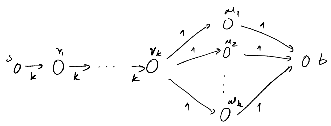
Aula 11

- Algoritmo Push/Relabel
  - Definições Elementares: pré-fluxo, push, exemplos
  - Invariantes: função de altura, relabel, inicialização
  - Manutenção do Invariante e Correção
  - Complexidade:
    - Upper bound no nº de relabels
    - Upper bound no nº de non-saturating pushes
    - Upper bound no nº de saturating pushes

Exemplo 1 [Limitações do Método de Ford Fulkerson]



Complexidade do método de Ford Fulkerson medida em k:

$\underline{O(k^2)}$

[Ideia - Push/Relabel] Levamos k unidades de fluxo de s até v_k e depois distribuímos o fluxo pelos vértices $\{u_i\}_{i=1}^{k}$.

- Para conseguirmos levar k unidades de fluxo de uma só vez de s para v_k temos de violar a conservação de fluxo.

Definição 1 [Pré-fluxo]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, uma função $f: V\times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ diz-se um pré-fluxo sse satisfaz as seguintes restrições:

- pré-fluxo: semelhante a fluxo mas relaxamos a conservação de fluxo: flow in $\geq$ flow out

[Restrição de Capacidade]

$$\forall u,v \in V.\quad 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$$

[Conservação de Fluxo]

$$\forall u \in V.\quad \sum_{v\in V} f(v,u) \geq \sum_{v\in V} f(u,v)$$

- Os vértices podem receber mais fluxo q aquele q podem descarregar.

- Para cada vértice $u \in V$, o excesso de fluxo de u é definido como se segue:

$$e(u) = \sum_{v\in V} f(v,u) - \sum_{v\in V} f(u,v)$$

Algoritmo 1 [Push]

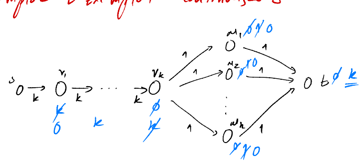
```
Push(u, v)
  let Δ = min(u.e, c_f(u,v))
  if ((u,v) ∈ E)
  |   (u,v).f = (u,v).f + Δ
  |   u.e = u.e - Δ
  else (v,u).f = (v,u).f - Δ
  |   u.e = u.e - Δ
```

Comentário:

- Quando fazemos um push(u,v) enviamos o excesso de fluxo de u para v
- Assim sendo, depois da operação de push v vai ficar com excesso de fluxo.

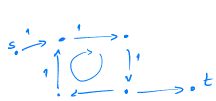
Só pode ser invocado se $h(u) = h(v)+1$, $c_f(u,v)>0$ e $u.e>0$

Exemplo 2 [Exemplo 1 - Continuação]



1. Saturamos o arco q liga s a v_1
2. push(v_1,v_2), ..., push(v_{k-1},v_k)
3. push(v_k,u_1), ..., push(v_k,u_k)
4. push(u_1,t), ..., push(u_k,t)

Comentário: Há q ter cuidado com a ordem pela qual fazemos os pushes:

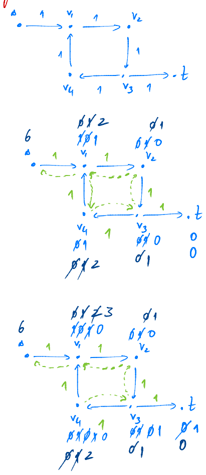


Comentário: Observamos q no Exemplo 2, a rede residual nunca contém caminhos s-t.

- Como é que garantimos q não fazemos pushes em loop?

Precisamos de uma "noção" de memória

Exemplo 3 [Exemplo 2 - Continuação]



- Associar uma "altura" a cada nó.
- No início o nó s tem altura $|V|$ e todos os outros nós têm altura 0.
- Empurramos o fluxo downhill, mas não demasiado rapidamente. $u \xrightarrow{push} v$ $h(u) = h(v)+1$
- Incrementamos a altura de um nó quando o nó tem excesso de fluxo e todos os seus vizinhos na rede residual estão à mesma altura ou são mais altos.

