Auk 22

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

Passo 0 - Expressar o problema na forma slack

Passo 1 - Escolher a variável não básica
q̄ vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo
de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q̄ vai passar
a não básica: variável de saída

Passo 3 - Pivotagem

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações (Exemplo 1)

$\max \ 2x_1 + 5x_2$

s.t. $2x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

(I)

$z = 2x_1 + 5x_2$

$s_1 = 4 - 2x_1 + x_2$

$s_2 = 9 - x_1 - 2x_2$

$s_3 = 3 + x_1 - x_2$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações (Exemplo 1)

$\max \ 2x_1 + 5x_2$

s.t. $2x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

(I)

$z = 2x_1 + 5x_2$

$s_1 = 4 - 2x_1 + x_2$

$s_2 = 9 - x_1 - 2x_2 \qquad 9/2 = 4.5$

$s_3 = 3 + x_1 - x_2 \qquad 3/2 = 1.5$

↓

(II)

$z = 15 + 7x_1 - 5s_3$

$s_1 = 7 - x_1 - s_3 \qquad 7/1 = 7$

$s_2 = 3 - 3x_1 + 2s_3 \qquad 3/3 = 1$

$x_2 = 3 + x_1 - s_3$

↓

(III)

$z = 22 - 1/3\, s_3 - 7/3\, s_2$

$s_1 = 6 - 5/3\, s_3 + 1/3\, s_2$

$x_1 = 1 + 2/3\, s_3 - 1/3\, s_2$

$x_2 = 4 - 1/3\, s_3 - 1/3\, s_2$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações (Exemplo 2)

$$\max \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$s_1 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \qquad 30/1 = 30$$
$$s_2 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \qquad 24/2 = 12$$
$$s_3 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad 36/4 = 9$$

$$\downarrow$$

$$z = 27 + 1/4\, x_2 + 1/2\, x_3 - 3/4\, s_3$$
$$s_1 = 21 - 3/4\, x_2 - 5/2\, x_3 + 1/4\, s_3 \qquad 21/\,5/2 = \frac{42}{5} \approx 8$$
$$s_2 = 6 - 3/2\, x_2 - 4x_3 + 1/2\, s_3 \qquad 6/4 = 3/2$$
$$x_1 = 9 - 1/4\, x_2 - 1/2\, x_3 - 1/4\, s_3 \qquad 9/\,1/2 = 18$$

$$\downarrow$$

Slides da disciplina

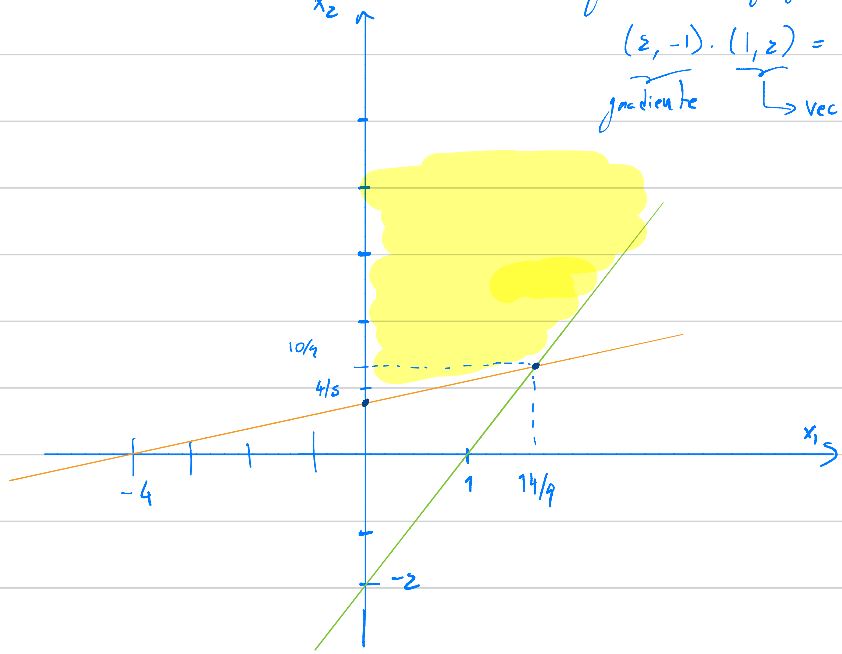
Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$
$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- O gradiente é perpendicular à restrição I:

$$\underbrace{(2,-1)}_{\text{gradiente}} \cdot \underbrace{(1,2)}_{\text{vector director}} = 2-2 = 0$$



