Sumário

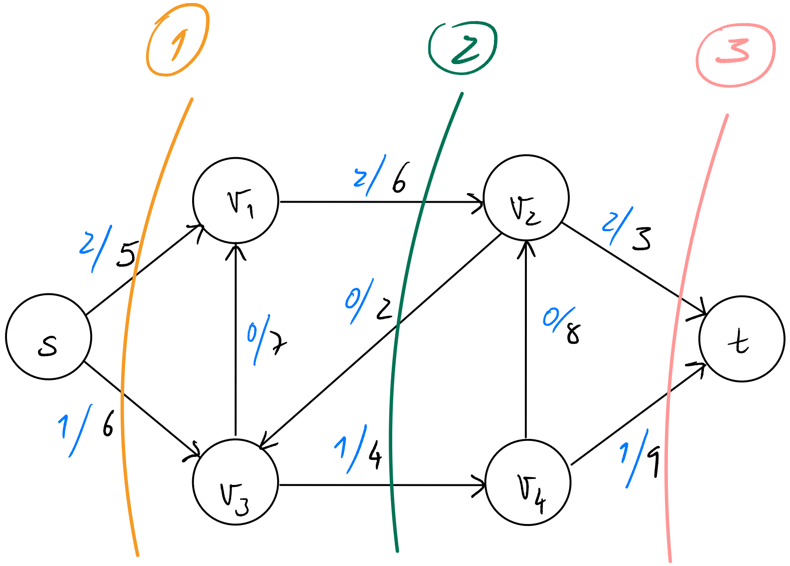
- Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo
- Algoritmo de Edmonds-Karp
- Correspondência Bi-partida Máxima

Aula 10

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ é um par (S, T) onde:

- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$



[Capacidade do Corte]

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

[Fluxo q atravessa o corte]

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

1

2

3

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ é um par (S,T) onde:

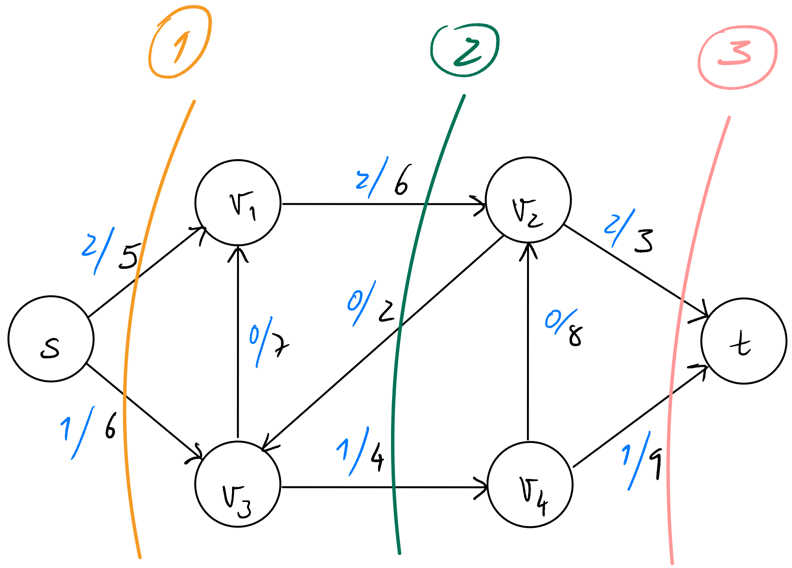
- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$

[Capacidade do Corte]

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

[Fluxo q atravessa o corte]

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$



$|f| = 3$

(1) $c(S,T) = 11$
$f(S,T) = 3$

(2) $c(S,T) = 10$
$f(S,T) = 3$

(3) $c(S,T) = 12$
$f(S,T) = 3$

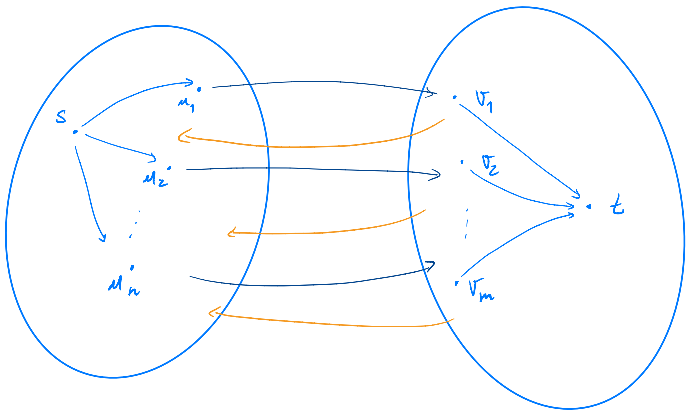
Lema do Corte em Rede de Fluxo

Seja $G=(V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo, f um fluxo em G e (S,T) um corte em G; então:

$$|f| = f(S,T)$$

prova

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$



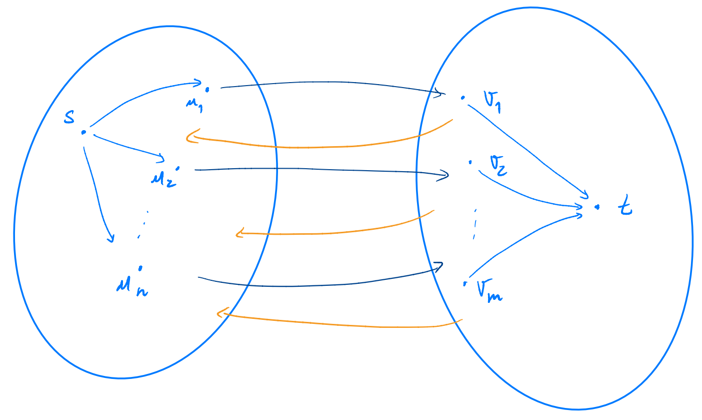
$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u)$$

Lema do Corte em Rede de Fluxo

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, f um fluxo em G e (S,T) um corte em G, então:

$$|f| = f(S,T)$$

prova



$$f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$$

$$= \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s) + \sum_{u\in S\setminus\{s\}}\left(\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v\in V} f(v,u)\right)$$

$$= \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s) + \sum_{u\in S\setminus\{s\}}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S\setminus\{s\}}\sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\left(\sum_{v\in S} f(u,v) + \sum_{v\in T} f(u,v)\right) - \sum_{u\in S}\left(\sum_{v\in S} f(v,u) + \sum_{v\in T} f(v,u)\right)$$

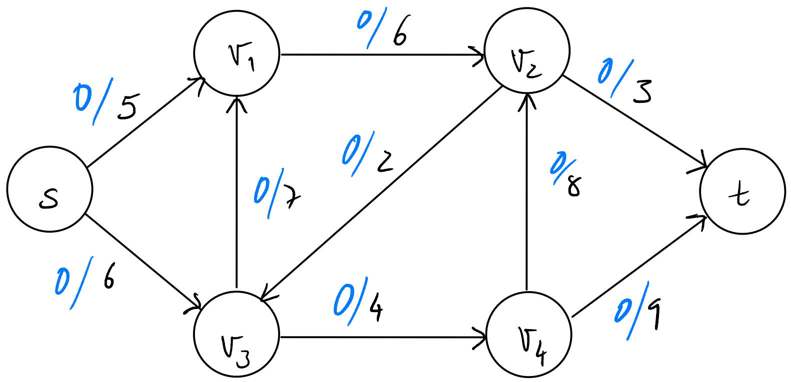
$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) + \sum_{u\in S}\sum_{v\in S} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in S} f(v,u) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$= f(S,T)$$

