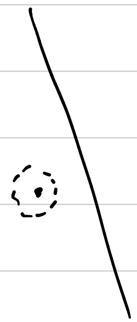
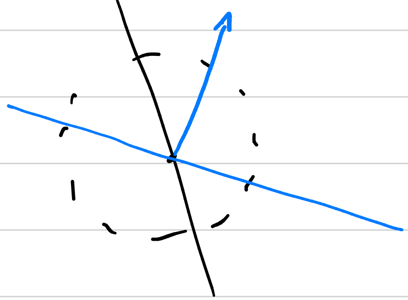
- Sumário:
  - Algoritmo Simplex

Aula 21

O Algoritmo Simplex

Observação central: A solução para o programa linear, a existir, vai localizar-se num vértice.





Ideia Chave:

let v be any vertex of the feasible region
while there is a neighbour v' of v with a better objective value
set $v = v'$

Perguntas: - Como encontrar um vértice inicial?
- Como encontrar os vizinhos de um dado vértice v?

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$\max 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$

① $-2x_1 + x_2 = 4$

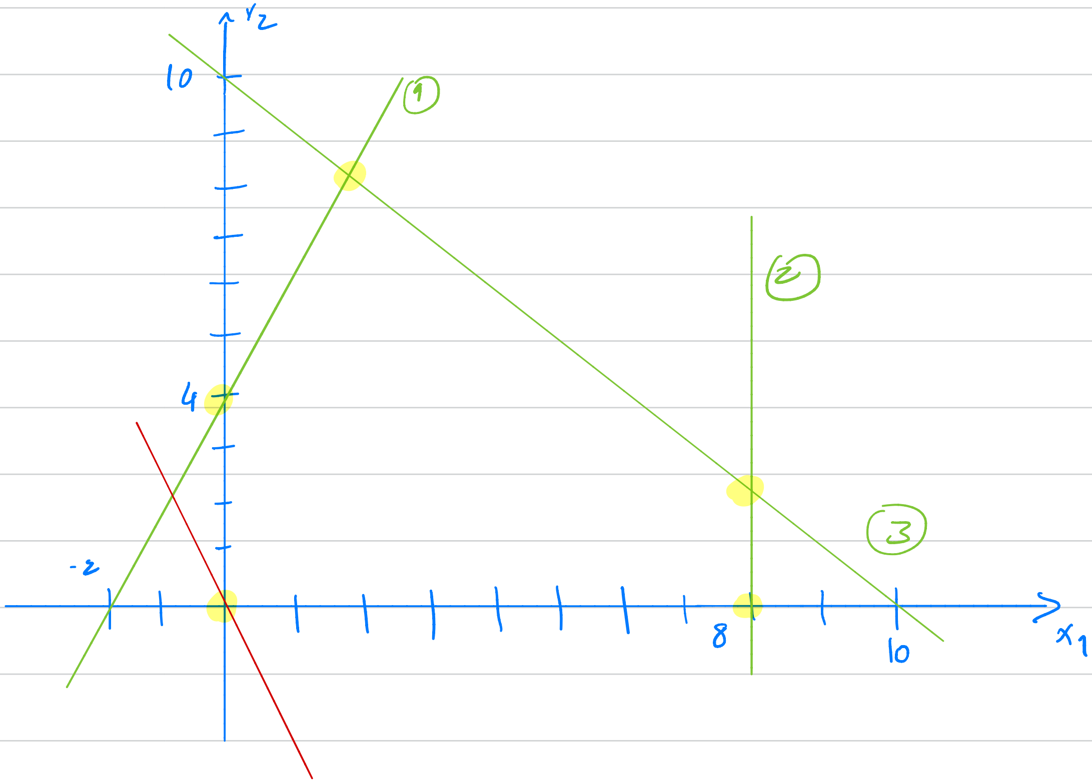
$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