I

$$2x_1 - x_2 = 2 \qquad -2 + 2x_1 = 0 \qquad x_1^0 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_2 - 2x_1 = -2 \qquad \Leftrightarrow x_1 = 1 \qquad x_2^0 = -2$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -2 + 2x_1$$

II

$$x_1 - 5x_2 = -4 \qquad 4/5 + 1/5\, x_1 = 0 \qquad x_1^0 = -4$$
$$5x_2 - x_1 = 4 \qquad 4 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \qquad x_2^0 = 4/5$$
$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1$$

- A solução básica inicial é exequível?

$$4/5 + 1/5 \cdot 14/9 = 4/5 + \frac{14}{5\cdot 9} = \frac{36}{5\cdot 9} + \frac{14}{5\cdot 9} = \frac{50}{5\cdot 9} = \frac{10}{9}$$

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

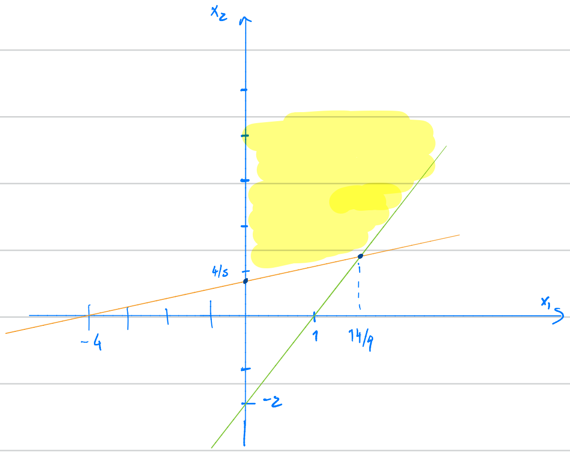
- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$\Downarrow$

Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

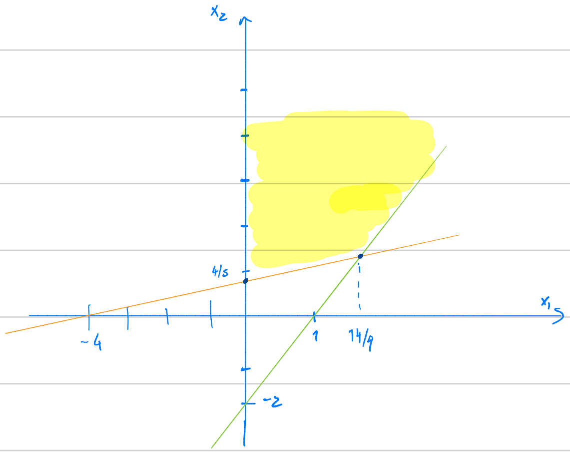
- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \le 2 \qquad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \le -4 \qquad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$\Downarrow$ Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 - x_0 \le 2$$

$$x_1 - 5x_2 - x_0 \le -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \ge 0$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

Escolhemos a restrição mais negativa e fazemos uma operação de pivotagem

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } & 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I} \\ & x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \max\ & -x_0 \\ \text{s.t. } & 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4 \\ & x_1, x_2, x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

Escolhemos a restrição mais negativa!

I
$$z = -x_0$$
$$s_1 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0$$
$$s_2 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$$

$\Downarrow$

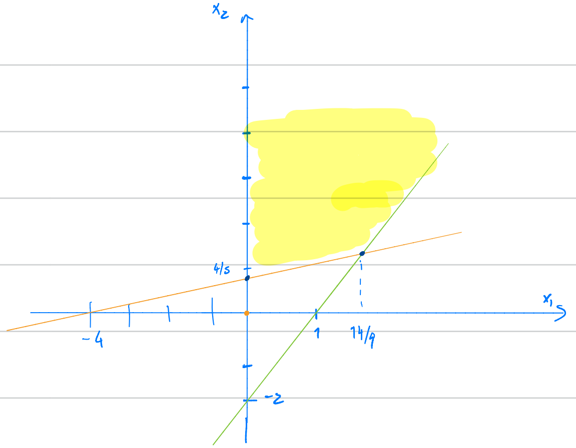
II
$$z = -4 - x_1 + 5x_2 - s_2$$
$$s_1 = 6 - x_1 - 4x_2 + s_2 \qquad 4/4 = 1$$
$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + s_2 \qquad 4/5 < 1$$

III
$$z = 0 - x_0$$
$$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0$$
$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0$$

$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$

$\downarrow$

$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$



Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \quad \text{I} \\ & x_1 - 5x_2 \le -4 \quad \text{II} \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} \max \quad & -x_0 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_0 \le 2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_0 \le -4 \\ & x_1, x_2, x_0 \ge 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

