

Les Cahiers de la Chaire

Hors-Série Microstructure des Marchés / N°1 - Juin 2013

**Faisabilité de l'apprentissage des paramètres d'un
algorithme de trading sur des données réelles**

Sophie Laruelle



RESEARCH INITIATIVE
Trading & Microstructure

Faisabilité de l'apprentissage des paramètres d'un algorithme de trading sur des données réelles

SOPHIE LARUELLE *

Résumé

Considérons qu'un trader ou un algorithme de trading interagissant avec les marchés durant les enchères continues puisse être modélisé par une procédure itérative ajustant le prix auquel il poste ses ordres à un rythme donné, [10] propose une procédure minimisant son coût d'exécution. Ils prouvent la convergence *p.s.* de l'algorithme sous des hypothèses sur la fonction de coût et donnent des critères pratiques sur les paramètres du modèle qui assurent que les conditions pour utiliser l'algorithme sont vérifiées (notamment, en utilisant un principe de co-monotonie fonctionnel). Ici on va estimer les paramètres du flux d'exécution d'ordres. Tout d'abord on fait une étude de stabilité des paramètres et ensuite on construit des algorithmes adaptatifs pour estimer ces paramètres "en-ligne".

1 Introduction

Le but de cet article est de faire l'étude statistique des paramètres d'un algorithme de trading sur données réelles. Il s'agit d'un algorithme pour trouver la distance optimale de placement d'ordre limite dans un carnet d'ordres sur une période de placement donnée, sans recours à la modélisation de la dynamique du carnet. On considère un agent qui veut acheter durant une courte période $[0, T]$ une quantité Q_T d'un actif traité et on cherche la distance optimale où il doit poster son ordre limite pour minimiser son coût d'exécution (le cas d'ordre limite à la vente peut être obtenu par symétrie). Notre approche suit le mécanisme d'un "trader qui apprend" : il devinera la distance optimale de placement (le prix qui équilibre la sélection négative et le risque de non-exécution), par essais successifs, erreurs et corrections. La procédure récursive optimale déduite de notre cadre donne le meilleur ajustement de prix à appliquer à un ordre pour un temps d'arrêt donné (dates de réévaluation) étant données les observations passées du marché.

On modélise le processus d'exécution d'ordres par un processus de Poisson $(N_t^{(\delta)})_{0 \leq t \leq T}$ dont l'intensité $\Lambda_T(\delta, S)$ dépend du prix latent $(S_t)_{t \geq 0}$ et de la distance de soumission de l'ordre δ . Le coût d'exécution résulte de la somme du prix de la quantité exécutée et d'une fonction de pénalisation dépendant de la quantité restant à exécuter à la fin de la période $[0, T]$. Cette pénalisation $\kappa \cdot \Phi(Q)$ modélise le coût supplémentaire induit par la traversée du spread et l'impact de marché résultant de l'exécution de cet ordre "à tout prix".

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées aux Systèmes, École Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, 92290 Châtenay-Malabry, France. Email: sophie.laruelle@upmc.fr. Ce travail a été réalisé avec le soutien de l'Initiative de recherche "Microstructure des Marchés", Initiative de recherche de la Fondation Institut Europlace de Finance.

Le but est de trouver la distance optimale δ^* qui minimise le coût d'exécution. Ceci mène à un problème d'optimisation sous contraintes que l'on résoud à l'aide d'une procédure récursive stochastique par projection (voir [8] et [9]). On montre la convergence *p.s.* de l'algorithme contraint sous des hypothèses supplémentaires sur la fonction de coût d'exécution (convexité et monotonie à l'origine). D'un point de vue pratique, il n'est pas facile de vérifier les conditions sur la fonction de coût, donc on donne des critères sur les paramètres du modèle qui assurent la viabilité de l'algorithme en se basant sur un principe de co-monotonie fonctionnel que nous supposons vérifié par le processus du "prix latent", $(S_t)_{t \in [0, T]}$.

L'intensité $\Lambda_T(\delta, S)$ du processus d'exécution d'ordres sera paramétrée par une fonction convexe, positive, décroissante, dépendant de deux paramètres que l'on veut estimer. Un estimateur de l'intensité d'arrivée des temps de trades introduit dans [5] sera utilisé et à l'aide d'une paramétrisation et d'une régression, on en déduira les deux paramètres. Pour que cette intensité soit consistante avec un volume, on la multipliera par le volume moyen des ordres exécutés sur le marché. L'étude de la stabilité de ces trois paramètres en fonction de la fenêtre d'estimation (1 heure, 1 jour, 1 semaine, 1 mois par exemple) montre la nécessité du recours à l'estimation en ligne de ces paramètres pour capturer au mieux les conditions de marché adéquates au moment du placement de l'ordre limite. A cette fin, on construit des algorithmes adaptatifs, à l'aide de la théorie classique de l'approximation stochastique, pour estimer à la fois la moyenne des volumes exécutés, mais aussi les estimateurs des moindres carrés de la régression linéaire et les deux derniers paramètres associés.

L'article est organisé comme suit : le modèle sur lequel est basé l'algorithme de trading est introduit dans la Section 2. Dans la Section 2.1, on propose tout d'abord un modèle pour le processus d'exécution d'ordres postés, puis on définit la fonction de coût d'exécution pénalisée et on construit la procédure stochastique récursive sous contraintes. Section 2.2 donne les principaux résultats de convergence et Section 2.3 fournit les critères opérationnels qui assurent cette convergence, basés sur un principe de co-monotonie fonctionnel pour les diffusions unidimensionnelles. La Section 3 est consacrée à l'étude statistique des paramètres du modèle : Section 3.1 définit l'estimateur de l'intensité des temps des trades ; Section 3.2 présente la méthode d'estimation des paramètres de la paramétrisation de cette intensité et Section 3.2.1 fait l'étude de stabilité de ces paramètres en fonction de la fenêtre d'estimation. Section 3.3 présente l'estimation du volume moyen exécuté avec l'étude de sa stabilité dans la Section 3.3.1. Enfin, la Section 3.4 présente les algorithmes adaptatifs construits pour estimer les paramètres ainsi que leur implementation.

Notations.

- $(x)_+ = \max\{x, 0\}$, $\llbracket 0, x \rrbracket := \prod_{i=1}^d [0, x_i]$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^d .
- $\mathbb{D}([0, T], A) := \{f : [0, T] \rightarrow A \text{ càdlàg}\}$ (équipé de la topologie de Skorokhod quand c'est nécessaire, voir [7]) où $A = \mathbb{R}^q, \mathbb{R}_+^q$, etc. Ils sont équipés de la tribu standard $\sigma(\alpha \mapsto \alpha(t), t \in [0, T])$.
- $\|\alpha\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\alpha(t)|$, $\alpha \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R})$ et f'_ℓ désigne la dérivée à gauche de f .

2 Rappels du modèle

2.1 Modélisation et construction de l'algorithme

On concentre notre travail sur le problème de trading optimal pour un ordre limite d'achat sans avoir à modéliser la dynamique du carnet d'ordres. Nous modélisons donc seulement le flux d'exécution qui atteint le prix où l'ordre limite est posté sur une courte période $[0, T]$ par un processus de Poisson, à savoir

$$N_T^{(\delta)} \text{ d'intensité } \Lambda_T(\delta, S) := \int_0^T \lambda(S_t - (S_0 - \delta)) dt, \quad (1)$$

où $0 \leq \delta \leq \delta_{\max}$ ($\delta_{\max} \in (0, S_0)$ est la profondeur du carnet d'ordres), $\lambda : [-S_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe décroissante finie et $(S_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique modélisant la dynamique du prix de l'actif.

Sur la période $[0, T]$, notre but est d'exécuter un portefeuille de taille $Q_T \in \mathbb{N}$ investi dans l'actif S . Le coût d'exécution pour une distance δ est alors $\mathbb{E} \left[(S_0 - \delta) \left(Q_T \wedge N_T^{(\delta)} \right) \right]$. On ajoute à ce coût d'exécution une *fonction de pénalisation avec impact de marché* $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, croissante et convexe, avec $\Phi(0) = 0$, pour modéliser le coût supplémentaire d'exécution de la quantité restante $(Q_T - N_T^{(\delta)})_+$. Ainsi le coût résultant de l'exécution sur une période $[0, T]$ s'écrit

$$C(\delta) := \mathbb{E} \left[(S_0 - \delta) \left(Q_T \wedge N_T^{(\delta)} \right) + \kappa S_T \Phi \left((Q_T - N_T^{(\delta)})_+ \right) \right] \quad (2)$$

où $\kappa > 0$ est un paramètre libre à calibrer.

Notre but est alors de minimiser ce coût en choisissant la distance de placement. Notre stratégie pour résoudre le problème d'optimisation

$$\min_{0 \leq \delta \leq \delta_{\max}} C(\delta)$$

numériquement est de tirer parti de la représentation de C et de ses deux premières dérivées sous forme d'espérances pour construire une procédure de gradient stochastique pour trouver le minimum de la fonction de coût (pénalisée).

De plus, on montrera que, sous des hypothèses naturelles sur Q_T et κ , C est deux fois différentiable et *strictement convexe* sur $[0, \delta_{\max}]$ avec $C'(0) < 0$. Par conséquent,

$$\operatorname{argmin}_{\delta \in [0, \delta_{\max}]} C(\delta) = \{\delta^*\}, \quad \delta^* \in (0, \delta_{\max}] \quad \text{et} \quad \delta^* = \delta_{\max} \quad \text{ssi} \quad C \text{ est décroissante sur } [0, \delta_{\max}].$$

On spécifie les représentations sous forme d'espérance de C' (voir [10]) en exhibant une fonctionnelle borélienne

$$H : [0, \delta_{\max}] \times \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \forall \delta \in [0, \delta_{\max}], \quad C'(\delta) = \mathbb{E} \left[H(\delta, (S_t)_{t \in [0, T]}) \right].$$

En pratique, pour implémenter numériquement la procédure récursive, on a à remplacer les "copies" $S^{(n)}$ par des copies $\bar{S}^{(n)}$ de discrétisation en temps $\bar{S} = (\bar{S}_i)_{0 \leq i \leq m}$, typiquement un schéma d'Euler d'un processus de diffusion brownienne. Alors, avec un abus évident de notation pour la fonction H , on peut écrire la *procédure implémentable* comme suit :

$$\delta_{n+1} = \operatorname{Proj}_{[0, \delta_{\max}]} \left(\delta_n - \gamma_{n+1} H \left(\delta_n, (\bar{S}_i^{(n+1)})_{0 \leq i \leq m} \right) \right), \quad n \geq 0, \quad \delta_0 \in [0, \delta_{\max}], \quad (3)$$

où $(\bar{S}_{t_i}^{(n)})_{0 \leq i \leq m}$ sont des copies de $(\bar{S}_{t_i})_{0 \leq i \leq m}$ soit indépendantes, soit vérifiant des propriétés “ergodiques”, à savoir des propriétés de moyennisation dans le sens de [11]. Dans le premier cas, on pensera à des données simulées après un processus de calibration et dans le second cas à une implémentation directe sur un historique de données haute fréquence de prix de l’actif S .

