

Sumário

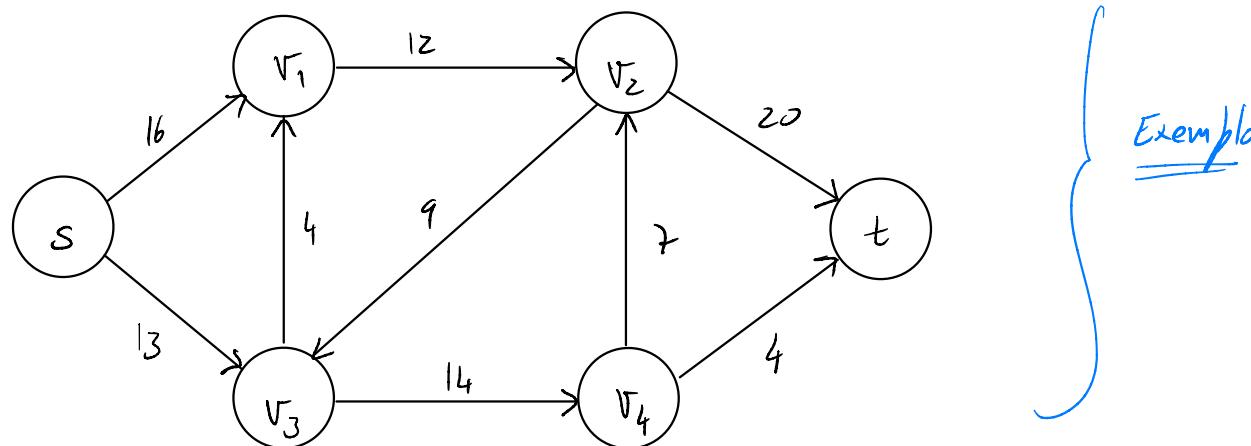
1. Redes de fluxos, fluxos
2. O problema do fluxo máximo
3. Redes residuais, caminhos de aumento, fluxos aumentados
4. Círculos em redes de fluxo
5. O teorema do fluxo máximo contra minimo

Aula 7

Definição [Redes de Fluxo]

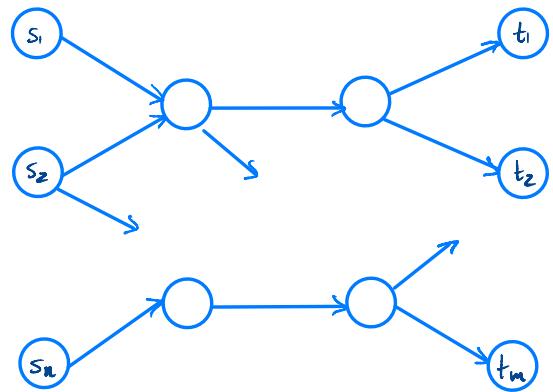
Uma rede de fluxo é um grafo $G = (V, E)$ com dois vértices notáveis s e t , respectivamente nó fonte (saída) e nó de terminação, e uma função de capacidade $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que:

- $\forall u, v \in V. \quad c(u, v) \geq 0$
 - $\forall u, v \in V. \quad (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E \quad (\text{não há arcos anti-paralelos})$
 - $\forall v \in V. \quad s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t \quad (\text{conectividade } s-t)$
- Para simplificar a notação escrevemos: $G = (V, \bar{c}, s, t, c)$

