Sumário

- Programa Linear Auxiliar
- Dualidade
  - Programa Dual
  - Teorema da Dualidade Fraca
  - Teorema da Dualidade Forte
- Tópicos Adicionais
  - Múltiplas soluções óptimas
  - Soluções Degeneradas

Aulas 22 e 23

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

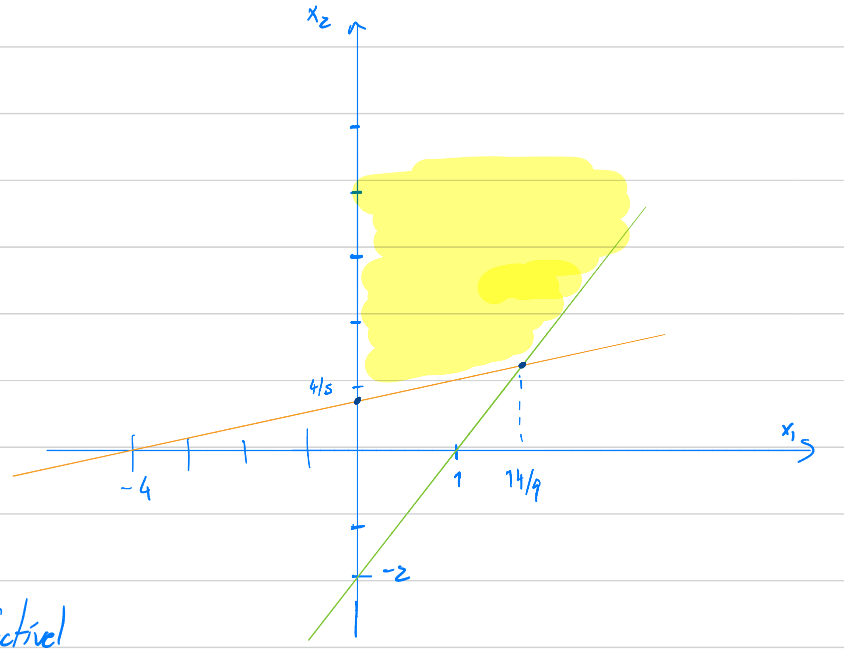
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \le 2 \quad (I)$$

$$x_1 - 5x_2 \le -4 \quad (II)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Downarrow$

Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível



Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

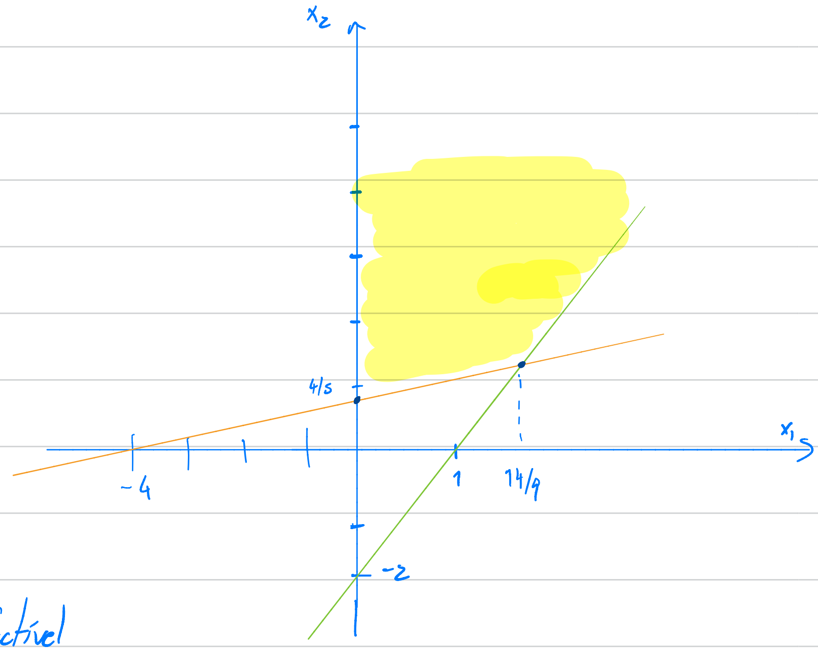
- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$\Downarrow$

Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \geq 0$$

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

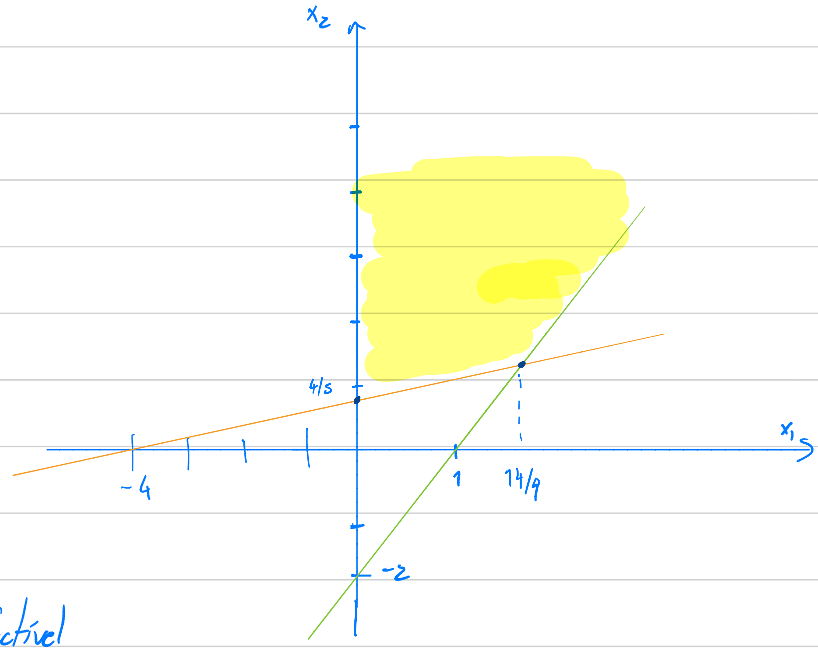
- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \qquad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \qquad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$\Downarrow$

Criamos um programa linear auxiliar para encontrar a solução factível

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_0 \geq 0$$

(0, 0, 0) não é factível

$\Downarrow$

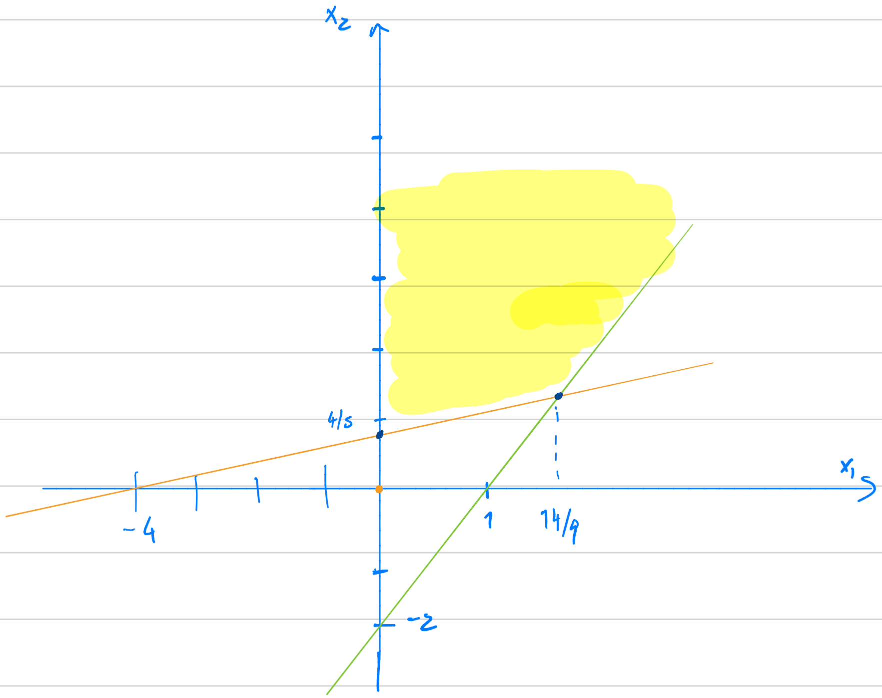
Escolhemos a restrição mais negativa e fazemos uma operação de pivotagem

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I} \\ & x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} \max \quad & -x_0 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4 \\ & x_1, x_2, x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ não é factível



Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

- E se a solução básica inicial não for exequível?

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I} \\ & x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \max \quad & -x_0 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_0 \leq 2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_0 \leq -4 \\ & x_1, x_2, x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$ não é factível

I

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ s_1 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\ s_2 &= -4 - x_1 + 5x_2 + x_0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

II

$$\begin{aligned} z &= -4 - x_1 + 5x_2 - s_2 \\ s_1 &= 6 - x_1 - 4x_2 + s_2 \qquad 4/4 = 1 \\ x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + s_2 \qquad 4/5 < 1 \end{aligned}$$