2.2 Principaux résultats de convergence

Les théorèmes suivants donnent les résultats de convergence *p.s.* pour la procédure stochastique (3) : le premier pour les suite i.i.d. et le second pour les suites “moyennisantes” (voir [11]).

2.2.1 Données simulées i.i.d. d’un modèle préalablement calibré

Dans cette section, on considère que le processus d’innovations $\{(\bar{S}_{t_i}^{(n)})_{0 \leq i \leq m}, n \geq 0\}$ provient d’un modèle de diffusion préalablement *calibré sur des données réelles*, qui peut être simulé au temps t_i , $0 \leq i \leq m$, soit exactement, soit via un schéma de discrétisation en temps à pas constant.

Théorème 2.1. *Supposons que la fonction de coût \bar{C} associée au schéma de discrétisation $(\bar{S}_t)_{t \in [0, T]}$ est strictement convexe $[0, \delta_{\max}]$ avec $\bar{C}'(0) < 0$. De plus, supposons que la suite de pas décroissants vérifie les hypothèses standard*

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty. \quad (4)$$

Soit $(\bar{S}_{t_i}^{(n)})_{0 \leq i \leq m}$, $n \geq 1$, une suite de copies i.i.d. de $(\bar{S}_{t_i})_{0 \leq i \leq m}$.

Alors la procédure récursive définie par (3) converge p.s. vers sa cible $\bar{\delta}^ = \operatorname{argmin}_{\delta \in [0, \delta_{\max}]} \bar{C}(\delta)$, i.e.*

$$\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \bar{\delta}^*.$$

Ce théorème est une application directe du résultat classique de convergence *p.s.* pour les algorithmes stochastiques contraints (voir [8, 9]).

2.2.2 Implémentation directe sur des données historiques haute fréquence satisfaisant des propriétés de moyennisation

On supposera que la suite de prix $\{(\bar{S}_{t_i}^{(n)})_{0 \leq i \leq m}, n \geq 0\}$ satisfait des propriétés de moyennisation par rapport à la probabilité ν comme développé dans [11] et qu’elle est bornée par un réel $L \in (0, +\infty)$, ainsi $\bar{S}^{(n)} \in [0, L]^{m+1}$ pour tout $n \geq 1$. De plus, on aura besoin de montrer l’existence d’une fonction de Lyapunov *trajectorielle*, ce qui signifie dans ce cadre unidimensionnel que $H(\cdot, ((s_{t_i})_{0 \leq i \leq m}))$ est croissante pour tout $(s_{t_i})_{0 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}_+^{m+1}$.

Théorème 2.2. *Soit $\lambda(x) = Ae^{-kx}$, avec $A > 0$, $k > 0$. Supposons que $(\bar{S}^{(n)})_{n \geq 1}$ est une suite à valeurs dans $[0, L]^{m+1}$ ν -moyennisante où ν est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{m+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1}))$.*

Supposons que la fonction de coût d’exécution C est strictement convexe sur $[0, \delta_{\max}]$ avec $\bar{C}'(0) < 0$ et $\bar{C}'(\delta_{\max}) > 0$. Supposons finalement que la suite de pas $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante positive vérifiant

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty, \quad nD_n^*(\bar{S})\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} nD_n^*(\bar{S}) \max(\gamma_n^2, |\Delta\gamma_{n+1}|) < +\infty, \quad (5)$$

où $D_n^*(\bar{S})$ désigne la discrétance à l'origine de la suite \bar{S} . De plus, supposons que

$$Q_T \geq 2T\lambda(-\bar{S}_0) \quad \text{et} \quad \kappa \leq \frac{1 + k(\bar{S}_0 - \delta_{\max})}{k \|\bar{S}\|_{\infty} (\Phi(Q_T) - \Phi(Q_T - 1))} \quad (6)$$

Alors la procédure récursive définie par (3) converge p.s. vers sa cible $\delta^* = \operatorname{argmin}_{\delta \in [0, \delta_{\max}]} \bar{C}(\delta)$, i.e.

$$\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \bar{\delta}^*.$$

2.3 Critères pour la convexité et la monotonie à l'origine

Dans cette section, on cherche des critères simples sur le paramètre κ induisant les hypothèses requises sur la fonction de coût d'exécution C (ou \bar{C}) sans jamais avoir besoin de réellement spécifier le processus S . La forme originelle du critère impliquant que $C'(0) < 0$ et $C'' \geq 0$ ne peut être vraiment utilisée en pratique puisque qu'elle fait intervenir des ratios d'espérances de fonctionnelles combinant à la fois l'actif S et les paramètres d'exécution d'une façon clairement non-linéaire. La clé pour établir les critères est le *principe de co-monotonie fonctionnel* énoncé dans [10, 12] pour une grande classe de diffusions et leurs schémas de discrétisation associés.

Une fonctionnelle borélienne $F : \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante (resp. décroissante) si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}), \quad (\forall t \in [0, T], \alpha(t) \leq \beta(t)) \implies F(\alpha) \leq F(\beta) \quad (\text{resp. } F(\alpha) \geq F(\beta)).$$

Deux fonctionnelles F et G sur $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R})$ sont co-monotones si elles ont la même monotonie.

Une fonctionnelle F est à croissance polynomiale si

$$\exists r > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall \alpha \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}), \quad |F(\alpha)| \leq K(1 + \|\alpha\|_{\infty}^r).$$

Définition 2.1. Un processus càdlàg (resp. continu) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ vérifie un principe de co-monotonie fonctionnel si pour toute paire $F, G : \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctionnelles boréliennes co-monotones (resp. continues en tout $\alpha \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ pour la norme sup) à croissance polynomiale telles que $F(S)$, $G(S)$ et $F(S)G(S) \in L^1$, on a

$$\mathbb{E} \left[F((S_t)_{t \in [0, T]}) G((S_t)_{t \in [0, T]}) \right] \geq \mathbb{E} \left[F((S_t)_{t \in [0, T]}) \right] \mathbb{E} \left[G((S_t)_{t \in [0, T]}) \right]. \quad (7)$$

Théorème 2.3. Supposons que $(S_t)_{t \in [0, T]}$ vérifie un principe de co-monotonie fonctionnel. Supposons que $\lambda(x) = Ae^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}$, $A, k \in (0, +\infty)$. Alors les critères de monotonie et de convexité suivants sont vérifiés :

(a) MONOTONIE À L'ORIGINE :

$$C'(0) < 0 \quad \text{lorsque} \quad Q_T \geq 2T\lambda(-S_0) \quad \text{et} \quad \kappa \leq \frac{1 + kS_0}{k\mathbb{E}[S_T] (\Phi(Q_T) - \Phi(Q_T - 1))}.$$

(b) CONVEXITÉ. Soit $\rho_Q \in \left(0, 1 - \frac{\mathbb{P}(N^\mu = Q_T - 1)}{\mathbb{P}(N^\mu \leq Q_T - 1)}\right)_{|\mu = T\lambda(-S_0)}$. Si $\Phi \neq \text{id}$, supposons que Φ vérifie

$$\forall x \in [1, Q_T - 1], \quad \Phi(x) - \Phi(x - 1) \leq \rho_Q(\Phi(x + 1) - \Phi(x)).$$

S_i

$$Q_T \geq 2T\lambda(-S_0) \quad \text{et} \quad \kappa \leq \frac{2}{k\mathbb{E}[S_T]\Phi'_\ell(Q_T)},$$

alors $C''(\delta) \geq 0$, $\delta \in [0, \delta_{\max}]$, donc C est convexe sur $[0, \delta_{\max}]$.

(c) Les mêmes inégalités sont vérifiées par le schéma d'Euler de $(S_t)_{t \in [0, T]}$ de pas $\frac{T}{m}$, pour $m \geq m_{b, \sigma}$, ou pour toute suite $(S_{t_i})_{0 \leq i \leq m}$ discrétisée en temps à valeurs dans \mathbb{R}^{m+1} qui satisfait un principe de co-monotonie.

3 Estimation des paramètres du modèle

Le but de cette section est de faire l'étude de stabilité des paramètres de l'intensité du processus de flux d'exécution $\Lambda_T(\delta, S)$ et de mettre en place une méthode d'estimation "en-ligne", c'est-à-dire un algorithme adaptatif d'estimation de ces paramètres. On commence par présenter un estimateur de l'intensité d'arrivée des transactions (introduit dans [5]) qui va nous permettre d'estimer les paramètres A et k par l'intermédiaire d'une paramétrisation de cette intensité, vue comme une fonction de la distance de placement. Deux méthodes sont présentées et étudiées pour déduire A et k de l'intensité. On remarque également une dissymétrie entre l'intensité des transactions à l'achat (bid) et à la vente (ask), ce qui implique d'estimer deux couples différents, un pour chaque côté du carnet d'ordres.

Une fois la méthode choisie, on étudie la stabilité des paramètres en fonction de la fenêtre d'estimation. Toutes les simulations ici seront faites sur les données du mois de janvier 2012 pour le prix de l'action du groupe ACCOR. On compare d'abord les valeurs des paramètres entre le jour, la semaine, 15 jours et le mois. Ensuite on étudie les paramètres sur les différentes heures de la journée : tout d'abord sur chacune des 4 semaines complètes du mois, puis on regroupe les données pour les mêmes jours pour étudier s'il y a des similitudes entre les mêmes jours d'une semaine.

Comme le flux d'exécution d'ordres représente le volume d'un ordre agressif qui vient consommer la liquidité dans le carnet d'ordres jusqu'à une distance donnée, il nous faut multiplier cette intensité d'arrivée des transactions par le volume moyen exécuté à chaque distance. On estime alors ce volume et on choisira de le prendre constant pour toutes les distances (vu que la variation entre les distances est faible). Ceci revient alors à modifier en fait le paramètre A de l'intensité. Une étude de stabilité similaire à celle des paramètres A et k est faite avec les mêmes fenêtres d'estimation comparatives.

Enfin, la dernière partie propose une méthode adaptative d'estimation de ces paramètres en construisant des algorithmes récurrents qui seront implémentés et étudiés numériquement.

3.1 Estimation de l'intensité des transactions

Soit $(\tau_n)_{n \geq 1}$ une suite d'instants d'occurrences de transactions sur une période $[0, T]$. On suppose que cette suite de variables aléatoires est i.i.d., de loi exponentielle de paramètre λ .