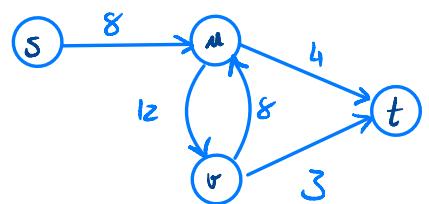


Redes de Fluxo - Estratégias de Modelagem

I) Múltiplas Fontes/Sucessores

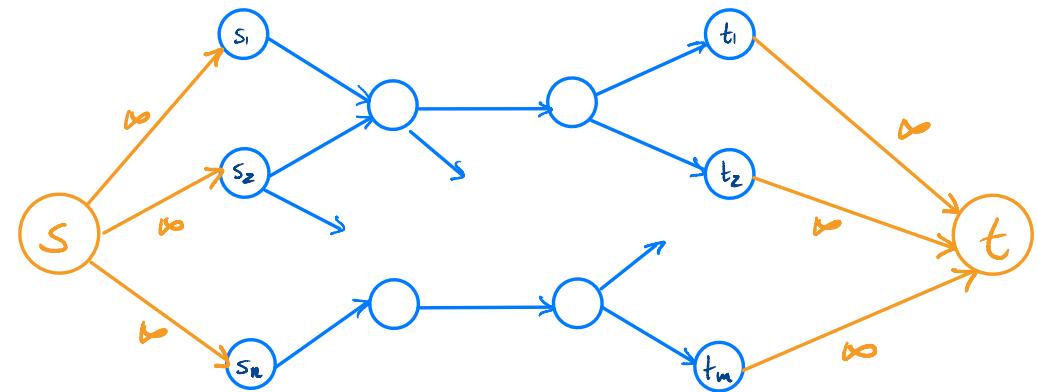
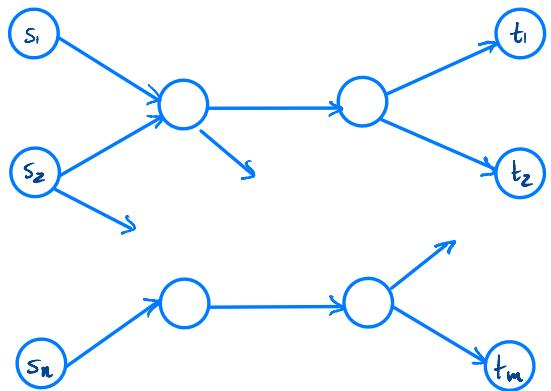


II) Arcos Anti-paralelos

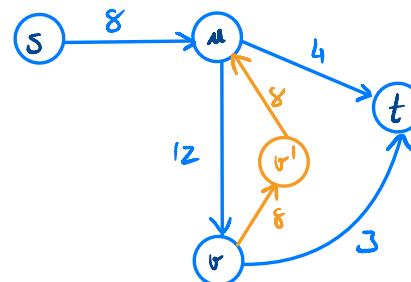
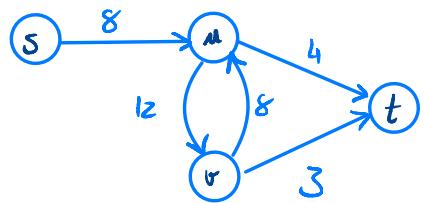


Redes de Fluxo - Estratégias de Modelação

I) Múltiplas Fontes/Sucessores



II) Arcos Anti-paralelos



Definição [Função de Fluxo]

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo, uma função $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ diz-se

um fluxo em G se satisfizer as seguintes restrições:

[Restrição de Capacidade]

$$\forall u, v \in V, f(u, v) \leq c(u, v)$$

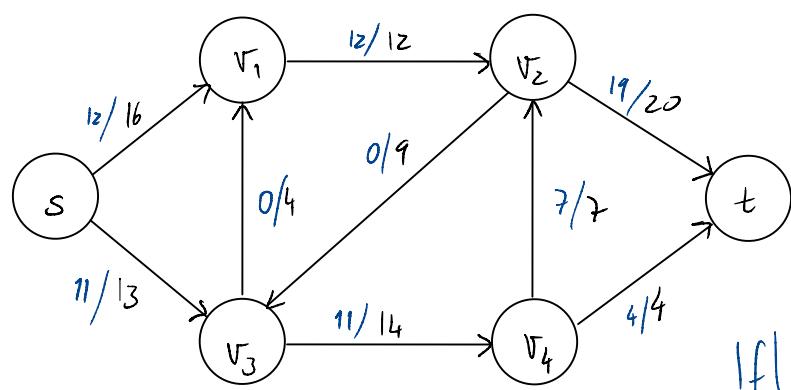
[Conservação do Fluxo]

$$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

Definição [Valor de Fluxo]

Seja f uma função de fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$,
o valor de f , \bar{f} se denota por $|f|$, é definido como:

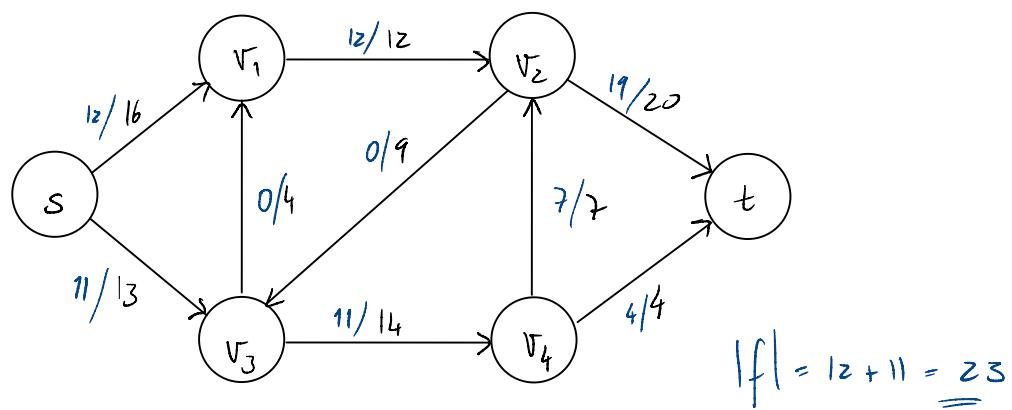
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$



$$|f| = 12 + 11 = \underline{\underline{23}}$$

Definição [Problema do Fluxo Máximo]

Dada uma rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, determinar o fluxo f^* de valor máximo em G .



$$|f| = 12 + 11 = \underline{\underline{23}}$$

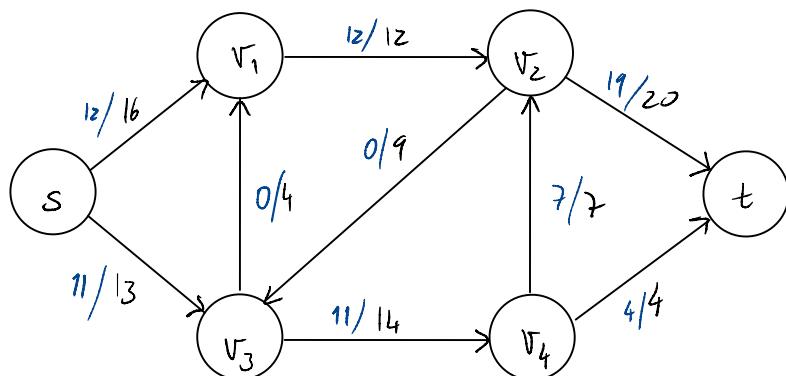
- O fluxo f é um fluxo máximo em G ?

Definição [Rede Residual]

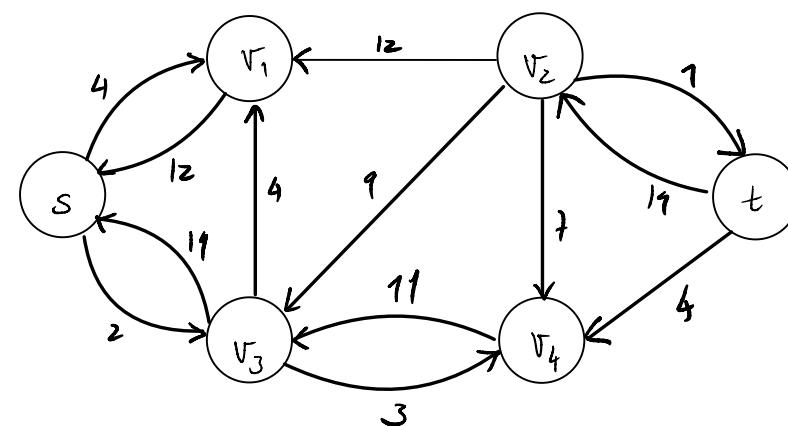
Seja $G = (V, E, \alpha, t, c)$ uma rede de fluxo e f um fluxo em G , a rede residual induzida por f em G , denotada por G_f , é definida como se segue:

- $G_f = (V, E_f, \alpha, t, c_f)$
- $c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{se } (v, u) \in E \end{cases}$
- $E_f = \{(u, v) \mid c_f(u, v) > 0\}$

Fluxo & Rede de Fluxo



Rede Residual

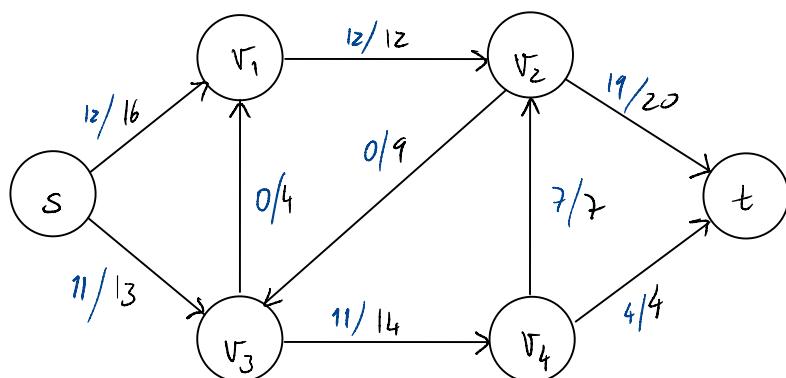


Definição [Rede Residual]

