1 Aussagenlogik

Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist, also nie beides zugleich. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert w und falsche Aussagen den Wahrheitswert f.

Belegung von Variablen

Sei $\mathcal{A}_B(F) = f$. Dann ist stets $\mathcal{A}_B(F \Rightarrow G) = w$

Formelbeweis über Belegung

Wenn $F \wedge G$ eine Tautologie ist, dann (und nur dann) ist F eine Tautologie und G auch. Hinweis: In dem Lemma stecken zwei Teilaussagen, die beide zu beweisen sind: 1. Wenn $F \wedge G$ eine Tautologie ist, dann ist F eine Tautologie und G auch. 2. Umgekehrt: Sind F und G Tautologien, dann ist auch $F \wedge G$ eine. *Beweis.* 1. Annahme: $F \wedge G$ sei eine Tautologie. Dann: Für jede Belegung B wertet $F \wedge G$ zu wahr aus. Dann: Das ist nur der Fall, wenn sowohl F als auch G (für jedes B) zu wahr auswerten. Dann: Für jede Belegung B wertet F zu wahr aus. Und: Für jede Belegung B wertet G zu wahr aus. Dann: F ist Tautologie und G ist Tautologie. 2. Annahme: F ist Tautologie und G ist Tautologie. Dann: Für jede Belegung B_1 wertet F zu wahr aus. Und: Für jede Belegung B_2 wertet G zu wahr aus. Dann: Für jede Belegung B wertet $F \wedge G$ zu wahr aus. Dann: $F \wedge G$ ist eine Tautologie.

Äquivalenz und Folgerung

$p \equiv q$ gilt genau dann, wenn sowohl $p \models q$ als auch $q \models p$ gelten. *Beweis.* $p \equiv q$ GDW $p \Leftrightarrow q$ ist Tautologie nach Def. von $\equiv$ GDW $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ist Tautologie GDW $(p \Rightarrow q)$ ist Tautologie und $(q \Rightarrow p)$ ist Tautologie GDW $(p \models q)$ gilt und $q \models p$ gilt.

Substitution

Ersetzt man in einer Formel eine beliebige Teilformel F durch eine logisch äquivalente Teilformel F', so verändert sich der Wahrheitswerteverlauf der Gesamtformel nicht. Man kann Formeln also vereinfachen, indem man Teilformeln durch äquivalente (einfachere) Teilformeln ersetzt.

Universum

Die freien Variablen in einer Aussagenform können durch Objekte aus einer als Universum bezeichneten Gesamtheit wie $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ersetzt werden.

Tautologien

$(p \wedge q) \Rightarrow p$ bzw. $p \Rightarrow (p \vee q)$
$(q \Rightarrow p) \vee (\neg q \Rightarrow p)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Kontraposition)
$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (Modus Ponens)
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Nützliche Äquivalenzen

Kommutativität:
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
Assoziativität:
$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$
$(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$
Distributivität:
$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
Idempotenz:
$(p \wedge p) \equiv p$
$(p \vee p) \equiv p$
Doppelnegation:
$\neg(\neg p) \equiv p$
de Morgans Regeln:
$\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$
$\neg(p \vee q) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q))$
Definition Implikation:
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
Tautologieregeln:
$(p \wedge q) \equiv p$ (falls q eine Tautologie ist)
$(p \vee q) \equiv q$
Kontradiktionsregeln:
$(p \wedge q) \equiv q$ (falls q eine Kontradiktion ist)
$(p \vee q) \equiv p$
Absorptionsregeln:
$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$
$(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$
Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten:
$p \vee (\neg p) \equiv w$
Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch:
$p \wedge (\neg p) \equiv f$

Äquivalenzen von quant. Aussagen

Negationsregeln:
$\neg \forall x : p(x) \equiv \exists x : (\neg p(x))$
$\neg \exists x : p(x) \equiv \forall x : (\neg p(x))$
Ausklammerregeln:
$(\forall x : p(x) \wedge \forall y : q(y)) \equiv \forall z : (p(z) \wedge q(z))$
$(\exists x : p(x) \wedge \exists y : q(y)) \equiv \exists z : (p(z) \wedge q(z))$
Vertauschungsregeln
$\forall x \forall y : p(x,y) \equiv \forall y \forall x : p(x,y)$
$\exists x \exists y : p(x,y) \equiv \forall y \exists x : p(x,y)$

Äquivalenzumformung

Wir demonstrieren an der Formel $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$, wie man mit Hilfe der aufgelisteten logischen Äquivalenzen tatsächlich zu Vereinfachungen kommen kann:

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$
$\equiv (\neg(\neg p) \vee (\neg q)) \wedge (p \vee q)$ de Morgan
$\equiv (p \vee (\neg q)) \wedge (p \vee q)$ Doppelnegation
$\equiv p \vee ((\neg q) \wedge q)$ Distributivtät v.r.n.l.
$\equiv p \vee (q \wedge (\neg q))$ Kommutativtät
$\equiv p \vee f$ Prinzip v. ausgeschl. Widerspruch
$\equiv p$ Kontradiktionsregel

Quantifizierte Aussagen

Sei $p(x)$ eine Aussageform über dem Universum U. $\exists x : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn ein u in U existiert, so dass $p(u)$ wahr ist. $\forall x : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn $p(u)$ für jedes u aus U wahr ist.

2 Mengenlehre

Teilmenge und Obermenge

Eine Menge B heißt Teilmenge einer Menge A genau dann, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist ($B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x : x \in B \Rightarrow x \in A$). A heißt dann Obermenge von B. Eine Menge B heißt echte Teilmenge von A ($B \subset A$), falls gilt $B \subseteq A \wedge B \neq A$

Grundlegende Mengenoperationen

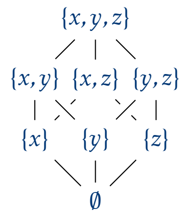
Seien M, N Mengen und sei U die Grundmenge.
Vereinigungsmenge:
$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
Schnittmenge:
$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
Differenz:
$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$
Disjunkte Menge: $M \cap N = \emptyset$

Potenzmenge

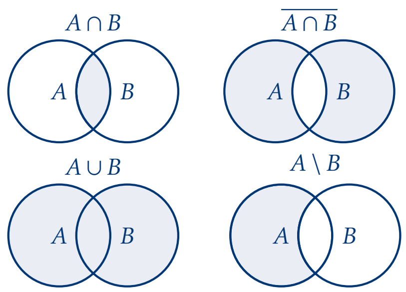
Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt Potenzmenge von M und wird $\mathcal{P}(M)$ notiert: $\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\}$
Beispiel:
$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Hassediagramm

Man kann die Inklusionsbeziehungen aller Teilmengen in Form eines Hasse-Diagramms veranschaulichen. Das Hasse-Diagramm für $\mathcal{P}(\{x,y,z\})$ lässt sich dann wie folgt darstellen:



Venn-Diagramm



Operationen auf Mengenfamilien

Sei $\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4\}, \{3,4,5,6\}\}$ Mengenfamilie. Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcup \mathcal{F} = \{1,2,3,4,5,6\}$
Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcap \mathcal{F} = \{3,4\}$

Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen, dann ist das kartesische Produkt (Kreuzprodukt) von A und B definiert als: $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare von A und B.
Hinweis:
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
$A \times B \neq B \times A$
Beispiel:
$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

Rechenregeln für Mengenoperationen

Assoziativgesetze:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetze:
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetze:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
de Morganschen Gesetze (Differenz):
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetze (Komplement):
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Absorptionsgesetze:
$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenzgesetze:
$A \cap A = A$
$A \cup A = A$
Komplementgesetze (G ist Grundmenge):
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = G$

3 Relationen

Binäre Relation

Eine binäre Relation R ist eine Menge von Paaren $(a,b) \in A \times B$.
$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$ bzw. $a(\neg R)b \Leftrightarrow (a,b) \notin R$
Beispiele:
Teilerrelation (nTm): $P_3 := \{(n, m+3) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = \{(1,4), (2,5), (3,6), \ldots\}$
Relation $\subset$ über $\mathcal{P}(M)$ für $M = \{1,2\}$:
$\{(\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1,2\}), (\{1\}, \{1,2\}), (\{2\}, \{1,2\})\}$

Inverse Relation

Sei $R \subseteq A \times B$. Die inverse Relation zu R ist $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in R\}$. Also ist $R^{-1} \subseteq B \times A$.
Beispiel: Sei $R = \{(1,a), (1,c), (3,b)\}$ dann ist $R^{-1} = \{(a,1), (c,1), (b,3)\}$

Komposition

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen. Die Verknüpfung $(R \circ S) \subseteq (M_1 \times M_3)$ heißt Komposition der Relationen R, S.
$R \circ S := \{(x,z) \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
Beispiel: Sei $R = \{(1,2), (2,5), (5,1)\}$, dann ist $R^2 = R \circ R = \{(1,5), (2,1), (5,2)\}$
Sei $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(n,m) \in R \Leftrightarrow m = 3n$ und $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ mit $(n,z) \in S \Leftrightarrow z = -n$. Dann ist $R \circ S = \{(n,z) \mid z = -3n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