③ $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$



O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

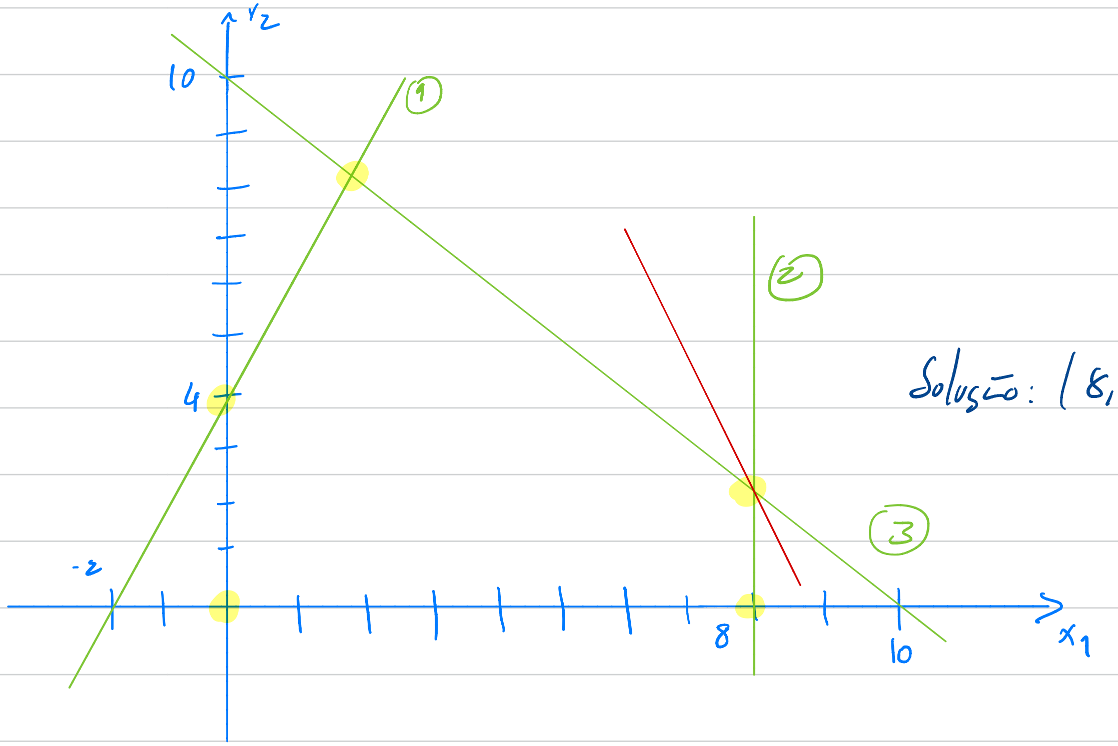
$\max\ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$



Solução: $(8,2)$

(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$

- $(2,1) \Rightarrow$ vector direcção do gradiente
- $\underline{(-1,2)} \Rightarrow$ direcção perpendicular ao gradiente
  - ↳ declive: -2
- Declive da recta 3: -1

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

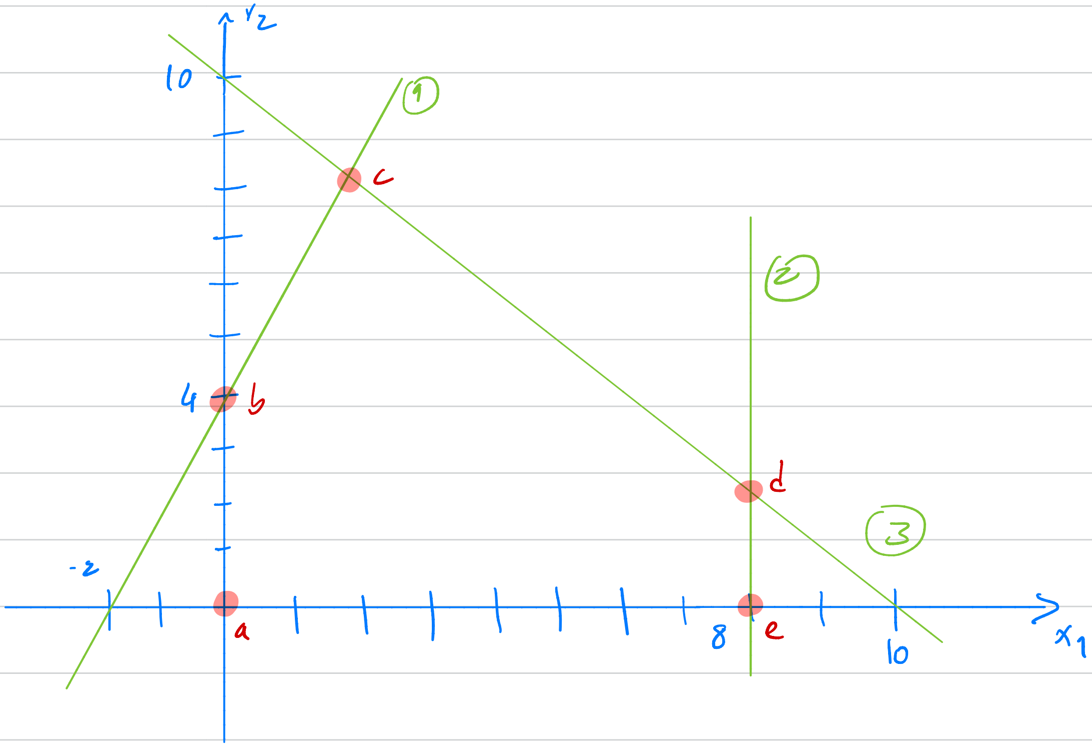
$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (1)$$

