y el segundo cortando la circunferencia unidad. Como que la hipotenusa coincide con el radio, que

es 1, tenemos que el punto de corte con la circunferencia unidad tiene coordenadas $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



En el caso de un ángulo obtuso β , quedaría así:

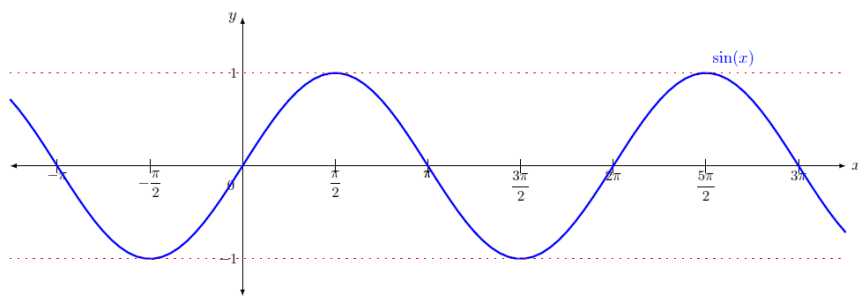


Podemos encontrar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a partir de las relaciones siguientes, tomando $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observamos que el ángulo $-\alpha$ es el mismo que el ángulo $2\pi - \alpha$.

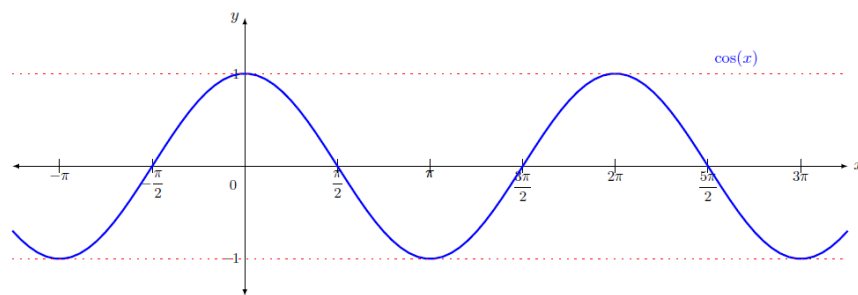
Función seno



Algunas de las características fundamentales de la función seno son:

- Imagen: $[-1, 1]$.
- Período: 2π .
- Puntos de corte con el eje X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creciente en los intervalos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreciente en los intervalos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Máximos en $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ y mínimos en $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Función impar o simétrica respecto al origen. Cumple $\sin(-x) = -\sin(x)$.

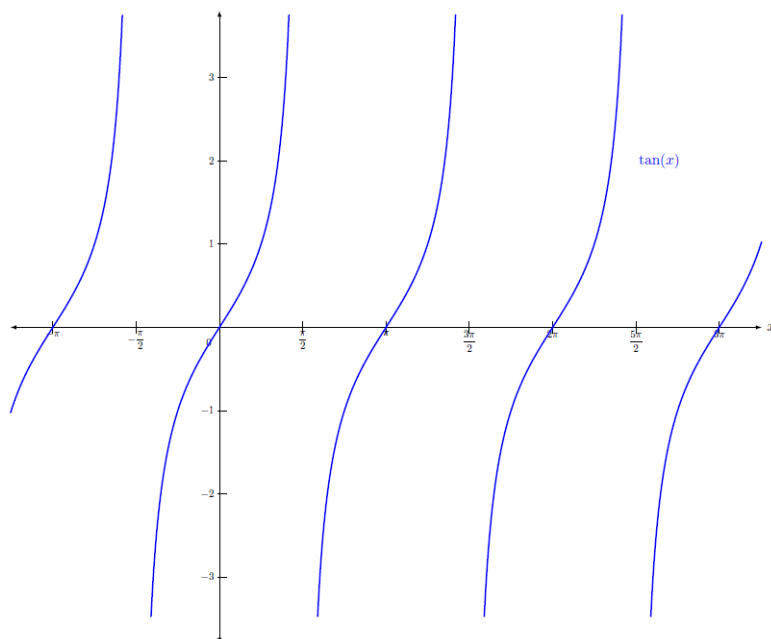
Función coseno



Algunas de las características de la función coseno son:

- Imagen: $[-1, 1]$.
- Período: 2π .
- Puntos de corte con el eje X: $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creciente en los intervalos $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreciente en los intervalos: $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Máximos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos en $(\pi + 2\pi k, -1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Función par o simétrica respecto al eje X. Cumple $\cos(x) = \cos(-x)$.