I

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ s_1 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\ s_2 &= -4 - x_1 + 5x_2 + x_0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

II

$$\begin{aligned} z &= -4 - x_1 + 5x_2 - s_2 \\ s_1 &= 6 - x_1 - 4x_2 + s_2 \qquad 4/4 = 1 \\ x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + s_2 \qquad 4/5 < 1 \end{aligned}$$

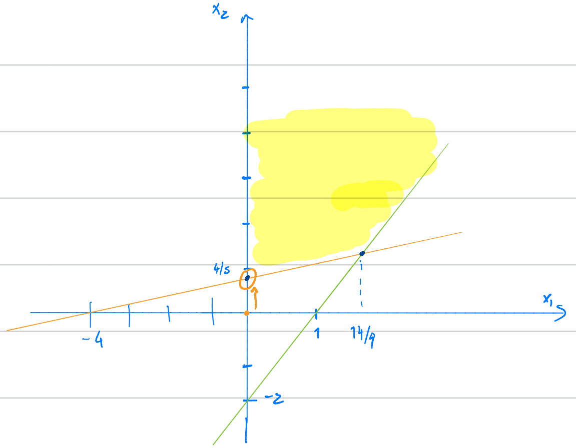
III

$$\begin{aligned} z &= 0 - x_0 \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$

$\downarrow$

$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$



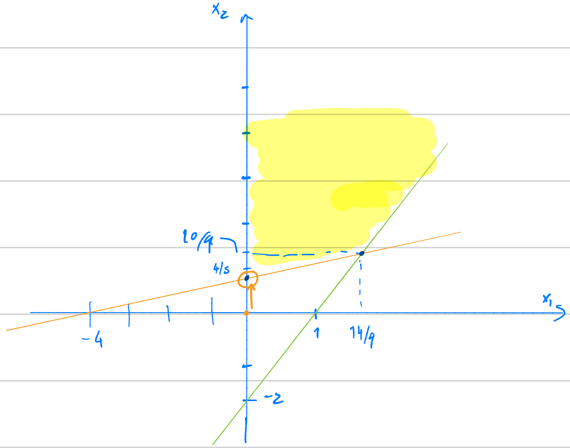
Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



- $z = 0 - x_0$

$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0$

$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0$

$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$

$\downarrow$

$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$

$z = 2x_1 - (4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2)$

$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2$

$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$

Resolvendo a função objectivo

$z = -4/5 + 9/5\, x_1 - 1/5 \cdot s_2$

$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$

$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$

$z = 2 - s_1$

$x_1 = 14/9 + 1/9\, s_2 - 5/9\, s_1$

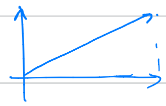
$x_2 = 10/9 + 10/45\, s_2 - 1/9\, s_1$

$\Rightarrow$ Não conseguimos melhorar o valor da função objectivo

Todos os coeficientes são negativos

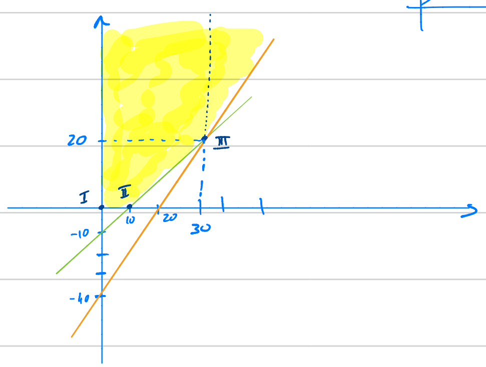
Algoritmo Simplex - Unboundedness

gradiente $\nabla f = (2,1)$



Exemplo: $\max \; 2x_1 + x_2$

$$x_1 - x_2 \leq 10 \quad (1)$$
$$2x_1 - x_2 \leq 40 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3), (4)$$



(1) $x_1 - x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = -10 + x_1$

$-10 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10$

(2) $2x_1 - x_2 = 40 \Leftrightarrow x_2 = -40 + 2x_1$

$-40 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 20$

$-10 + x_1 = -40 + 2x_1$

$\Leftrightarrow -10 + 40 = x_1$

$\Leftrightarrow x_1 = 30$

(I)

$z = 2x_1 + x_2$

$10/1 = 10 \quad s_1 = 10 - x_1 + x_2$

$40/2 = 20 \quad s_2 = 40 - 2x_1 + x_2$

(II)

$z = 20 + 3x_2 - 2s_1$

$x_1 = 10 + x_2 - s_1$

$20 \quad s_2 = 20 - x_2 + 2s_1$

(III)

