Aula 24

Completude NP

- Um problema X diz-se NP-difícil sse:
  $\forall Y \in NP.\ Y \leq_p X$

- Um problema X diz-se NP-completo sse:
  - $X \in NP$
  - X é NP-difícil

Proposição 7: $X \in NP \wedge Y \leq_p X \wedge Y \in NPC \Rightarrow X \in NPC$

Prova: Há que provar que $\forall Z \in NP.\ Z \leq_p X$

- Tomemos $Z \in NP$.
- Como $Y \in NPC$, temos que $Z \leq_p Y$.
- De $Y \leq_p X$ e $Z \leq_p Y$ segue que $Z \leq_p Y$ (pela transitividade de $\leq_p$).

Completude NP

- Um problema X diz-se NP-difícil sse:
  $\forall Y \in NP.\ Y \leq_p X$

- Um problema X diz-se NP-completo sse:
  - $X \in NP$
  - X é NP-difícil

Proposição 7:
$$X \in NP \wedge Y \leq_p X \wedge Y \in NPC \Rightarrow X \in NPC$$

* Como provar que um problema X é NP-completo?

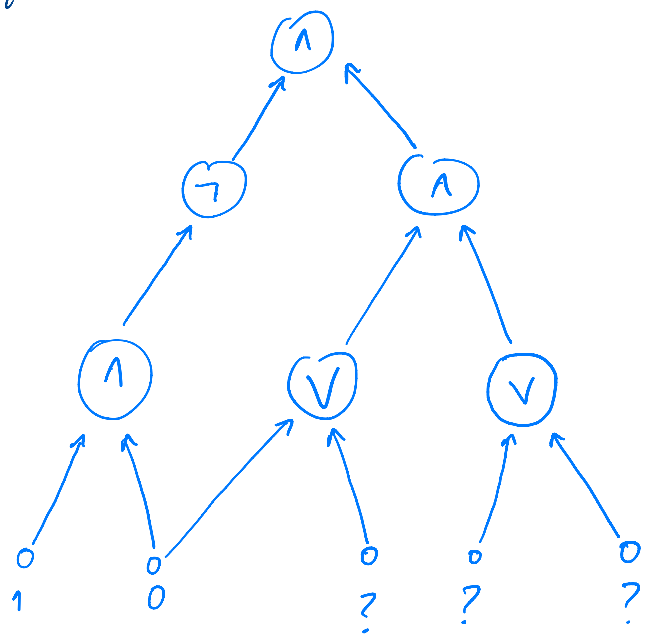
  1. Provamos que X está em NP (fácil)
     ↳ Descobrir o certificado q̄ nos permite verificar X em tempo polinomial

  2. Seleccionar um problema NP-completo Y e construir uma redução $Y \leq_p X$. (difícil)

O 1º Problema NP-Completo

Circuit-SAT: Dado um circuito combinatório construído com portas And, Or e Not, existem inputs q̄ tornam o output do circuito 1.

Exemplo:



Sim ⇒ 101

O 1º Problema NP-Completo

Circuit-SAT: Dado um circuito combinatório construído com portas And, Or e Not, existem inputs q tornam o output do circuito 1.

Teorema [Cook-Levin] Circuit-SAT é NP-completo.

Esboço de Prova:

- Tome-se $X \in NP$. Da definição de NP segue que existe um algoritmo de verificação A tal que:
  $$x \in X \iff \exists y.\ A(x,y) = 1$$

- Um algoritmo polinomial pode ser implementado por um circuito combinatório de tamanho polinomial. Seja R esse circuito.

- Fixamos as 1ºs $|x|$ entradas de R com os bits de x. As restantes $|y|$ entradas ficam com ?.

- O circuito R é satisfazível sse $\exists y.\ A(x,y) = 1$ (sse $x \in X$).