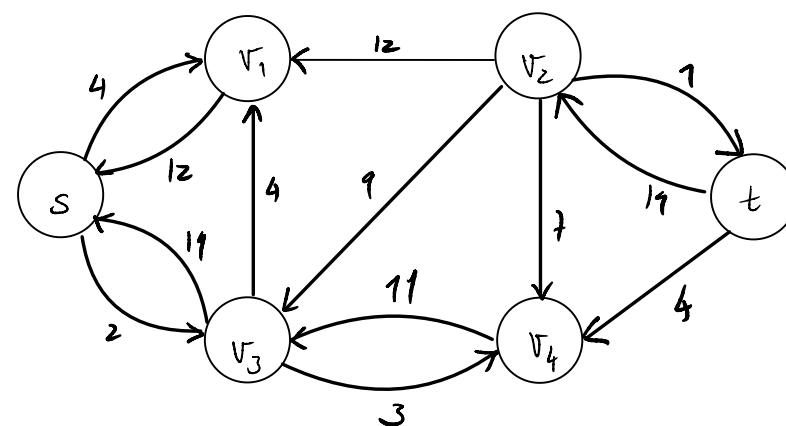
Seja $G = (V, E, \alpha, t, c)$ uma rede de fluxo e f um fluxo em G , a rede residual induzida por f em G , denotada por G_f , é definida como se segue:

- $G_f = (V, E_f, \alpha, t, c_f)$
- $c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{se } (v, u) \in E \end{cases}$
- $E_f = \{(u, v) \mid c_f(u, v) > 0\}$

Fluxo & Rede de Fluxo



Rede Residual



- Existe algum caminho $s-t$ na rede residual?

Definição [Fluxo Aumentado]

Seja f um fluxo num rede de fluxo $G = (V, E, \alpha, t, c)$ e f' um fluxo na rede residual G_f , o fluxo f aumentado de f' , designado por $f \uparrow f'$, é definido como se segue:

$$f \uparrow f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{se } (u, v) \in E \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo num rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f .

Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f .

Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

- Há que provar que:

① $f \uparrow f'$ satisfaz a restrição de capacidade para todo o arco $(u, v) \in E$.

② $f \uparrow f'$ satisfaz a restrição de conservação do fluxo para todo o vértice $v \in V \setminus \{s, t\}$.

③ $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$

① $|f \uparrow f'|$ satisfaz a restrição de capacidade para todo o arco $(u, v) \in E$.

$$\forall (u, v) \in E. (f \uparrow f')(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\begin{aligned} f \uparrow f'(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) \\ &\leq f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) - f'(v, u) \quad (f'(u, v) \leq c(u, v) - f(u, v)) \\ &= c(u, v) - f'(v, u) \\ &\leq c(u, v) \end{aligned}$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f .

Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

① $f \uparrow f'$ satisfez a restrição de conservação do fluxo

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\}. \sum_{u \in V} (f \uparrow f')(u, v) = \sum_{u \in V} (f \uparrow f')(v, u)$$

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} (f \uparrow f')(u, v) &= \sum_{u \in V} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) \\ &= \sum_{u \in V} f(u, v) + \sum_{u \in V} f'(u, v) - \sum_{u \in V} f'(v, u) \\ &= \sum_{u \in V} f(v, u) + \sum_{u \in V} f'(v, u) - \sum_{u \in V} f'(u, v) \\ &= \sum_{u \in V} f(v, u) + f'(v, u) - f'(u, v) \\ &= \sum_{u \in V} f \uparrow f'(v, u) \end{aligned}$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f .

Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

$$V_1 = \{r \mid (s, r) \in E\}$$

$$\textcircled{III} \quad |f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

$$V_2 = \{r \mid (r, s) \in E\}$$

$$|f \uparrow f'| = \sum_{r \in V} (f \uparrow f')(s, r) - \sum_{r \in V} (f \uparrow f')(r, s)$$

$$= \sum_{r \in V_1} (f \uparrow f')(s, r) - \sum_{r \in V_2} (f \uparrow f')(r, s)$$

$$= \sum_{r \in V_1} f(s, r) + \sum_{r \in V_1} f'(s, r) - \sum_{r \in V_1} f'(r, s) - \left(\sum_{r \in V_2} f(r, s) + \sum_{r \in V_2} f'(r, s) - \sum_{r \in V_2} f'(s, r) \right)$$

$$= \left(\sum_{r \in V_1} f(s, r) - \sum_{r \in V_2} f(r, s) \right) + \left(\left(\sum_{r \in V_1} f'(s, r) + \sum_{r \in V_2} f'(s, r) \right) - \left(\sum_{r \in V_1} f'(r, s) + \sum_{r \in V_2} f'(r, s) \right) \right)$$

$$= |f| + \left(\sum_{r \in V} f'(s, r) - \sum_{r \in V} f'(r, s) \right)$$

$$= |f| + |f'|$$

Definição [Caminho de Aumento]

• Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, um caminho de aumento é um caminho na rede residual G_f .

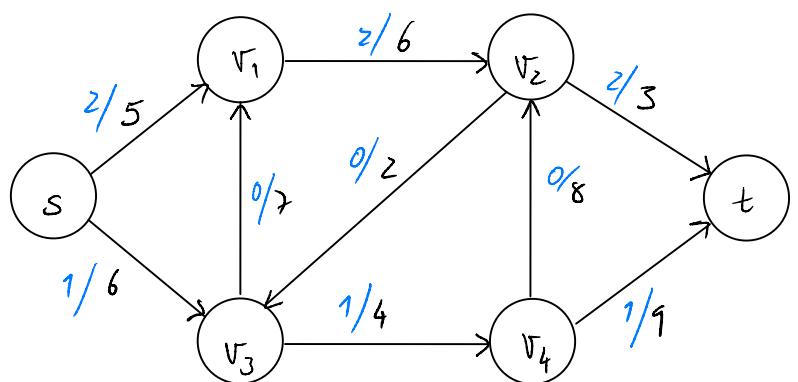
• Seja p um caminho de aumento na rede residual G_f , a capacidade residual de p é dada por:

$$c_f(p) = \min \{ c_f(u, v) \mid (u, v) \in p \}$$

• Seja p um caminho de aumento, o fluxo induzido por p é definido como segue:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \in p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Fluxo & Rede de Fluxo

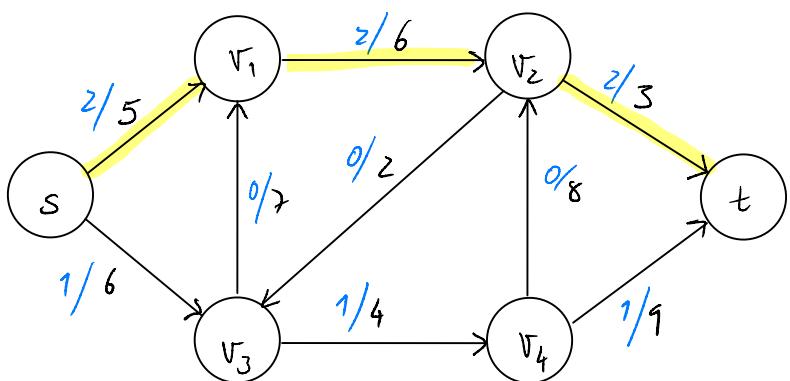


Definição [Caminho de Aumento]

- Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, um caminho de aumento é um caminho na rede residual G_f .
 - Seja p um caminho de aumento na rede residual G_f , a capacidade residual de p é dada por:
- $$c_f(p) = \min \{ c_f(u, v) \mid (u, v) \in p \}$$
- Seja p um caminho de aumento, o fluxo induzido por p é definido como segue:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \in p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Fluxo & Rede de Fluxo



Lema [Fluxo Induzido por caminho de aumento]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e p um caminho de aumento na rede residual G_f ; então f_p é uma função de fluxo em G_f e $|f_p| = g(p)$.