Método de Ford-Fulkerson

```
FordFulkerson(G)
    let f be a 0-flow in G
    while (true)
        compute Gf
        let p be an augmenting path in Gf
        if (!p) return f
        compute fp
        f := f ↑ fp
```

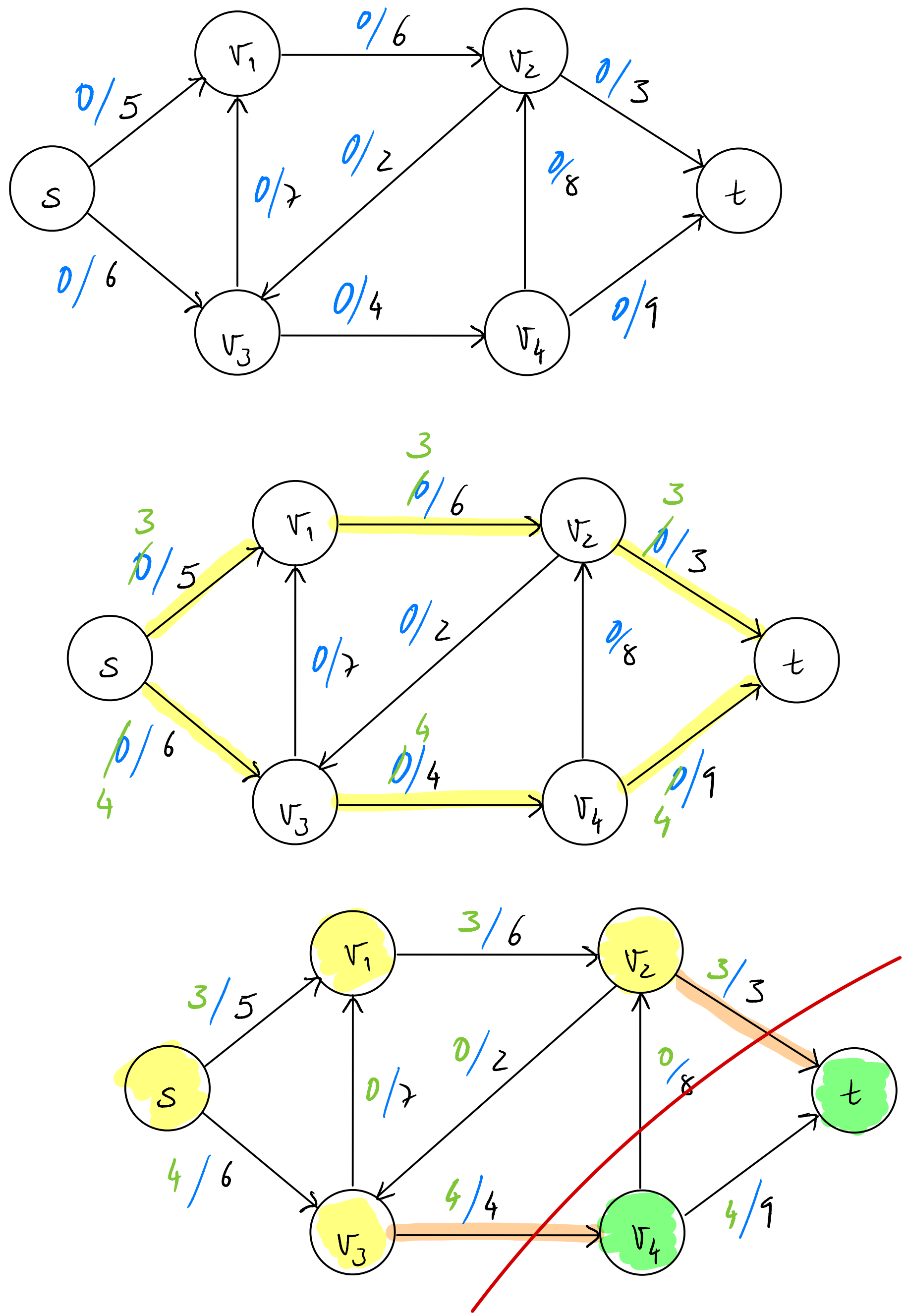


Complexidade: $\underbrace{O(E|f|)}$

↳ Depende do valor do fluxo calculado!

Método de Ford-Fulkerson

FordFulkerson (G)
  let f be a 0-flow in G
  while (true)
    compute G_f
    let p be an augmenting path in G_f
    if (!p) return f
    compute f_p
    $f := f \uparrow f_p$



Complexidade : $\underbrace{O(E\,|f|)}$

↳ Depende do valor do fluxo calculado!

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

(i) $\Rightarrow$ (ii)

f é um fluxo máximo $\Rightarrow$ Não existem caminhos de aumento em G_f

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

(i) $\Rightarrow$ (ii)

f é um fluxo máximo $\Rightarrow$ Não existem caminhos de aumento em G_f

- Fazemos a prova por contradição. Suponhamos que:
  - f é um fluxo máximo
  - Existe um caminho de aumento p em G_f
    - ↳ $f \uparrow f_p$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f_p| = \underbrace{|f| + |f_p| > |f|}$
      - ↳ f não é fluxo máximo em G.

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa Rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Não existem caminhos de aumento em G_f $\Rightarrow$ $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

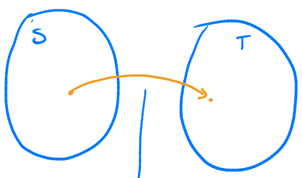
(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

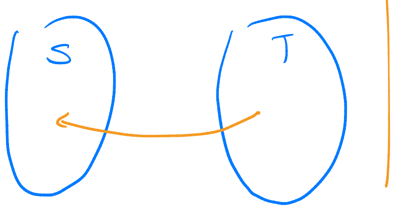
Prova (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Não existem caminhos de aumento em G_f $\Rightarrow$ $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G

- Suponhamos q não existem caminhos de aumento em G_f.
- Seja $S = \{v \mid s \rightsquigarrow v \text{ em } G_f\}$ e $T = V \setminus S$



os arcos de G q atravessam o corte têm de estar saturados senão existiria um caminho s-t em G_f.



- Os arcos q atravessam o corte de T para S têm de ter fluxo $\underline{0}$ senão existiria um caminho s-t em G_f.