Road Map

Circuit-SAT

CNF-SAT

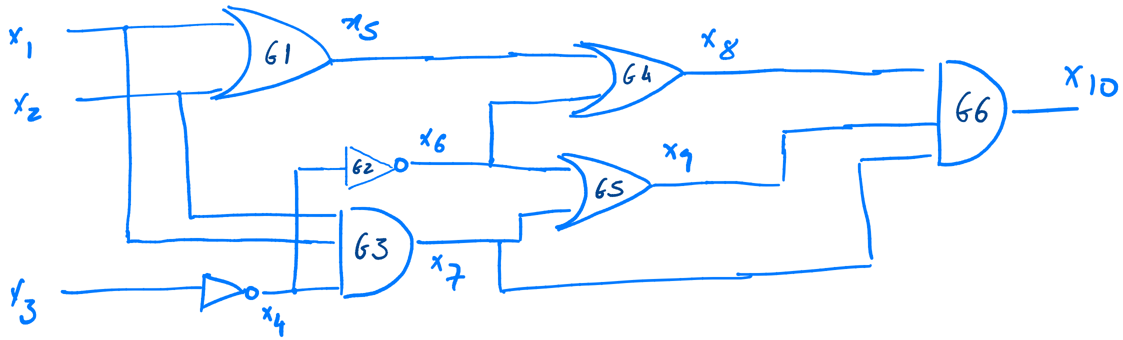
3 CNF-SAT

Clique

Vertex-Cover

$\boxed{\text{Circuit SAT} \leq_p \text{SAT}}$

Exemplo de Circuito:

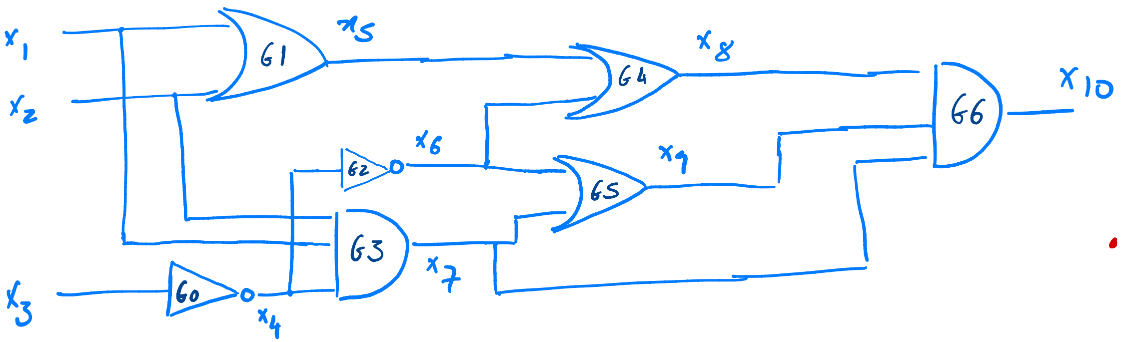


· Redução

$$\underbrace{\text{VAR-Out}}_{\text{variável de output}} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \underbrace{\text{Formula}(G_i)}_{\text{fórmula SAT q descreve a porta } G_i}$$

$\boxed{\text{Circuit SAT} \leq_p \text{CNF-SAT}}$

Exemplo de Circuito:



- **Problema:** Portas lógicas cujas fórmulas não são cláusulas.

- Redução

$$\underbrace{VAR\_Out}_{\text{variável de output}} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \underbrace{\text{Formula}(G_i)}_{\text{fórmula SAT que descreve a porta } G_i}$$

$G1: \; x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2 \longrightarrow \begin{cases} x_5 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \longrightarrow \neg x_5 \vee x_1 \vee x_2 \\ x_1 \vee x_2 \Rightarrow x_5 \longrightarrow \neg (x_1 \vee x_2) \vee x_5 \end{cases}$

$G_0: \; \neg x_3 \Leftrightarrow x_4 \longrightarrow \begin{cases} \neg x_3 \Rightarrow x_4 \longrightarrow x_3 \vee x_4 \\ x_4 \Rightarrow \neg x_3 \longrightarrow \neg x_4 \vee \neg x_3 \end{cases}$

$G_3: \; x_4 \wedge x_1 \wedge x_2 \Leftrightarrow x_7 \longrightarrow \begin{cases} x_4 \wedge x_1 \wedge x_2 \Rightarrow x_7 \longrightarrow \neg (x_4 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee x_7 \\ x_7 \Rightarrow x_4 \wedge x_1 \wedge x_2 \longrightarrow \neg x_7 \vee (x_4 \wedge x_1 \wedge x_2) \end{cases}$

Circuit SAT $\leq_p$ CNF-SAT

G1: $x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2 \rightarrow \begin{cases} x_5 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \rightarrow \neg x_5 \vee x_1 \vee x_2 \\ x_1 \vee x_2 \Rightarrow x_5 \rightarrow \neg(x_1 \vee x_2) \vee x_5 \end{cases}$

- Como construir para cada porta lógica uma fórmula CNF?