Le but est d'estimer le temps moyen d'exécution λ à l'aide d'un estimateur $\hat{\lambda}_n$ construit à partir de cette suite. Il en existe plusieurs, mais on choisit ici d'utiliser celui introduit dans [5], à savoir

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_k < T\}}}{\sum_{k=1}^n \tau_k \wedge T}.$$

L'auteur montre d'ailleurs que cet estimateur converge *p.s.* vers le paramètre et qu'il satisfait un Théorème de Limite Centrale, *i.e.*

$$\hat{\lambda}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_n - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma).$$

Si on calcule cet estimateur sur la base de données des transactions du mois de janvier 2012 pour ACCOR, pour 5 distances de placement, *i.e.* $\delta = 0, \dots, 4$ ticks, on a alors 5 estimations $(\hat{\lambda}_n(\delta))_{0 \leq \delta \leq 4}$ et on obtient le résultat suivant pour les transactions à l'achat pour $T = 15$ transactions

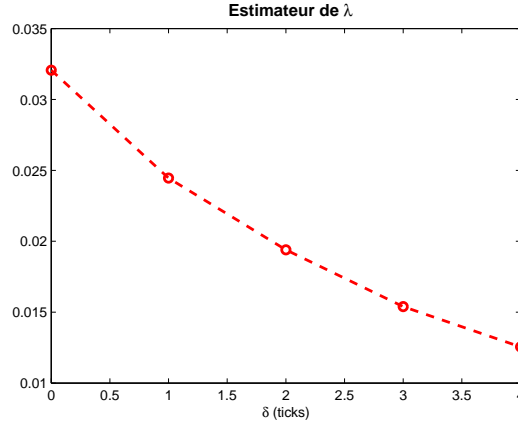


FIGURE 1 – Estimateur $\hat{\lambda}$ à l'achat pour ACCOR sur le mois de janvier 2012.

Comparons maintenant les intensités des transactions à l'achat et à la vente pour la même période (le mois de janvier 2012) et $T = 15$ transactions

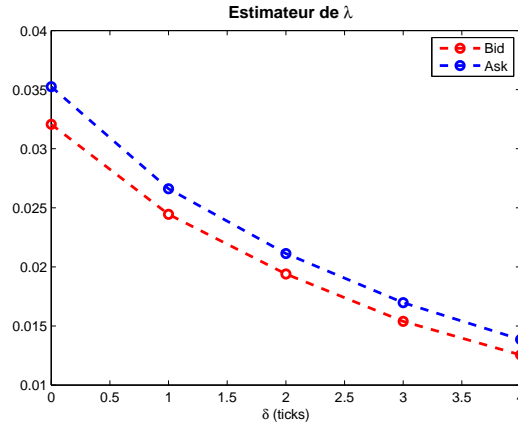


FIGURE 2 – Comparaison des estimateurs $\hat{\lambda}$ à l'achat et à la vente pour ACCOR sur le mois de janvier 2012.

On voit clairement la dissymétrie entre l'intensité à l'achat et à la vente, avec une intensité plus importante à la vente. D'où la nécessité d'estimer ces deux quantités indépendamment et donc de calculer les paramètres associés pour chacune.

3.2 Estimation des paramètres de l'intensité des transactions

Maintenant supposons que ce temps d'exécution dépend de la distance de placement au travers de la paramétrisation suivante : $\hat{\lambda}_n(\delta) = Ae^{-k\delta}$. On cherche alors à estimer les paramètres A et k à partir de l'estimateur $\hat{\lambda}_n(\delta)$. Plusieurs solutions sont possibles.

Une première méthode consiste à estimer $\hat{\lambda}_n(\delta)$ pour deux valeurs de δ et inverser le problème. Il suffit pour calculer les valeurs de A et k de résoudre le système suivant pour deux valeurs distinctes de distances, soit δ_1 et δ_2 :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_n(\delta_1) = Ae^{-k\delta_1} \\ \hat{\lambda}_n(\delta_2) = Ae^{-k\delta_2} \end{cases} ,$$

et on obtient les solutions suivantes

$$k = \frac{\log(\hat{\lambda}_n(\delta_2)/\hat{\lambda}_n(\delta_1))}{\delta_2 - \delta_1} \quad \text{et} \quad A = \hat{\lambda}_n(\delta_1)e^{k\delta_1}.$$

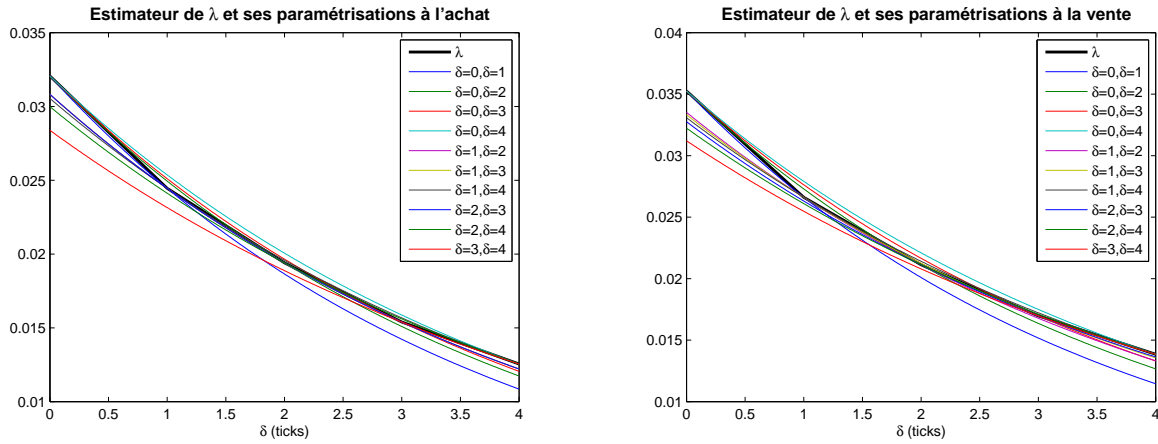


FIGURE 3 – Comparaison des paramétrisations des estimateurs $\hat{\lambda}$ à l'achat et à la vente pour ACCOR sur le mois de janvier 2012 obtenus à l'aide de deux distances choisies.

On voit clairement sur la figure que le choix du couple de distances pour déterminer les paramètres influe sur la forme de la courbe.

Une alternative est de minimiser l'erreur de prédiction à l'aide d'une régression linéaire. On fait alors la régression linéaire suivante

$$\log \hat{\lambda}_n(\delta) = c + \beta\delta + \epsilon$$

et alors $A = \exp(\hat{c})$ et $k = -\hat{\beta}$.

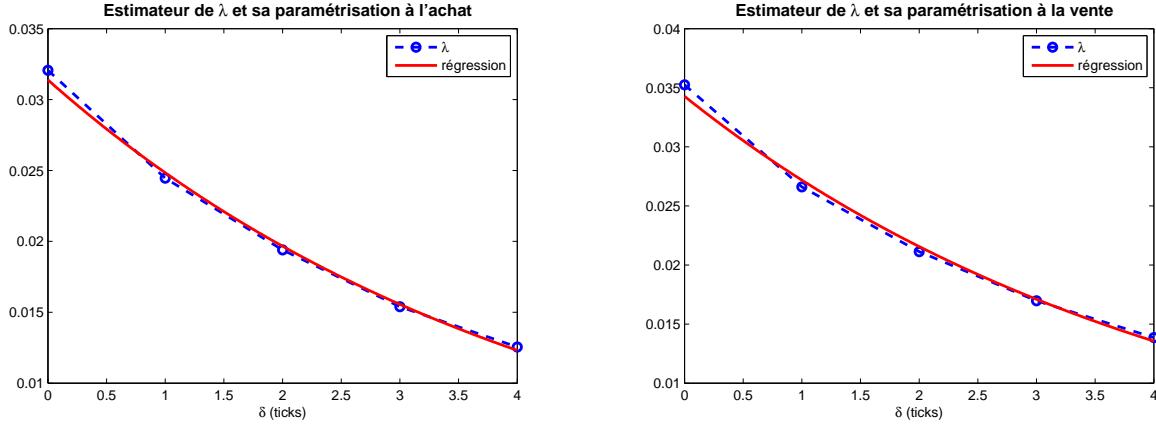


FIGURE 4 – Comparaison des paramétrisations des estimateurs $\hat{\lambda}$ à l'achat et à la vente pour ACCOR sur le mois de janvier 2012 obtenus à l'aide d'une régression : $A_{buy} = 0.0314$, $k_{buy} = 0.2339$, $A_{sell} = 0.0343$, $k_{sell} = 0.2318$.

Cette seconde méthode est plus consistante et sera retenue pour la suite de l'étude.

3.2.1 Etude de la fenêtre d'estimation

On va maintenant comparer les valeurs de A et k en fonction de la fenêtre d'estimation.

• **Fenêtre journalière, hebdomadaire, bimensuelle et mensuelle.** Commençons par comparer la stabilité des paramètres à l'achat et à la vente sur les périodes d'un jour, d'une semaine, de deux semaines et d'un mois.

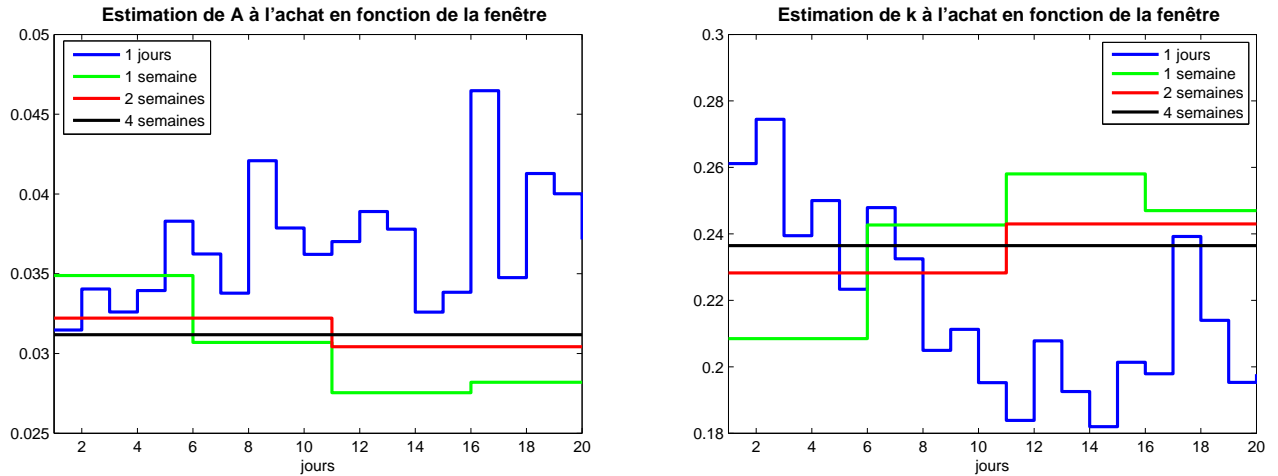


FIGURE 5 – Comparaison des estimations de A et k à l'achat pour ACCOR sur le mois de janvier 2012 en fonction de la fenêtre d'estimation : 1 jour, 1 semaine, 2 semaines et 4 semaines.