Observação: Se $(u,v) \in E_f$ e $h(u) \leq h(v)+1$

↳ Faz lembrar a desigualdade triangular, mas ao contrário!

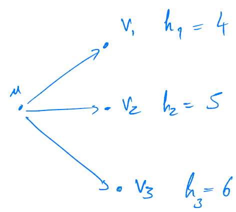
↳ $(u,v) \in E_f \Rightarrow$
- $(v,u) \in E$ (+)
- $f(u,v) \geq 0$

(+) (v,u) transporta fluxo $\Rightarrow h(u) \leq h(v)+1$

Invariante de Altura do Algoritmo de Push-relabel

- Associamos cada vértice $v \in V$ com uma altura $h(v)$.

A função $h: V \to \mathbb{N}_0^+$ é tal que:
- $h(s) = |V|$
- $h(t) = 0$
- $(u,v) \in G_f \Rightarrow h(u) \leq h(v)+1$



- Qual é a altura máxima que u pode ter? 5

- Invariantes do Algoritmo de Push Relabel
  - Pré fluxo
  - Invariante de altura

  $\Rightarrow$ Não há um caminho s-t na rede residual

O que o algoritmo faz é transformar o pré-fluxo em fluxo empurrando fluxo ao longo da rede residual.

- Invariantes dos Algoritmos baseados em caminhos de aumento
  - Mantemos um fluxo

    ↳ Mantemos um fluxo e aumentamos o valor do fluxo até não haver um caminho s-t na rede residual.

Algoritmo 2 [Initialize]

```
Initialize (G, s)
  for each v ∈ V
    v.e = 0
    v.h = 0
  for each (u,v) ∈ E
    (u,v).f = 0
  for each v ∈ G.Adj[s]
    v.e = c(s,e)
    (s,v).f = c(s,e)
    s.e = s.e - c(s,e)
  s.h = |V|
```

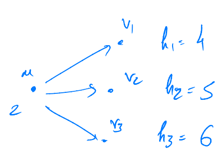
Algoritmo 3 [Relabel]

Relabel (u)

$u.h = 1 + \min\{ v.h \mid (u,v) \in E_f \}$

v → u

Só pode ser aplicado se $\forall (u,v) \in E_f .\ u.h \leq v.h$



Relabel (u) → $u.h = 5$

Algoritmo 4 [Push-Relabel]

PushRelabel(G, s, t)

  Initialize(G, s)

  While $\exists u.\ u.e > 0$ (f is not a flow)

    let u be a vertex s.t. $u.e > 0$

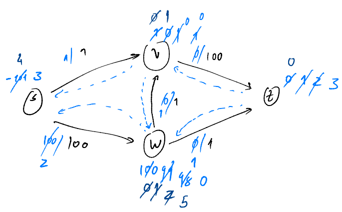
    let $v \in V$ be such that $(u, v) \in E_f \wedge h(u) = h(v) + 1$

    if $(v \mathrel{!=} Nil)$

      push(u, v)

    else Relabel(u)

Exemplo 4 [Push/Relabel in Action]



Correcção do Algoritmo de Push Relabel

Provar q:

1- o invariante é satisfeito depois da inicialização

2- o invariante é mantido depois de operações de push e relabel

Invariante

1 f é um pré-fluxo

2 $\forall v \in V.\ (u, v) \in E_f \Rightarrow h(u) \leq h(v) + 1$ → $h(u) > h(v) + 1 \Rightarrow (u, v) \notin G_f$

Lema 1.1 [Initialize - Invariante 1]

Após Initialize(G, s) f é um pré-fluxo.