  (1) Tabela de verdade de $\neg\phi$

  (2) A partir de (1), construir uma representação DNF de $\neg\phi$

  DNF - Disjunctive Normal Form

  ↳ "Or de And's"

  (3) A partir de (2), usar as leis de De Morgan para obter uma representação CNF de ϕ $(= \neg\neg\phi)$

  CNF - Conjunctive Normal Form

  ↳ "AND de Or's"

Circuit SAT $\leq_p$ CNF-SAT

Exemplo: $\phi = x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2$

1

x_1	x_2	x_5	$x_1 \vee x_2$	$x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2$	$\neg(x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

2

$$\neg\phi \equiv (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_5)$$
$$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_5)$$

$\boxed{\text{Circuit SAT} \leq_p \text{CNF-SAT}}$

Exemplo: $\phi \equiv x_5 \Leftrightarrow x_1 \vee x_2$

2 $\quad \neg\phi \equiv (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_5)$

3 $\quad \neg\neg\phi \equiv \phi$:

$$\phi \equiv (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5)$$

Importante: Há que provar q̄ a construção da fórmula lógica se faz em tempo polinomial no tamanho do circuito.

$$\boxed{\text{Circuit SAT} \leq_p \text{CNF-SAT}}$$

Importante: Há que provar q a construção da fórmula lógica se faz em tempo polinomial no tamanho do circuito.

- Construção da fórmula de cada porta lógica: $O(1)$
  ↳ Admitindo que têm um nº de entradas inferior a uma dada constante

- Construção da fórmula do circuito: $O(n)$
  ↳ n - nº de portas lógicas

Food for Thought: O q fazemos com circuitos cujas portas lógicas têm um nº arbitrário de entradas?

$$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$$

- INPUT: Fórmula CNF, $\phi \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$ → Cada cláusula de ϕ pode ter um nº arbitrário de literais
- Output: Fórmula 3-CNF, $\phi' \equiv C_1' \wedge \dots \wedge C_m'$

→ Cada cláusula de ϕ' tem exactamente 3 literais

Ideia Chave: Vamos transformar cada cláusula de ϕ num conjunto de cláusulas com 3 literais cada

$$C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$?
  - $= 2 \rightarrow$?
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$

Ideia Chave: $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$?
  - $= 2 \rightarrow$?
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

Exemplo: $\neg x_1 \vee x_2$

- Uma nova variável y, 2 cláusulas de output

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee y)$

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg y)$

- Qualquer valoração $\bar{y}$ não satisfaz $\neg x_1 \vee x_2$ falha uma das cláusulas

$$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$$

Ideia Chave : $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$?
  - $= 2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

- Seja $C_i = l_1 \vee l_2$
  - Uma nova variável y, 2 cláusulas de output

    $(l_1 \vee l_2 \vee y)$

    $(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$

$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$

Ideia Chave: $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$?
  - $= 2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

Exemplo: $\underline{\neg x}$

- Duas novas variáveis y_1 e y_2, 4 cláusulas de output

$(y_1 \vee y_2 \vee \neg x)$
$(y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x)$
$(\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x)$
$(\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x)$

Qualquer valoração q não satisfaça $\neg x$ falha uma das 4 cláusulas.

$$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$$

Ideia Chave: $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$ 2 novas variáveis, 4 cláusulas de output
  - $= 2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

- Seja $C_i = \ell$
  - Duas novas variáveis y_1 e y_2, 4 cláusulas de output

$$(y_1 \vee y_2 \vee \ell)$$
$$(y_1 \vee \neg y_2 \vee \ell)$$
$$(\neg y_1 \vee y_2 \vee \ell)$$
$$(\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \ell)$$

CNF-SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT

Ideia Chave: $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$ 2 novas variáveis + 4 novas cláusulas
  - $= 2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

- Exemplo: $(\underline{x_1 \vee \neg x_2} \vee \underline{x_3 \vee \neg x_4})$

$$\underbrace{x_1 \vee \neg x_2 \qquad\qquad x_3 \vee \neg x_4}_{\text{só precisamos de satisfazer uma das cláusulas}}$$

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee y \quad \wedge \quad \neg y \vee x_3 \vee \neg x_4$$

$\hookrightarrow$ O $\underline{y}$ escolhe a cláusula original q̄ vou satisfazer

$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$

Ideia Chave : $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \ldots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $= 1 \rightarrow$ 2 novas variáveis + 4 novas cláusulas
  - $= 2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $= 3 \rightarrow$ ✓
  - $> 3 \rightarrow$?

