Sumário

Definição 1 [Redes de Fluxo]

Uma rede de fluxo é um grafo dirigido $G=(V,E)$ c/ dois vértices notáveis $s, t \in V$, correspondentes ao nó fonte ao nó de término, e uma função de capacidade $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$; onde G, s, t e c satisfazem as suas propriedades:

- $\forall u, v \in V.\ c(u,v) \geq 0$
- $\forall u, v \in V.\ (u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \notin E$ [Não há arcos anti-paralelos]
- $\forall v \in V.\ s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ [Conectividade s-t]

Para simplificar a notação escrevemos $G=(V,E,s,t,c)$.

Definição 2 [Função de Fluxo]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, uma função de fluxo em G é uma função $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que satisfaz as seguintes restrições:

[Restrição de Capacidade]

$$\forall u, v \in V.\ f(u,v) \leq c(u,v)$$

[Conservação de Fluxo]

$$\forall u \in V \setminus \{s,t\}.\ \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$$

Definição 3 [Valor do fluxo]

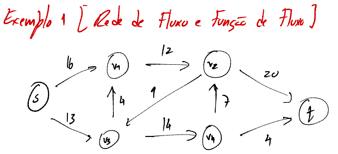
Seja f uma função de fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,E)$, o valor do fluxo f, q se denota por $|f|$, é definido como:

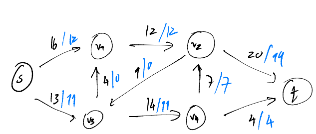
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$

Definição 4 [Problema do Fluxo Máximo]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, o problema do fluxo máximo consiste em determinar a função de fluxo f de maior valor.

Exemplo 1 [Rede de Fluxo e Função de Fluxo]

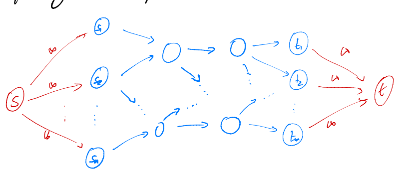




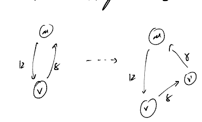
O objectivo é encontrar um algoritmo para determinar um fluxo com valor máximo.

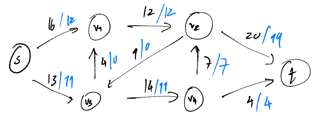
Modeling strategies:

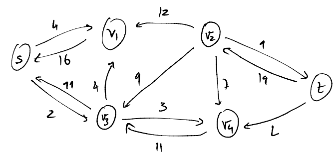
* Multiplas origens e multiplos sinks



- Arcos antiparalelos







Observação: Existe um caminho entre s e t na rede residual?

- Existe algum fluxo nesta rede residual?

Definição 5 [Rede Residual]

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo e f um fluxo em G; a rede residual induzida por f em G, designada por G_f, é definida como se segue:

- $G_f = (V, E_f, s, t, c_f)$
- $c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \end{cases}$
- $E_f = \{(u,v) \mid c_f(u,v) > 0\}$

Definição 6 [Aumentação de Fluxo]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e seja f' um fluxo na rede residual G_f induzida por f em G; definimos o fluxo f aumentado de f', designado por $f \uparrow f'$, como se segue:

$$f \uparrow f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{se } (u,v) \in E \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Lema 1 [Lema do Fluxo Aumentado]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, e seja f' um fluxo na rede residual G_f. Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova:

- Temos de provar que:
  - $f \uparrow f'$ é um fluxo em G $\begin{cases} - f \uparrow f' \text{ satisfaz a restrição de capacidade } (1.a) \\ - f \uparrow f' \text{ satisfaz a conservação do fluxo } (1.b) \end{cases}$
  - $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$ (2)