On voit clairement que les paramètres ne sont pas stables sur ces différentes périodes et qu'ils sont très sensibles au choix de la fenêtre. Il y a des régimes différents dans le mois et les comportements des

paramètres à l'achat sont distincts de ceux à la vente. Regardons maintenant à une échelle de temps plus fine, celle de la journée pour voir si on peut exhiber une certaine stabilité, ou bien une certaine tendance.

• **Fenêtre d'une heure pour chaque jour d'une semaine.** Regardons maintenant les paramètres estimés sur une fenêtre d'une heure pour chaque jour de la semaine et regroupons les 5 jours de la semaine sur un même graphique pour comparer.

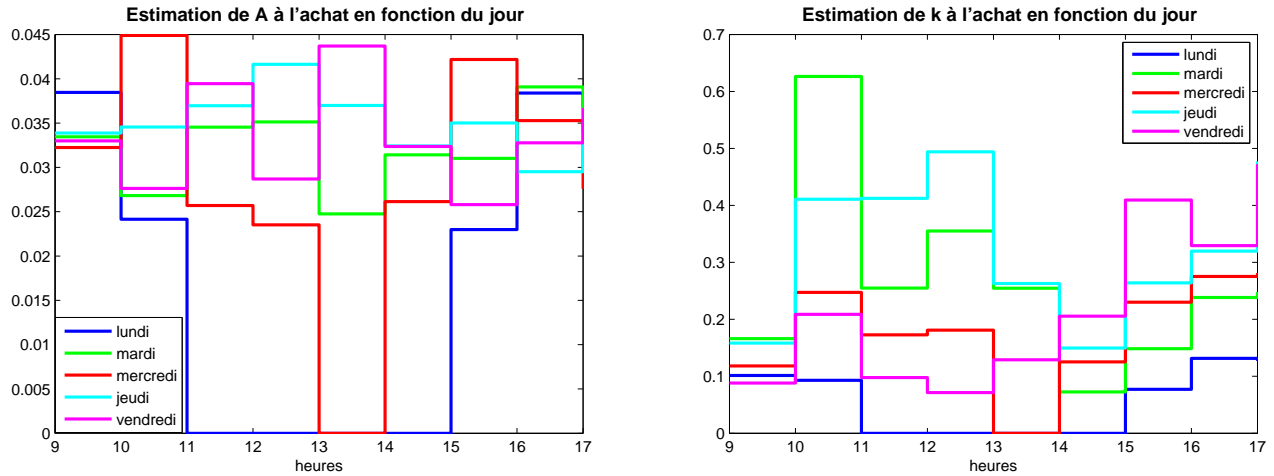


FIGURE 6 – Comparaison des estimations de A et k à l'achat pour ACCOR sur la première semaine du mois de janvier 2012 pour une fenêtre d'estimation d'1 heure.

Il n'y a pas non plus de stabilité dans les paramètres entre les différents jours de la semaine et les semaines semblent elles aussi différentes. Pour mieux le voir, nous allons regrouper les mêmes jours de la semaine ensemble et voir s'ils ont le même comportement au travers des 4 semaines du mois.

▷ Les 4 mardis du mois de janvier 2012

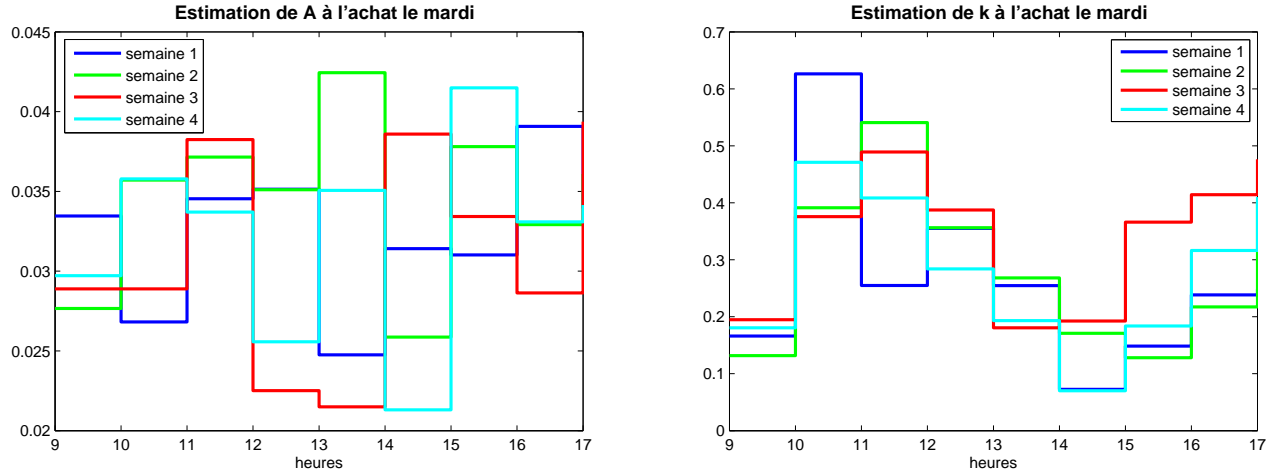


FIGURE 7 – Comparaison des estimations de A et k à l’achat pour ACCOR sur les 4 mardis du mois de janvier 2012 pour une fenêtre d’estimation d’1 heure.

On voit qu’il n’y a pas non plus de stabilité dans les différents jours de la semaine. Ceci nous conforte bien dans l’idée de construire un algorithme adaptatif pour estimer “en-ligne” la valeur de ces paramètres pour qu’ils soient le mieux adapter au contexte de marché du moment où l’on veut traiter.

3.3 Estimation de la quantité moyenne exécutée

Comme le flux d’exécution représente le volume des transactions qui viennent consommer la liquidité dans le carnet d’ordre jusqu’à un prix donné, il faut donc multiplier cette intensité d’arrivée des transactions $\hat{\lambda}_n$ par le volume moyen Q exécuté. Regardons pour commencer le volume moyen sur le mois de janvier 2012 pour le groupe ACCOR en fonction de la distance de placement δ à l’achat et à la vente.

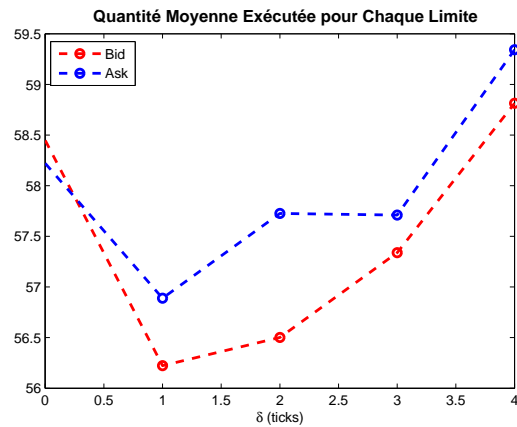


FIGURE 8 – Comparaison des estimateurs de la quantité exécutée à l’achat et à la vente pour ACCOR sur le mois de janvier 2012 en fonction de δ .

On note une certaine stabilité dans ce volume, malgré quelques différences. On choisira donc de le

considérer constant quelque soit la distance δ , on prendra donc la moyenne de ces volumes.

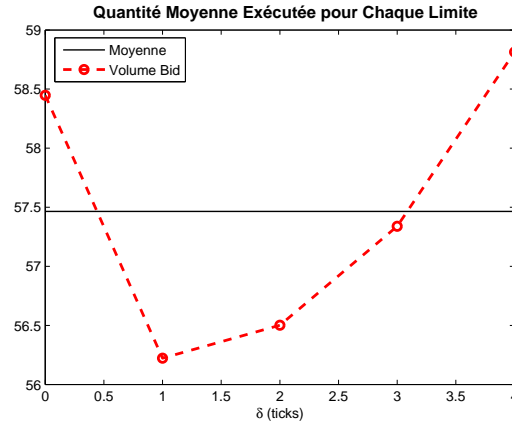


FIGURE 9 – Estimateur de la quantité exécutée et sa moyenne à l’achat pour ACCOR sur le mois de janvier 2012.

Ainsi l’estimateur de l’intensité du processus de Poisson représentant le flux d’exécution pour une distance δ sera de la forme : $\hat{\Lambda}_n(\delta) = Q A e^{-k\delta}$, ce qui signifie que le paramètre A de la section concernant le modèle sera estimé par le produit QA ici.

3.3.1 Etude de la fenêtre d’estimation

On va maintenant comparer les valeurs de Q en fonction de la fenêtre d’estimation.

• **Fenêtre journalière, hebdomadaire, bimensuelle et mensuelle.** Commençons par comparer la stabilité des paramètres à l’achat et à la vente sur les périodes d’un jour, d’une semaine, de deux semaines et d’un mois.

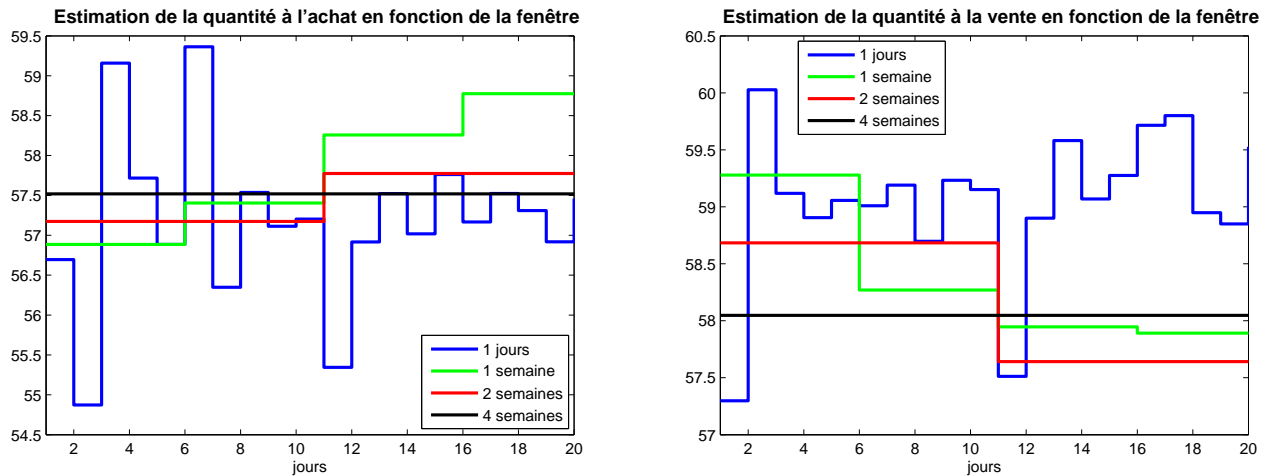


FIGURE 10 – Comparaison des estimations du volume moyen exécuté à l’achat et à la vente pour ACCOR sur le mois de janvier 2012 en fonction de la fenêtre d’estimation : 1 jour, 1 semaine, 2 semaines et 4 semaines.

