

Análise e Síntese de Algoritmos

2º Teste

Duração: 1h30m (09h00-10h30)

- As questões deste teste são geradas unicamente para o aluno número: **89413**
- O grupo I deve ser submetido no Fénix através do ficheiro **asa1920-t2-gI.json**
- As respostas dos restantes grupos devem ser efectuadas em folhas manuscritas, e as suas digitalizações submetidas no Fénix
- Certifique-se que o seu nome e número de aluno está legível na digitalização
- **Bom trabalho!**

I.a) Considere o problema de compressão de dados de um ficheiro usando a codificação de Huffman. Indique o código livre de prefixo óptimo para cada carácter num ficheiro com 500 caracteres com a seguinte frequência de ocorrências: $f(a) = 18, f(b) = 12, f(c) = 13, f(d) = 5, f(e) = 7, f(f) = 45$. Quando constrói a árvore, considere o bit 0 para o nó com menor frequência.

| | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | c | d | e | f |
| Codificação | | | | | | |
| Total Bits | | | | | | |

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| c[4,3] | c[4,4] | c[7,4] | c[5,7] | c[7,8] |
| | | | | |

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| $P =$ | b | b | b | a | a | b |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\pi[i]$ | | | | | | |

[illegible]

I.d) Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{array}{lll} \min & -1x_1 - x_2 + x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 & \\ & -2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -7 & \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4 & \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Indique o valor da função objectivo e o respectivo valor das variáveis básicas e não-básicas após uma única operação de pivot.

| Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | | | | | |

II. (2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = 10 val.)

II.a) O Eng. Caracol foi encarregado de apresentar uma proposta para a construção de postos de primeiros socorros ao longo da autoestrada AX, que começa no quilómetro 0 e termina no quilómetro k . O Eng. Caracol dispõe de uma lista de n locais candidatos. Cada local candidato, $1 \leq i \leq n$, é associado à sua distância ao quilómetro 0, d_i , e ao seu custo estimado de construção, c_i . Sabendo que dois postos de primeiros socorros consecutivos não podem estar a uma distância superior a D quilómetros, o objectivo do Eng. Caracol é determinar o conjunto de locais candidatos que satisfazem a restrição do problema pelo menor custo possível.

1. Seja $O(i)$ o custo da solução óptima para o troço da autoestrada AX entre o quilómetro 0 e o local candidato i , que atribui necessariamente um posto de primeiros socorros ao local candidato i . Defina $O(i)$ recursivamente, completando os campos abaixo.

$$O(i) = \begin{cases} \text{[]} & \text{se } i > 1 \\ \text{[]} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. Complete o template de código em baixo que calcula a quantidade $O(i)$ para $1 \leq i \leq n$ e indique a respectiva complexidade assintótica.

```

FindO( $c[1..n]$ ,  $d[1..n]$ )
    let  $O[1..n]$  be a new vector of size  $n$ 
     $O[1] = c[1]$ 
    for  $i = 2$  to  $n$  do
        
    endfor
    return  $O$ 

```

3. Explique como determinar o custo da melhor solução a partir do vector O .

II.b) Considere a seguinte variação do algoritmo de Rabin-Karp para emparelhamento de cadeias de caracteres sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, que usa a função de hash:

$$h(x_1 \dots x_n) = (\alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_n)) \bmod 5$$

onde: $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 2$ e $\alpha(c) = 3$. Seja $T = abab^2ab^3 \dots ab^{n-1}ab^n$ a string de texto a processar. Calcule o número de *hits* espúrios, em função de n , gerados ao procurar os seguintes padrões em T (deve apresentar os cálculos):

Nota: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

1. $P_1 = abb$

2. $P_2 = abc$

II.c)

Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a} & 5x_1 & +2x_2 & \leq 60 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \leq 40 \\ & -3x_1 & +8x_2 & \leq 40 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0 \end{array}$$

1. Desenhe o conjunto exequível e resolva geometricamente o programa linear (indique tanto o valor máximo como as coordenadas onde esse valor é atingido).
2. Formule o programa linear dual e calcule a respectiva solução a partir da solução do programa primal (indique tanto o valor mínimo como as coordenadas onde esse valor é atingido). Nota: pode obter o valor das coordenadas resolvendo o sistema de equações do problema dual colocando a 0 as variáveis que correspondem a restrições não activas.

II.d) Uma matriz de incompatibilidades é uma matriz quadrada cujas células guardam valores decimais entre 0 e 1. Intuitivamente, dada uma matriz de incompatibilidades M , $n \times n$, a célula M_{ij} guarda a incompatibilidade entre os índices i e j ; M_{ij} é 0 se i e j são completamente compatíveis e $M_{ij} = 1$ se i e j são completamente incompatíveis. Dado um sub-conjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, o nível de incompatibilidade do conjunto é dado por: $\sum_{i,j \in I} M_{ij}$. O problema das incompatibilidades define-se formalmente da seguinte maneira:

Incompat = $\{\langle M, k, v \rangle \mid M \text{ contém um sub-conjunto de índices de tamanho } k \text{ e incompatibilidade igual ou inferior a } v\}$

1. Mostre que o problema **Incompat** está em **NP**.
2. Mostre que o problema **Incompat** é NP-difícil por redução a partir do problema **ISet**, que é sabido tratar-se de um problema NP-completo e que se define em baixo. Não é necessário provar formalmente a equivalência entre os dois problemas; é suficiente indicar a redução e a respectiva complexidade.
Pista: Dado um grafo G indique como construir uma matriz de incompatibilidades cujos índices correspondem aos vértices de G tendo em conta o problema **ISet**.

Problema ISet: Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido; dizemos que $V' \subseteq V$ é um conjunto de vértices independentes em G se e apenas se $\forall u, v \in V'. (u, v) \notin E$. O problema **ISet** define-se formalmente da seguinte maneira:

ISet = $\{\langle G, k \rangle \mid G \text{ contém um conjunto de vértices independentes de tamanho } k\}$