- 1.a Restrição de Capacidade

  $\forall u,v \in V.\ 0 \leq f \uparrow f'(u,v) \leq c(u,v)$

  - $(u,v) \in E$

  $$\begin{aligned} f \uparrow f'(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\ &\leq f(u,v) + c_f(u,v) - f'(v,u) \\ &= f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v)) - f'(v,u) \\ &= c(u,v) - f'(v,u) \\ &\leq c(u,v) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} f \uparrow f'(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \quad \text{porque } f'(v,u) \leq f(u,v) \\ &\geq f'(u,v) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  - $(u,v) \notin E$

  $f \uparrow f'(u,v) = 0 = c(u,v)$

  $\Rightarrow 0 \leq f \uparrow f'(u,v) \leq c(u,v)$

- 1.b - Conservação do Fluxo

$$\forall u \in V \setminus \{s,t\}.\ \sum_{v\in V} f\uparrow f'(v,u) = \sum_{v\in V} f\uparrow f'(u,v)$$

$$\sum_{v\in V} f\uparrow f'(v,u) = \sum_{v\in V}\left[f(v,u) + f'(v,u) - f'(u,v)\right]$$

$$= \sum_{v\in V} f(v,u) + \sum_{v\in V} f'(v,u) - \sum_{v\in V} f'(u,v)$$

$$= \sum_{v\in V} f(u,v) + \sum_{v\in V} f'(u,v) - \sum_{v\in V} f'(v,u)$$

$$= \sum_{v\in V} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

$$= \sum_{v\in V} f\uparrow f'(u,v)$$

2. Valor do Fluxo

$$|f\uparrow f'| = \sum_{v\in V} f\uparrow f'(s,v) - \sum_{v\in V} f\uparrow f'(v,s)$$ Porque $f\uparrow f'$ é um fluxo!

$V_1 = \{ v \mid (s,v) \in E \}$ | $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_2 = \{ v \mid (v,s) \in E \}$ | $V_1 \cup V_2 = V$

$$= \sum_{v\in V_1} f\uparrow f'(s,v) - \sum_{v\in V_2} f\uparrow f'(v,s)$$

$$= \sum_{v\in V_1} f(s,v) + \sum_{v\in V_1} f'(s,v) - \sum_{v\in V_1} f'(v,s) - \sum_{v\in V_2} f(v,s) - \sum_{v\in V_2} f'(v,s) + \sum_{v\in V_2} f'(s,v)$$

$$= \left(\sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)\right) + \left(\left(\sum_{v\in V_1} f'(s,v) + \sum_{v\in V_2} f'(s,v)\right) - \left(\sum_{v\in V_1} f'(v,s) + \sum_{v\in V_2} f'(v,s)\right)\right)$$

$$= |f| + \left(\sum_{v\in V} f'(s,v) - \sum_{v\in V} f'(v,s)\right)$$

$$= |f| + |f'|$$

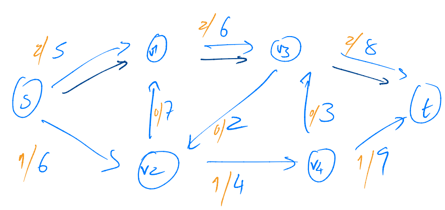
Definição 7 [Caminho de Aumento]

- Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, um caminho de aumento é um caminho entre s e t na rede residual G_f.
- Seja p um caminho de aumento na rede residual G_f, a capacidade residual de p é definida como se segue:

$$c_p = \min\{ c_f(u,v) \mid (u,v) \in p \}$$

- Seja p um caminho na rede residual G_f, o fluxo induzido por p é definido como se segue:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_p & \text{se } (u,v) \in p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



$p = \langle s, v_1, v_3, t \rangle$

$c_f(p) = 3$

Lema 2 [Lema do Fluxo Induzido por Caminho de Aumento]

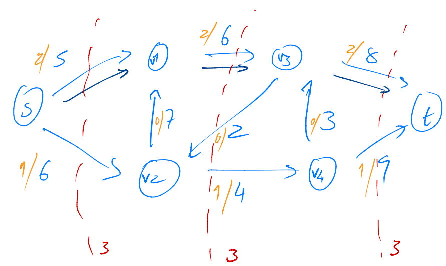
Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e p um caminho de aumento na rede residual G_f, a função f_p induzida por p é uma função de fluxo e $|f| = c_p$.