$$x_1 \leq 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (4), (5)$$



(1)
$$-2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_2 = 4 + 2x_1$$
$$0 = 4 + 2x_1$$
$$x_1 = -2$$

(3)
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_2 = 10 - x_1$$

Observação I: Em cada vértice temos sempre duas restrições activas

Observação II: Vértices vizinhos têm ...

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

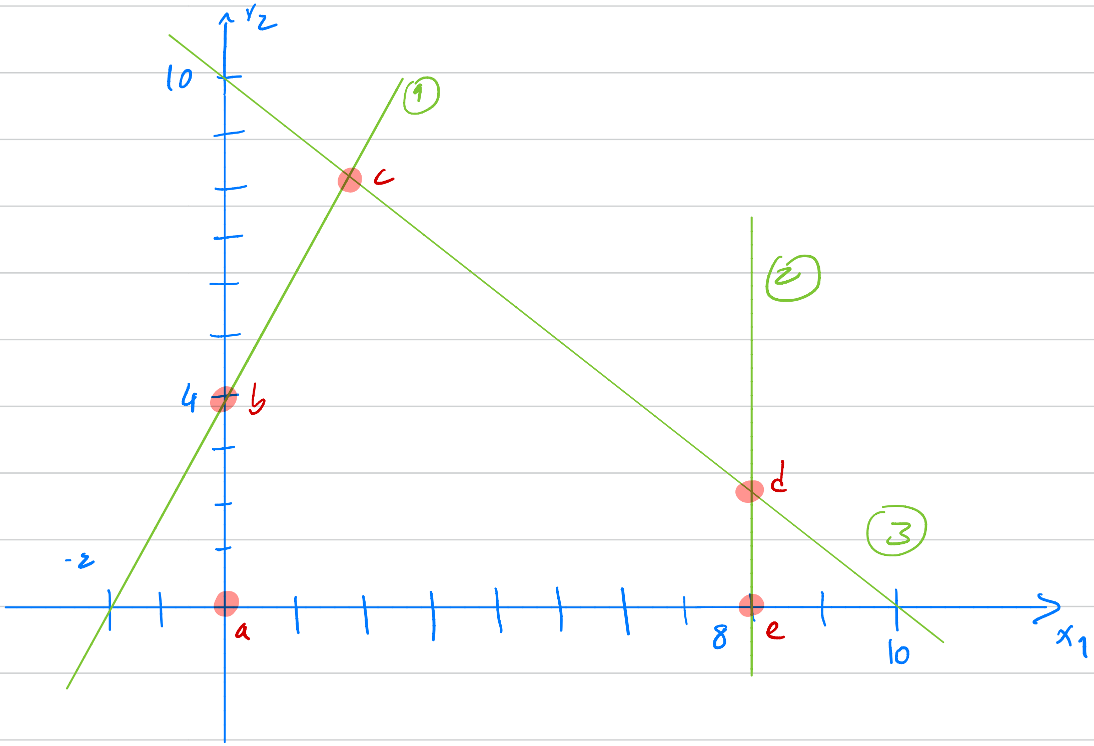
$\max\ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4), (5)