- Exemplo: $(\underline{x_1 \vee \neg x_2} \vee \underline{x_3} \vee \underline{\neg x_4 \vee x_5})$

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1 \wedge \neg y_1 \vee x_3 \vee y_2 \wedge \neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5$$

$$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$$

Ideia Chave: $C_i \longrightarrow C'_{i_1}, \dots, C'_{i_k}$

- 4 casos a considerar; o número de literais de C_i é:
  - $=1 \rightarrow$ 2 novas variáveis + 4 novas cláusulas
  - $=2 \rightarrow$ 1 nova variável + 2 novas cláusulas
  - $=3 \rightarrow$ ✓
  - $>3 \rightarrow$?

- Seja $C = \ell_1 \vee \dots \vee \ell_k$, $k \geq 4$

$$
\begin{aligned}
C'_1 &= \ell_1 \vee \ell_2 \vee y_1 \\
C'_2 &= \neg y_1 \vee \ell_3 \vee y_2 \\
&\vdots \\
C'_j &= \neg y_{j-1} \vee \ell_{j+1} \vee y_j \\
&\vdots \\
C'_{k-3} &= \neg y_{k-4} \vee \ell_{k-2} \vee y_{k-3} \\
C'_{k-2} &= \neg y_{k-3} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_{k-2}
\end{aligned}
$$

Proposição: C é satisfazível sse $\bigwedge_{i=1}^{k-2} C'_i$ é satisfazível

$\Updownarrow$

Proposição: ρ satisfaz C sse ρ satisfaz $\bigwedge_{i=1}^{k-2} C'_i$

$$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$$

Proposição: ρ satisfaz C sse existe uma extensão de ρ, ρ', que satisfaz $\bigwedge_{i=1}^{k-2} C_i'$

- $C = l_1 \vee \dots \vee l_k \quad , \quad k \geq 4$

$C_1' = l_1 \vee l_2 \vee y_1$

$C_2' = \neg y_1 \vee l_3 \vee y_2$

$\vdots$

$C_j' = \neg y_{j-1} \vee l_{j+1} \vee y_j$

$\vdots$

$C_{k-3}' = \neg y_{k-4} \vee l_{k-2} \vee y_{k-3}$

$C_{k-2}' = \neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_{k-2}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Existe $1 \leq i \leq k$ tal que $\rho(l_i) = 1$

- Seja $j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, 2 \\ k-2 & \text{se } i = k-1, k \\ i-1 & \text{c.c.} \end{cases}$

Concluímos q $\rho'(C_j') = 1$ para qualquer ρ' q estenda ρ

- Temos de "encontrar" a extensão de ρ, ρ', q satisfaz todas as outras cláusulas.

- $\rho'(y_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } l \leq i-2 \\ 0 & \text{se } l \geq i-1 \end{cases} \qquad \rho'(x_l) = \rho(x_l) \quad \forall x_l \in \text{dom}(C)$

$\boxed{\text{CNF-SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}}$

Proposição: ρ satisfaz C sse ρ satisfaz $\bigwedge_{i=1}^{k-2} C_i'$

- $C = l_1 \vee \dots \vee l_k \quad , \quad k \geq 4$

$C_1' = l_1 \vee l_2 \vee y_1$

$C_2' = \neg y_1 \vee l_3 \vee y_2$

$\vdots$

$C_j' = \neg y_{j-1} \vee l_{j+1} \vee y_j$

$\vdots$

$C_{k-3}' = \neg y_{k-4} \vee l_{k-2} \vee y_{k-3}$

$C_{k-2}' = \neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_{k-2}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponhamos por contradição que ρ' satisfaz $\bigwedge_{i=1}^{k-2} C_i'$ e ρ não satisfaz C.

- $\forall_{1 \leq i \leq k}.\ \rho'(l_i) = 0$

- Isto significa que $\underbrace{\rho'(y_1)=1, \dots, \rho'(y_{k-3})=1}_{\text{para satisfazermos as cláusulas } C_1', \dots, C_{k-3}'}$

- A cláusula C_{k-2}' não é satisfeita por ρ'.

$\boxed{\text{3-CNF-SAT} \le_p \text{Clique}}$

Clique: Um clique num grafo não dirigido $G = (V, E)$ é subconjunto $V' \subseteq V$ tal que todos os pares de vértices em V' estão ligados por um arco em E.