Función tangente



Algunas de las características fundamentales de la función tangente son:

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, donde k es un número entero cualquiera.
- Imagen: todos los números reales.
- Período: π .
- Puntos de corte con el eje X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Función creciente en todo el dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.

Las transformaciones del seno y coseno que podemos tener son:

$$\begin{aligned} f(x) &= C \cdot \sin(ax + b) + k \\ g(x) &= C \cdot \cos(ax + b) + k \end{aligned}$$

- k Translaciones verticales.** La gráfica se desplaza k unidades verticalmente. Sube en $k > 0$ o baja en $k < 0$.
- C Dilataciones/contracciones verticales.** En $|C| < 1$ la gráfica se aplasta, en $|C| > 1$ la gráfica se estira. En $C < 0$ hay una simetría respecto al eje X.
- b Translaciones horizontales.** La gráfica se desplaza b unidades horizontalmente, hacia la izquierda en $b > 0$ o hacia la derecha en $b < 0$.
- a Dilataciones/contracciones horizontales.** Hay un cambio de período que afecta a todas las características de la función. En $0 < a < 1$ el período será mayor y en $a > 1$ el período será menor.

Ejercicios resueltos

1. Considera la función $f(x) = \sin(x) \cos(x - a)$.

(a) Para $a = 0$ da todos los puntos de corte con el eje X.

(b) Para $a = \frac{\pi}{2}$, calcula su amplitud.

Solución:

(a) Para encontrar todos los puntos de corte con el eje X, imponemos $\sin(x) \cos(x) = 0$, y por lo tanto serán los puntos tales que $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 0$, y los puntos $x = \pi k$ por un lado y los puntos $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ por otro con $k \in \mathbb{Z}$. Si unimos todos los puntos podemos decir que la función se anulará en los puntos $x = \frac{\pi}{2} k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Nos fijamos que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ es igual a $\sin(x)$, y por lo tanto la función que consideramos es $f(x) = \sin^2(x)$. Esta función solo toma valores positivos menores que 1, y por lo tanto su amplitud es 1.

2. Resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes:

(a) $\sin^2(x) + 3 \sin(x) + 2 = 0$

(b) $2 \sin^2(x) + 3 \cos(x) = 3$

Solución:

(a) Para resolver la ecuación $\sin^2(x) + 3 \sin(x) + 2 = 0$, llamaremos $y = \sin(x)$, de manera que la ecuación queda de la forma $y^2 + 3y + 2 = 0$.

Si resolvemos esta ecuación de segundo grado, obtenemos dos soluciones $y = -2$ y $y = -1$. Como que $y = \sin(x)$, podemos descartar la primera de las dos soluciones, ya que el $\sin(x)$ solo toma valores entre -1 y 1 . Las soluciones de la ecuación inicial serán las soluciones de la ecuación $\sin(x) = -1$, y estas son $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(b) En primer lugar, vemos que la ecuación tiene términos en $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Utilizaremos el teorema fundamental de la trigonometría para reescribir la ecuación solo en términos de $\cos(x)$. Como que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, obtenemos $2(1 - \cos^2(x)) + 3 \cos(x) = 3$, que simplificamos para obtener

$$-2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 1 = 0$$

Como en el caso anterior, llamaremos

$$y = \cos(x)$$

, de manera que la ecuación queda $-2y^2 + 3y - 1 = 0$.

Resolvemos esta ecuación de segundo grado y obtenemos dos soluciones: $y = 1$ y $y = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las soluciones serán aquellos valores que $\cos(x) = 1$ o $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Buscamos estos valores y obtenemos las soluciones de la ecuación inicial $x = 2\pi k$ para la primera y $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, todos estos valores son solución de la ecuación inicial.

3. A partir del teorema fundamental de la trigonometría demuestra que

(a) $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

(b) $\operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cotan^2(x)$

Solución:

(a) Por un lado a partir de la definición obtenemos $\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ y por otro

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

por lo tanto obtenemos la igualdad que queríamos.

(b) Igual que antes vemos por un lado a partir de la definición que $\operatorname{cosec}^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ y por el otro