- Do lema do corte concluímos que: $|f| = f(S,T)$

$$f(S,T) = c(S,T)$$

$$|f| = c(S,T)$$

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

<u>(iii) ⇒ (i)</u>

$|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) ⇒ f é um fluxo máximo

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) $\Rightarrow$ f é um fluxo máximo

- Admitimos, para contradição, que:
  - $|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) em G
  - f não é um fluxo máximo

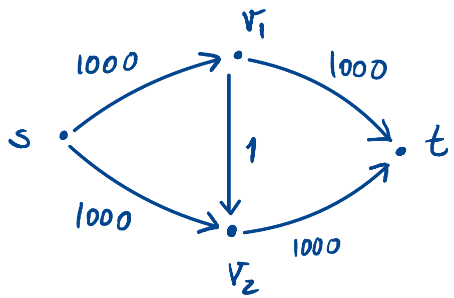
$$\underline{|f| = f(S,T) = c(S,T)}$$

Existe f^* tal que $|f^*| > |f|$

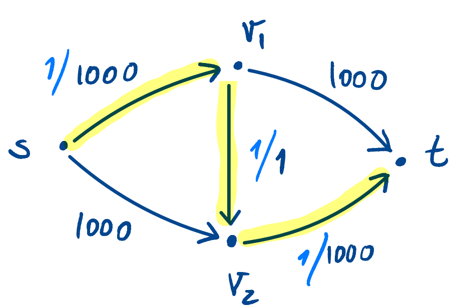
$$\underline{|f^*| = f^*(S,T) \leq c(S,T)}$$

$\therefore$

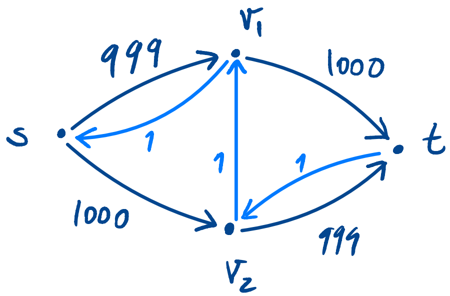
Método de Ford-Fulkerson: Complexidade



I

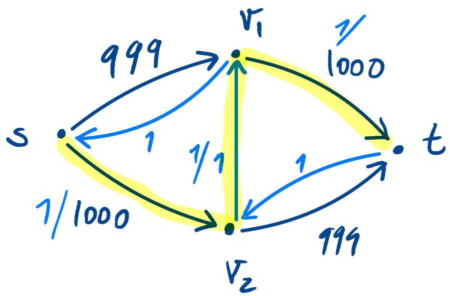


$\Rightarrow$

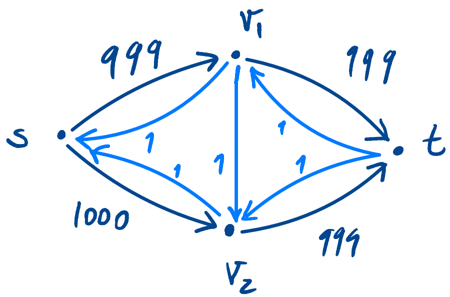


$k = 1$

II



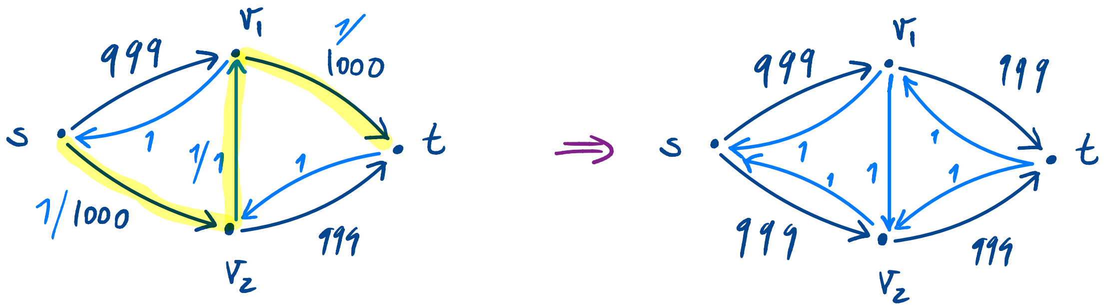
$\Rightarrow$



$k = 2$

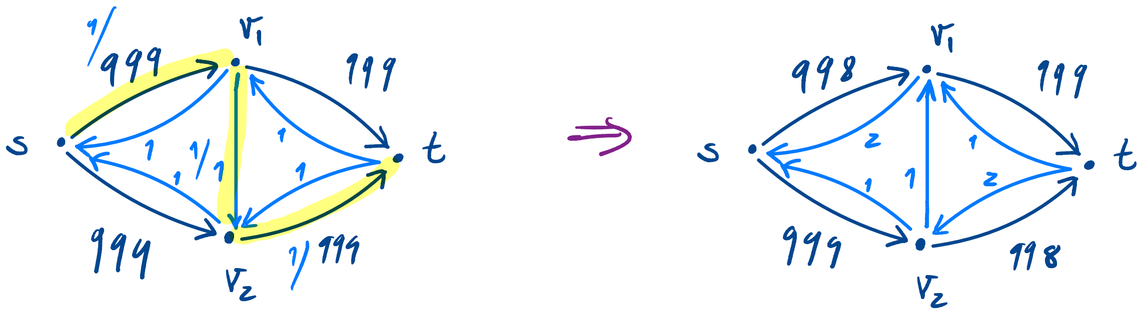
Método de Ford-Fulkerson: Complexidade

II



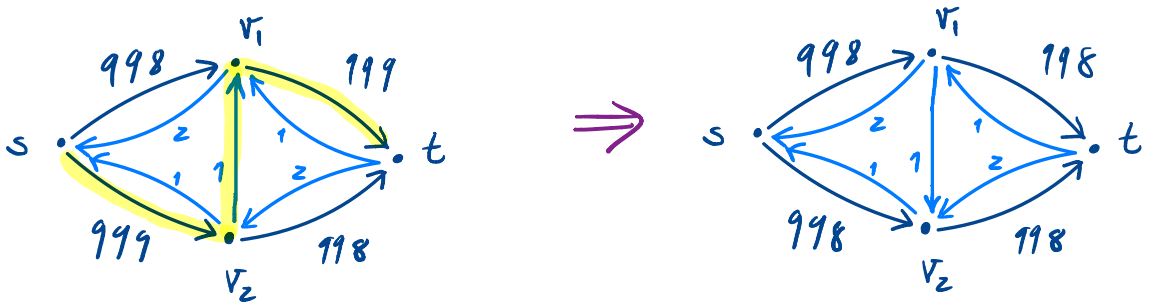
$k=2$

III



$k=3$

IV



$k=4$

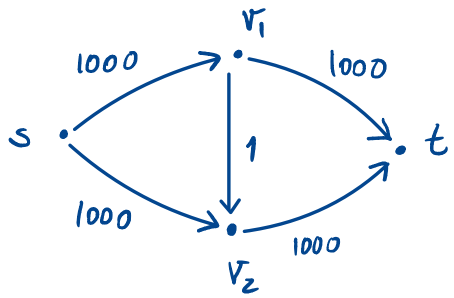
Quantas iterações?

2000 !!

Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?