V' é um clique de G sse $\forall u, v \in V'.\ (u, v) \in E$

Problema Clique:

Clique $= \{ \langle G, k \rangle \mid G$ é um grafo não dirigido que contém um clique de tamanho $k \}$

Proposição: O problema Clique é NP-completo.

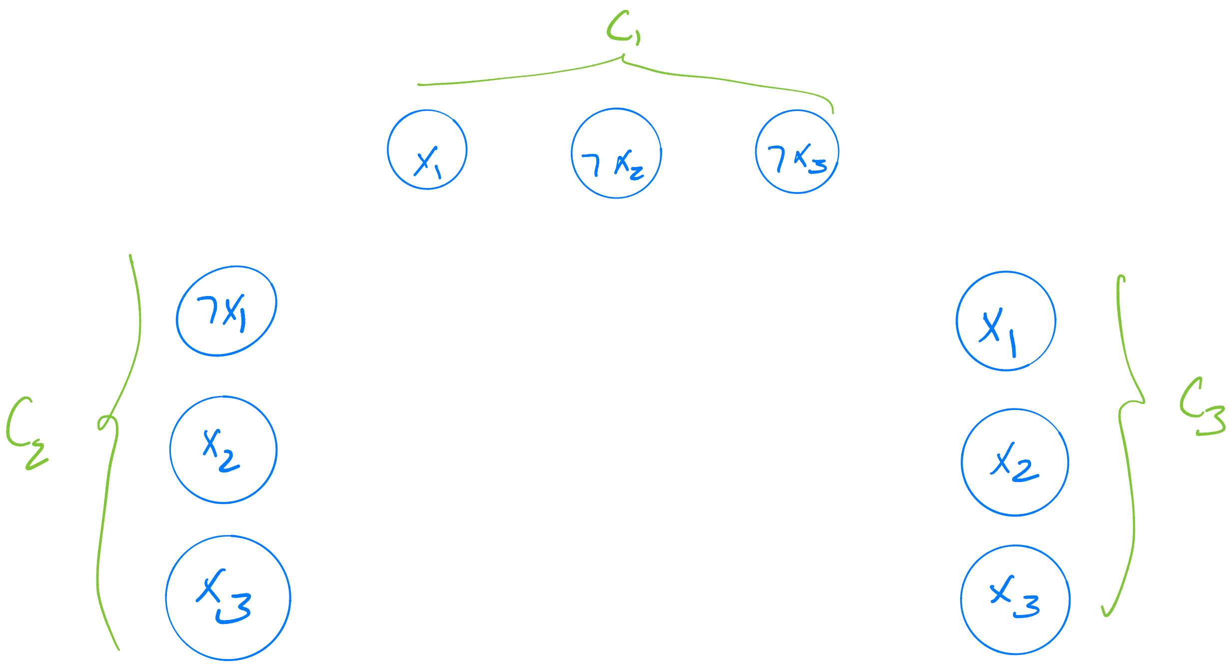
$\boxed{\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{Clique}}$

Proposição: O problema Clique é NP-completo.

- Seja ϕ uma fórmula proposicional no formato 3-CNF, temos de calcular um grafo $G=(V,E)$ e um inteiro k tal que ϕ é satisfazível sse G tem um Clique de tamanho k.

- Exemplo:

$$\phi = \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_3}$$



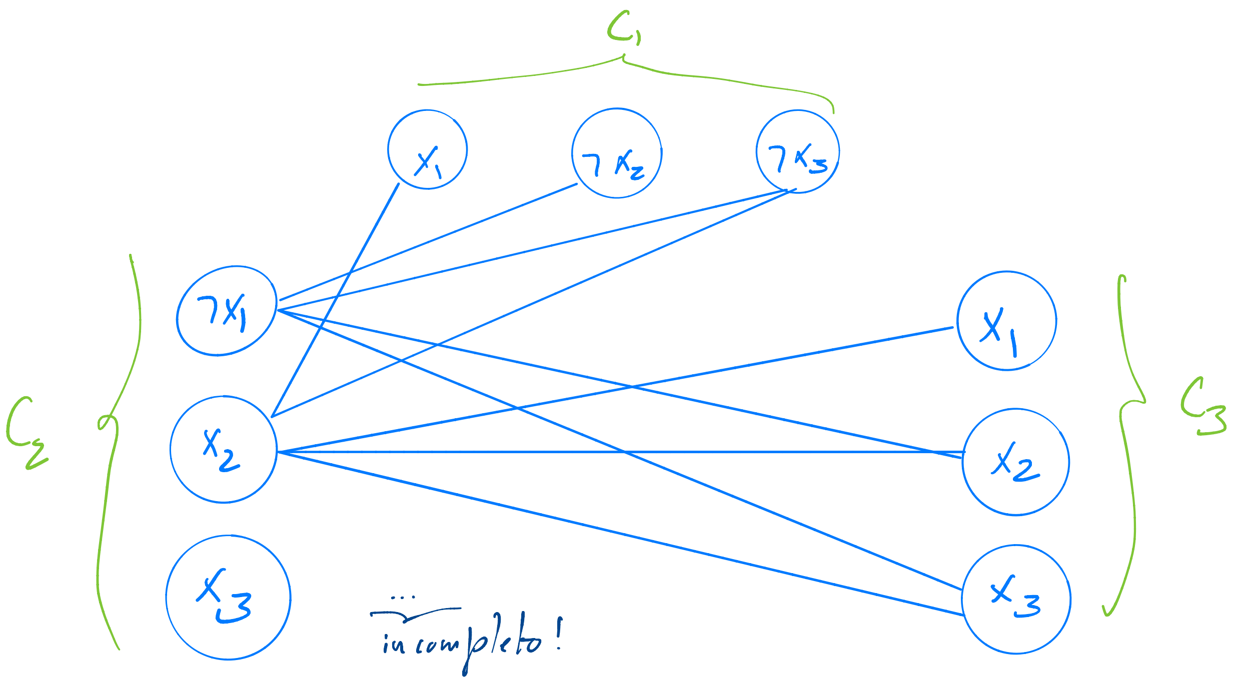
$\boxed{\text{3-CNF-SAT} \le_p \text{Clique}}$

Proposição: O problema Clique é NP-completo.

- Seja ϕ uma fórmula proposicional no formato 3-CNF, temos de calcular um grafo $G=(V,E)$ e um inteiro k tal que ϕ é satisfazível sse G tem um Clique de tamanho k.

- Exemplo:

$$\phi = \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_3}$$



... incompleto!

$\boxed{3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{Clique}}$

Proposição: O problema Clique é NP-completo.

- Seja ϕ uma fórmula proposicional no formato 3-CNF, temos de calcular um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k tal que ϕ é satisfazível sse G tem um clique de tamanho k.

- Seja $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$, construímos o seguinte grafo:

$$G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$$

$$V_\phi = \{ (l, r) \mid \exists l', l''. \ C_r \equiv (l' \vee l \vee l'') \}$$

$$E_\phi = \{ ((l, r), (l', s)) \mid r \neq s \wedge l' \neq \neg l \wedge l \neq \neg l' \}$$

- *Proposição*: $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$ sse $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ contém um clique de tamanho k.

$\boxed{3\text{-}CNF\text{-}SAT \leq_p Clique}$

Proposição: O problema Clique é NP-completo.

- Seja ϕ uma fórmula proposicional no formato 3-CNF, temos de calcular um grafo $G=(V,E)$ e um inteiro k tal que ϕ é satisfazível sse G tem um Clique de tamanho k.

- Seja $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$, construímos o seguinte grafo:

$$G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$$

$$V_\phi = \{ (\ell, r) \mid \exists \ell', \ell''.\ C_r \equiv (\ell' \vee \ell \vee \ell'') \}$$

$$E_\phi = \{ ((\ell, r), (\ell', s)) \mid r \neq s \wedge \ell' \neq \neg \ell \wedge \ell \neq \neg \ell' \}$$

- $|V_\phi| = 3 \times k$
- $|E_\phi| = (3 \times k)^2 = 9k^2$

A redução é calculada em tempo polinomial

$3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{Clique}$

- Proposição: $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$ sse $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ contém um clique de tamanho k.

- Seja $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$, construímos o seguinte grafo:

$$G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$$

$$V_\phi = \{ (l, r) \mid \exists l', l''.\ C_r \equiv (l' \vee l \vee l'') \}$$

$$E_\phi = \{ ((l, r), (l', s)) \mid r \neq s \wedge l' \neq \neg l \wedge l \neq \neg l' \}$$

$(\Rightarrow)$ Em cada cláusula C_i, com $1 \leq i \leq k$, tem de existir um literal l_i tal que $\rho(l_i) = 1$.