Eigenschaften von Operationen

$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$
$T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$
$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$
$T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$

Eigenschaften von Relationen

Reflexiv: $\forall a \in A : (a,a) \in R$
Symmetrisch: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
Antisymm.: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$
Transitiv: $\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
Total: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$
Irreflexiv: $\forall a \in A : (a,a) \notin R$
Asymm.: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$
Alternativ: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \oplus (b,a) \in R$
Rechtseind.: $\forall a \in A : (a,b) \in R \wedge (a,c) \in R \Rightarrow b = c$
Linkseind.: $\forall a \in A : (b,a) \in R \wedge (c,a) \in R \Rightarrow b = c$
Eindeutig: R ist recht- und linkseindeutig.
Linkstotal: $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$
Rechtstotal: $\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$

Äquivalenzrelation

Ist eine Relation $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv, heißt sie Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklassen

Gegeben eine Äquivalenzrelation R über der Menge A. Dann ist für $a \in A$: $[a]_R = \{x \mid (a,x) \in R\}$ die Äquivalenzklasse von a. (Äquivalente Elemente kommen in die gleiche Menge)
Beispiel (Restklassen):
$[4] = \{n \mid n \mod 3 = 4 \mod 3\} = [1]$
$[5] = \{n \mid n \mod 3 = 5 \mod 3\} = [2]$
$[6] = \{n \mid n \mod 3 = 6 \mod 3\} = [3]$

Zerlegungen, Partition

Eine Zerlegung (Partition) $\mathcal{Z}$ ist eine Einteilung von A in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit A übereinstimmt.
Beispiel: Sei $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$. Dann ist $\mathcal{Z}_\infty = \{\{1,3\}, \{2,5,9\}, \{4,10\}, \{6,7,8\}\}$

Abschluss einer Relation

R^*_{ϕ} bildet die fehlenden Relationen mit der Eigenschaft ϕ, also alle Kombinationen aus A, die noch nicht in R sind.

Beispiel:

Sei $A=\{1,2,3\}$ und $R=\{(1,2),(2,3),(3,3)\}$. Dann ist $R^*_{refl}=R\cup\{(1,1),(2,2)\}$,
$R^*_{sym}=R\cup\{(2,1),(3,2)\}$, $R^*_{tra}=R\cup\{(1,3)\}$

Halbordnung

Eine Relation R, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

4 Abbildungen

Eine Abbildung $f: X\to Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x\in X$ eindeutig ein bestimmtes $y=f(x)\in Y$ zuordnet. y ist das *Bild* von x und x das *Urbild* von y. Für eine Abbildung gilt, dass jedes Element der Urmenge X genau auf ein $y\in Y$ abbildet, es müssen aber nicht alle Elemente aus Y angenommen werden bzw. darf auch mehrfach angenommen werden (rechtseindeutig, linksvollständig).

Als Relation:

$f\subseteq A\times B$ mit $f=\{(a,f(a))\mid a\in A\wedge f(a)\in B\}$

Funktionen

Sei $f\subseteq A\times B$ linkseindeutige und rechtsvollständige Relation.

F ist linksvollständig, wenn gilt $\forall a\in A\exists b\in B:(a,b)\in R$.

F ist rechtseindeutig, wenn gilt $\forall a\in A\forall b_1,b_2\in B:(a,b_1)\in R\wedge(a,b_2)\in R\Rightarrow b_1=b_2$.

Bild, Urbild

Sei $f:A\to B$ und $M\subseteq A$.

Das *Bild* von M unter f ist die Menge $f(M):=\{f(x)\mid x\in M\}$.

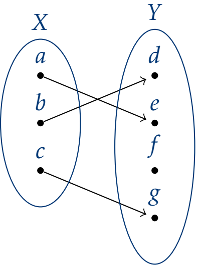
Das *Urbild* einer Teilmenge $N\subseteq B$ heißt $f^{-1}(N):=\{a\in A\mid f(a)\in N\}$.

Eigenschaften von Abbildungen

Injektivität:

$\forall x,y\in X: f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

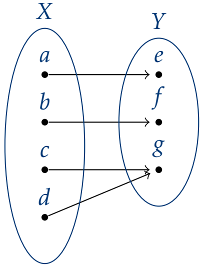
Jedes $y\in Y$ wird höchstens einmal (oder garnicht) getroffen:



Surjektivität:

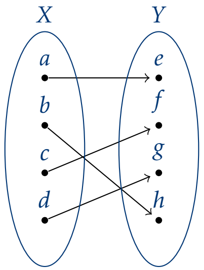
$\forall y\in Y\exists x\in X: f(x)=y$

Jedes $y\in Y$ wird mindestens einmal getroffen:



Bijektivität:

Jedem $x\in X$ wird genau ein $y\in Y$ zugeordnet und jedem $y\in Y$ genau ein $x\in X$:



Beispiel für Abbildung, die injektiv aber nicht surjektiv ist: Sei $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Dann ist $f(n)=n+1$ injektiv, da $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x+1=y+1$ gelten muss, was nur gilt, wenn $x=y$. f ist nicht surjektiv da 0 kein Urbild.