Prova:

1 $(u, v) \in E$ e $u \neq s$

$$f(u, v) = 0 \leq c(u, v)$$

2 $(s, v) \in E$

$$f(u, v) = c(u, v) \leq c(u, v)$$

Restrição de capacidade

3 $u \in out(s)$

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = c(s, u) \geq \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

4 $u \in V \setminus (\{s\} \cup out(s))$

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = 0 = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

Pré-fluxo

Lema 1.2 [Initialize - Invariante 2]

Após Initialize(G, s), temos que: $\forall (u,v) \in E_f .\ h(u) \leq h(v)+1$

Prova:

$$(u,v) \in E_f \Rightarrow \underbrace{(u,v) \in E \wedge u \neq s}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{(v,u) \in E \wedge v = s}_{\mathrm{II}}$$

I $\quad (u,v) \in E \wedge u \neq s$

$h(u) = 0$ | se $v = s \Rightarrow h(s) = |V|$ e $|V|+1 \geq 0$
| se $v \neq s \Rightarrow h(s) = 0$ e $0+1 = 1 \geq 0$

II $\quad (v,u) \in E \wedge v = s$

$h(u) = 0$ e $h(v) = |V|$

$0 \leq |V|+1$

Lema 1.3 [Push - Invariante 1]

Após Push(u, v) f é um pré fluxo.

Prova:

- Seja f' o pré fluxo antes de Push(u,v)
- Há q provar:

a) $\sum_{w \in V} f(w,u) - \sum_{w \in V} f(u,w) \geq 0$

b) $\sum_{v \in V} f(w,v) - \sum_{w \in V} f(v,w) \geq 0$

c) Se $(u,v) \in E \Rightarrow f(u,v) \leq c(u,v)$

d) Se $(u,v) \notin E \Rightarrow f(u,v) = 0$
e $0 \leq f(v,u) \leq c(u,v)$

a)

$$\sum_{w \in V} f(w,u) - \sum_{w \in V} f(u,w) = \left(\sum_{w \in V} f'(w,u) - \sum_{w \in V} f'(u,w)\right) - \Delta$$

$$= u.e - \Delta \quad \text{porque } \Delta \leq u.e$$
$$\geq 0$$

b) $$\sum_{w \in V} f(w,v) - \sum_{w \in V} f(v,w) = \left(\sum_{w \in V} f'(w,v) - \sum_{w \in V} f'(v,w)\right) + \Delta$$

$$= v.e + \Delta \quad \text{porque } \Delta \geq 0 \text{ e } v.e \geq 0$$
$$\geq 0$$

c) $(u,v) \in E \Rightarrow 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$

$f(u,v) = f'(u,v) + \Delta$
≥ 0

$\Delta \leq c_f'(u,v) = c(u,v) - f'(u,v)$

$\Delta + f'(u,v) \leq c(u,v) - f'(u,v) + f'(u,v) = c(u,v)$

d) $(u,v) \notin E$

- $f(u,v) = 0$ ✓
- $f(v,u) = f'(v,u) - \Delta$

$\Delta \leq f'(v,u)$

$\Rightarrow 0 \leq f'(v,u) - \Delta$

Lema 1.4 [Push - Invariante 2]

O invariante da altura é satisfeito após Push(u,v).

Prova:

- $\forall (u,v) \in E_f .\ h(u) \leq h(v)+1$
- A operação de Push não altera as alturas dos nós mas pode criar um arco adicional entre v e u.
- Temos q provar q (v,u) observa o invariante:

$$h(v) \leq h(u)+1$$

→ Mas só podemos fazer um push se $h(v) = h(u)-1$, portanto $h(v) \leq h(u)+1$.

Lema 1.5 [Relabel - Invariante 1]

Depois de uma operação de Relabel, f é um pré-fluxo.

Prova: A operação de Relabel não muda os fluxos q atravessam o grafo.

Lema 1.6 [Relabel - Invariante 2]

Relabel(u) mantém o invariante de alturas.

Prova:

- Seja h' a função de altura antes do relabel e h a função de altura depois do Relabel.

