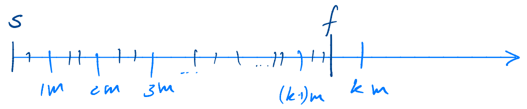
Prática 08

Ex 16.2-4 [CLRS]



Formalização do Problema: Seja $\vec{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ uma sequência ordenada de pontos de paragem entre s e f e m a distância mínima de abastecimento, uma sequência de índices $i_1, \dots, i_k$ diz-se factível sse:

$$\forall 1 \le j < k.\ x_{i_{j+1}} \le x_{i_j} + m$$

- O problema do abastecimento consiste em determinar uma sequência de índices factível de tamanho mínimo.

Escolha Greedy: Seja $\vec{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ uma sequência ordenada de pontos de abastecimento entre s e f e m a distância mínima de abastecimento; então o índice:

$$j = \max \{ 1 \le i \le n \mid x_i \le m \}$$

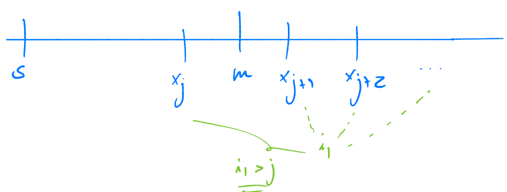
pertence a uma sequência de índices factível de tamanho mínimo.

Prova:

- Seja $\vec{i}$ uma sequência factível de tamanho mínimo. Se $j \in \vec{i}$, não há nada a provar. Se $j \notin \vec{i}$, temos de construir uma sequência factível de índices de tamanho mínimo $\vec{i}'$, tal que $j \in \vec{i}'$.

- Seja $\vec{i} = \langle i_1, \dots, i_k \rangle$, temos 2 casos a considerar:
  - (I) $i_1 > j$
  - (II) $i_1 < j$

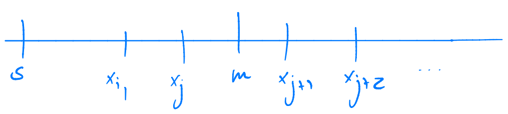
(I)



$i_1 > m \Rightarrow \vec{i}$ não é uma solução factível

$\Rightarrow$ contradição $\therefore$

(II)



- $\vec{i}' = \langle j, i_2, \dots, i_k \rangle$ é uma sequência factível de tamanho mínimo. Temos apenas de provar que: $x_{i_2} - x_j \le m \Leftrightarrow x_j \ge x_{i_2} - m$

$$\left. \begin{array}{l} x_{i_2} - x_{i_1} \le m \Leftrightarrow x_{i_1} \ge x_{i_2} - m \\ x_j \ge x_{i_1} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{x_j \ge x_{i_2} - m}$$

```
WaterFill(x⃗, s, f, m)
  let L = new list();
  for i=1 to x⃗.size
    if (x⃗[i] > s + m)
      L.push(i-1);
      s = x[i-1];
  return L
```

Complexidade:

$\mathcal{O}(n)$

$n = \vec{x}.size$

Ex 16.2-5

$\{x_1, \dots, x_n\}$

→ Objectivo: Encontrar o menor conjunto de intervalos de tamanho 1 que cobrem todos os pontos no conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$. Um intervalo de tamanho 1 é univocamente determinado por qualquer um dos seus dois limites. Vamos representar cada intervalo $I_i = [l_i, e_i]$ pelo seu limite esquerdo l_i.

Formalização do Problema: Dado um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^+$, $\{x_1, \dots, x_n\}$, determinar um conjunto $\{l_1, \dots, l_m\}$ de tamanho mínimo k1 que:

$$\forall 1 \le i \le n .\ \exists 1 \le j \le m .\ l_j \le x_i \le l_j + 1$$

$$(x_i \in [l_j, l_j + 1])$$

Escolha Greedy: Dado um conjunto de pontos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, o intervalo $[x^*, x^*+1]$, com $x^* = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, pertence a um conjunto mínimo de intervalos q cobrem X.