(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$

Observação I: Em cada vértice temos sempre duas restrições activas

a - 4, 5 c - 3, 1 e - 2, 4

b - 1, 5 d - 3, 2

Observação II: Vértices vizinhos têm uma restrição activa em comum

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

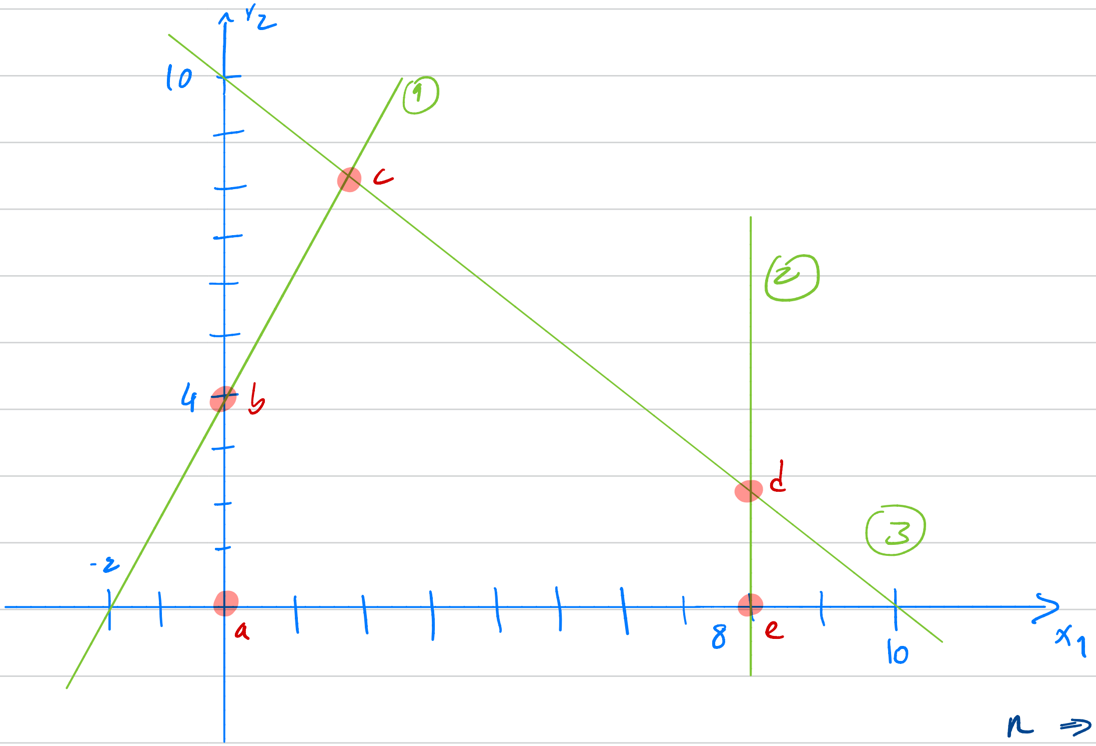
$\max\ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$ ④, ⑤



① $-2x_1 + x_2 = 4$

$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

③ $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$

$n \Rightarrow$ nº de variáveis

Observação I: Cada vértice é especificado por um conjunto de n restrições activas.

Observação II: Vértices vizinhos têm $n-1$ restrições activas em comum.

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

Observação I: Cada vértice é especificado por um conjunto de n restrições activas.

Observação II: Vértices vizinhos têm $n-1$ restrições activas em comum.

Ideia:

- Começamos num qualquer vértice, se não for possível melhorar a função objectivo permanecendo exequível (factível / feasible), terminamos. Caso contrário, passamos para o melhor vizinho.

- Como é q encontramos o melhor vizinho?

  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

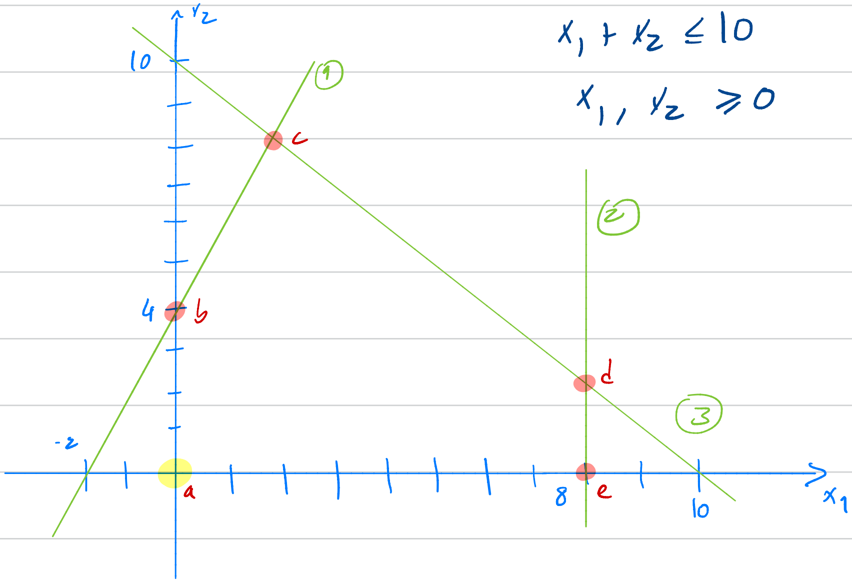
$$\max \ 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$x_1 \leq 8 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4), (5)$$



- Como é q encontramos o melhor vizinho?
  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

- Vértice actual: a

  Restrições activas: 4, 5

- Que restrição é que vamos desactivar?