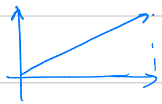
$z = 80 + 4s_1 - 3s_2$

$x_1 = 30 + s_1 - s_2$

$x_2 = 20 + 2s_1 - s_2$

Algoritmo Simplex - Unboundedness

gradiente $\nabla f = (2, 1)$



Exemplo: $\max \; 2x_1 + x_2$

$x_1 - x_2 \leq 10$ (1)

$2x_1 - x_2 \leq 40$ (2)

$x_1, x_2 \geqslant 0$ (3), (4)

(1) $x_1 - x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = -10 + x_1$

$-10 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10$

(2) $2x_1 - x_2 = 40 \Leftrightarrow x_2 = -40 + 2x_1$

$-40 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 20$

$-10 + x_1 = -40 + 2x_1$

$\Leftrightarrow -10 + 40 = x_1$

$\Leftrightarrow x_1 = 30$

(I)

$z = 2x_1 + x_2$

$10/1 = 10$ $\quad s_1 = 10 - x_1 + x_2$

$40/2 = 20$ $\quad s_2 = 40 - 2x_1 + x_2$

(II)

$z = 20 + 3x_2 - 2s_1$

$x_1 = 10 + x_2 - s_1$

20 $\quad s_2 = 20 - x_2 + 2s_1$

(III)

$z = 80 + 4s_1 - 3s_2$

$x_1 = 30 + s_1 - s_2$

$x_2 = 20 + 2s_1 - s_2$

$\Downarrow$

Todos os coeficientes são positivos

$$\begin{cases} -s_1 + s_2 \leq 30 \\ -2s_1 + s_2 \leq 20 \end{cases}$$

(*) $\left\{ (20, 30) + \lambda \cdot (1, 2) \;\middle|\; \lambda \geqslant 0 \right\}$

direcção exequível q aumenta o valor da função objectivo mais rapidamente

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

$$\max \ 2x_1 + x_2$$

s.t.

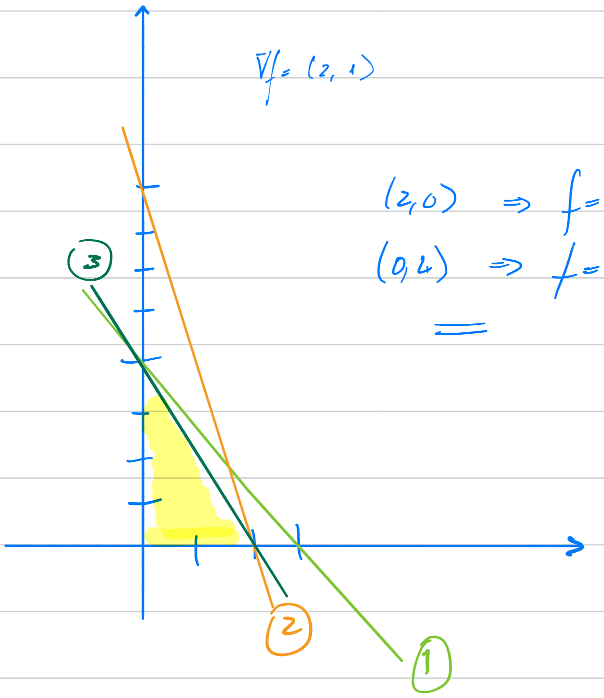
$4x_1 + 3x_2 \le 12$ (1)

$4x_1 + x_2 \le 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 \le 8$ (3)

$x_1, x_2 \ge 0$

$\nabla f = (2, 1)$



$(2,0) \Rightarrow f = 4$

$(0,4) \Rightarrow f = 4$

(1) $4x_1 + 3x_2 = 12$

$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 4/3\, x_1$

$0 = 4 - 4/3\, x_1 \Leftrightarrow 4/3\, x_1 = 4$

$\Leftrightarrow x_1 = 3$

(2) $4x_1 + x_2 = 8$

$x_2 = 8 - 4x_1$ $\quad$ $8 - 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

(3) $4x_1 + 2x_2 = 8$ $\quad$ $4 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 4$

$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 2x_1$

Vector director da recta 3: $(1, -2)$

$(2,1) \cdot (1,-2) = 2 - 2 = 0$

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

$\max \ 2x_1 + x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$ (1)

$4x_1 + x_2 \le 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 \le 8$ (3)

$x_1, x_2 \ge 0$ (4) e (5)

(I)