  Há q provar q:

  $\forall v \in V .\ (u,v) \in E_f \Rightarrow h(u) \leq h(v)+1$

- $\forall v \in V / \{u\} .\ h(v) = h'(v)$

$h(u) = \min \{ h'(v)+1 \mid (u,v) \in E_f \}$

$= \min \{ h(v)+1 \mid (u,v) \in E_f \}$

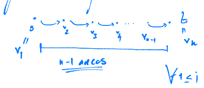
$\forall v \in out(u) .\ h(u) \leq h(v)+1$

Lema 2 [Função de Altura e Corte]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo, f um pré-fluxo em G e h uma função de altura consistente com f; então não existe um caminho s-t em G_f.

Prova

- Suponhamos q existe um caminho s-t em G_f. Este caminho terá no ma



$$\forall_{1 \le i < n}.\ h(v_i) \le h(v_{i+1}) + 1$$

$$\forall_{1 \le i < n}.\ h(v_i) - h(v_{i+1}) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} h(v_i) - h(v_{i+1}) \le n-1$$

$$h(v_1) - h(v_n) \le n-1$$

$$n - 0 \le n-1$$

$$n \le n-1 \quad \therefore$$

Teorema 1 [Correcção do Algoritmo de Push Relabel]

Se algoritmo Push-Relabel termina, então calcula o fluxo máximo entre s e t.

Prova:

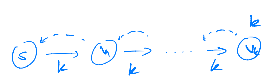
- Depois da execução da função initialize o invariante do algoritmo é satisfeito (Lemas 1.1 e 1.2)
- O loop principal do algoritmo mantém o invariante (Lemas 1.3 - 1.6)
- Quando o loop termina nenhum vértice em $V \setminus \{s,t\}$ tem excesso de fluxo, logo f é um fluxo.
- Quando o loop termina, o invariante garante q não existe um caminho s-t na rede residual, pelo que f é um fluxo máximo (Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo).

Complexidade

Lema 3 [Caminhos v-s para vértices transbordantes]

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo e f um pré-fluxo em G; então $\forall v \in V.\ v.e > 0 \Rightarrow \exists p.\ v \overset{p}{\leadsto} s$.

Prova: Próxima aula



* Ao empurrarmos fluxo para a frente criamos arcos para trás (reverse edges) na rede residual.
↳ Faz por isso sentido q consigamos voltar a puxar o excesso de fluxo para trás via caminhos na rede residual.

Lema 4 [Limite de Altura]

$$\forall u \in V.\ h(u) \le 2|V| - 1$$

Prova:

- A altura de um vértice u é incrementada quando u tem excesso de fluxo. Se u tem excesso de fluxo, então existe um caminho u-s na rede residual (Lema 3).
- Um caminho u-s na rede residual tem no máximo $|V|-1$ arcos, de onde se conclui q:

$$h(u) \le h(s) + (|V| - 1)$$

$$= |V| + |V| - 1$$

$$= 2|V| - 1$$

Lema 3 [Caminhos v-s para vértices transbordantes]

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo e f um pré-fluxo em G; então $\forall v \in V.\ v.e > 0 \Rightarrow \exists p.\ v \overset{p}{\rightsquigarrow} s$.

Prova:

- Suponhamos q existe um vértice w tal que $w.e > 0$ e s não é atingível a partir de w. Seja U o conjunto dos vértices atingíveis a partir de w (pela hipótese sabemos q $s \notin U$)

- $$\sum_{u \in U} e(u) = \sum_{u \in U} \left(\sum_{v \in V} f(v,u) - \sum_{v \in V} f(u,v) \right)$$

$$= \sum_{u \in U} \left(\sum_{v \in U \cup \bar{U}} f(v,u) - \sum_{v \in U \cup \bar{U}} f(u,v) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{u \in U} \sum_{v \in U} f(v,u)}_{\sum_{v \in U} \sum_{u \in U} f(v,u)} + \sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(v,u) - \underbrace{\sum_{u \in U} \sum_{v \in U} f(u,v)}_{\sum_{v \in U} \sum_{u \in U} f(v,u)} - \sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(u,v)$$

$$= \sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(v,u) - \sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(u,v)$$