  A restrição que, uma vez desactivada, nos permite aumentar o mais possível o valor da função objectivo.

Restrição a desactivar:

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$$\max \; 2x_1 + x_2$$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

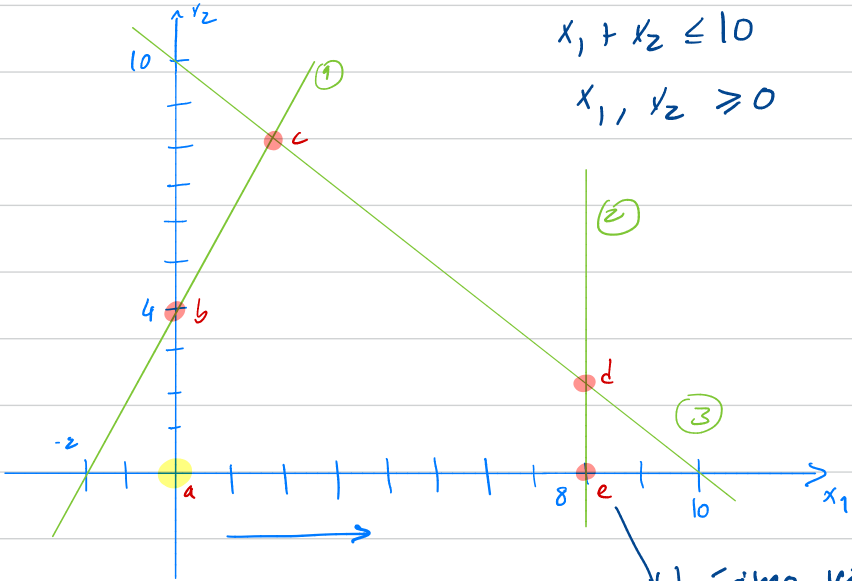
$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$ ④, ⑤

- Como é q encontramos o melhor vizinho?
  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

- Vértice actual: a

Restrições activas: 4, 5



próximo vértice: ②, ⑤ — Restrições activas

* Que restrição é que vamos desactivar?

A restrição que, uma vez desactivada, nos permite aumentar o mais possível o valor da função objectivo.

Restrição a desactivar: 4

Que restrição vai ser activada?

① $-2x_1 \leq 4 \iff x_1 \geq -8$

② $x_1 \leq 8$

③ $x_1 \leq 10$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

(I)

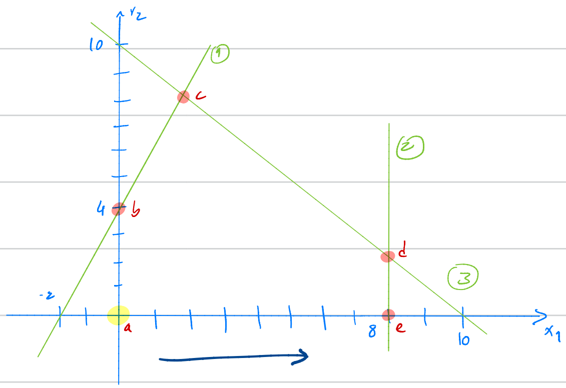
$\max \quad 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4), (5)



- Vértice actual: a
- Restrições activas: 4, 5
- Função objectivo: 0

- Comparamos os coeficientes: $1 < 2$
- Restrição a relaxar: 4
- Nova restrição activa: 2 $\Rightarrow x_1 = 8$
- Novas coordenadas: $y_1 = 8 - x_1$ e $y_2 = x_2$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

(I) $\max\ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4), (5)

- Comparamos os coeficientes: $1 < 2$
- Restrição a relaxar: 4
- Nova restrição activa: 2 $\Rightarrow$ $x_1 = 8$
- Novas coordenadas: $y_1 = 8 - x_1$ e $y_2 = x_2$

* Reescrevemos as restrições e a função objectivo no novo sistema de coordenadas.

- função objectivo =

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

(I) $\max\ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4), (5)

• Novas coordenadas:

$y_1 = 8 - x_1$ e $y_2 = x_2$

* Reescrevemos as restrições e a função objectivo no novo sistema de coordenadas.