$z = 2x_1 + x_2$

$s_1 = 12 - 4x_1 - 3x_2$ $\quad 12/4 = 3$

$s_2 = 8 - 4x_1 - x_2$ $\quad 8/4 = 2$

$s_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$ $\quad 8/4 = 2$

(II)

$z = 4 + 1/2\,x_2 - 1/2\,s_2$

$s_1 = 4 - 2x_2 + s_2$ $\quad 4/2 = 2$

$x_1 = 2 - 1/4\,x_2 - 1/4\,s_2$ $\quad 2/1/4 = 8$

$s_3 = 0 - x_2 + s_2$ $\quad 0/1 = 0$

(2), (5)

(III)

$z = 4 - 1/2\,s_3$

$s_1 = 4 - s_2 + 2s_3$

$x_1 = 2 - 1/2\,s_2 + 1/4\,s_3$

$x_2 = 0 + s_2 - s_3$

(2), (3)

(IV)

$z = 4 - 1/2\,s_3$

$s_1 = 4 + s_3 - x_2$

$x_1 = 2 - 1/4\,s_3 - 1/2\,x_2$

$s_2 = 0 + x_2 + s_3$

(3), (5)

operação de pivotagem extra

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

$$\max \; 2x_1 + x_2$$

s.t.

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$ (1)

$4x_1 + x_2 \leq 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4) e (5)

I

$z = 2x_1 + x_2$ (0,0)

$s_1 = 12 - 4x_1 - 3x_2$ $12/4 = 3$

$s_2 = 8 - 4x_1 - x_2$ $8/4 = 2$

$s_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$ $8/4 = 2$

II

$z = 4 + 1/2\, x_2 - 1/2\, s_2$ (2,0)

$s_1 = 4 - 2x_2 + s_2$ $4/2 = 2$

$x_1 = 2 - 1/4\, x_2 - 1/4\, s_2$ $2/\tfrac{1}{4} = 8$

$s_3 = 0 - x_2 + s_2$ $0/1 = 0$

(2), (5)

III

$z = 4 - 1/2\, s_3$ (2,0)

$s_1 = 4 - s_2 + 2s_3$

$x_1 = 2 - 1/2\, s_2 + 1/4\, s_3$

$x_2 = 0 + s_2 - s_3$

(2), (3)

IV

$z = 4 - 1/2\, s_3$

$s_1 = 4 + s_3 - x_2$

$x_1 = 2 - 1/4\, s_3 - 1/2\, x_2$

$s_2 = 0 + x_2 + s_3$

(3), (5)

operação de pivotagem extra

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

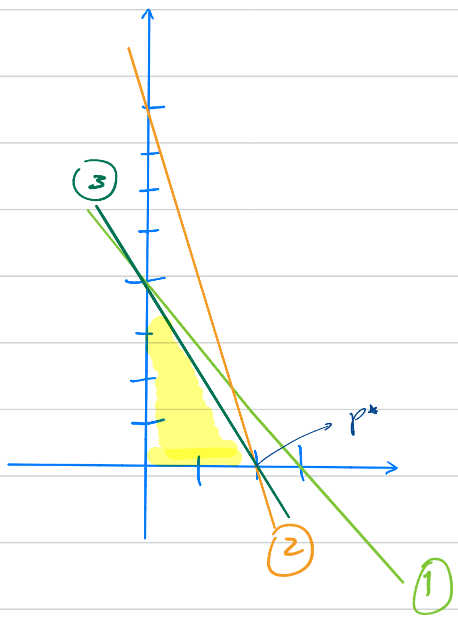
max $2x_1 + x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ (1)

$4x_1 + x_2 \leq 8$ (2)

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4) e (5)



(I) $z = 2x_1 + x_2$ $(0,0)$

$s_1 = 12 - 4x_1 - 3x_2$ $12/4 = 3$

$s_2 = 8 - 4x_1 - x_2$ $8/4 = 2$

$s_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$ $8/4 = 2$

(II) $z = 4 + 1/2\, x_2 - 1/2\, s_2$ $(2,0)$

$s_1 = 4 - 2x_2 + s_2$ $4/2 = 2$

$x_1 = 2 - 1/4\, x_2 - 1/4\, s_2$ $2/\tfrac{1}{4} = 8$

$s_3 = 0 - x_2 + s_2$ $0/1 = 0$

(2), (5)

(III) $z = 4 - 1/2\, s_3$ $(2,0)$

$s_1 = 4 - s_2 + 2s_3$

$x_1 = 2 - 1/2\, s_2 + 1/4\, s_3$

$x_2 = 0 + s_2 - s_3$

(2), (3)

(IV) $z = 4 - 1/2\, s_3$

$s_1 = 4 + s_3 - x_2$

$x_1 = 2 - 1/4\, s_3 - 1/2\, x_2$

$s_2 = 0 + x_2 + s_3$

(3), (5)

- Soluções Degeneradas

(1) Soluções degeneradas ocorrem quando um dos vértices do poliedro corresponde à intersecção de um nº de hiperplanos superior à dimensionalidade do problema (e.g. P^*: (2), (3), (5))

(2) Uma solução diz-se degenerada quando pelo menos uma das variáveis básicas assume o valor 0.