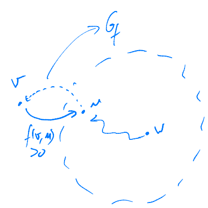
- $$\sum_{u \in V} e(u) > 0$$

- $$\sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(v,u) - \sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(u,v) > 0$$

- $$\sum_{u \in U} \sum_{v \in \bar{U}} f(v,u) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists v \in \bar{U}, u \in U.\ f(v,u) > 0$$



- v é atingível a partir de w na rede residual e $v \in \bar{U}$.

Lema 5 [Upper Bound no nº de operações de Relabel]

O nº de Relabels numa execução do Push-Relabel é $\leq 2|V|^2$

Prova:

- O lema 4 diz-nos que a altura de um vértice $u \in V \setminus \{s,t\}$ é no máximo $2|V|-1$.
- Como todos os vértices são "inicializados" com altura 0, o nº máximo de operações de Relabel por vértice é: $2|V|-1$.
- Os vértices s e t nunca são "relabeled", pelo que o nº máximo de relabels é dado por:

$$(2|V|-1)(|V|-2) = 2|V|^2 - |V| - 2|V| + 3$$
$$= 2|V|^2 \underbrace{-3|V| + 3}_{\leq 0 \text{ porque } |V| \geq 2}$$
$$\leq 2|V|^2$$

∎

Lema 6 [Upper Bound no Nº de Pushes saturantes]

O nº de pushes não saturantes é $\leq 2|E||V|$.

Prova:

- Quantas vezes é que podemos saturar o arco (u,v) durante a execução do algoritmo de Push/Relabel?

$$i.\ Push(u,v) \qquad h_i(u) = h_i(v) + 1$$
$$j.\ Push(v,u) \qquad h_j(v) = h_j(u) + 1$$
$$\geq h_i(u) + 1$$
$$= h_i(v) + 2$$

- Entre cada dois "pushes" saturantes consecutivos a altura de um dos vértices do arco aumenta de duas unidades.
- Como o lema 4 limita a altura de cada vértice a $2|V|-1$, concluímos que temos no máximo $2|V|$ pushes saturantes por arco.
- Como temos $|E|$ arcos, segue que o nº de pushes saturantes é $\leq 2.|E|.|V|$

∎

Lema 7 [Upper Bound nos Pushes não saturantes]

O nº de pushes não saturantes é $\leq 4|V|^2(|V| + |E|)$.

Prova:

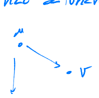
- Definimos a quantidade $\Phi_f = \sum_{v \in V,\, e_v > 0} h(v)$

- Φ_f aumenta c/ pushes não saturantes e relabels.
  - Relabel ⇒ aumenta a altura de um vértice c/ excesso de fluxo
  - Push - saturante ⇒ $u \to v$
    ↳ Como o push é saturante pode não eliminar todo o excesso de u e vai criar excesso em v.

  Cada uma destas operações incrementa Φ de um valor inferior a $2|V|$ (que é a altura máxima que um nó pode ter)

- $\sum_{i=0}^{n} \Phi_{f_i} \leq 2|V| \times (2|V|^2 + 2|E||V|)$
$$= 4|V|^2(|V| + |E|)$$

- Pushes não saturantes diminuem o valor de Φ_f



- u tem excesso de fluxo
  ↳ portanto a altura de u está a contribuir para Φ

- Depois do Push, u já não tem excesso de fluxo pelo que:
$$\Phi_{f_i} - \Phi_{f_{i+1}} \geq h(u) - h(v) = 1$$

Observemos que v podia já ter excesso de fluxo, caso em que a diferença é $h(u)$.

∎