• função objectivo $= 2x_1 + x_2 = 2(8-y_1) + y_2 = 16 - 2y_1 + y_2 \sim -2y_1 + y_2$

(1) $-2(8-y_1) + y_2 \leq 4 \Leftrightarrow -16 + 2y_1 + y_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 \leq 20$

(2) $8 - y_1 \leq 8 \Leftrightarrow -y_1 \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \geq 0$

(3) $x_1 + x_2 \leq 10 \Leftrightarrow (8-y_1) + y_2 \leq 10 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 \leq 2$

(4) $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - y_1 \geq 0 \Leftrightarrow -y_1 \geq -8 \Leftrightarrow y_1 \leq 8$

(5) $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow y_2 \geq 0$

$\min\ -2y_1 + y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

max $-2y_1 + y_2$

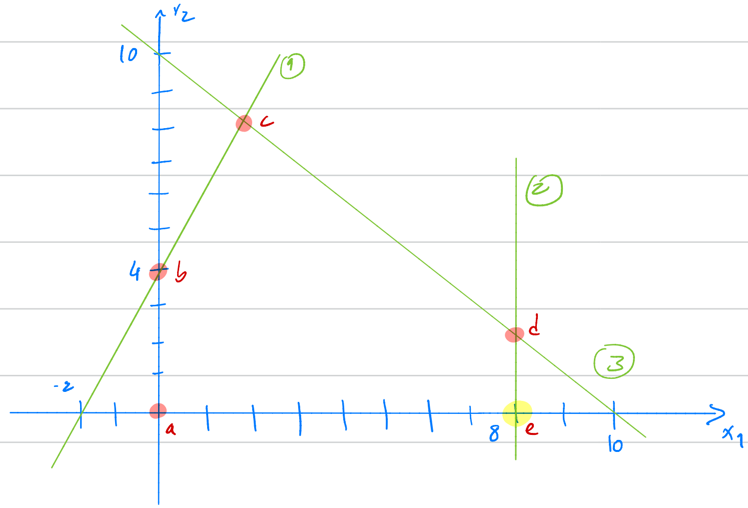
$2y_1 + y_2 \le 20$ (1)

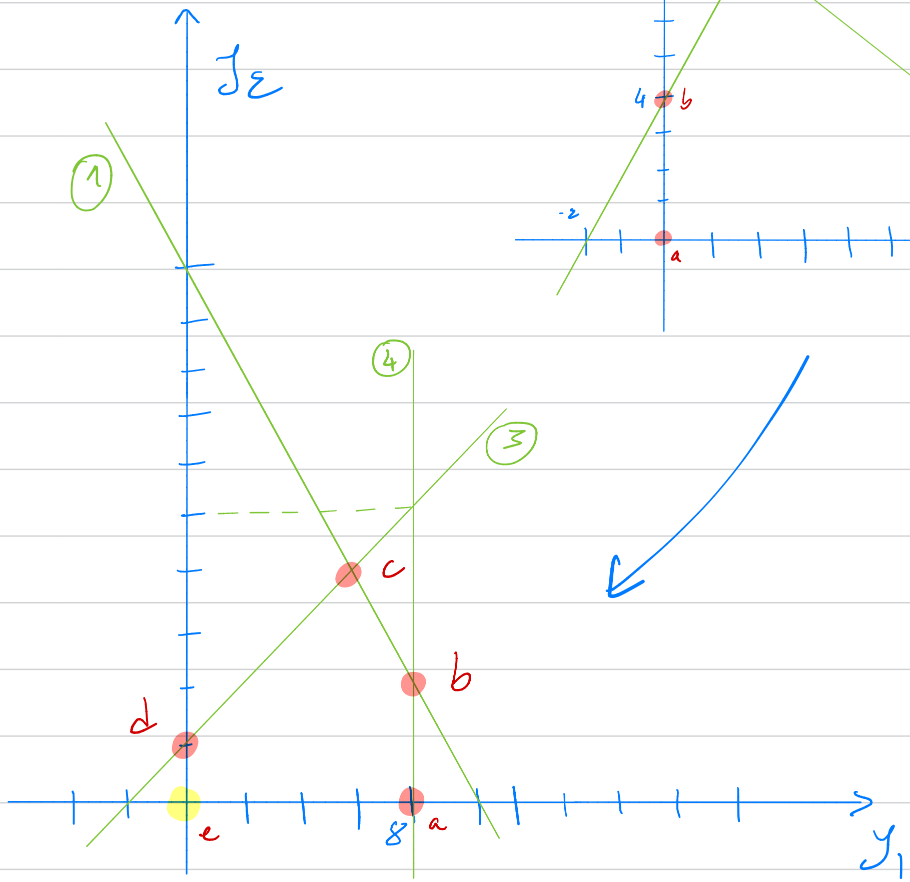
$y_1 \ge 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \le 2$ (3)