• **Fenêtre d'une heure pour chaque jour d'une semaine.** Regardons maintenant les paramètres estimés sur une fenêtre d'une heure pour chaque jour de la semaine et regroupons les 5 jours de la semaine sur un même graphique pour les comparer.

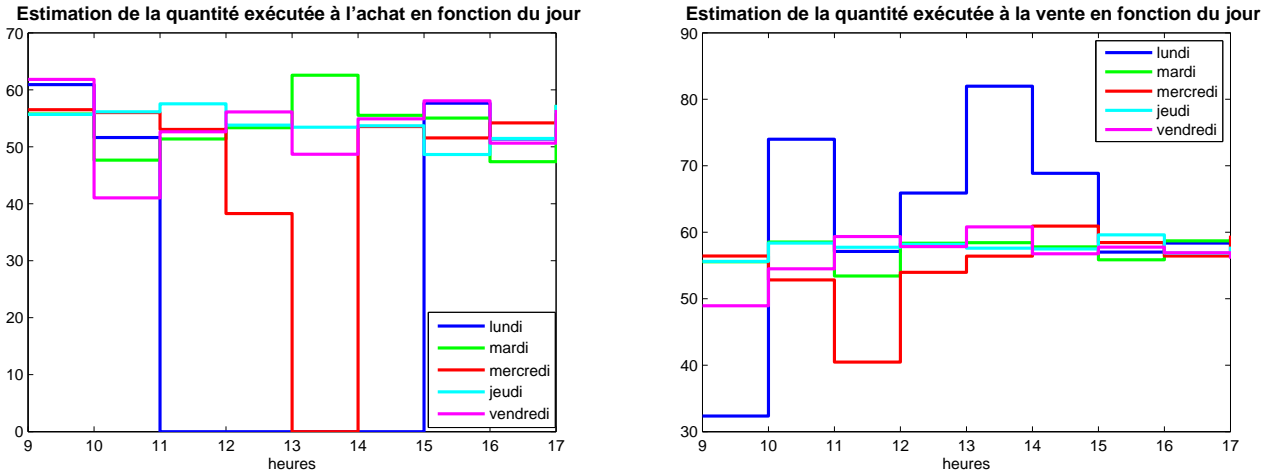


FIGURE 11 – Comparaison des estimations des quantités moyennes exécutées à l'achat et à la vente pour ACCOR sur la première semaine du mois de janvier 2012 pour une fenêtre d'estimation d'1 heure.

Regroupons les mêmes jours de la semaine ensemble et voir s'ils ont le même comportement au travers des 4 semaines du mois.

▷ *Les 4 mardis du mois de janvier 2012*

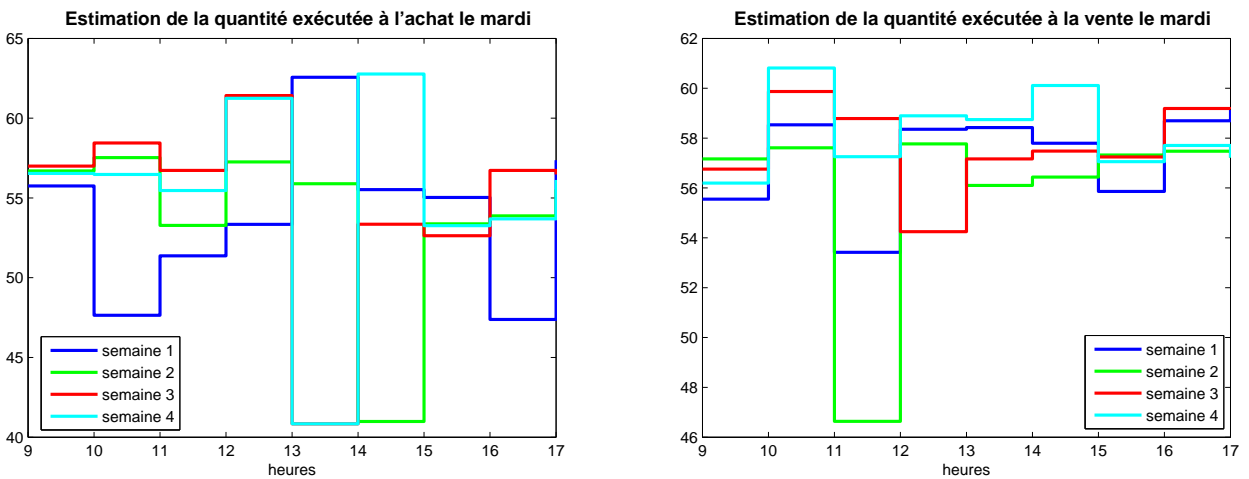


FIGURE 12 – Comparaison des estimations des quantités exécutées à l'achat et à la vente pour ACCOR sur les mardis du mois de janvier 2012 pour une fenêtre d'estimation d'1 heure.

On voit qu'il n'y a pas non plus de stabilité pour la quantité moyenne exécutée. Ceci confirme l'idée de construire un algorithme adaptatif pour estimer aussi "en-ligne" la valeur de ce paramètre.

3.4 Construction des algorithmes adaptatifs d'estimation des paramètres

Nous allons maintenant nous intéresser à la construction d'algorithmes adaptatifs pour estimer les différents paramètres, à savoir A , k et Q . Commençons par le plus simple : la quantité moyenne exécutée. En effet il s'agit seulement de construire un algorithme pour estimer une moyenne, et il est bien connu que l'estimateur empirique s'écrit facilement sous forme récursive (voir par exemple [3]) comme suit

$$Q_{n+1} = Q_n - \frac{1}{n+1} (Q_n - V_{n+1}), \quad n \geq 0,$$

où $(V_n)_{n \geq 1}$ représente la suite des volumes des transactions exécutés.

Pour l'estimation de $\hat{\lambda}_n$, il sera plus difficile de l'écrire sous forme d'un algorithme récursif standard, donc le plus simple est de l'écrire sous forme d'un ratio, *i.e.* $\hat{\lambda}_n = \frac{\hat{\lambda}_n^1}{\hat{\lambda}_n^2}$, où l'on mettra à jour les deux quantités comme suit

$$\hat{\lambda}_{n+1}^1 = \hat{\lambda}_n^1 + \mathbb{1}_{\tau_{n+1} < T}, \quad \hat{\lambda}_{n+1}^2 = \hat{\lambda}_n^2 + \tau_{n+1} \wedge T, \quad n \geq 0,$$

où $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est la suite des temps d'exécution des transactions. Il faudra bien entendu faire cette mise à jour pour chaque distance δ considérée.

Enfin pour A et k , il faut estimer récursivement les paramètres de la régression linéaire à partir de l'estimation de $\hat{\lambda}_n$.

L'estimateur des moindres carrés d'un modèle linéaire peut également s'écrire sous forme récursive (voir [3]) : considérons le modèle linéaire suivant à valeurs dans \mathbb{R}^d , où β est une matrice $q \times d$ inconnue

$$Y_{n+1} = \beta^t X_n + \epsilon_{n+1}.$$

A l'instant n , l'observation est (Y_n, X_{n-1}) et le bruit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ est inobservable. On pose

$$\sigma_n(X) = \sum_{k=0}^n X_k X_k^t.$$

Soit $\hat{\beta}_n$ l'estimateur des moindres carrés. On calcule, si $\sigma_{n-1}(X)$ est inversible,

$$\hat{\beta}_n = \sigma_{n-1}(X)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k Y_{k+1}^t,$$

qui se réécrit récursivement comme suit

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + \sigma_n(X)^{-1} X_n \left(Y_{n+1} - \hat{\beta}_n^t X_n \right)^t, \quad n \geq 0.$$

C'est bien un estimateur récursif puisque l'on peut réécrire récursivement les inverses de $\sigma_n(X)$ par la formule de Ricatti

$$\sigma_{n+1}(X)^{-1} = \sigma_n(X)^{-1} - \left(1 + X_{n+1}^t \sigma_n(X)^{-1} X_{n+1} \right) \sigma_n(X)^{-1} X_n X_n^t \sigma_n(X)^{-1}.$$

On peut modifier cet estimateur récursif en utilisant l'estimateur du gradient : on remplace $\sigma_n(X)$ par sa trace (en ajoutant une constante non nulle). On alors pour la trace

$$s_n(X) = 1 + \text{Tr}(\sigma_n(X)) = 1 + \sum_{k=0}^n \|X_k\|^2,$$

et l'algorithme de l'estimateur des moindres carrés devient

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + \frac{1}{s_n(X)} X_n \left(Y_{n+1} - \hat{\beta}_n^t X_n \right)^t, \quad n \geq 0,$$

$\hat{\beta}_0$ étant une matrice initiale $q \times d$ constante arbitraire.

Il suffit donc d'appliquer cette méthode à $Y_n = \log \hat{\lambda}_n \in \mathbb{R}^5$ et $X_n = \delta \in \mathbb{R}^5$ et alors $A_n = \exp(\hat{\beta}_n^1)$ et $k_n = -\hat{\beta}_n^2$.

3.4.1 Mise en oeuvre des algorithmes adaptatifs sur données réelles

Pour vérifier tout d'abord que nos procédures récursives convergent vers les bonnes cibles, nous calculons les valeurs des 3 paramètres A , k et Q pour l'achat et la vente sur l'ensemble de la base de données (soit le mois de janvier 2012) et nous vérifions la convergence des algorithmes en utilisant l'ensemble des données. On obtient alors les résultats suivants

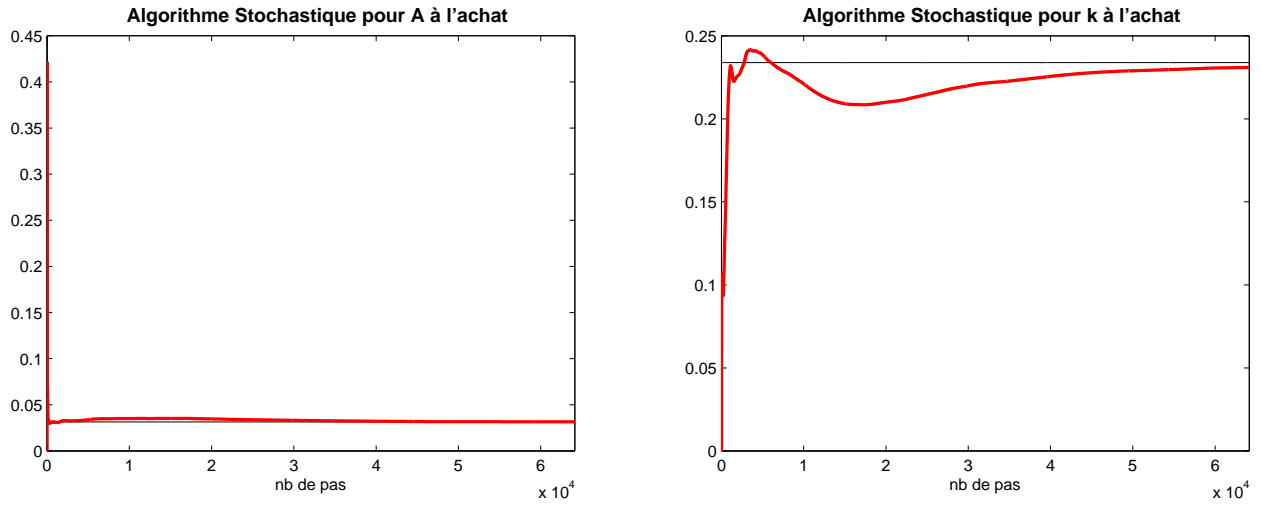


FIGURE 13 – Algorithmes stochastiques pour l'estimation de A et k à l'achat pour ACCOR au mois de janvier 2012.