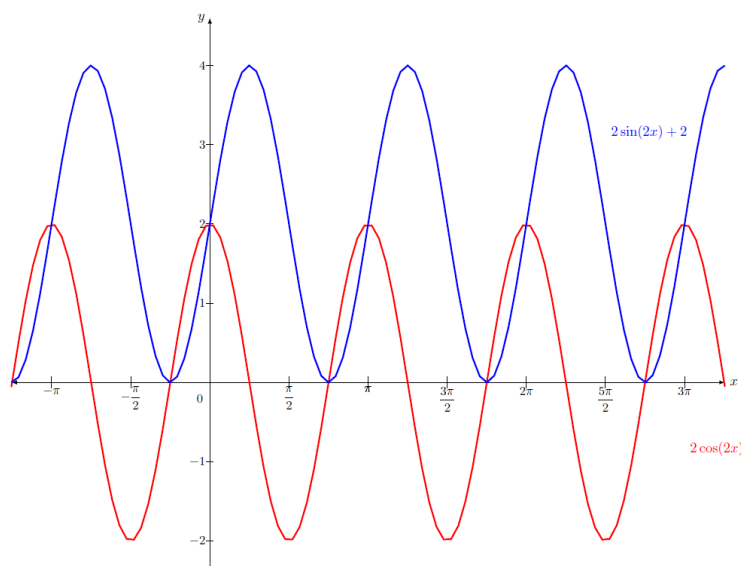
$$1 + \cotan^2(x) = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

4. Encuentra una función con seno o coseno que tenga amplitud 2, período π y tal que $f(0) = 2$.

Solución:

Proponemos un par de soluciones, una con seno y otra con coseno (no son únicas). En ambos casos hemos multiplicado la x por 2 para que el período sea la mitad del período del seno y coseno. También hemos multiplicado por 2 la función para conseguir la amplitud deseada. Finalmente podemos jugar con las translaciones (horizontales y verticales) para que la función pase por el punto $(0, 2)$.

Vemos la gráfica de dos funciones con estas características: $f(x) = 2 \sin(2x) + 2$ y $g(x) = 2 \cos(2x)$.



5. ¿Puedes encontrar valores de x tales que $\sin(x) = \tan(x)$?

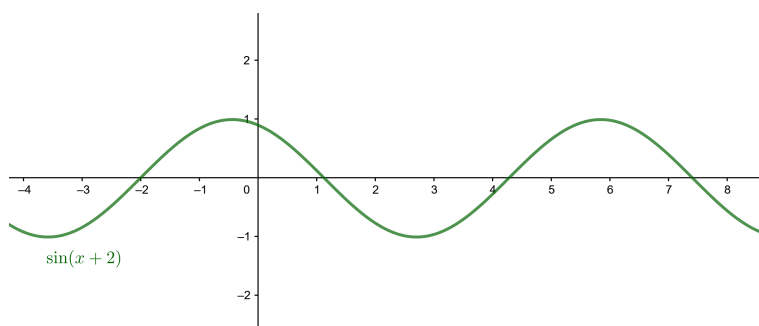
Solución:

A partir de la definición de $\tan(x)$ podemos escribir la ecuación de la forma

$$\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(x) \cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(\cos(x) - 1) = 0$$

Por lo tanto, vemos que esta igualdad se cumplirá en los casos en que $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 1$, pero nos fijamos que si se cumple la primera igualdad seguro que se cumple la segunda ya que en los puntos en donde $\sin(x) = 0$ tenemos que $\cos(x) = \pm 1$ (no es cierto el recíproco). Por lo tanto, los puntos donde coinciden la función seno y la tangente son los puntos en donde las dos se anulan, $x = \pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$.

6. A partir de la gráfica de $\sin(x+2)$ justifica y construye la gráfica de $\sin(2x) - 5$ y $3\sin(\frac{1}{2}x)$.

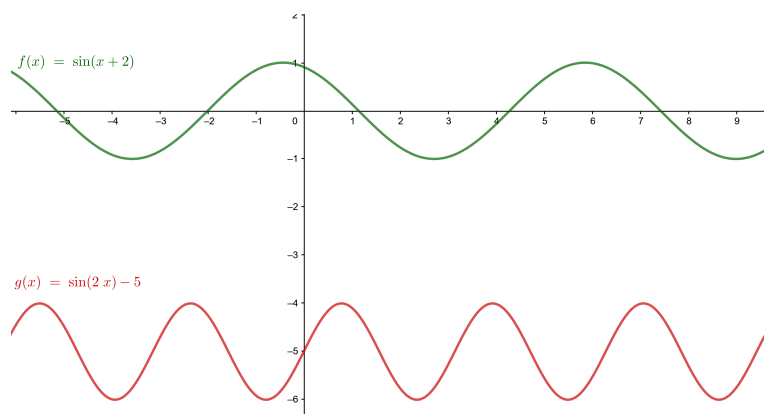


Solución:

Empezamos escribiendo $g(x) = \sin(2x) - 5$ a partir de transformaciones de la función $\sin(x+2)$

$$g(x) = \sin(2(x+2) - 4) - 5$$

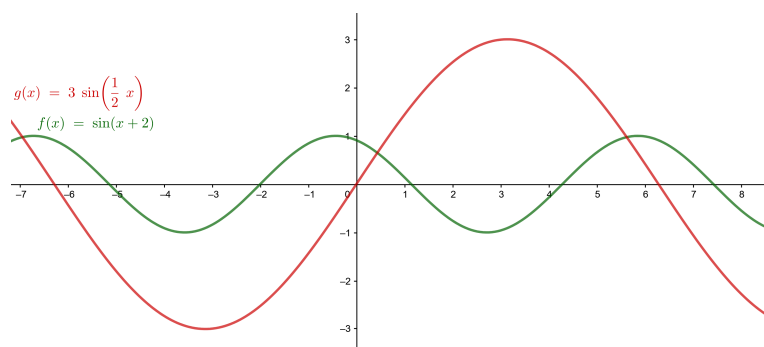
Esto significa que desplazamos la función $\sin(x+2)$, 5 unidades hacia abajo, 4 unidades a la derecha y la contraemos horizontalmente dividiendo el período inicial por 2.



Hacemos lo mismo para $g(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ y obtenemos

$$g(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}(x+2) - 1\right)$$

Por lo tanto en este caso, hemos desplazado la función 1 unidad a la derecha, hemos dilatado horizontalmente la función obteniendo un período el doble del inicial y hemos dilatado la función verticalmente 3 unidades.



Ejercicios para practicar con las soluciones

7. Determina el período de las siguientes funciones:

- (a) $\sin(2x)$
- (b) $\cos(3x)$
- (c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
- (d) $\tan(4x)$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

- (a) $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$
- (b) $1 - \cos^2(x) = \cos^2(x)$

9. Utiliza las relaciones trigonométricas conocidas para simplificar las siguientes expresiones

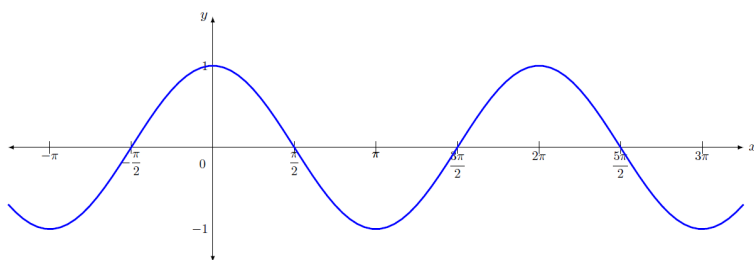
- (a) $\frac{\sin(\pi + x) - \sin(\pi - x)}{\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)}$
- (b) $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)}$

10. Encuentra todos los valores tales que

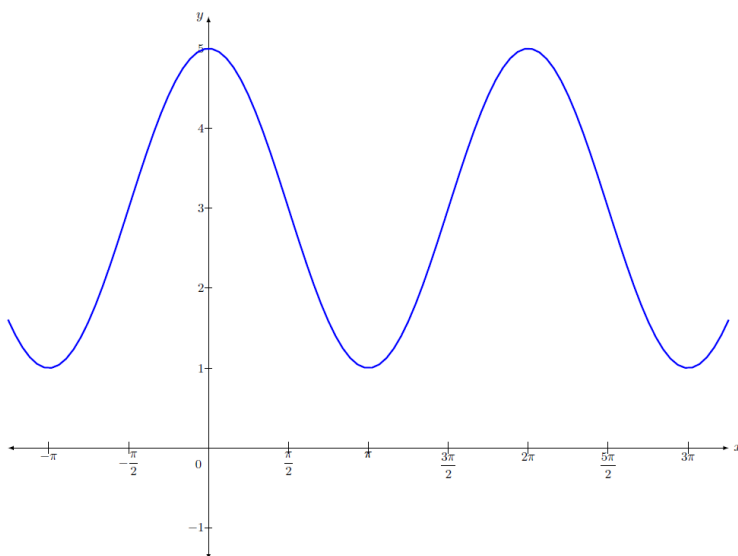
- (a) $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
- (b) $\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

11. ¿Es par la función $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x) + 3$? (Recuerda que una función es par si $f(-x) = f(x)$ para cualquier valor de x).

12. Encuentra la expresión algebraica de esta función utilizando solo el seno



13. Encuentra la expresión algebraica de esta función utilizando solo el coseno



Soluciones:

7. (a) π
(b) $\frac{2\pi}{3}$
(c) 4π
(d) $\frac{\pi}{4}$
8. (a) $x = \pi k$ y $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
(b) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ y $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
9. (a) $\tan(x)$
(b) $\cos(x)$
10. (a) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$
11. Sí, la función $f(x)$ es par.
12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
13. $2\cos(x) + 3$