$y_1 \le 8$ (4)

$y_2 \ge 0$ (5)





(3) $-y_1 + y_2 \le 2$

$y_2 \le 2 + y_1$

$2 + y_1 = 0 \iff y_1 = -2$

(1) $2y_1 + y_2 \le 20$

$y_2 \le 20 - 2y_1$

$20 - 2y_1 = 0$

$2y_1 = 20$

$y_1 = 10$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$\max \; -2y_1 + y_2$

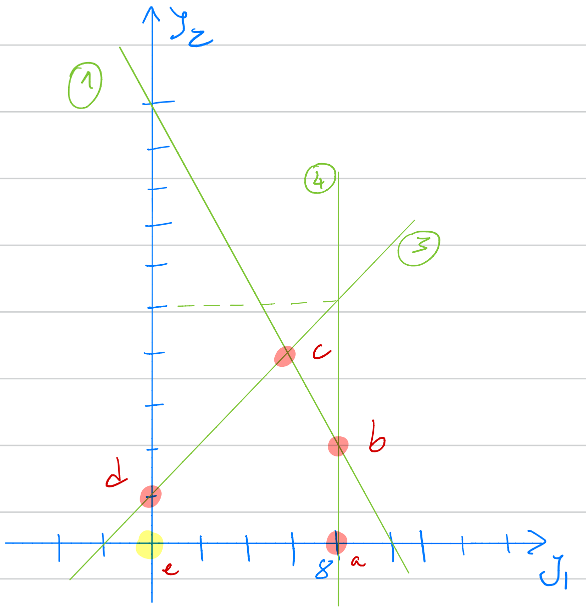
$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)



- Vértice actual: e
- Restrições activas: 2, 5
- Função objectivo: + 16

- Comparamos os coeficientes:
- Restrição a relaxar:
- Nova restrição activa:
- Novas coordenadas:

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$$\max \; -2y_1 + y_2$$

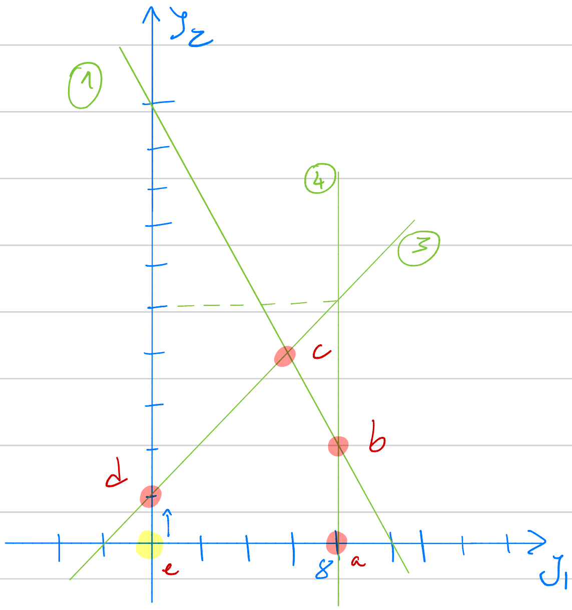
$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)



- Vértice actual: e
- Restrições activas: 2, 5
- Função objectivo: +16

- Comparamos os coeficientes: $-2 < 1$
- Restrição a relaxar: 5
- Nova restrição activa: 3
- Novas coordenadas: $(0, 2)$

$z_1 = y_1$

$z_2 = 2 - y_2 + y_1$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$\max \; -2y_1 + y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

- Novas coordenadas: $(0, 2)$

$z_1 = y_1$

$z_2 = 2 - y_2 + y_1$

- Função objectivo:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$$\max \; -2y_1 + y_2$$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

• Novas coordenadas: $(0,2)$

$z_1 = y_1$

$z_2 = 2 - y_2 + y_1$

• Função objectivo: $-z_1 - z_2 + 2 \sim -z_1 - z_2$

(1) $2y_1 + y_2 \leq 20 \Leftrightarrow 2z_1 + (2 - z_2 + z_1) \leq 20 \Leftrightarrow 3z_1 - z_2 \leq 18$