Komposition

Die *Komposition* (Hintereinanderausführung) zweier Abbildungen $f:A\to B$ und $g:B\to C$ ist $a\mapsto(g\circ f)(a)=g(f(a)),\quad a\in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Es gilt $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$. Außerdem gilt: Die Komposition von injektiven Abbildungen ist injektiv, die von surjektiven Abbildungen ist surjektiv und die von bijektiven Abbildungen ist bijektiv.

Identität, Umkehrabbildung

Die Abbildung $id_A:A\to A$ mit $id_A(a)=a$ heißt *Identität*.

Sei $f:A\to B$ bijektive Abbildung. Dann existiert zu f stets eine Abbildung g mit $g\circ f=id_A$ und $f\circ g=id_B$. g heißt die zu f *inverse Abbildung* (f^{-1}). Es gilt $f^{-1}(f(a))=a$ und $f(f^{-1}(b))=b$.

Mächtigkeit von Mengen, Abzählbarkeit

Gleichmächtige Mengen:

Seien M und N zwei Mengen. M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f:M\to N$ gibt ($M\cong N$).

Endliche Mengen:

Eine Menge M heißt endlich, wenn $M=\emptyset$ oder es für ein $n\in\mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $b:M\to\mathbb{N}_n$ gibt.

Unendliche Mengen:

Eine Menge M heißt unendlich, wenn M nicht endlich.

Abzählbare Mengen:

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn M endlich oder es gibt bijektive Abbildung $b:M\to\mathbb{N}$.

Abzählbar unendliche Mengen:

Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn M abzählbar und M unendlich.

Überabzählbare Mengen:

Eine Menge M heißt überabzählbar, wenn M nicht abzählbar.

Spezielle endliche Mengen:

Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{N}_n:=[n]:=\{1,\dots,n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen.

Beispiele:

$|\{a,b,c\}|=3=|\{x,y,11\}|$

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{R}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$

Kardinalität

Anzahl der Elemente einer Menge. Zwei Mengen haben gleiche Kardinalität, wenn sie gleichmächtig sind.

Beispielbeweis

Zu zeigen: $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$

Beweis. Wir betrachten $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $f(n):=(1,n)$ und $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $g(n,m):=2^n\cdot3^m$. Beide sind injektiv, also $\mathbb{N}\cong\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, also $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$.

5 Graphentheorie

Gerichteter Graph

$G=(V,E)$ wobei V Menge aller Knoten z.B. $V=\{v_0,v_1,v_2,\dots,v_n\}$ und $E\subseteq V\times V$ Menge aller Kanten mit $e=(v,u)$. Hierbei steht v für den Startknoten von e und u ist Endknoten von e.

Hinweis:

Ist die Kantenmenge E symmetrisch ($(u,v)\in E\wedge(v,u)\in E$) sprechen wir von einem ungerichteten Graphen. In solchen werden keine Schlingen betrachtet.

Adjazente Knoten

Zwei Knoten, die in einem Graphen durch eine Kante verbunden sind, heißen *adjazent* oder *benachbart*.

Endlicher Graph

Ein Graph G heißt endlich, wenn die Knotenmenge V endlich ist.

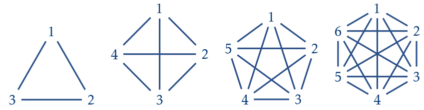
Nullgraph (vollst. unverbunden)

$G=(V,\emptyset)\Rightarrow$ ohne Kanten

Vollständiger Graph

$G=(V,V\times V)$ ist vollständig (heißt auch K_n wegen n Knoten) und hat Maximalzahl von n^2 Kanten $\Rightarrow$ gerichtet und mit Schlingen. Der Ungerichtete K_n hat $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Kanten, wobei n die Zahl der Knoten ist.

Beispiel:



Ungerichteter Graph

Ein Graph $G=(V,E)$ ist ungerichtet $\Leftrightarrow E$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow(u,v)\in E\wedge(v,u)\in E$. Da hier die Kanten ungerichtet, kann Mengenschreibweise verwendet werden.