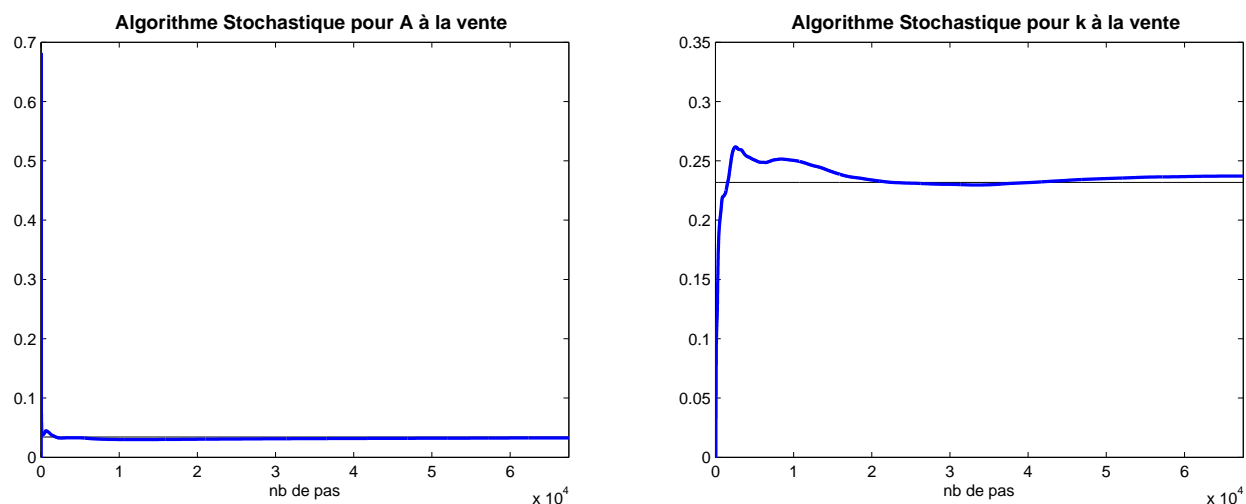


FIGURE 14 – Algorithmes stochastiques pour l’estimation de A et k à la vente pour ACCOR au mois de janvier 2012.

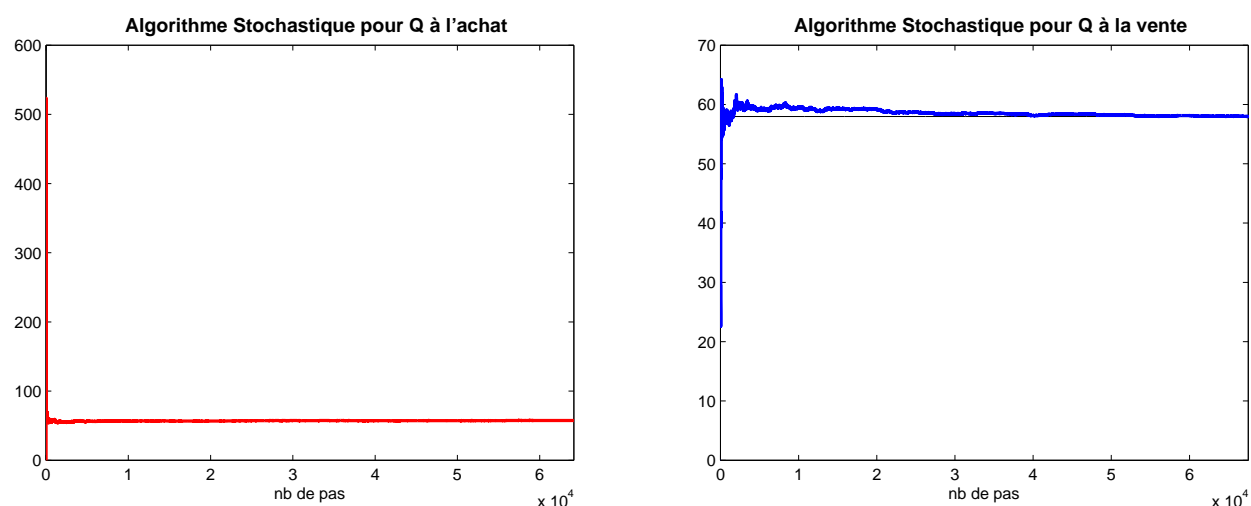


FIGURE 15 – Algorithmes stochastiques pour l’estimation de Q à l’achat et à la vente pour ACCOR au mois de janvier 2012.

Maintenant que l’on a vérifié que nos algorithmes convergent bien vers la bonne cible, on va donner un exemple de mise en oeuvre en ligne. Pour cela on va utiliser l’ensemble de la base de données et réinitialiser le pas de l’algorithme chaque jour du mois. On obtiendra ainsi une estimation journalière des paramètres. Pour mieux visualiser les différents jours considérés, des lignes verticales ont été ajoutées sur les graphiques.

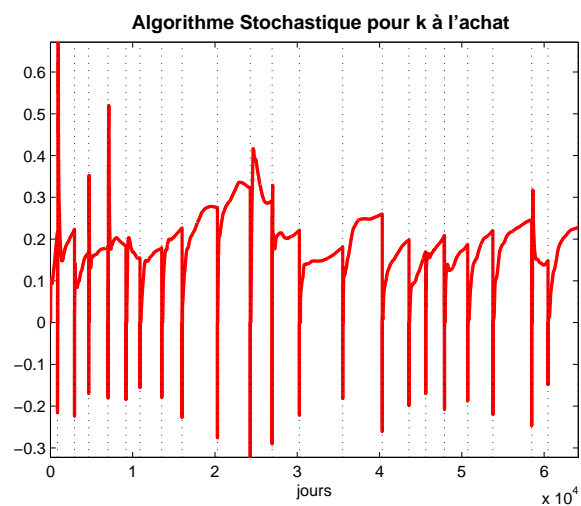
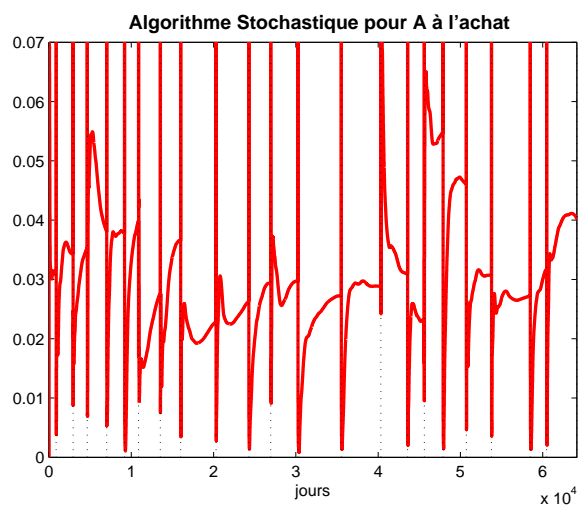


FIGURE 16 – Algorithmes stochastiques pour l'estimation de A et k à l'achat pour ACCOR au mois de janvier 2012 avec réinitialisation journalière.

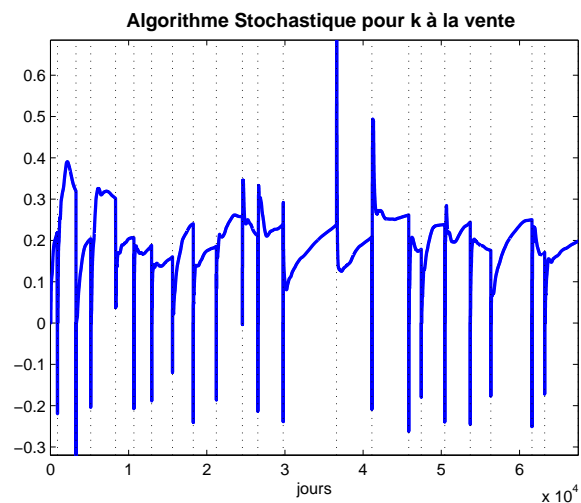
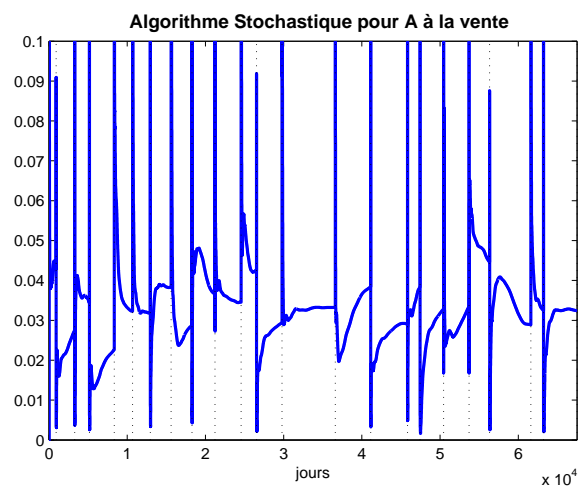


FIGURE 17 – Algorithmes stochastiques pour l'estimation de A et k à la vente pour ACCOR au mois de janvier 2012 avec réinitialisation journalière.