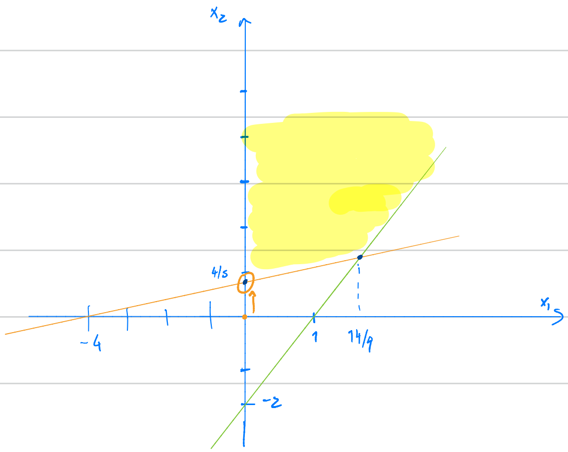
III

$$\begin{aligned} z &= 0 - x_0 \\ s_1 &= 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0 \\ x_2 &= 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$

$\downarrow$

$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$



Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{I}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{II}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resolver o programa linear original:

$$z = 0 - x_0$$
$$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0$$
$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0$$

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$$
$$\downarrow$$
$$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$$

Algoritmo Simplex - Solução Exequível Inicial

$$\max \quad 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \quad \text{(I)}$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4 \quad \text{(II)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 0 - x_0$$

$$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2 + 4/5\, x_0$$

$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5\, s_2 - 1/5\, x_0$$

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, x_0)$$

$$\downarrow$$

$$(0, 4/5, 14/5, 0, 0)$$

Resolver o programa linear original:

$$z = 2x_1 - (4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2)$$

$$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5\, s_2$$

$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$$

Resolvendo a função objectivo

$$z = -4/5 + 9/5\, x_1 - 1/5 \cdot s_2$$

$$s_1 = 14/5 - 9/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$$

$$x_2 = 4/5 + 1/5\, x_1 + 1/5 \cdot s_2$$

$$z = 2 - s_1$$

$$x_1 = 14/9 + 1/9\, s_2 - 5/9\, s_1$$

$$x_2 = 10/9 + 10/45\, s_2 - 1/9\, s_1$$

$\Rightarrow$ Não conseguimos melhorar o valor da função objectivo

Todos os coeficientes são negativos

Dualidade

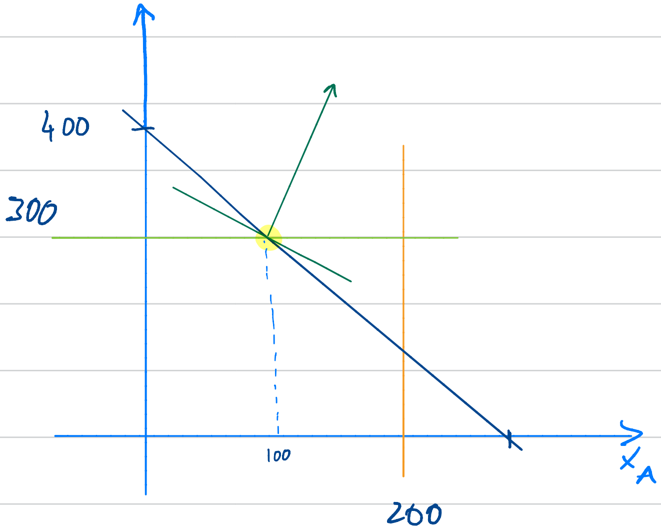
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$ (I)

$x_B \leq 300$ (II)

$x_A + x_B \leq 400$ (III)

$x_A, x_B \geq 0$



Pergunta: Conseguimos encontrar um upper bound para o valor da função objectivo olhando para as restrições (I) e (II) ?

Dualidade

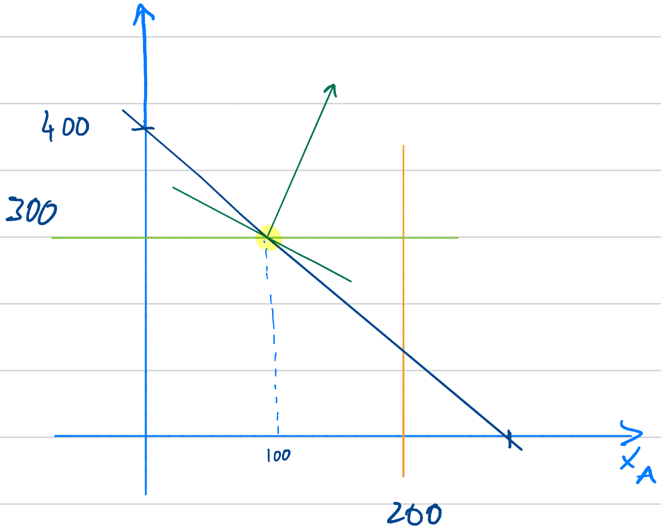
max $x_A + 6x_B$

$x_A \le 200$ (I)

$x_B \le 300$ (II)

$x_A + x_B \le 400$ (III)

$x_A, x_B \ge 0$



Pergunta: Conseguimos encontrar um upper bound para o valor da função objectivo olhando para as restrições (I) e (II)?