O conjunto

$$\hat{V} = \{ (l_i, i) \mid 1 \leq i \leq k \}$$

é um clique em G_ϕ.

- Observemos q se $(l_i, i), (l_j, j) \in \hat{V}$ então $((l_i, i), (l_j, j)) \in E_\phi$
  - $i \neq j$
  - $l_i \neq \neg l_j$ e $l_j \neq \neg l_i$

$\boxed{\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{Clique}}$

- Proposição: $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$ sse $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ contém um clique de tamanho k.

- Seja $\phi = C_1 \vee \dots \vee C_k$, construímos o seguinte grafo:

$$G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$$

$$V_\phi = \{ (\ell, r) \mid \exists \ell', \ell''.\ C_r \equiv (\ell' \vee \ell \vee \ell'') \}$$

$$E_\phi = \{ ((\ell, r), (\ell', s)) \mid r \neq s \wedge \ell' \neq \neg \ell \wedge \ell \neq \neg \ell' \}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Seja $\hat{V}$ um clique em G_ϕ de tamanho k.

Escolhemos ρ tal que:

$\forall (l_i, i) \in \hat{V}.\ \rho(l_i) = 1$

$\downarrow$

Por construção, ρ satisfaz ϕ.

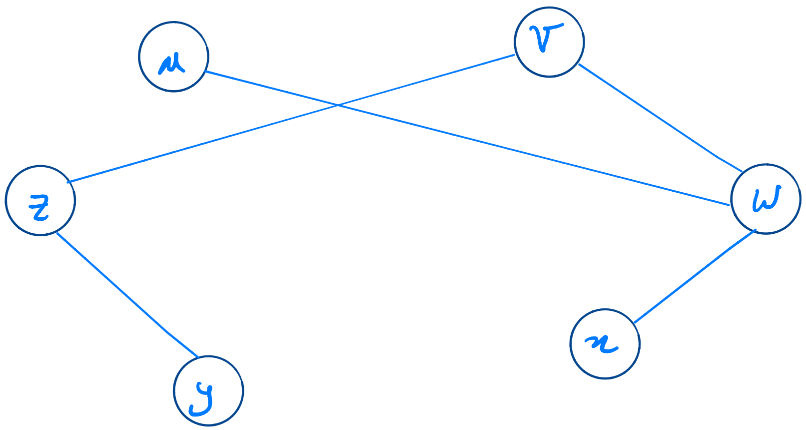
$\boxed{\text{Clique} \leq_p \text{Vertex-Cover}}$

Vertex-Cover: V' é uma cobertura de vértices do grafo não dirigido $G=(V,E)$ sse $\forall (u,v) \in E.\ u \in V'$ ou $v \in V'$

Vertex-Cover Problem: Encontrar a cobertura de vértices de cardinalidade mínima

$\Downarrow$ Problema de Decisão

$\text{VertexCover} = \{ \langle G, k \rangle \mid G$ é um grafo não dirigido com uma cobertura de vértices de tamanho $k \}$



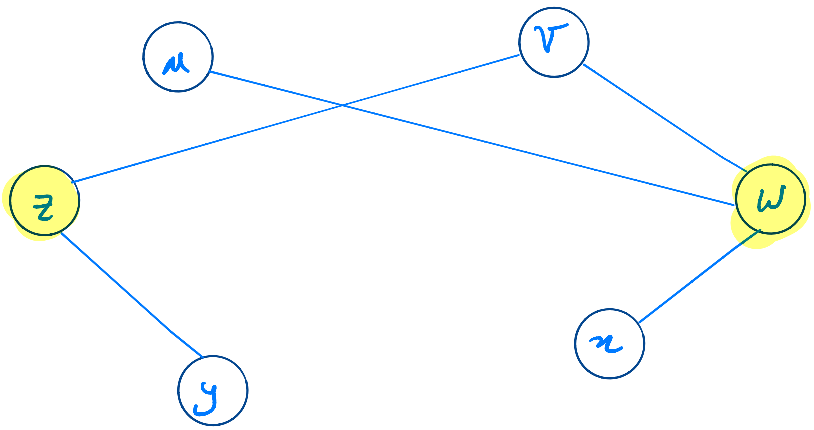
$\text{Clique} \leq_p \text{Vertex-Cover}$

Vertex-Cover: V' é uma cobertura de vértices do grafo não dirigido $G=(V,E)$ sse $\forall (u,v) \in E.\ u \in V'$ <u>ou</u> $v \in V'$