Prova: Exercício

$$p = \langle s, v_1, v_2, t \rangle$$

$$g(p) = 1$$

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G = (V, E, \delta, t, c)$ é um par (S, T)

onde:

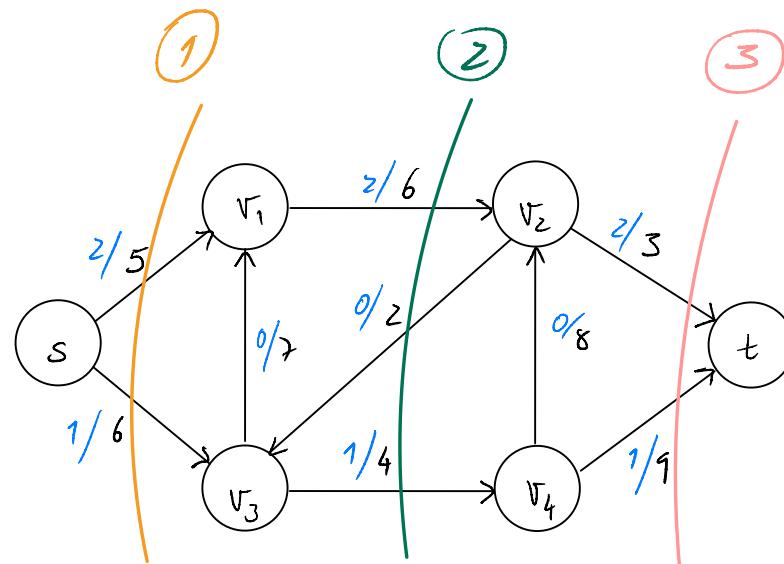
- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$

[Capacidade do Corte]

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

[Fluxo que atinge o corte]

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$



①

②

③

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G = (V, E, \delta, t, c)$ é um par (S, T)
onde:

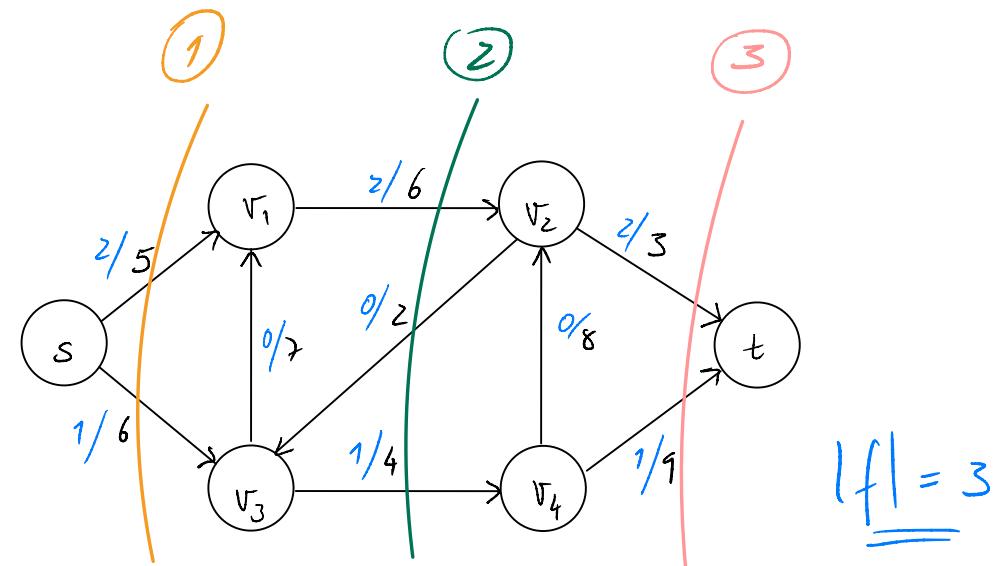
- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$

[Capacidade do Corte]

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

[Fluxo que atinge o corte]

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$



① $c(S, T) = 11$
 $f(S, T) = 3$

② $c(S, T) = 10$
 $f(S, T) = 3$

③ $c(S, T) = 12$
 $f(S, T) = 3$

Lema do Corte em Rede de Fluxo

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo, f um fluxo em G e (S, \bar{T}) um corte em G ; então:

$$|f| = f(S, \bar{T})$$

prova

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(v, u)$$

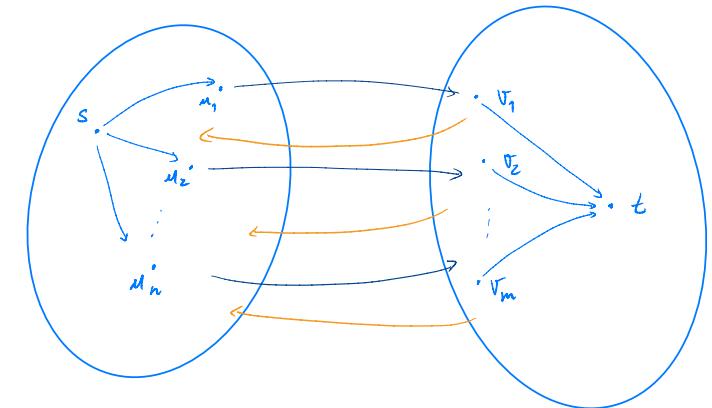
$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u)$$