- $1 \times (I) + 6 \times (II) \Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 200 + 6 \times 300$

$\Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 2000$

A função objectivo nunca pode ter um valor superior a $\underline{\underline{2000}}$.

→ Este upper bound não é apertado (o máximo é 1900).

Conseguimos uma combinação melhor?

Dualidade

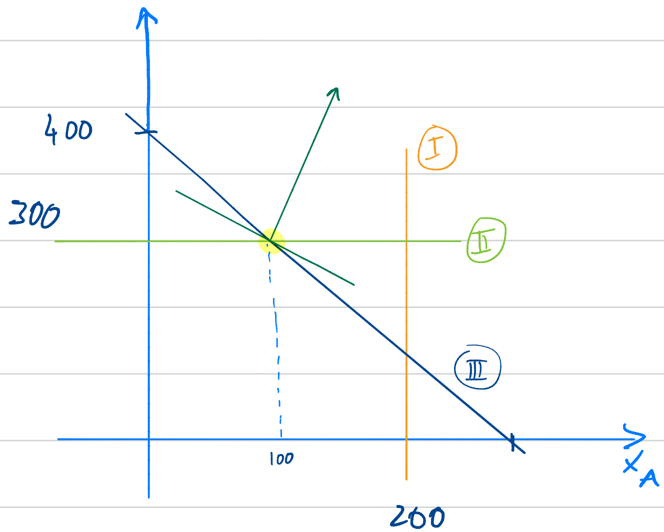
$$\max \; x_A + 6x_B$$

$x_A \le 200$ (I)

$x_B \le 300$ (II)

$x_A + x_B \le 400$ (III)

$x_A, x_B \ge 0$



Pergunta: Conseguimos encontrar um upper bound mais apertado usando as restrições (II) e (III) ?

Dualidade

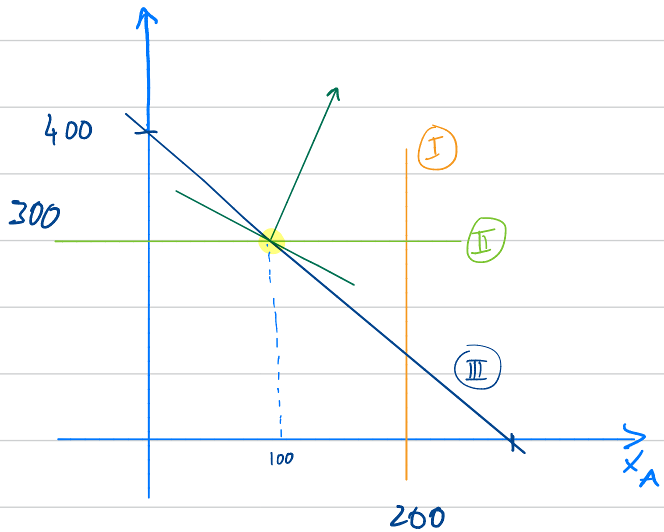
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \le 200$ (I)

$x_B \le 300$ (II)

$x_A + x_B \le 400$ (III)

$x_A, x_B \ge 0$



- $1 \times (I) + 6 \times (II) \Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 200 + 6 \times 300$

  $\Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 2000$

  A função objectivo nunca pode ter um valor superior a 2000.

- $5 \times (II) + 1 \times (III) \Leftrightarrow 5 \times x_B + x_A + x_B \le 5 \times 300 + 400$

  $\Leftrightarrow x_A + 6x_B \le 1900$

  Este upper bound é apertado!

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o <u>mais pequeno</u> upper bound para a função objectivo

$$\begin{array}{lll} & \lambda_I \times & x_A \leq 200 \\ & \lambda_{II} \times & x_B \leq 300 \\ + & \lambda_{III} \times & x_A + x_B \leq 400 \\ \hline \end{array}$$

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o mais pequeno upper bound para a função objectivo

$$\lambda_I \times \quad x_A \leq 200$$
$$\lambda_{II} \times \quad x_B \leq 300$$
$$\lambda_{III} \times \quad x_A + x_B \leq 400$$