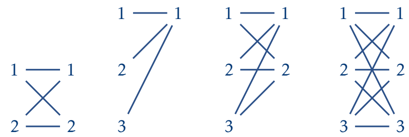
Schlinge

Kante mit gleichem Start- und Endknoten. Wird bei ungerichteten Graphen nicht betrachtet.

Bipartite Graphen

Ein ungerichteter Graph ist bipartit, wenn die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen U,W zerlegbar ist, sodass alle Kanten $e\in E$ einen Endpunkt in U und einen anderen in W haben.

Beispiel:



Eulersche Graphen

G heißt eulerscher Graph, falls es in G einen geschlossenen Weg gibt, der jede Kante von G enthält.

G ist eulerscher Graph $\Leftrightarrow$ jede Ecke von G hat geraden Grad und G ist zusammenhängend.

Untergraph

Seien $G=(V_G,E_G)$, $H=(V_H,E_H)$ zwei Graphen. H heißt Teilgraph von G, wenn $V_H\subseteq V_G$ und $E_H\subseteq E_G$ (wenn also jede Kante von H auch zu G gehört.)

Hinweis:

Der Nullgraph O_n ist Teilgraph jedes Graphen mit n Knoten. Außerdem ist jeder Graph Teilgraph des vollständigen Graphen K_n.

Induzierte Teilgraphen

Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Ist $V'\subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge V von G, dann ist der Untergraph oder der durch V' induzierte Teilgraph von G der Graph $G[V']=(V',E')$ mit $E'=\{(u,v)\mid u,v\in V'\wedge(u,v)\in E\}$

Beispiel:

Ist G ein Graph hat $G[\{2,3,4\}]$ nur die Knoten 2, 3 und 4 und die entsprechenden Kanten.

Grad eines Knoten

Der Ausgrad von v ist die Zahl der Kanten, die v als Startknoten besitzen. Der Ingrad von v ist die Zahl der Kanten, die in v enden. Ist G ungerichtet stimmen Ausgrad von v und Ingrad von v überein und wird Grad von v genannt.

Hinweis:

Sei $G=(V,E)$ gerichteter Graph, dann gilt $\sum_{v\in V}indeg(v)=\sum_{v\in V}outdeg(v)=|E|$. Ist G ungerichtet, dann gilt $\sum_{v\in V}deg(v)=2\cdot|E|$.

Wege

Ein Weg von den Knoten u nach v ist eine Folge benachbarter Knoten. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der Kanten. Ein Weg der Länge 0 wird als trivialer Weg bezeichnet und besteht nur aus einem Knoten.

Hinweis:

Ein Weg heißt geschlossen, wenn seine beiden Endknoten gleich sind.

Graphzusammenhang

Knoten u und v eines ungerichteten Graphen heißen zusammenhängend, wenn es einen Weg in G von u nach v gibt.

Zusammenhangskomponente

Ein Graph G heißt zusammenhängend wenn jedes Knotenpaar aus G zusammenhängend ist.

Hinweis:

Die Äquivalenzklassen (zusammenhängende Teilgraphen) einer Zusammenhangsrelation Z über einem ungerichteten Graphen G heißen Zusammenhangskomponenten (ZK) von G.

Pfade, Kreise

Als *Pfad* werden Wege in einem Graphen bezeichnet, bei denen keine Kante zweimal durchlaufen wird. Ein geschlossener Pfad heißt *Kreis*. Bei einem *einfachen Pfad* wird kein Knoten mehrfach durchlaufen. Ein geschlossener Pfad, der mit Ausnahme seines Ausgangspunktes einfach ist, heißt *einfacher Kreis*. Ein einfacher Kreis durch sämtliche Knoten des Graphen, heißt *Hamiltonscher Kreis*.

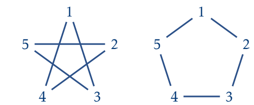
Hamiltonscher Kreis

Kann der Zusammenhang eines Graphen G durch die Entnahme eines einzigen Knotens (und sämtlicher mit diesem Knoten benachbarter Kanten) zerstört werden, dann besitzt G keinen Hamiltonschen Kreis.

Isomorphe Graphen

Zwei Graphen heißen isomorph zueinander, wenn sie strukturell gleich sind.

Beispiel:



v	1	2	3	4	5
$\phi(v)$	1	4	2	5	3

Komplementäre Graphen

Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Dann ist $\overline{G}=(V,(V\times V)\setminus E)$ der Komplementärgraph von G.

Hinweis:

Ein Graph heißt selbstkomplementär wenn G und $\overline{G}$ isomorph sind.