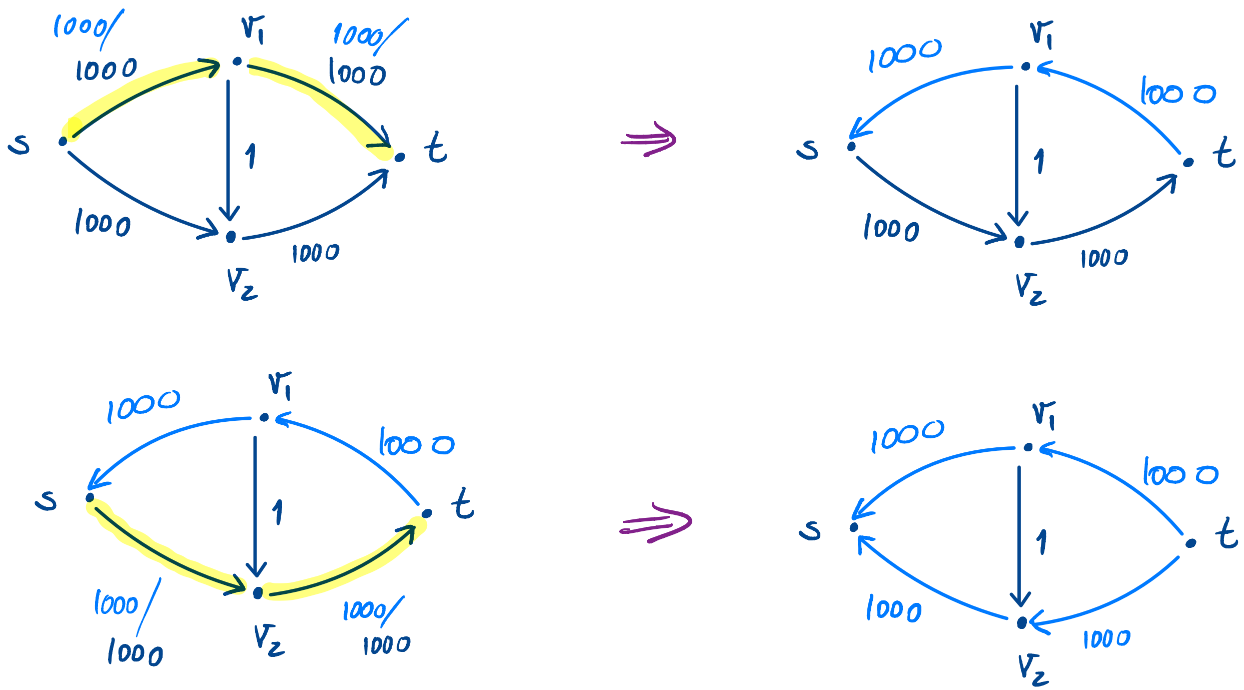
  ⇒ Caminho mais curto que liga s a t



Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?

  ⇒ Caminho mais curto que liga s a t



2 iterações!

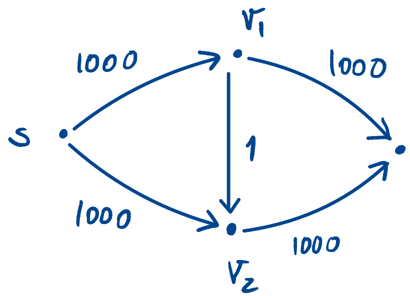
Algoritmo de Edmonds-Karp

- Como escolher o caminho de aumento?
  - ⇒ Caminho mais curto que liga s a t (em nº de arcos)
  - ⇒ BFS para identificação dos caminhos mais curtos

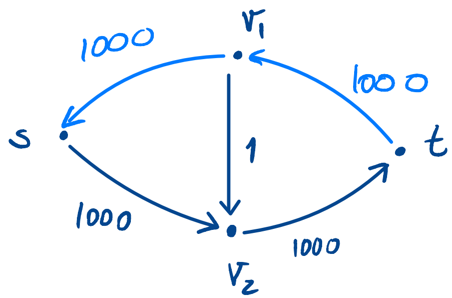
- Análise de Complexidade

Definição [Distância de Edmonds-Karp]

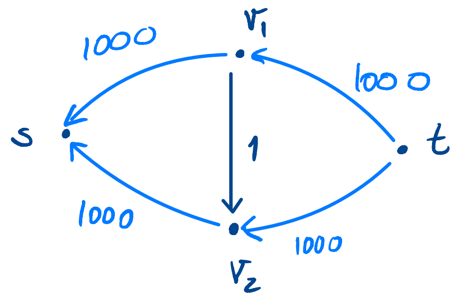
Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ e u e v dois vértices em V, a distância de Edmonds-Karp entre u e v, denotada por $\delta_f(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v em G_f.



$\delta_f(s,t) =$



$\delta_f(s,t) =$



$\delta_f(s,t) =$

Algoritmo de Edmonds-Karp

· Como escolher o caminho de aumento?

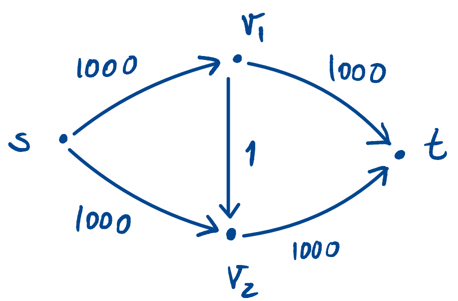
⇒ Caminho mais curto que liga s a t (em nº de arcos)

⇒ BFS para identificação dos caminhos mais curtos

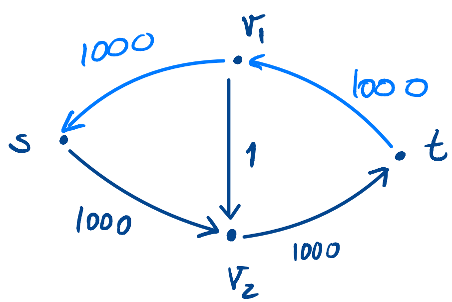
· Análise de Complexidade

Definição [Distância de Edmonds-Karp]

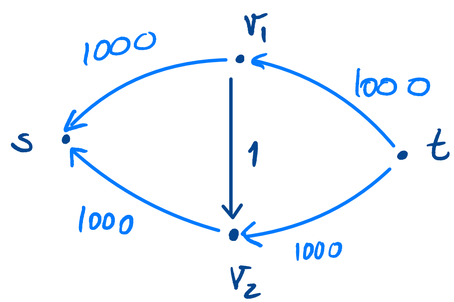
Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$ e u e v dois vértices em V, a distância de Edmonds-Karp entre u e v, denotada por $\delta_f(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v em G_f.