+

Função objectivo : $x_A + 6x_B$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

$$\left.\begin{array}{l} \min \quad 200 \times \lambda_I + 300 \times \lambda_{II} + 400 \times \lambda_{III} \\ \lambda_I + \lambda_{III} \geq 1 \\ \lambda_{II} + \lambda_{III} \geq 6 \\ \lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Programa Dual

$$(\lambda_I^*, \lambda_{II}^*, \lambda_{III}^*) = (0, 5, 1)$$

Dualidade - Sistematização

- Queremos encontrar o <u>mais pequeno</u> upper bound para a função objectivo

$$\lambda_I \times \quad x_A \leq 200$$
$$\lambda_{II} \times \quad x_B \leq 300$$
$$\lambda_{III} \times \quad x_A + x_B \leq 400$$
$+$

$$(\lambda_I + \lambda_{III})\, x_A + (\lambda_{II} + \lambda_{III}) \times x_B \leq \lambda_I \times 200 + \lambda_{II} \times 300 + \lambda_{III} \times 400$$

Função objectivo: $x_A + 6x_B$

$$\underbrace{\begin{aligned} &\min \quad 200 \times \lambda_I + 300 \times \lambda_{II} + 400 \times \lambda_{III} \\ &\lambda_I + \lambda_{III} \geq 1 \\ &\lambda_{II} + \lambda_{III} \geq 6 \\ &\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \geq 0 \end{aligned}}_{\text{Programa Dual}}$$

$$\max \; c^T x \quad \longleftrightarrow \quad \min \; y^T b$$

$$A x \leq b \qquad y^T A \geq c^T$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Teorema da Dualidade Forte

Se qualquer um dos problemas tiver solução então o outro também tem e as soluções coincidem.

Dualidade - Sistematização

$$\max c^T x \longleftrightarrow \min y^T b$$

$$Ax \leq b \qquad\qquad y^T A \geq c^T$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

Teorema da Dualidade Forte

Se qualquer um dos problemas tiver solução então o outro também tem e as soluções coincidem.

Lema [Dualidade Fraca]

Seja y^* a solução do problema dual e x^* a solução do problema primal, concluímos que:

$$c^T x^* \leq (y^*)^T b$$

Prova

Dualidade - Sistematização

$$\max\ c^T x \quad \longleftrightarrow \quad \min\ y^T b$$

$$A x \leq b \qquad\qquad y^T A \geq c^T$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

Teorema da Dualidade Forte

Se qualquer um dos problemas tiver solução então o outro também tem e as soluções coincidem.

Lema [Dualidade Fraca]

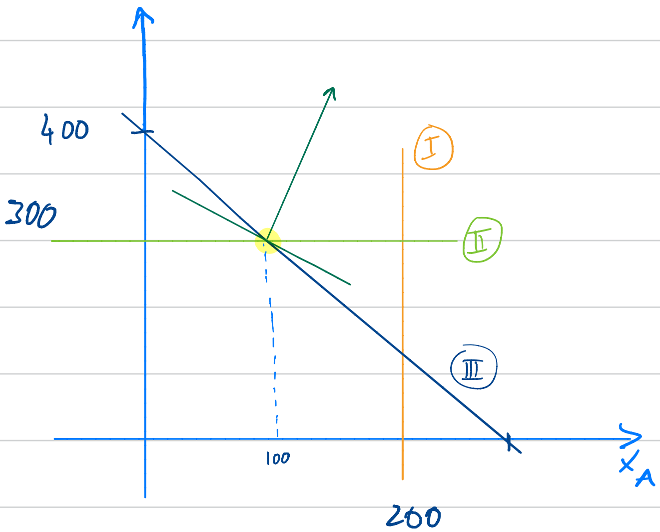
Seja y^* a solução do problema dual e x^* a solução do problema primal, concluímos que:

$$c^T x^* \leq (y^*)^T b$$

Prova

$$c^T x^* \leq (y^*)^T A x^*$$
$$\leq (y^*)^T b$$

Dualidade - Sistematização



Primal

$\max \ x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$ (I)

$x_B \leq 300$ (II)

$x_A + x_B \leq 400$ (III)

$x_A, x_B \geq 0$

Sol: 1900

Dual

$\min \ 200y_1 + 300y_2 + 400y_3$

$y_1 + y_3 \geq 1$

$y_2 + y_3 \geq 6$

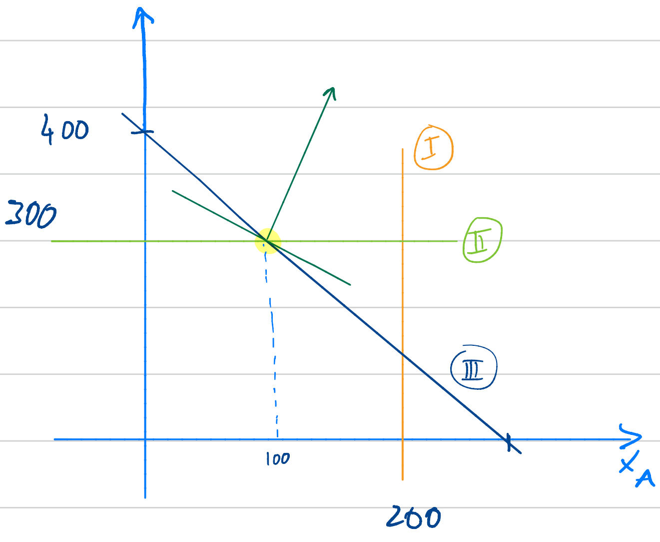
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Sol*: 1900