(2) $z_1 \geq 0$

(3) $-z_1 + (2 - z_2 + z_1) \leq 2 \Leftrightarrow z_2 \geq 0$

(4) $z_1 \leq 8$

(5) $2 - z_2 + z_1 \geq 0 \Leftrightarrow -2 + z_2 - z_1 \leq 0 \Leftrightarrow -z_1 + z_2 \leq 2$

$$\max \; -z_1 - z_2$$

$3z_1 - z_2 \leq 18$

$z_1 \leq 8$

$-z_1 + z_2 \leq 2$

$z_1, z_2 \geq 0$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

III

$$\max -z_1 - z_2$$
$$3z_1 - z_2 \leq 18$$
$$z_1 \leq 8$$
$$-z_1 + z_2 \leq 2$$
$$z_1, z_2 \geq 0$$

$(0,0)$ é factível e é óptimo

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & \tilde{x}_s = b - Ax \\ & x_s \ge 0 \\ & x \ge 0 \end{array}\right\} \text{Forma slack}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \le 8 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \Longrightarrow$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \; c^T x \qquad \rightsquigarrow \qquad \max \; c^T x$$
$$Ax \leq b \qquad\qquad \tilde{x}_s = b - Ax$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad x_s \geq 0$$
$$\qquad\qquad x \geq 0$$

Forma slack

$$\max \; 2x_1 + x_2 \quad \Longrightarrow \quad \max \; 2x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \max \; 2x_1 + x_2$$

variáveis não básicas

$-2x_1 + x_2 \leq 4$	$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$	$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$
$x_1 \leq 8$	$x_4 = 8 - x_1$	$x_4 = 8 - x_1$
$x_1 + x_2 \leq 10$	$x_5 = 10 - x_1 - x_2$	$x_5 = 10 - x_1 - x_2$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

variáveis básicas

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial

(segue directamente da forma slack)

$$z = 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial

(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica

q̄ vai passar a básica: variável de entrada

(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

$$z = 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma std)

Passo 1 - Escolher a variável não básica que vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente negativo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica que vai passar a não básica: variável de saída

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 + x_2 \\
x_3 &= 4 + 2x_1 - x_2 \\
x_4 &= 8 - x_1 \\
x_5 &= 10 - x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma std)

Passo 1 - Escolher a variável não básica que vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente negativo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica que vai passar a não básica: variável de saída

$z = 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$8 = 8/1 \qquad \boxed{x_4 = 8 - x_1}$

$10 = 10/1 \qquad x_5 = 10 - x_1 - x_2$

Escolhemos o menor rácio

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica q̄ vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q̄ vai passar a não básica: variável de saída

Passo 3 - Pivotagem: expressar x_1 em termos de x_4

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= 4 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 \\ x_5 &= 10 - x_1 - x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} z &= +16 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 20 - x_2 - 2x_4 \\ x_1 &= 8 - x_4 \\ x_5 &= 2 - x_2 + x_4 \end{aligned}$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial

(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica q vai passar a básica: variável de entrada

(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q vai passar a não básica: variável de saída

Passo 3 - Pivotagem: expressar x_1 em termos de x_4

$$z = 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2 \quad \Longrightarrow$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

(I)

$\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma std)

Passo 1 - Escolher a variável não básica que vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica que vai passar a não básica: variável de saída

$\max \; -2y_1 + y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

Lembrar!

Passo 3 - Pivotagem: expressar x_1 em termos de x_4

$$z = 2x_1 + x_2$$
$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1$$
$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$\Longrightarrow$

$$z = 16 + x_2 - 2x_4$$
$$x_3 = 20 - x_2 - 2x_4$$
$$x_1 = 8 - x_4$$
$$x_5 = 2 - x_2 + x_4$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

(II)

$$z = +16 + x_2 - 2x_4$$

$20/1$ $\quad x_3 = 20 - x_2 - 2x_4 \quad \Rightarrow$

$$x_1 = 8 - x_4$$

$2/1$ $\quad x_5 = 2 - x_2 + x_4$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

(II)

$$z = +16 + x_2 - 2x_4$$

20/1 $\quad x_3 = 20 - x_2 - 2x_4$

$$x_1 = 8 - x_4$$

2/1 $\quad x_5 = 2 - x_2 + x_4$

$\Rightarrow$

$$z = +18 - x_4 - x_5$$

$$x_3 = 18 - 3x_4 + x_5$$

$$x_1 = 8 - x_4$$

$$x_2 = 2 - x_5 + x_4$$

Todos os coeficientes são negativos

$\Downarrow$

Terminámos!

$$\max \ -z_1 - z_2$$

$$3z_1 - z_2 \leq 18$$

$$z_1 \leq 8$$

$$-z_1 + z_2 \leq 2$$

$$z_1, z_2 \geq 0$$

Recordar