$\delta_f(s,t) = 2$



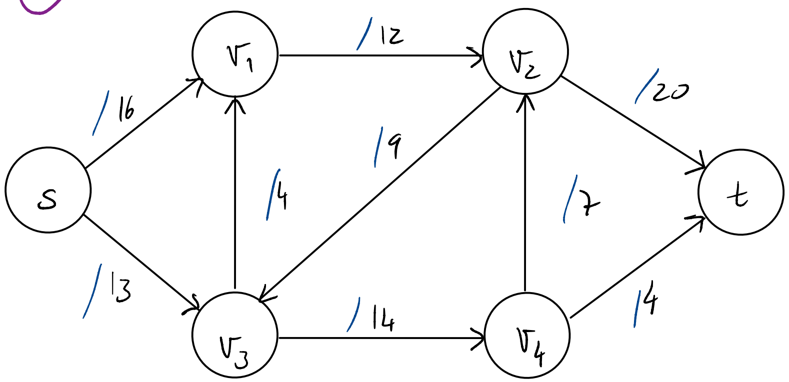
$\delta_f(s,t) = 2$



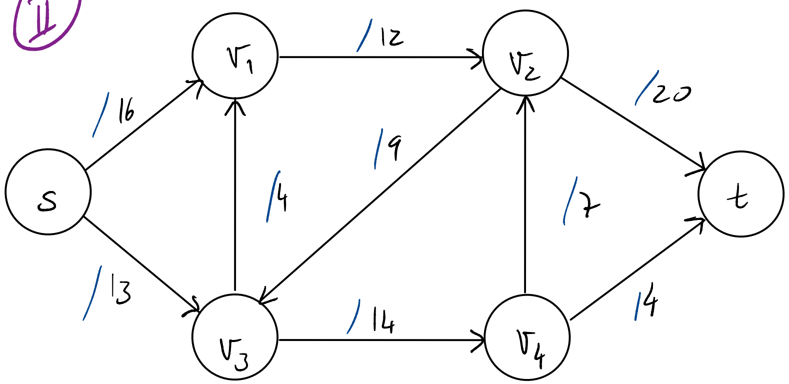
$\delta_f(s,t) = \infty$

Distância de Edmonds-Karp

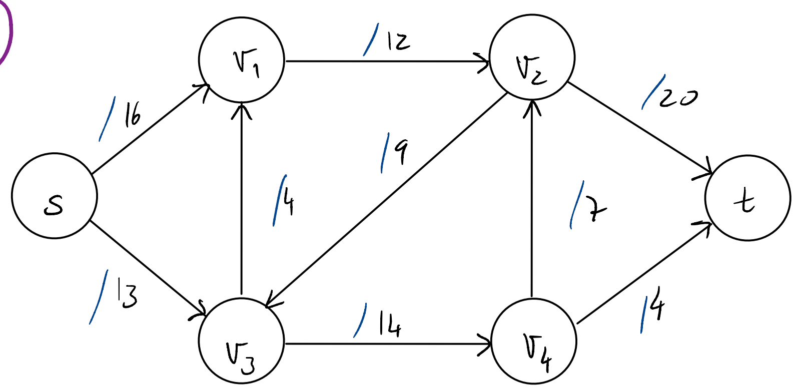
I



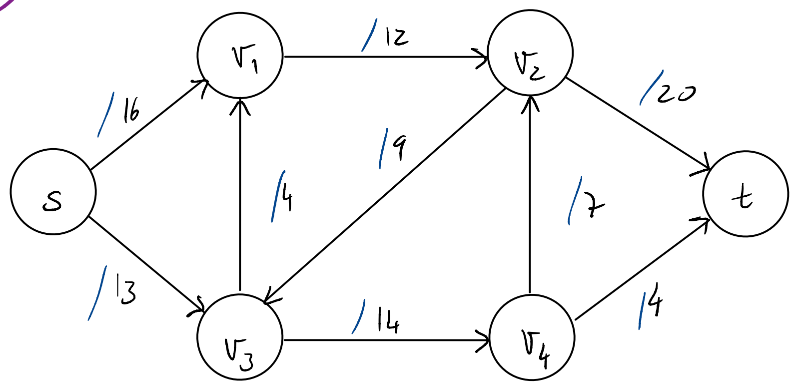
II



III

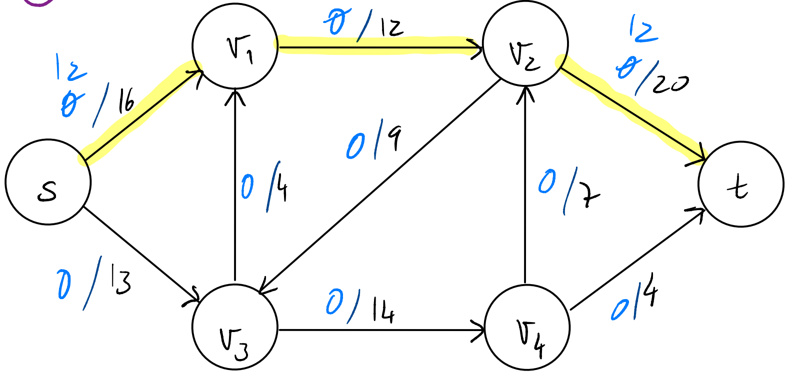


IV



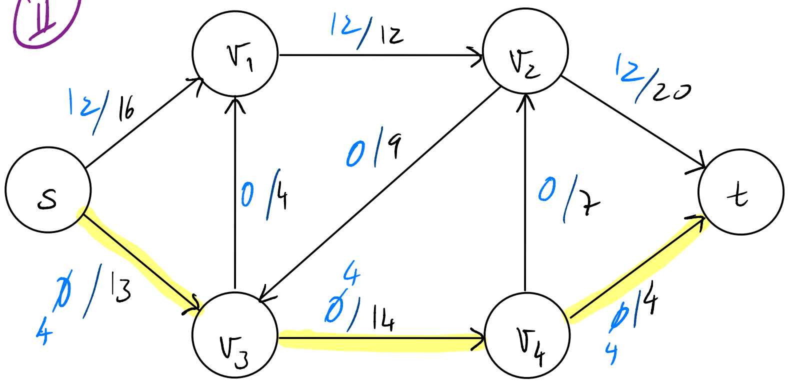
Distância de Edmonds-Karp

I



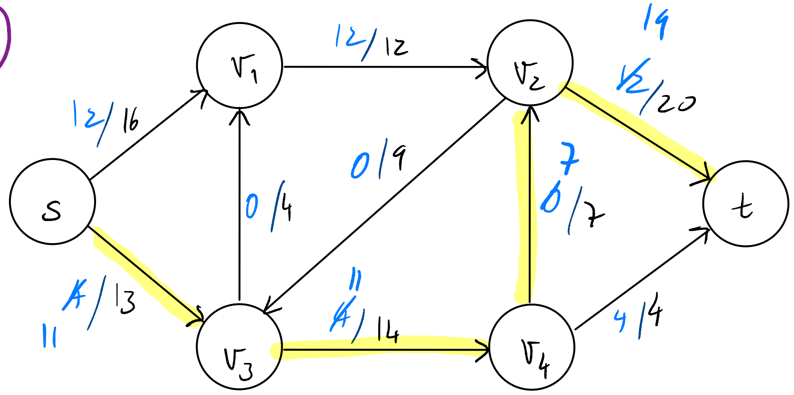
$\delta(s,t) = 3$

II



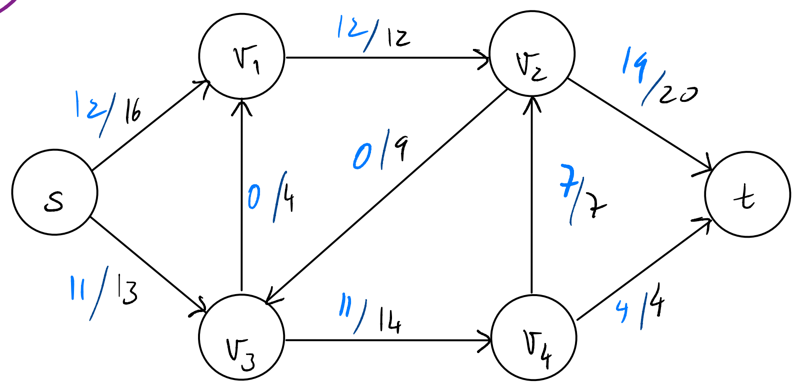
$\delta(s,t) = 3$

III



$\delta(s,t) = 4$

IV



$\delta(s,t) = \infty$

Distância de Edmonds-Karp

- Como é que a distância $\delta_f(s,t)$ evolui durante a aplicação do algoritmo Edmonds-Karp?