Teorema da Dualidade Forte

Se qualquer um dos problemas tiver solução então o outro também tem e as soluções coincidem.

Dualidade - Sistematização



Primal

$\max\ x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$ (I)

$x_B \leq 300$ (II)

$x_A + x_B \leq 400$ (III)

$x_A, x_B \geq 0$

Sol: 1900

. (100, 300)

Dual

$\min\ 200y_1 + 300y_2 + 400y_3$

$y_1 + y_3 \geq 1$

$y_2 + y_3 \geq 6$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Sol*: 1900

(0, 5, 1)

• Determinar a solução do problema dual a partir do primal:

• $y_1 = 0 \hookrightarrow \begin{cases} y_3 = 1 \\ y_2 + y_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = 1 \\ y_2 = 5 \end{cases}$

Colocar a 0 as variáveis q correspondem a restrições não activas do problema primal.

Caminhos mais curtos - Duas formulações alternativas

- Problema de Maximização:

$$\max \; d[t]$$

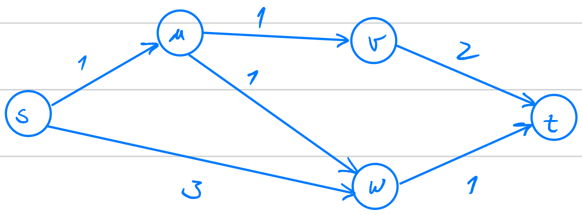
$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$$

$$d[s] = 0$$

$$d[v] \geq 0 \quad \forall v \in V$$

Conseguimos escrever o dual?

Caminhos mais curtos - Duas formulações alternativas



$$\begin{array}{ll} & \max\ d_t \\ su & d_u \leq 1 \\ uv & d_v \leq d_u + 1 \\ uw & d_w \leq d_u + 1 \\ sw & d_w \leq 3 \\ vt & d_t \leq d_v + 2 \\ wt & d_t \leq d_w + 1 \\ & d_u, d_s, d_v, d_w, d_t \geq 0 \end{array}$$

(reformulação) $\longrightarrow$

$$\begin{array}{l} \max\ d_t \\ d_u \leq 1 \\ d_v - d_u \leq 1 \\ d_w - d_u \leq 1 \\ d_w \leq 3 \\ d_t - d_v \leq 2 \\ d_t - d_w \leq 1 \\ d_u, d_s, d_v, d_w, d_t \geq 0 \end{array}$$

dual

$$\min\ x_{su} + x_{uv} + x_{uw} + 3x_{sw} + 2x_{vt} + x_{wt}$$

$$\begin{array}{ll} x_{su} - x_{uv} - x_{uw} \geq 0 & (d_u) \\ x_{uv} - x_{vt} \geq 0 & (d_v) \\ x_{uw} + x_{sw} - x_{wt} \geq 0 & (d_w) \\ x_{vt} + x_{wt} \geq 1 & \\ x_{su}, x_{uv}, x_{uw}, x_{sw}, x_{vt}, & \end{array}$$

Caminhos mais curtos - Duas formulações alternativas

- Problema de Maximização:

$$\max\ d[t]$$
$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \quad \forall\ (u,v) \in E$$
$$d[s] = 0$$
$$d[v] \geq 0 \quad \forall\ v \in V$$