Vertex-Cover Problem: Encontrar a cobertura de vértices de cardinalidade mínima

$\Downarrow$ Problema de Decisão

VertexCover $= \{ \langle G, k \rangle \mid G$ é um grafo não dirigido com uma cobertura de vértices de tamanho $k \}$



Clique $\leq_P$ Vertex-Cover

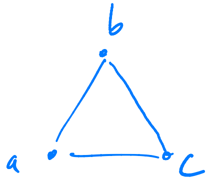
Proposição: $G=(V,E)$ tem um clique de tamanho k <u>sse</u> $\bar{G}=(V,\bar{E})$ tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V|-k$.

Onde:

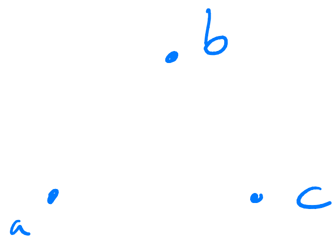
$$\bar{G}=(V,\bar{E}) \qquad \bar{E}=\{(u,v)\in V^2 \mid (u,v)\notin E \wedge u\neq v\}$$

Exemplo 1:

G:



$\bar{G}$:



Clique $=\{a,b,c\}$

VC $=\{a,b,c\}$

Clique $\leq_p$ Vertex-Cover

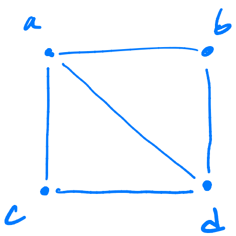
Proposição: $G=(V,E)$ tem um clique de tamanho k <u>sse</u> $\bar{G}=(V,\bar{E})$ tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V|-k$.

Onde:

$$\bar{G}=(V,\bar{E}) \qquad \bar{E}=\{(u,v)\in V^2 \mid (u,v)\notin E \wedge u\neq v\}$$

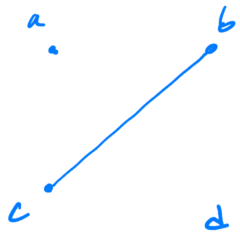
Exemplo 2:

G:



Clique: $\{a,b,d\}$

$\bar{G}$:



$VC=\{c\}$

$\boxed{\text{Clique} \leq_p \text{Vertex-Cover}}$

Proposição: $G=(V,E)$ tem um clique de tamanho k <u>sse</u> $\bar{G}=(V,\bar{E})$ tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V|-k$.

Onde:

$$\bar{G}=(V,\bar{E}) \qquad \bar{E}=\{(u,v)\in V^2 \mid (u,v)\notin E \wedge u\neq v\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

- Seja V' um clique de tamanho k em $G=(V,E)$
- Temos de encontrar uma VC de tamanho $|V|-k$ em $\bar{G}$.
- Consideremos o conjunto $\hat{V}=V\setminus V'$. Vamos mostrar que $\hat{V}$ é uma VC em $\bar{G}$.
- Suponhamos q $(u,v)\in\bar{E}$; segue q $(u,v)\notin E$ e $u\neq v$

Uma vez que $(u,v)\notin E$, concluímos que u e v não podem pertencer <u>simultaneamente</u> a V' pelo que:

$u\in V\setminus V'$ ou $v\in V\setminus V'$

$\boxed{\text{Clique} \leq_p \text{Vertex-Cover}}$

Proposição: $G = (V, E)$ tem um Clique de tamanho k <u>sse</u> $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V| - k$.

Onde:

$$\bar{G} = (V, \bar{E}) \qquad \bar{E} = \{ (u,v) \in V^2 \mid (u,v) \notin E \wedge u \neq v \}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

- Seja V' uma VC de tamanho k em $\bar{G} = (V, \bar{E})$
- Temos de encontrar um Clique de tamanho $|V| - k$ em $G = (V, E)$
- Seja $\hat{V} = V \setminus V'$. Vamos provar que $\hat{V}$ é um Clique em G.
  - Como V' é uma VC, sabemos que:

$$\forall (u,v) \in V^2.\ (u,v) \in \bar{E} \Rightarrow u \in V' \vee v \in V'$$
$$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in V^2.\ (u,v) \notin E \Rightarrow u \notin \hat{V} \vee v \notin \hat{V}$$
$$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in V^2.\ u \in \hat{V} \wedge v \in \hat{V} \Rightarrow (u,v) \in E$$