Aumenta

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

- Complexidade do Algoritmo de Edmonds Karp

① $f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$

② O caminho curto entre s e t tem, no máximo, $|V|-1$ arcos

③ Quantas iterações do algoritmo EK podemos executar no máximo até a distância $\delta_f(s,t)$ aumentar? $|E|$

Quantas iterações é que podemos executar no máximo?

Complexidade:

Distância de Edmonds-Karp

- Como é que a distância $\delta_f(s,t)$ evolui durante a aplicação do algoritmo Edmonds-Karp?

  Aumenta

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

- Complexidade do Algoritmo de Edmonds Karp

1. $f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$

2. O caminho curto entre s e t tem, no máximo, $|V|-1$ arcos

3. Quantas iterações do algoritmo EK podemos executar no máximo até a distância $\delta_f(s,t)$ aumentar? $|E|$

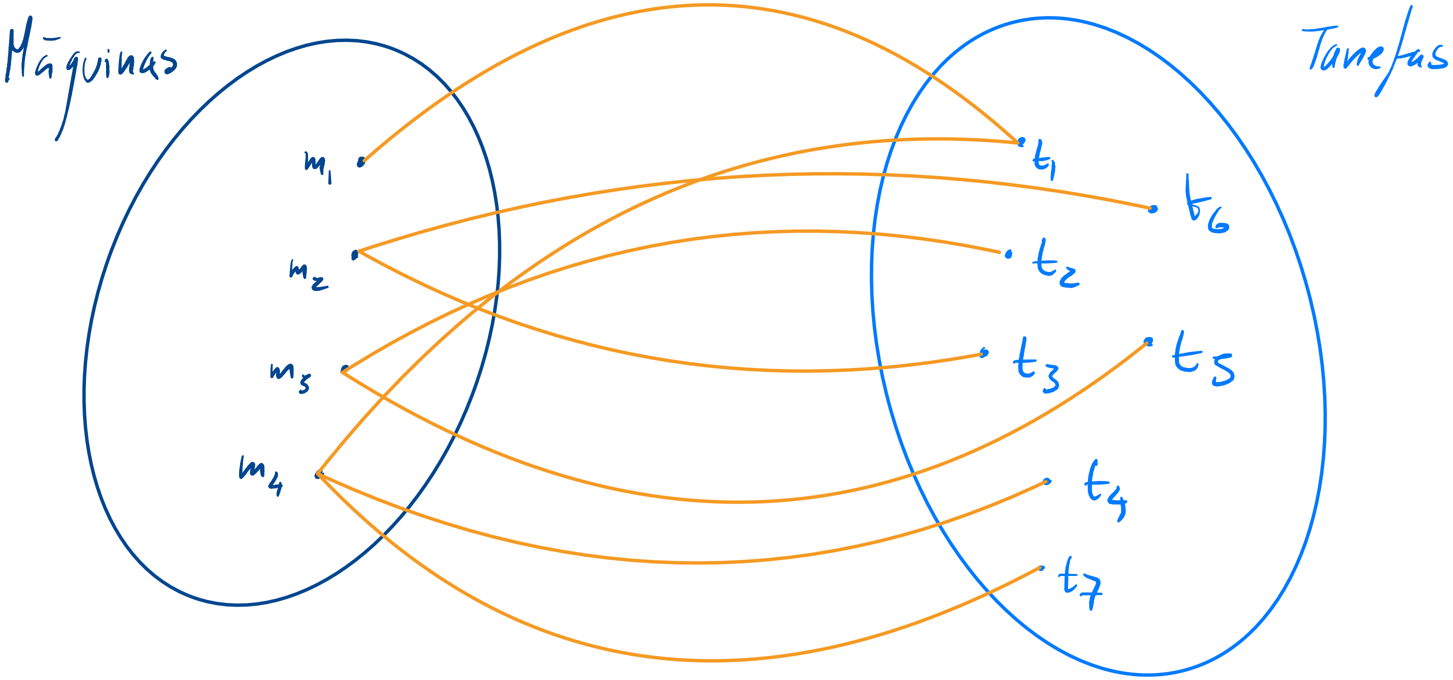
Quantas iterações é que podemos executar no máximo?

$O(E \cdot V)$

Complexidade:

$O(E^2 \cdot V)$

Problema da Correspondência Bipartida Máxima

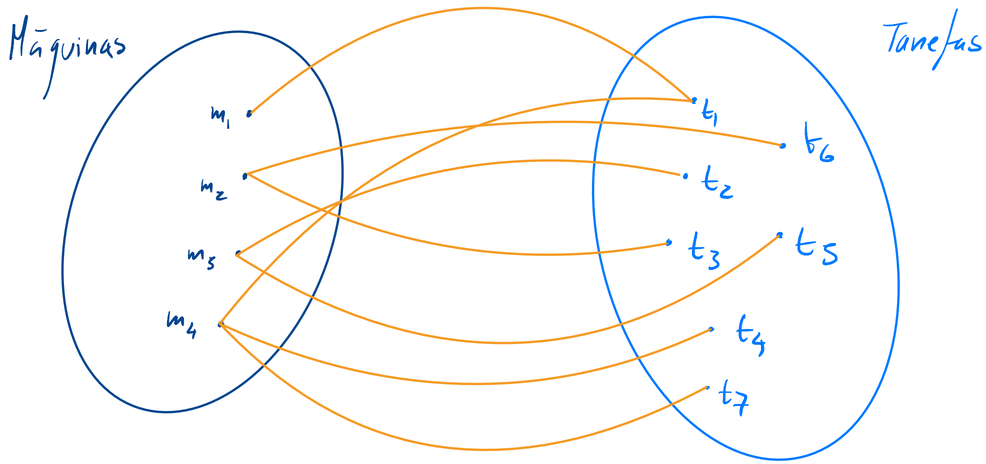


- Arco entre a tarefa t_i e a máquina m_j significa q̄ m_j consegue executar t_i
- Problema: Sabendo q̄ cada máquina só pode executar uma tarefa qual é o maior nº de tarefas q̄ conseguimos executar em simultâneo?

Problema da Correspondência Bipartida Máxima

Definição [Bi-partição]

Dado um grafo $G=(V,E)$, uma bi-partição de $G=(V,E)$ é um par (L,R) tal que: $L \cup R = V$ e $L \cap R = \emptyset$.