(3) Soluções degeneradas podem causar um ciclo infinito no algoritmo simplex.

Algoritmo Simplex - Múltiplas Soluções Ótimas

Exemplo:

$$\max \ 4x_1 + 14x_2$$

s.t.

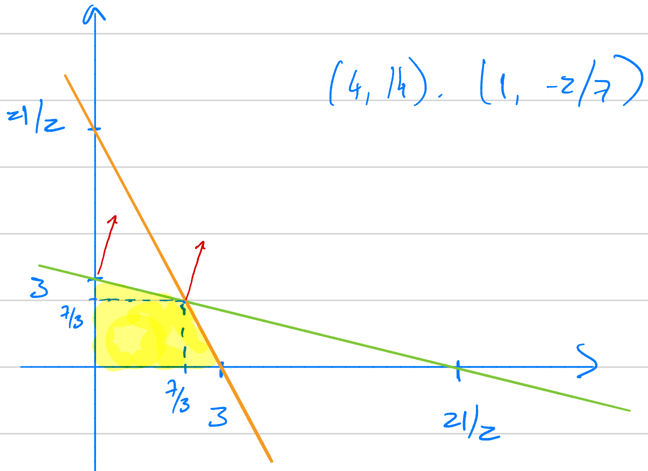
$$2x_1 + 7x_2 \leq 21 \quad \text{I}$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\nabla f = (4, 14)$

$(4, 14) \cdot (1, -2/7) = 4 - \frac{2}{7} \times 14 = 4 - 4$
$= 0$



I

$2x_1 + 7x_2 = 21$

$\Leftrightarrow 7x_2 = 21 - 2x_1$

$\Leftrightarrow x_2 = 3 - \frac{2}{7}x_1$

$0 = 3 - 2/7\, x_1$

$\Leftrightarrow 2/7\, x_1 = 3$

$\Leftrightarrow x_1 = 21/2$

$x_1^\circ = 21/2$

$x_2^\circ = 3$

II

$7x_1 + 2x_2 = 21$

$\Leftrightarrow 2x_2 = 21 - 7x_1$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{21}{2} - 7/2\, x_1$

$0 = 21/2 - 7/2\, x_1$

$x_1 = \frac{21}{7} = 3$

$x_1^\circ = 3$

$x_2^\circ = 21/2$

$3 - 2/7\, x_1 = 21/2 - 7/2\, x_1$

$7/2\, x_1 - 2/7\, x_1 = 21/2 - 3$

$\frac{49}{14}x_1 - \frac{4}{14}x_1 = 21/2 - 6/2$

$\frac{45}{14}x_1 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{45}{7}x_1 = 15$

$\Leftrightarrow \frac{3x_1}{7} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 7/3$

$x_2 = 3 - 2/7 \times 7/3$
$= 3 - 2/3$
$= 7/3$

Algoritmo Simplex - Múltiplas Soluções Óptimas

Exemplo:

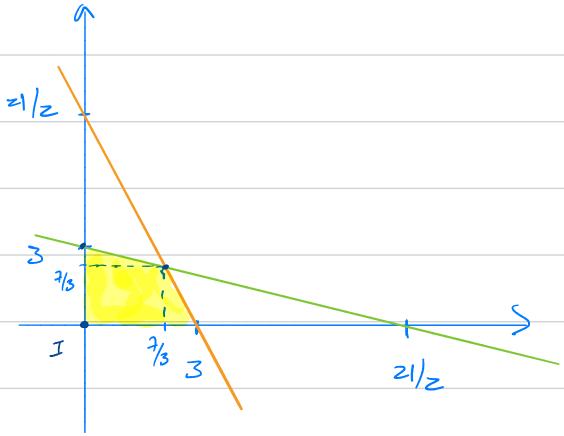
$$\max \quad 4x_1 + 14x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 7x_2 \le 21 \quad \text{(I)}$$

$$7x_1 + 2x_2 \le 21 \quad \text{(II)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