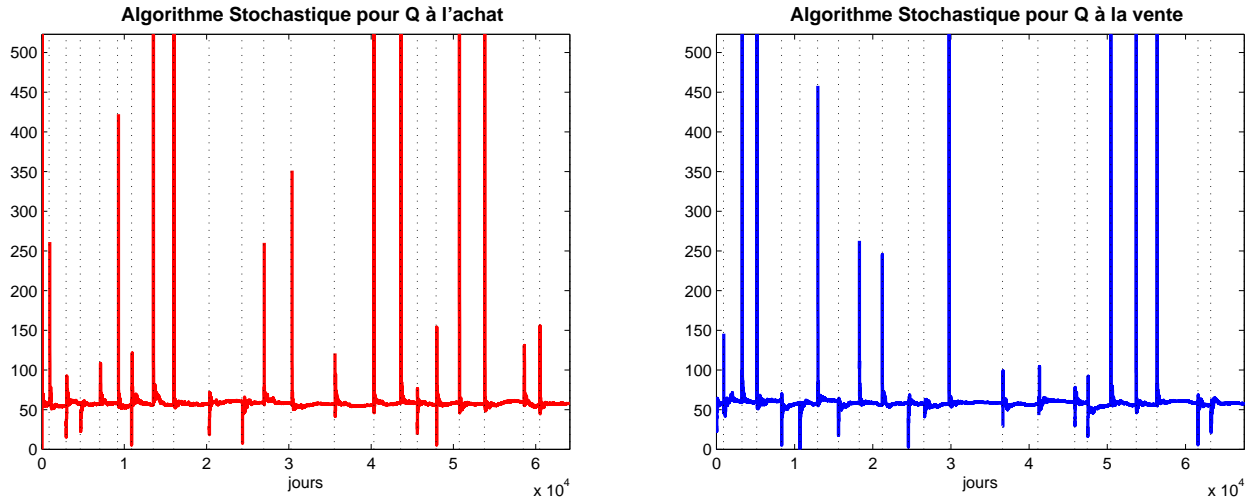


FIGURE 18 – Algorithmes stochastiques pour l’estimation de Q à l’achat et à la vente pour ACCOR au mois de janvier 2012 avec réinitialisation journalière.

On voit clairement les changements de régime dans les paramètres A , k et Q selon les jours du mois.

4 Conclusion

Cet article a présenté l’étude de l’estimation des paramètres d’un algorithme de trading pour trouver la distance optimale de placement d’un ordre limite dans le carnet d’ordre.

Cette étude empirique sur données réelles haute fréquence montre que les paramètres de l’intensité du flux d’exécution modélisé par un processus de Poisson ne sont pas stables dans le temps, et ceci à des échelles de temps différentes (heure, jour, semaine, mois). Ceci confirme la nécessité d’estimer “en-ligne” ces paramètres en même temps que l’implémentation de l’algorithme de placement optimal afin de capturer au mieux les tendances de marché à l’instant du placement de l’ordre limite.

A l’aide de méthodes tirées de l’approximation stochastique, on construit deux procédures récursives adaptatives : l’une basée sur la moyenne empirique pour l’estimation du volume moyen exécuté, l’autre sur les moindres carrés (régression linéaire) pour estimer les deux paramètres associés à l’intensité d’arrivée des transactions (A et k). L’étude numérique de ces algorithmes montre la convergence vers la cible sur le mois et donc l’efficacité de ces procédures, et l’étude de l’implémentation “en-ligne” par une réinitialisation journalière des paramètres des algorithmes met en évidence leur caractère adaptatif qui capture en fonction des jours les différentes tendances de marché.

Appendice

A Quelques rappels sur les algorithmes stochastiques

Deux problèmes courants rencontrés en analyse numérique sont la recherche de l'ensemble des points où une fonction traverse un niveau donné et la recherche des points où une fonction atteint son minimum. Ces deux problèmes sont liés puisqu'on peut les ramener à des recherche de zéros d'une fonction.

Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur. Supposons que h a une représentation intégrale par rapport à un vecteur aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{R}^d , soit

$$h(\theta) = \mathbb{E}[H(\theta, Y)], \quad H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\text{Borel}} \mathbb{R}^d, \quad Y \stackrel{(d)}{=} \mu, \quad (8)$$

(satisfaisant $\mathbb{E}|H(\theta, Y)| < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$).

Pour trouver le zéro θ^* de h , on construit alors une procédure récursive stochastique de la forme

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Y_{n+1}), \quad Y_{n+1} \text{ i.i.d. de loi } \mu, \quad n \geq 0, \quad (9)$$

où $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ est une suite de pas décroissante.

Les sections suivantes donnent les résultats de convergence *p.s.* et de vitesse (*TCL*) de la procédure (9) dans le cas où la suite des innovations $(Y_n)_{n \geq 1}$ est i.i.d.. Nous donnons deux résultats de convergence pour la version stochastique : le premier utilisant une approche martingale via le Lemme de Robbins-Siegmund, le second considérant l'algorithme comme une approximation bruitée d'une

A.1 Convergence *p.s.* : l'approche martingale

L'approximation stochastique fournit des théorèmes variés qui garantissent la convergence *p.s.* et/ou dans L^p des procédures d'approximation stochastique. Nous donnons ci-dessous un résultat préliminaire général (multidimensionnel) connu comme le Lemme de Robbins-Siegmund à partir duquel les principaux résultats de convergence seront facilement déduits (bien qu'il n'en contienne aucun stricto sensu).

Dans ce qui suit, la fonction H et la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont définies par (8) et h est le champ de vecteur de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d défini par $h(\theta) = \mathbb{E}[H(\theta, Y_1)]$.

Théorème A.1. LEMME DE ROBBINS-SIEGMUND. *Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaisant (8). Supposons qu'il existe une fonction $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ continûment différentiable satisfaisant*

$$\nabla L \text{ est Lipschitz continue et } |\nabla L|^2 \leq C(1 + L) \quad (10)$$

telle que h satisfasse l'hypothèse de retour à la moyenne

$$\langle \nabla L | h \rangle \geq 0. \quad (11)$$

De plus, supposons que H satisfasse l'hypothèse suivante de croissance (pseudo-)linéaire

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad \|H(\theta, Y)\|_2 \leq C\sqrt{1 + L(\theta)} \quad (12)$$

(ce qui implique que $|h| \leq C\sqrt{1 + L}$).

Soit $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite de pas satisfaisant

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty \quad (13)$$

Finalement, supposons θ_0 indépendant de $(Y_n)_{n \geq 1}$ et $\mathbb{E}[L(\theta_0)] < +\infty$.

Alors, la procédure récursive définie par (9) satisfait : $\theta_n - \theta_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-p.s. \& } L^2(\mathbb{P})} 0$, $(L(\theta_n))_{n \geq 0}$ est $L^1(\mathbb{P})$ -bornée,

$$L(\theta_n) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} L_\infty \in L^1(\mathbb{P}) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n \langle \nabla L | h \rangle(\theta_{n-1}) < +\infty \quad p.s.$$

Remarque. Le même argument qui montre que $(L(\theta_n))_{n \geq 1}$ est $L^1(\mathbb{P})$ -bornée montre que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 1} \gamma_n \langle \nabla L | h \rangle(\theta_{n-1}) \right) < +\infty \quad p.s.$$

Corollaire A.1. (a) ALGORITHME DE ROBBINS-MONRO. Supposons que la fonction moyenne h soit continue et vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \neq \theta^*, \quad \langle \theta - \theta^* | h(\theta) \rangle > 0 \quad (14)$$

(ce qui implique que $\{h = 0\} = \{\theta^*\}$). Supposons de plus que $\theta_0 \in L^2(\mathbb{P})$ et que H vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}[|H(\theta, Y)|^2] \leq C(1 + |\theta|^2).$$

Supposons que la suite de pas $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ vérifie (13). Alors

$$\theta_n \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} \theta^*$$

et dans tout L^p , $p \in (0, 2)$.

(b) GRADIENT STOCHASTIQUE. Soit $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable vérifiant (10), $\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} L(\theta) = +\infty$ et $\{\nabla L = 0\} = \{\theta^*\}$. Supposons que la fonction moyenne h soit donnée par $h = \nabla L$ et que H vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}[|H(\theta, Y)|^2] \leq C(1 + |\theta|^2),$$

et que $\theta_0 \in L^1(\mathbb{P})$. Supposons que la suite de pas $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ vérifie (13). Alors $L(\theta^*) = \min_{\mathbb{R}^d} L$,

$$\theta_n \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} \theta^*$$

et $\nabla L(\theta_n)$ converge vers 0 dans tout L^p , $p \in (0, 2)$.

A.2 Point de vue de l'optimisation : l'approche de Kiefer-Wolfowitz

On revient au problème d'optimisation, à savoir $\min_{\mathbb{R}^d} L$, où $L(\theta) = \mathbb{E}[L(\theta, Y)]$. S'il n'y a pas de gradient local $\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(\theta, y)$ ou si le calcul de $\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(\theta, y)$ n'est pas compétitif vis à vis de $\Lambda(\theta, x)$ par exemple, il existe une alternative aux méthodes de gradient, les approches par différences finies.

L'idée est simplement d'approcher le gradient ∇L par

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}(\theta) \approx \frac{L(\theta + \eta^i e_i) - L(\theta - \eta^i e_i)}{2\eta^i}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d et $\eta = (\eta^i)_{1 \leq i \leq d}$. Ce terme de différence finie admet une représentation intégrale donnée par

$$\frac{L(\theta + \eta^i e_i) - L(\theta - \eta^i e_i)}{2\eta^i} = \mathbb{E} \frac{\Lambda(\theta + \eta^i e_i, Y) - \Lambda(\theta - \eta^i e_i, Y)}{2\eta^i}.$$

Partant de cette représentation, on peut déduire une procédure récursive stochastique pour θ_n comme suit

$$\theta_{n+1}^i = \theta_n^i - \gamma_{n+1} \frac{\Lambda(\theta_n + \eta_{n+1}^i e_i, Y_{n+1}) - \Lambda(\theta_n - \eta_{n+1}^i e_i, Y_{n+1})}{2\eta_{n+1}^i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Nous donnons ci-dessous le résultat de convergence pour les procédures de Kiefer-Wolfowitz (qui est la contrepartie naturelle du Lemme de Robbins-Siegmund dans le cadre du gradient stochastique).

Théorème A.2. *Supposons que la fonction $\theta \mapsto L(\theta)$ soit deux fois différentiable de Hessienne Lipschitz. Supposons que*

$$\theta \mapsto \Lambda(\theta, Y) \text{ est Lipschitz dans } L^2$$

et que les suites de pas vérifient

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = \sum_{n \geq 1} \eta_n^i = +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty, \quad \eta_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\gamma_n}{\eta_n^i} \right)^2 < +\infty, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Alors, θ_n converge p.s. vers une composante connexe de $\{L = \ell\} \cap \{\nabla L = 0\}$ pour un certain niveau $\ell \geq 0$.