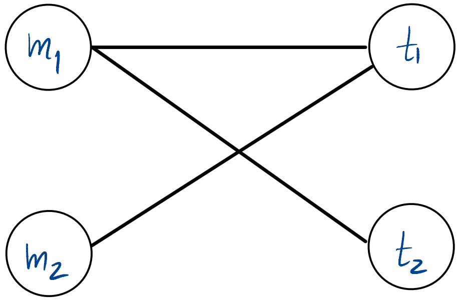
Definição [Correspondência Bipartida]

Dado um grafo $G=(V,E)$ e uma bi-partição (L,R) de G, $M \subseteq E$ diz-se uma correspondência bi-partida de G sse todos os vértices de V têm apenas um arco incidente em M.

Definição [Problema da Correspondência Bi-Partida Máxima]

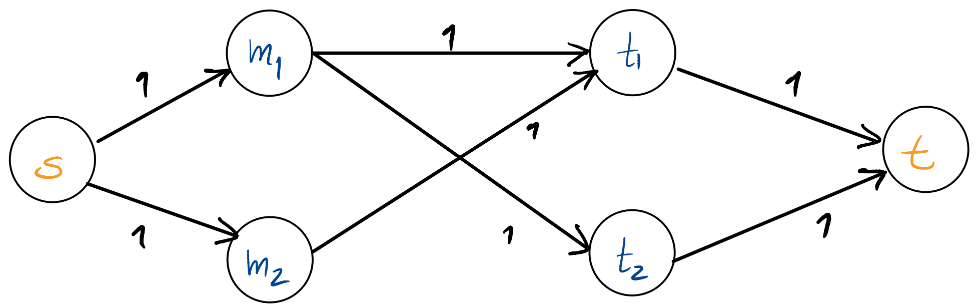
Dado um grafo $G=(V,E)$ e uma bi-partição (L,R) de G, o problema da correspondência bi-partida máxima consiste em determinar a correspondência bi-partida M com maior cardinalidade.

Correspondência Bipartida Máxima



- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

Correspondência Bipartida Máxima

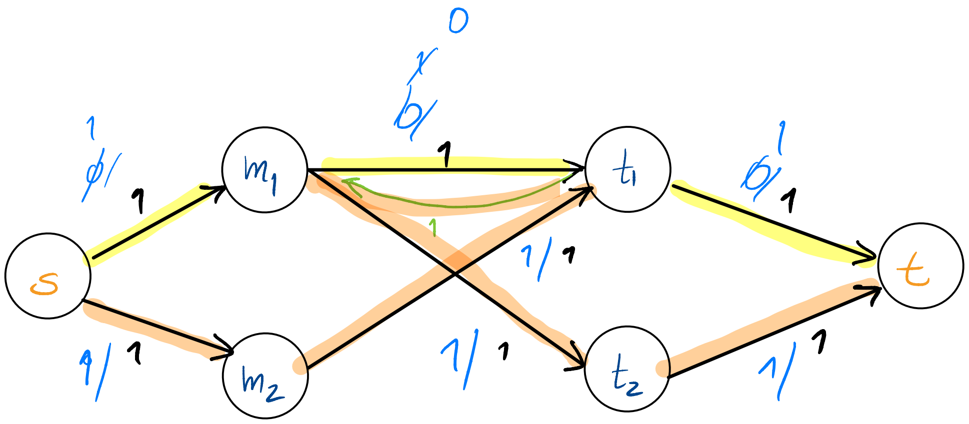


- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

$$G = (V, E), \quad (L, R)$$
$$\Downarrow$$
$$G' = (V', E', s, t, c)$$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Correspondência Bipartida Máxima



- **Objectivo:** Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

$G = (V, E), \; (L, R)$

$$\Downarrow$$

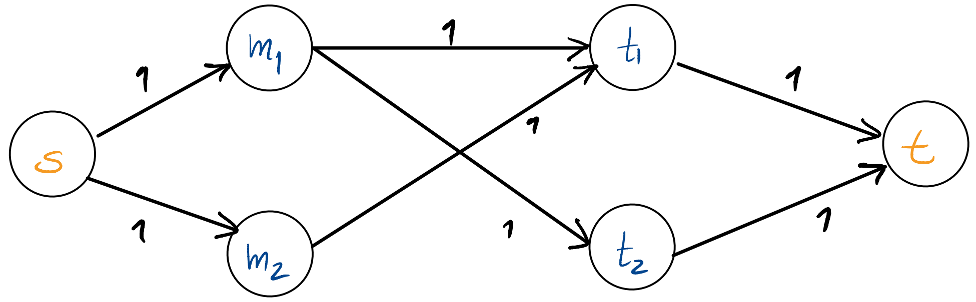
$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Correspondência:

$(m_1, t_2), \; (m_2, t_1)$

Correspondência Bipartida Máxima



- Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.

$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

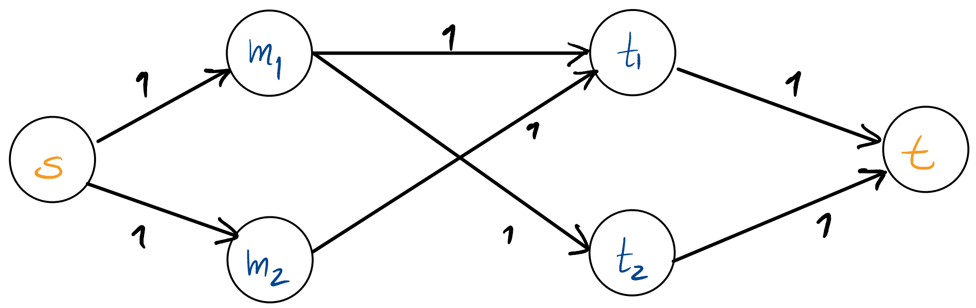
$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

- Fluxo na rede $\Rightarrow$ Correspondência
  (como calcular a correspondência máxima dado o fluxo)

Correspondência Bipartida Máxima

- Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

- Fluxo na rede $\Rightarrow$ Correspondência

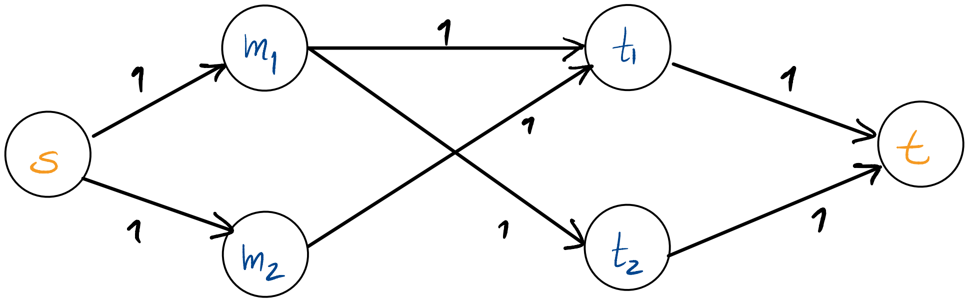
(como calcular a correspondência máxima dado o fluxo)

$$M_f = \{ (u, v) \mid u \in L \wedge v \in R \wedge f(u, v) = 1 \}$$

(TPC: provar que M é uma correspondência)

Correspondência Bipartida Máxima

• Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$G = (V, E)$, (L, R)