I

$$z = 4x_1 + 14x_2$$

$$s_1 = 21 - 2x_1 - 7x_2 \qquad 21/7 = 3$$

$$s_2 = 21 - 7x_1 - 2x_2 \qquad 21/2 = 10.5$$

II

$$z = 42 - 2s_1$$

$$\frac{3}{2/7} = \frac{21}{2} \qquad x_2 = 3 - 2/7\, x_1 - 1/7\, s_1$$

$$\frac{15}{45/7} = 7/3 \qquad s_2 = 15 - 45/7\, x_1 + 2/7\, s_1$$

x_1 não aparece na função objectivo e é não básica ⇒ Podemos incrementar x_1 sem prejudicar a função objectivo

III

$$z = 42 - 2s_1$$

$$x_2 = 7/3 - 7/45\, s_1 + 2/45\, s_2$$

$$x_1 = \frac{7}{3} + 2/45\, s_1 - 7/45\, s_2$$

Algoritmo Simplex - Múltiplas Soluções Óptimas

Exemplo:

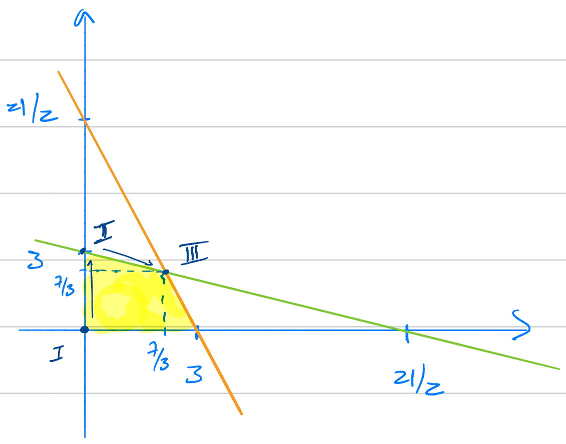
$$\max \quad 4x_1 + 14x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21 \quad \text{I}$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



I

$$z = 4x_1 + 14x_2$$

$$s_1 = 21 - 2x_1 - 7x_2 \qquad 21/7 = 3$$

$$s_2 = 21 - 7x_1 - 2x_2 \qquad 21/2 = 10.5$$

II

$$z = 42 - 2s_1$$

$$\frac{3}{2/7} = \frac{21}{2} \qquad x_2 = 3 - 2/7\, x_1 - 1/7\, s_1$$

$$\frac{15}{45/7} = 7/3 \qquad s_2 = 15 - 45/7\, x_1 + 2/7\, s_1$$

x_1 não aparece na função objectivo e é não básica ⇒ Podemos incrementar x_1 sem prejudicar a função objectivo

III

$$z = 42 - 2s_1$$

$$x_2 = 7/3 - 7/45\, s_1 + 2/45 \cdot s_2$$

$$x_1 = \frac{7}{3} + 2/45\, s_1 - 7/45 \cdot s_2$$

Dualidade

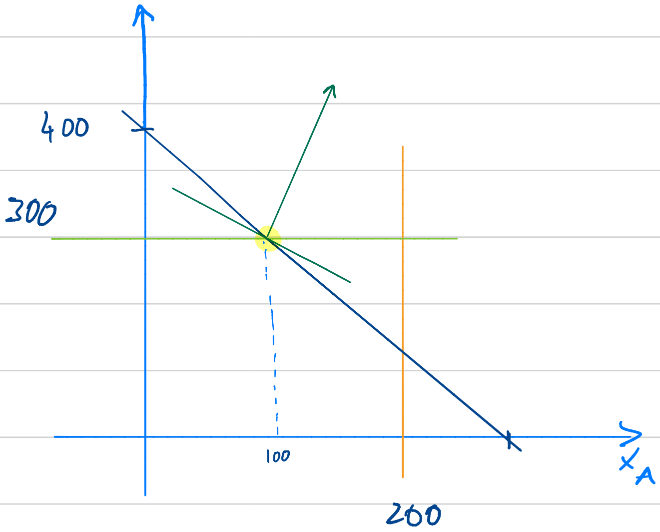
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$ (I)

$x_B \leq 300$ (II)

$x_A + x_B \leq 400$ (III)

$x_A, x_B \geq 0$



Pergunta: Conseguimos encontrar um upper bound para o valor da função objectivo olhando para as restrições (I) e (II)?

- $1 \times \text{(I)} + 6 \times \text{(II)} \iff x_A + 6x_B \leq 200 + 6 \times 300$

$\iff x_A + 6x_B \leq 2000$

A função objectivo nunca pode ter um valor superior a $\underline{2000}$.