$$= \sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in S} f(u, v) + \sum_{v \in \bar{T}} f(u, v) \right) - \sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in \bar{T}} f(v, u) + \sum_{v \in S} f(v, u) \right)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(u, v) + \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(v, u) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(v, u)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(v, u)$$

$$= \underline{\underline{f(S, \bar{T})}}$$



$$f(S, \bar{T}) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{T}} f(v, u)$$

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

- (i) f é um fluxo máximo
- (ii) Não existem caminhos de aumento em G_f
- (iii) $|f| = c(S, T)$ para algum corte em G .

Prova

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

f é um fluxo máximo \Rightarrow Não existem caminhos de aumento em G_f

• Fazemos a prova por contradição. Suponhamos que:

- f é um fluxo máximo

- Existe um caminho de aumento γ em G_f

$\hookrightarrow f \gamma f_p$ é um fluxo em G e $|f \gamma f_p| = |f| + |f_p| > |f|$

$\hookrightarrow f$ não é fluxo máximo em G .

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

- (i) f é um fluxo máximo
- (ii) Não existem caminhos de aumento em G_f
- (iii) $|f| = c(s, t)$ para algum corte em G .

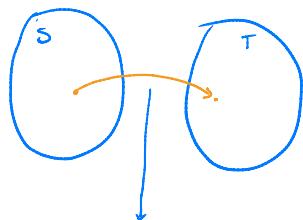
Prova

$$(ii) \Rightarrow (iii)$$

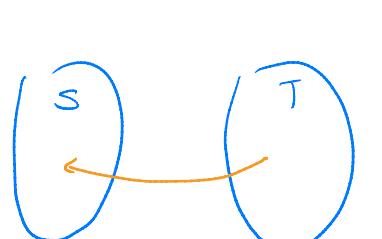
Não existem caminhos de aumento em G_f $\Rightarrow |f| = c(s, t)$ para algum corte em G

• Suponhamos que não existem caminhos de aumento em G_f .

• Seja $S = \{v \mid s \text{ vira } v \text{ em } G_f\}$ e $T = V \setminus S$



os arcos de G_f que atravessam o corte têm de estar saturados senão existiria um caminho $s-t$ em G_f .



• Da teorema do corte concluímos que: $|f| = f(s, t)$

$$f(s, t) = c(s, t)$$

• Os arcos que atravessam o corte de T para S têm de ter fluxo 0 senão existiria um caminho $s-t$ em G_f .

$$|f| = c(s, t)$$

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

- (i) f é um fluxo máximo
- (ii) Não existem caminhos de aumento em f_G
- (iii) $|f| = c(S, \bar{T})$ para algum corte em G .

Prova

$$\underline{(iii)} \Rightarrow (i)$$

$$|f| = c(S, \bar{T}) \text{ para um corte } (S, \bar{T}) \Rightarrow f \text{ é um fluxo máximo}$$

• Admitimos, para contradizê-lo, que:

- $|f| = c(S, \bar{T})$ para um corte (S, \bar{T}) em G
- f não é um fluxo máximo

$$\underline{|f| = f(S, \bar{T}) = c(S, \bar{T})}$$

Existe $f^* \neq f$ que $|f^*| > |f|$

$$\underline{|f^*| = f^*(S, \bar{T}) \leq c(S, \bar{T})}$$

∴

Método de Ford-Fulkerson

Ford Fulkerson (f)

let f be a 0-flow in G

while (true)

compute b_f

let p be an augmenting path in b_f

if ($\neg p$) return f

compute f_p

$f := f \uparrow f_p$

Método de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson (f)