$\Downarrow$

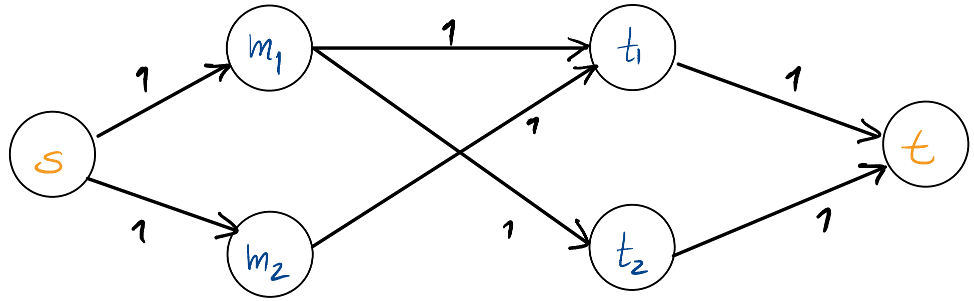
$G' = (V', E', s, t, c)$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

• Correspondência $\Rightarrow$ Fluxo na rede
(como calcular o fluxo dada uma correspondência)

Correspondência Bipartida Máxima

• Objectivo: Modelar o problema como um problema de fluxo máximo.



$$G = (V, E), \quad (L, R)$$

$$\Downarrow$$

$$G' = (V', E', s, t, c)$$

- $V' = V \cup \{s, t\}$
- $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
- $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u,v) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

• Correspondência $\Rightarrow$ Fluxo na rede
(como calcular o fluxo dada uma correspondência)

$$f_M(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u,v) \in M \\ 1 & \text{se } u = s \text{ e } \exists w.\ (v, w) \in M \\ 1 & \text{se } v = t \text{ e } \exists x.\ (x, u) \in M \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(TPC: provar que f_M é um fluxo)

Resultados Teóricos & Demonstrações
(Estudo Individual)

Lema [Monotonia da Distância de Edmonds-Karp]

$$f \mapsto_{EK} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

Prova

- Suponhamos q̃ existe v tal que $\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$.
  Assumimos sem perda de generalidade que não existe w tal que:
  - $\delta_{f'}(s,w) > \delta_f(s,w) \wedge \delta_{f'}(s,w) < \delta_{f'}(s,v)$

- Seja u o predecessor de v no caminho mais curto que o liga a s em $G_{f'}$.
  Segue que:

① $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$
$\geq \delta_f(s,u) + 1$

② $\delta_f(s,v) > \delta_{f'}(s,v) \geq \delta_f(s,u) + 1$

③ $\delta_f(s,v) > \delta_f(s,u) + 1$
$\Rightarrow (u,v) \notin E_f$

④ $(u,v) \in E_{f'} \wedge (u,v) \notin E_f$

- O caminho de aumento escolhido envia fluxo através do arco (v,u):
  $\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$

② + ④ $\Rightarrow \delta_f(s,v) > \delta_f(s,v) + 2$ $\therefore$

Definição [Grafo dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual]

Dado um fluxo f numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, o grafo dos caminhos caminhos mais curtos na rede G_f, denotado por $\tilde{G}_f$, é definido como se segue:

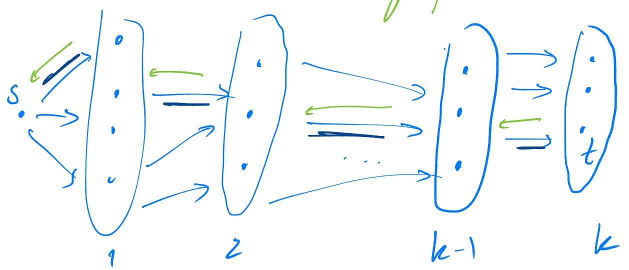
- $\tilde{G}_f = (V, \tilde{E}_f)$

  $\tilde{E}_f = \{ e \mid e \in E_f \wedge$ e participa de um caminho mais curto entre s e t $\}$

$$\boxed{f \mapsto_{EK} f'}$$

$\tilde{G}_f$

$\tilde{G}_{f'}$ vai conter arcos pr trás no grafo dos caminhos mais curtos



- Podem existir um vértice $v \in V$ a uma distância $k' > k$?

- Arcos "para trás" no grafo dos caminhos mais curtos podem ser utilizados para obter caminhos ainda mais curtos?

Definição [Grafo dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual]

Dado um fluxo f numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$, o grafo dos caminhos caminhos mais curtos na rede G_f, denotado por $\tilde{G}_f$, é definido como se segue:

- $\tilde{G}_f = (V, \tilde{E}_f)$

$$\tilde{E}_f = \{ e \mid e \in E_f \wedge e \text{ participa de um caminho mais curto entre } s \text{ e } t \}$$

Lema dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual

$$f \mapsto_{EK} f' \wedge \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \Rightarrow \tilde{E}_{f'} \subset \tilde{E}_f$$

Prova: Vamos provar que:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \mapsto_{EK} f' \\ \cdot\ \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \\ \cdot\ (u,v) \in \tilde{E}_{f'} \end{array}\right| \Rightarrow (u,v) \in \tilde{E}_f$$

Suponhamos que: $\underbrace{(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \wedge (u,v) \notin \tilde{E}_f}$

1. (v,u) pertence ao caminho de aumento

$$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$$

2.
$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,v) &= \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,u) + 1 \\ &= \delta_f(s,v) + 2 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v) > 0$$

3.
$$\begin{array}{r} \delta_{f'}(s,v) + \delta_{f'}(v,t) = k \\ \delta_f(s,v) + \delta_f(v,t) \geq k \\ \hline \underbrace{(\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v))}_{\geq 0} + \underbrace{(\delta_{f'}(v,t) - \delta_f(v,t))}_{\leq 0} \leq 0 \end{array}$$

$\therefore \rightarrow$ Contradiz o lema da Monotonia da Distância de EK

Lema dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual

$$f \mapsto_{EK} f' \wedge \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \Rightarrow \tilde{E}_{f'} \subset \tilde{E}_f$$

Prova: Vamos provar que:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \mapsto_{EK} f' \\ \cdot\ \delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t) \\ \cdot\ (u,v) \in \tilde{E}_{f'} \end{array}\right| \Rightarrow (u,v) \in \tilde{E}_f$$

Suponhamos que: $\underbrace{(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \wedge (u,v) \notin \tilde{E}_f}$

① (v,u) pertence ao caminho de aumento

$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$

② $$\left.\begin{aligned} \delta_{f'}(s,v) &= \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,u) + 1 \\ &= \delta_f(s,v) + 2 \end{aligned}\right| \delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v) > 0$$

③ $$\begin{array}{r} \delta_{f'}(s,v) + \delta_{f'}(v,t) = k \\ \delta_f(s,v) + \delta_f(v,t) \geq k \\ \hline \underbrace{(\delta_{f'}(s,v) - \delta_f(s,v))}_{\geq 0} + \underbrace{(\delta_{f'}(v,t) - \delta_f(v,t))}_{\leq 0} \leq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Contradiz o lema da Monotonia da Distância de EK

④ $\tilde{E}_{f'} \subseteq \tilde{E}_f$ (de ③)

↳ Falta provar que $\tilde{E}_{f'} \subsetneq \tilde{E}_f$

- Basta notar que o arco saturado no caminho de aumento desaparece de $\tilde{E}_f$