- <u>Problema dual</u>:

$$\min \sum_{(u,v)\in E} x_{uv} \cdot w(u,v)$$

$$\sum_{u\in V} x_{uv} - \sum_{w\in V} x_{vw} \geq 0 \ , \quad \text{para todo } v \notin \{s,t\}$$

$$\sum_{u\in V} x_{ut} - \sum_{u\in V} x_{tu} \geq 1$$

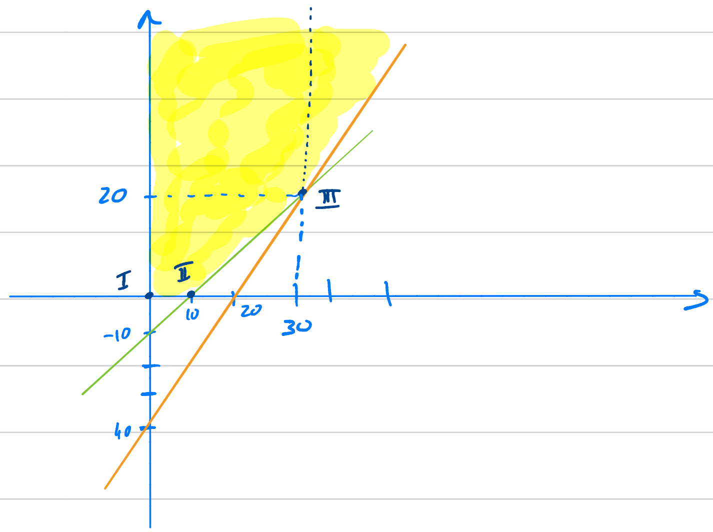
Algoritmo Simplex - Unboundedness

Exemplo: $\max \; 2x_1 + x_2$

$x_1 - x_2 \leq 10$ (1)

$2x_1 - x_2 \leq 40$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$ (3), (4)



(1) $x_1 - x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = -10 + x_1$

$-10 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10$

(2) $2x_1 - x_2 = 40 \Leftrightarrow x_2 = -40 + 2x_1$

$-40 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 20$

(I)

$z = 2x_1 + x_2$

$10/1 = 10 \quad s_1 = 10 - x_1 + x_2$

$0/2 = 20 \quad s_2 = 40 - 2x_1 + x_2$

(II)

$z = 20 + 3x_2 - 2s_1$

$x_1 = 10 + x_2 - s_1$

$20 \quad s_2 = 20 - x_2 + 2s_1$

(III)

$z = 80 + 4s_1 - 3s_2$

$x_1 = 30 + s_1 - s_2$

$x_2 = 20 + 2s_1 - s_2$

$\rightarrow \quad -s_1 + s_2 \leq 30$

$-2s_1 + s_2 \leq 20$

$\Downarrow$

Todos os coeficientes são positivos

Algoritmo Simplex - Unboundedness

Exemplo: $\max \ 2x_1 + x_2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 10 \quad (1) \\ 2x_1 - x_2 &\leq 40 \quad (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad (3), (4) \end{aligned}\right\} \text{Unbounded}$$

Dual:

$\min \ 10y_1 + 40y_2$

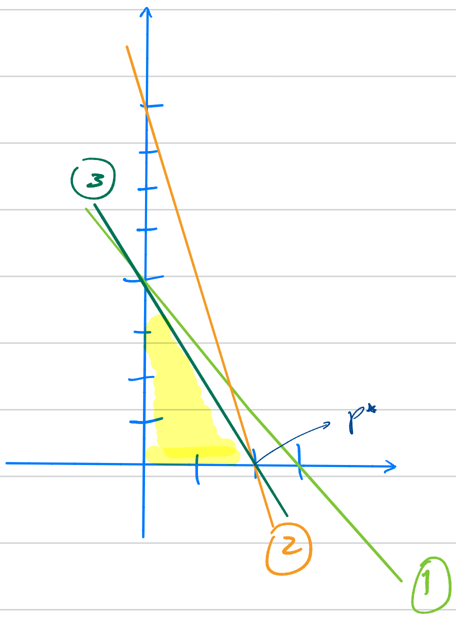
$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{No Solution}$$

Algoritmo Simplex - Soluções Degeneradas

Exemplo 1:

$\max \; 2x_1 + x_2$

s.t.
$4x_1 + 3x_2 \leq 12$ (1)
$4x_1 + x_2 \leq 8$ (2)
$4x_1 + 2x_2 \leq 8$ (3)
$x_1, x_2 \geq 0$ (4) e (5)



(I)

$z = 2x_1 + x_2$ (0,0)

$s_1 = 12 - 4x_1 - 3x_2$ $\quad 12/4 = 3$

$s_2 = 8 - 4x_1 - x_2$ $\quad 8/4 = 2$

$s_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$ $\quad 8/4 = 2$

(II)

$z = 4 + 1/2\, x_2 - 1/2\, s_2$ (2,0)

$s_1 = 4 - 2x_2 + s_2$ $\quad 4/2 = 2$

$x_1 = 2 - 1/4\, x_2 - 1/4\, s_2$ $\quad 2/\tfrac{1}{4} = 8$

$s_3 = 0 - x_2 + s_2$ $\quad 0/1 = 0$

(2), (5)

(III)

$z = 4 - 1/2\, s_3$ (2,0)