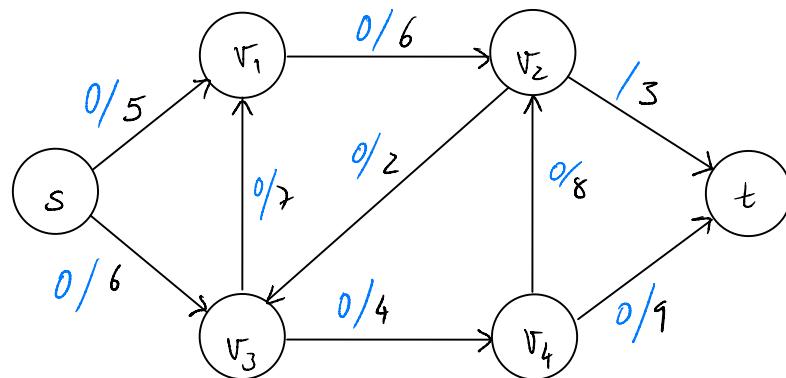
let f be a 0-flow in G
while (true)

compute b_f

let p be an augmenting path in b_f
if ($\neg p$) return f

compute f_p

$f := f \uparrow f_p$



Método de Ford-Fulkerson

Ford Fulkerson (f)

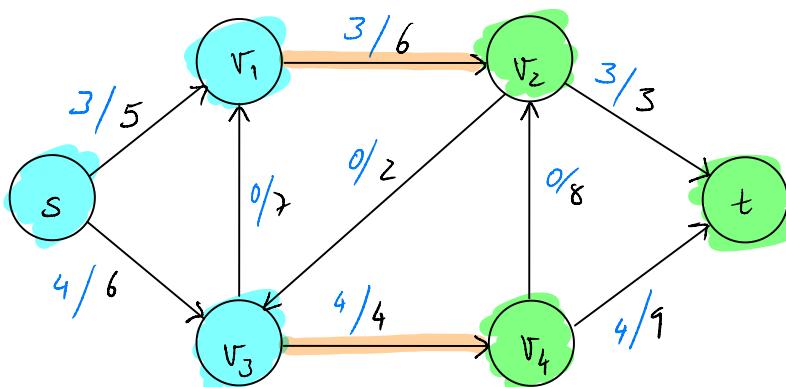
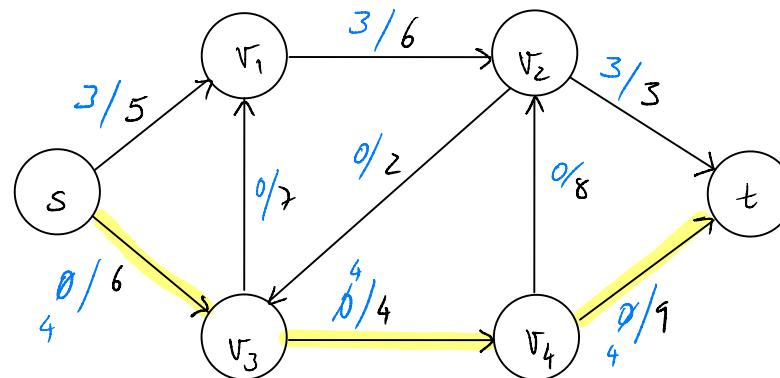
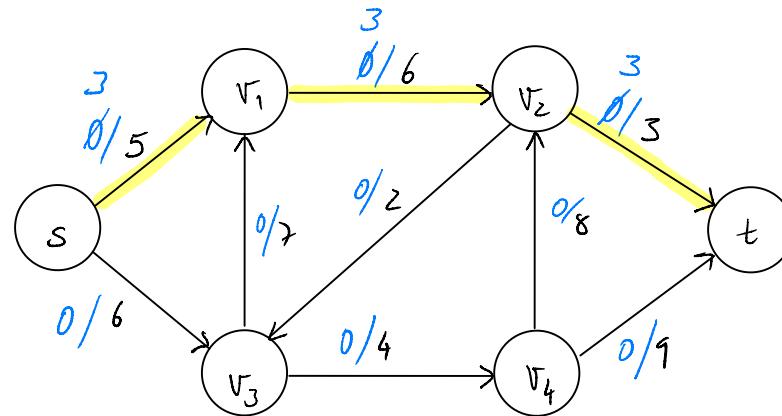
let f be a 0-flow in G
while (true)

compute b_f

let p be an augmenting path in b_f
if ($\neg p$) return f

compute f_p

$f := f \uparrow f_p$



Método de Ford-Fulkerson

Ford Fulkerson (f)

let f be a 0-flow in G $O(|E|)$

while (true)

 compute b_f $O(V+E)$

 let p be an augmenting path in b_f $O(V+E)$

 if ($\exists p$) return f $O(1)$

 compute f_p $O(V)$

$f := f \uparrow f_p$ $O(V)$

$O(V+E)$

Análise da Complexidade

Nº de iterações: $|f|$

Complexidade: $O(E \cdot |f|)$