→ Este upper bound não é apertado (o máximo é 1900).
Conseguimos uma combinação melhor?

Dualidade

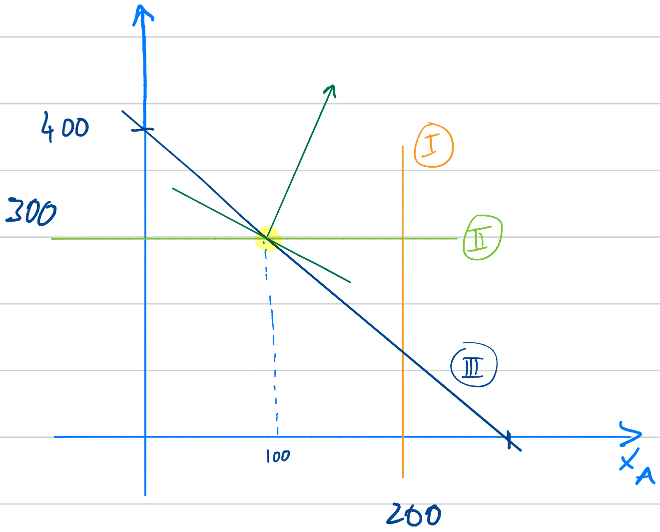
max $x_A + 6x_B$

$x_A \le 200$ (I)

$x_B \le 300$ (II)

$x_A + x_B \le 400$ (III)

$x_A, x_B \ge 0$



- $1 \times (I) + 6 \times (II) \Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 200 + 6 \times 300$

  $\Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 2000$

  A função objectivo nunca pode ter um valor superior a 2000.

- $5 \times (II) + 1 \times (III) \Leftrightarrow 5 \times x_B + x_A + x_B \le 5 \times 300 + 400$

  $\Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 1900$

  Este upper bound é apertado!

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o <u>mais pequeno</u> upper bound para a função objectivo

$$\lambda_I \times \quad x_A \leq 200$$
$$\lambda_{II} \times \quad x_B \leq 300$$
$$\lambda_{III} \times \quad x_A + x_B \leq 400$$
$$+$$

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o mais pequeno upper bound para a função objectivo

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$
\begin{aligned}
\lambda_I \times \quad & x_A \leq 200 \\
\lambda_{II} \times \quad & x_B \leq 300 \\
\lambda_{III} \times \quad & x_A + x_B \leq 400 \\
+ \quad & \overline{\hphantom{x_A + x_B \leq 400}}
\end{aligned}
$$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\min \quad & 200 \times \lambda_I + 300 \times \lambda_{II} + 400 \times \lambda_{III} \\
& \lambda_I + \lambda_{III} \geq 1 \\
& \lambda_{II} + \lambda_{III} \geq 6 \\
& \lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \geq 0
\end{aligned}
\right\} \text{Programa Dual}
$$

$$(\lambda_I^*, \lambda_{II}^*, \lambda_{III}^*) = (0, 5, 1)$$

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o mais pequeno upper bound para a função objectivo

$$\begin{aligned}
\lambda_I \times \quad & x_A \leq 200 \\
\lambda_{II} \times \quad & x_B \leq 300 \\
\lambda_{III} \times \quad & x_A + x_B \leq 400 \\
+ \quad &
\end{aligned}$$

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

$$\underbrace{\begin{aligned}
\min \quad & 200 \times \lambda_I + 300 \times \lambda_{II} + 400 \times \lambda_{III} \\
& \lambda_I + \lambda_{III} \geq 1 \\
& \lambda_{II} + \lambda_{III} \geq 6 \\
& \lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \geq 0
\end{aligned}}_{\text{Programa Dual}}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min \quad & y^T b \\
& y^T A \geq c^T \\
& y \geq 0
\end{aligned}$$

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o <u>mais pequeno</u> upper bound para a função objectivo

$$\begin{aligned} \lambda_I \times \quad & x_A \leq 200 \\ \lambda_{II} \times \quad & x_B \leq 300 \\ \lambda_{III} \times \quad & x_A + x_B \leq 400 \\ + \quad & \end{aligned}$$

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

$$\underbrace{\begin{aligned} \min \quad & 200 \times \lambda_I + 300 \times \lambda_{II} + 400 \times \lambda_{III} \\ & \lambda_I + \lambda_{III} \geq 1 \\ & \lambda_{II} + \lambda_{III} \geq 6 \\ & \lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \geq 0 \end{aligned}}_{\text{Programa Dual}}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ & y^T A \geq c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema da Dualidade Forte

Se qualquer um dos problemas tiver solução então o outro também tem e as soluções coincidem.