$s_1 = 4 - s_2 + 2s_3$

$x_1 = 2 - 1/2\, s_2 + 1/4\, s_3$

$x_2 = 0 + s_2 - s_3$

(2), (3)

(IV)

$z = 4 - 1/2\, s_3$

$s_1 = 4 + s_3 - x_2$

$x_1 = 2 - 1/4\, s_3 - 1/2\, x_2$

$s_2 = 0 + x_2 + s_3$

(3), (5)

· Soluções Degeneradas

(1) Soluções degeneradas ocorrem quando um dos vértices do poliedro corresponde à intersecção de um nº de hiperplanos superior à dimensionalidade do problema (e.g. P*: (2), (3), (5))

(2) Uma solução diz-se degenerada quando pelo menos uma das variáveis básicas assume o valor 0.

(3) Soluções degeneradas podem causar um ciclo infinito no algoritmo simplex.

Algoritmo Simplex - Múltiplas Soluções Óptimas

Exemplo:

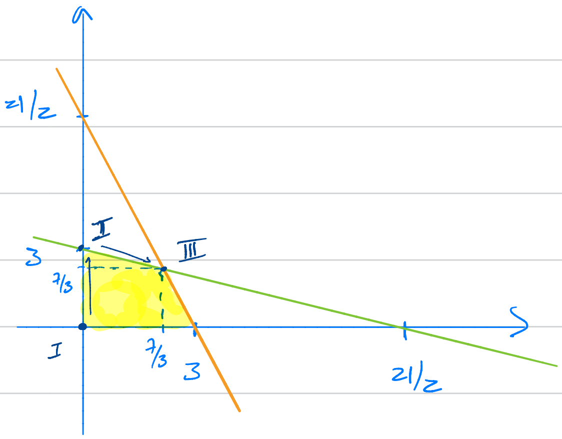
$$\max \quad 4x_1 + 14x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 7x_2 \le 21 \quad \text{(I)}$$

$$7x_1 + 2x_2 \le 21 \quad \text{(II)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



(I)

$$z = 4x_1 + 14x_2$$

$$s_1 = 21 - 2x_1 - 7x_2 \qquad 21/7 = 3$$

$$s_2 = 21 - 7x_1 - 2x_2 \qquad 21/2 = 10.5$$

(II)

$$z = 42 - 2s_1$$

$$\frac{3}{2/7} = \frac{21}{2} \qquad x_2 = 3 - 2/7\,x_1 - 1/7\,s_1$$

$$15/\tfrac{45}{7} = 7/3 \qquad s_2 = 15 - 45/7\,x_1 + 2/7\,s_1$$

x_1 não aparece na função objectivo e é não básica ⇒ Podemos incrementar x_1 sem prejudicar a função objectivo

(III)

$$z = 42 - 2s_1$$

$$x_2 = 7/3 - 7/45\,s_1 + 2/45\,s_2$$

$$x_1 = \frac{7}{3} + 2/45\,s_1 - 7/45\,s_2$$

Notas extra para estudo individual

Lema 1 [Dual-dual = Primal]

O problema dual do problema dual é o problema primal.

Prova

$$\begin{array}{l} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \xRightarrow{(\text{dual})} \begin{array}{l} \min\ y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0 \end{array} \xRightarrow{(\text{trans})} \begin{array}{l} \max\ -y^T b \\ -y^T A \leq -c^T \\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow (\text{trans})$$

$$\begin{array}{l} \min\ -(-c)^T x \\ -(-A^T)^T x \leq -(-b^T)^T \\ y \geq 0 \end{array} \xLeftarrow{\text{dual}} \begin{array}{l} \max\ -b^T \cdot y \\ -A^T y \leq -c^T \\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\Uparrow (\text{trans}) \text{ ao problema } \begin{array}{l} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Lema 2 [Dualidade Fraca]

Seja x^* uma solução(*) do programa linear:

$$\max \; c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

e y^* uma solução(*) do programa linear dual.

Então: $c^T x^* \leq (y^*)^T A x^* \leq (y^*)^T b$

(*) Uma solução não necessariamente óptima.

$$\min \; b^T y$$
$$y^T A \geq c^T$$
$$y \geq 0$$

Prova:

1. $Ax^* \leq b$ (porque x^* é solução)
2. $(y^*)^T A x^* \leq (y^*)^T b$ (porque y^* é ≥ 0)
3. $(y^*)^T A \geq c^T$ (porque y^* é solução)
4. $(y^*)^T A x^* \geq c^T x^*$ (porque x^* é ≥ 0)
5. $c^T x^* \leq (y^*)^T A x^* \leq (y^*)^T b$ ∎