A.3 Résultat de convergence pour les algorithmes contraints

Le but est de déterminer $\{\theta \in \Theta : h(\theta) = \mathbb{E}[H(\theta, Y)] = 0\}$ où $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble convexe fermé, $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^d$. Pour $\theta_0 \in \Theta$, on considère la suite $(\theta_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d définie par

$$\theta_{n+1} = \Pi_{\Theta}(\theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Y_{n+1})), \quad n \geq 0, \quad (15)$$

où $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de même loi que Y et Π_{Θ} désigne la projection euclidienne sur Θ . La procédure récursive (15) peut se réécrire comme suit

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n) - \gamma_{n+1} \Delta M_{n+1} + \gamma_{n+1} p_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (16)$$

où $\Delta M_{n+1} = H(\theta_n, Y_{n+1}) - h(\theta_n)$ est un accroissement de martingale et

$$p_{n+1} = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \Pi_{\Theta}(\theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Y_{n+1})) - \frac{1}{\gamma_{n+1}} \theta_n + H(\theta_n, Y_{n+1}).$$

Théorème A.3. *(voir [8] et [9]) Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par (16). Supposons qu'il existe un unique $\theta^* \in \Theta$ tel que $h(\theta^*) = 0$ et que la fonction moyenne vérifie l'hypothèse de retour à la moyenne sur Θ , à savoir*

$$\forall \theta \neq \theta^* \in \Theta, \quad \langle h(\theta) | \theta - \theta^* \rangle. \quad (17)$$

Supposons que la suite de pas $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ vérifie

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty. \quad (18)$$

De plus, si la fonction H vérifie

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{E} \left[|H(\theta, Y)|^2 \right] \leq K(1 + |\theta|^2), \quad K > 0, \quad (19)$$

alors

$$\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \theta^*.$$

Remarque. Si Θ est borné, (19) s'écrit $\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E} \left[|H(\theta, Y)|^2 \right] < +\infty$, qui est toujours vérifiée si Θ est compact et que $\theta \mapsto \mathbb{E} \left[|H(\theta, Y)|^2 \right]$ est continue.

A.4 Convergence *p.s.* : la méthode de l'EDO

Considérons la procédure récursive suivante définie sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$

$$\forall n \geq n_0, \quad \theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n) + \gamma_{n+1} (\Delta M_{n+1} + r_{n+1}), \quad (20)$$

où $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction localement Lipschitz et continue, θ_{n_0} est un vecteur aléatoire \mathcal{F}_{n_0} -mesurable fini et, pour tout $n \geq n_0$, ΔM_{n+1} est un \mathcal{F}_n -accroissement de martingale et r_n est un terme de reste \mathcal{F}_n -adapté.

Théorème A.4. CONVERGENCE *p.s.* AVEC LA MÉTHODE DE L'EDO (c.f. e.g. [2, 4, 9, 6, 1]). Supposons que h soit localement Lipschitz, que

$$r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \geq n_0} \mathbb{E} \left[|\Delta M_{n+1}|^2 \mid \mathcal{F}_n \right] < +\infty \quad p.s., \quad (21)$$

et que $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ soit une suite positive vérifiant

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty. \quad (22)$$

Alors l'ensemble Θ^∞ des valeurs d'adhérence de $(\theta_n)_{n \geq n_0}$ est *p.s.* un ensemble compact connexe, stable par le flot de

$$EDO_h \equiv \dot{\theta} = -h(\theta),$$

et par

$$EDO_h^* \equiv \dot{\theta} = h(\theta).$$

De plus, si $\theta^* \in \Theta^\infty$ est l'unique équilibre uniformément stable sur Θ^∞ de EDO_h , alors

$$\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta^*.$$

COMMENTAIRE. Par uniformément stable, on entend

$$\sup_{\theta \in \Theta^\infty} |\theta(\theta_0, t) - \theta^*| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow +\infty,$$

où $\theta(\theta_0, t)_{\theta_0 \in \Theta^\infty, t \in \mathbb{R}_+}$ est le flot de EDO_h sur Θ^∞ .

A.5 Vitesse de convergence : le *TCL*

Dans des cadres standards, un algorithme stochastique converge vers sa cible à une vitesse $\sqrt{\gamma_n}$ (ce qui suggère d'utiliser des pas $\gamma_n = \frac{c}{n}$, $c > 0$). Pour être précis, $\frac{\theta_n - \theta^*}{\sqrt{\gamma_n}}$ converge en loi vers une certaine loi gaussienne de matrice de covariance dépendant de $Dh(\theta^*)$. Nous nous plaçons ici dans le cadre d'algorithme stochastique avec terme de reste, *i.e.* du type (20).

Théorème A.5. *TCL (c.f. e.g. [2, 4, 9]). Soit θ^* un équilibre de $\{h = 0\}$. Supposons que la fonction h soit différentiable au point θ^* et que toutes les valeurs propres de $Dh(\theta^*)$ aient une partie réelles positives. Supposons que, pour un certain $\delta > 0$,*

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{E} \left[|\Delta M_{n+1}|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}_n \right] < +\infty \text{ p.s.}, \quad \mathbb{E} [\Delta M_{n+1} \Delta M_{n+1}^t \mid \mathcal{F}_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \Gamma, \quad (23)$$

où Γ est une matrice déterministe symétrique définie positive et pour un $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{E} \left[(n+1) |r_{n+1}|^2 \mathbb{1}_{\{|\theta_n - \theta^*| \leq \epsilon\}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (24)$$

Spécifions la suite de pas comme suit

$$\forall n \geq 1, \quad \gamma_n = \frac{\alpha}{n}, \quad \alpha > \frac{1}{2\mathcal{R}e(\lambda_{min})} \quad (25)$$

où λ_{min} désigne la valeur propre de $Dh(\theta^*)$ de plus petite partie réelle. Alors, la convergence p.s. est régie sur l'ensemble de convergence $\{\theta_n \xrightarrow[p.s.]{} \theta^*\}$ par le Théorème Central Limit suivant

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \alpha \Sigma) \quad \text{avec} \quad \Sigma := \int_0^{+\infty} \left(e^{-\left(Dh(\theta^*) - \frac{I_d}{2\alpha}\right)u} \right)^t \Gamma e^{-\left(Dh(\theta^*) - \frac{I_d}{2\alpha}\right)u} du.$$

A.6 Principe de moyennisation (Ruppert-Polyak)

L'idée originelle était de "lisser" le comportement d'un algorithme stochastique convergeant en considérant la moyenne arithmétique des valeurs passées plutôt que la valeur calculée à la $n^{\text{ème}}$ itération. De façon surprenante, si cette procédure de moyennisation est combinée à un changement d'échelle de la suite de pas γ_n , on atteint gratuitement la meilleure vitesse de convergence possible.

Pour être précis : soit $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite de pas vérifiant

$$\gamma_n \sim \left(\frac{c}{b+n} \right)^\vartheta, \quad \vartheta \in (1/2, 1).$$

Alors, on implémente la procédure standard

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Y_{n+1})$$

et on pose

$$\bar{\theta}_n := \frac{\theta_0 + \dots + \theta_{n-1}}{n}.$$

Sous des hypothèses naturelles (c.f. [13]), on montre dans différents cas étudiés précédemment (gradient stochastique, Robbins-Monro) que

$$\bar{\theta}_n \xrightarrow[p.s.]{} \theta^*$$

où θ^* est la cible de l'algorithme et de plus

$$\sqrt{n}(\bar{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \Sigma_{\min}^*)$$

où Σ_{\min}^* est la matrice de variance-covariance la plus petite : ainsi si $d = 1$,

$$\Sigma_{\min}^* = \frac{\text{Var}(H(\theta^*, Z))}{h'(\theta^*)^2}.$$

Théorème A.6. RUPPERT & POLYAK (c.f. e.g. [3]) Supposons que la procédure définie récursivement

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1}(h(\theta_n) + \Delta M_{n+1})$$

où h est une fonction borélienne, continue en son unique zéro θ^* , vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad h(\theta) = Dh(\theta^*)(\theta - \theta^*) + O(|\theta - \theta^*|^2)$$

où toutes la valeurs propres de $Dh(\theta^*)$ ont une partie réelle positive. Supposons de plus que, pour une certaine constante $C > 0$,

$$\mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{\{|\theta_n - \theta^*| \leq C\}} = 0 \quad p.s.$$

et qu'il existe un exposant $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{E}[\Delta M_{n+1}(\Delta M_{n+1})^t | \mathcal{F}_n] \xrightarrow{p.s.} \mathbf{1}_{\{|\theta_n - \theta^*| \leq C\}} \Gamma > 0 \in \mathcal{S}(d, \mathbb{R})$$

$$\sup_n \mathbb{E}[|\Delta M_{n+1}|^{2+\delta} | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{\{|\theta_n - \theta^*| \leq C\}} < +\infty.$$

Alors, si $\gamma_n = \frac{c}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $1/2 < \alpha < 1$, la suite des moyennes empiriques

$$\bar{\theta}_n = \frac{\theta_0 + \dots + \theta_{n-1}}{n}$$

vérifie sur $\{\theta_n \xrightarrow{p.s.} \theta^*\}$, le TCL avec la variance optimale

$$\sqrt{n}(\bar{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; Dh(\theta^*)^{-1} \Gamma Dh(\theta^*)) \quad \text{sur } \{\theta_n \xrightarrow{p.s.} \theta^*\}.$$

Remarque. La moyenne empirique vérifie la procédure récursive suivante

$$\forall n \geq 0, \quad \bar{\theta}_{n+1} = \bar{\theta}_n - \frac{1}{n+1}(\bar{\theta}_n - \theta_n), \quad \bar{\theta}_0 = 0.$$

Références

- [1] M. Benaïm. Dynamics of stochastic approximation algorithms. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–68. Springer, Berlin, 1999.
- [2] A. Benveniste, M. Métivier, and P. Priouret. *Adaptive algorithms and stochastic approximations*, volume 22 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the French by Stephen S. Wilson.
- [3] M. Duflo. *Algorithmes stochastiques*, volume 23 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [4] M. Duflo. *Random iterative models*, volume 34 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Translated from the 1990 French original by Stephen S. Wilson and revised by the author.
- [5] J. Fernandez. *Modélisation et estimation en vue de problèmes de contrôle au fil de l’eau en trading algorithmique*. PhD thesis, UPMC, 2014.
- [6] J.-C. Fort and G. Pagès. Convergence of stochastic algorithms : from the Kushner-Clark theorem to the Lyapounov functional method. *Adv. in Appl. Probab.*, 28(4) :1072–1094, 1996.
- [7] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.
- [8] H. J. Kushner and D. S. Clark. *Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems*, volume 26 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [9] H. J. Kushner and G. G. Yin. *Stochastic approximation and recursive algorithms and applications*, volume 35 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [10] S. Laruelle, C.-A. Lehalle, and G. Pagès. Optimal posting price of limit orders : Learning by trading. *Mathematics and Financial Economics*, 2013.
- [11] S. Laruelle and G. Pagès. Stochastic approximation with averaging innovation applied to finance. *Monte Carlo Methods Appl.*, 18(1) :1–51, 2012.
- [12] G. Pagès. A functional co-monotony principle with an application to peacocks. 2012. to appear in *Séminaire de probabilités*.
- [13] M. Pelletier. Weak convergence rates for stochastic approximation with application to multiple targets and simulated annealing. *Ann. Appl. Probab.*, 8(1) :10–44, 1998.