Prova: exercício.

Definição 8 [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ é um par (S,T) tal que:

- $S \cap T = \emptyset$ e $S \cup T = V$
- $s \in S$ e $t \in T$



- A capacidade de um corte (S,T), $c(S,T)$, é definida como:

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

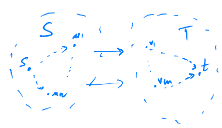
- Seja f um fluxo na rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ e (S,T) um corte, o fluxo que atravessa o corte é definido como:

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

Lema 3 [Lema do Corte em Rede de Fluxo]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, f um fluxo em G e (S,T) um corte em G; então:

$$f(S,T) = |f|$$



Prova:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,v) + \underline{\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)} - \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(v,u) - \underline{\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u)}$$

$$= f(S,T) + \cancel{\sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,v)} - \cancel{\sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,s)}$$

$$= f(S,T)$$

Lema 4 [Lema da Majoração do Valor do Fluxo]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo; o valor de qualquer fluxo f em G é limitado superiormente pela capacidade de qualquer corte.

Prova: $|f| = f(S,T)$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u)$$

$$\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

$$= c(S,T)$$

Teorema 1 [Fluxo Máximo - Corte Mínimo]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G, as seguintes proposições são equivalentes:

i) f é um fluxo máximo

ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte (S,T) em G.

Prova:

Vamos provar que: $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$

$(i) \Rightarrow (ii)$

Suponhamos por absurdo que f é um fluxo máximo em G e que G_f contém um caminho de aumento p.

Segue que f_p é um fluxo em G_f (pelo Lema 2)

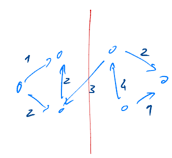
e que portanto $f \uparrow f_p$ é um fluxo em G (Lema 1).

Observando que $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$,

concluímos que f não é um fluxo máximo em G, donde segue a contradição.

$ii) \Rightarrow iii)$

G não contém caminhos de aumento $\Rightarrow$ Existe (S,T) em G tal que $|f| = c(S,T)$



Seja $S = \{v \mid G_f \vdash s \rightsquigarrow v\}$ e $T = V \setminus S$.

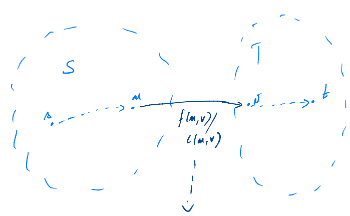
- (S,T) é um corte em G
  - ↳ Há apenas que argumentar que $t \in T$, o que segue da definição de caminho de aumento
- $c(S,T) = |f|$

$|f| = f(S,T)$ (Lemma 3)

To prove: $c(S,T) = f(S,T)$

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u)$$

$\forall u \in S\ \forall v \in T.\ c(u,v) > 0 \Rightarrow f(u,v) = c(u,v)$



$c_f(u,v) > 0 \Rightarrow v \in S$

$\forall u \in S\ \forall v \in T.\ f(v,u) = 0$

$f(v,u) > 0 \Rightarrow c_f(u,v) > 0 \Rightarrow v \in S$

$iii) \Rightarrow i)$

Existe (S,T) em G tal que $|f| = c(S,T) \Rightarrow f$ é um fluxo máximo

$|f| \leq c(S,T)$ Lemma 4

$|f| = c(S,T)$

Método de Ford-Fulkerson

Complexidade:

FordFulkerson(G) // com $G = (V, E, s, t, c)$

let f be the 0-flow on G ⟶ $O(E)$

while true

compute G_f ⟶ $O(V+E)$

let p be an augmenting path in G_f ⟶ ?

if $!p$ return f

compute f_p ⟶ $O(V)$

$f := f \uparrow f_p$ ⟶ $O(V+E)$

Quantas iterações? $|f|$

$O(E|f|)$