Prova:

- Seja $\tilde{I}$ um conjunto mínimo de intervalos. Se $[x^*, x^*+1] \in \tilde{I}$, não há nada a provar. Suponhamos q $[x^*, x^*+1] \notin \tilde{I}$, temos de construir um novo conjunto de intervalos $\tilde{I}^*$ de tamanho mínimo q contém $[x^*, x^*+1] \in \tilde{I}^*$.

- Seja $[x', x'+1]$ o intervalo mais à esquerda em $\tilde{I}$. Segue que $x^* \in]x', x'+1]$ porque $x^* \neq x'$.

$$\tilde{I}' = (\tilde{I} \setminus \{[x', x'+1]\}) \cup \{[x^*, x^*+1]\}$$

- Seja $X_1 = X \cap [x', x'+1]$ → o conjunto de pontos de X no 1º intervalo de $\tilde{I}$.

- Dado q x^* é o elemento mais pequeno de X, concluímos que:

$$X_1 \subseteq [x^*, x'+1] \subseteq [x^*, x^*+1]$$

↳ $x' < x^*$

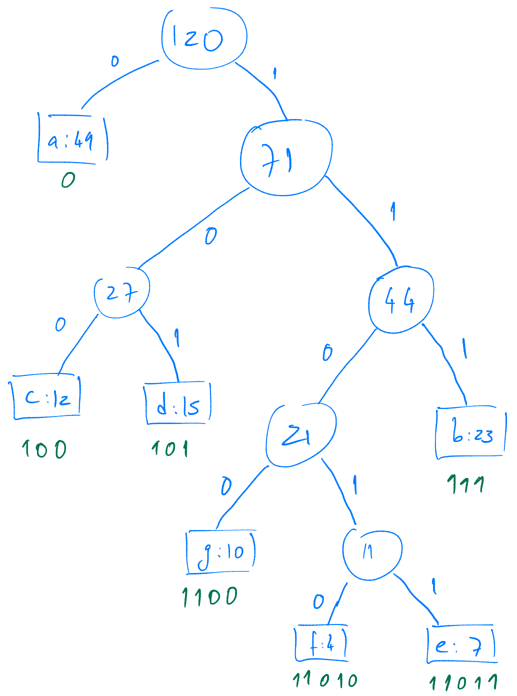
```
Compute Intervals (x⃗)
  let L = new list();
  let last = x⃗[1];
  L.push(x⃗[1]);
  for i = 2 to x⃗.length
    if x[i] > last+1
      L.push(x[i]);
      last = x[i]
  return L
```

Complexidade

$\Theta(n)$, com $n = \vec{x}.size$

T2 08/09 II.3

a:49, b:23, c:12, d:15, e:7, f:4, g:10



R2 08/09 II.3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_i	00	06	10	13	17	20	23	25	28	31	33	36	38	41	43	50	53
d_i	5	5	3	6	1	3	2	6	2	4	5	3	3	4	4	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_i	00	06	10	13	17	20	23	25	28	31	33	36	38	41	43	50	53
d_i	5	5	3	6	1	3	2	6	2	4	5	3	3	4	4	6	2
f_i	5	11	13	19	18	23	25	31	30	35	38	39	41	45	47	56	55

	1	2	3	5	4	6	7	9	8	10	11	12	13	14	15	17	16
a_i	00	06	10	17	13	20	23	28	25	31	33	36	38	41	43	53	50
d_i	5	5	3	1	6	3	2	2	6	4	5	3	3	4	4	2	6
f_i	5	11	13	18	19	23	25	30	31	35	38	39	41	45	47	55	56

$$X = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 17\}$$

T2 14/15 II.b

① Ordenamos os n objectos por ordem decrescente ($\leq$) de valor por unidade de peso — $O(n \lg n)$

② Seguindo a ordem estabelecida, vamos colocando 50% de cada objecto em cada uma das caixas

③ Seja i o índice do objecto tal que $p_i/2$ excede a capacidade residual das duas caixas.
Quando atingimos o objecto i, colocamos em cada caixa apenas a fracção de i suficiente para completar a capacidade da caixa.

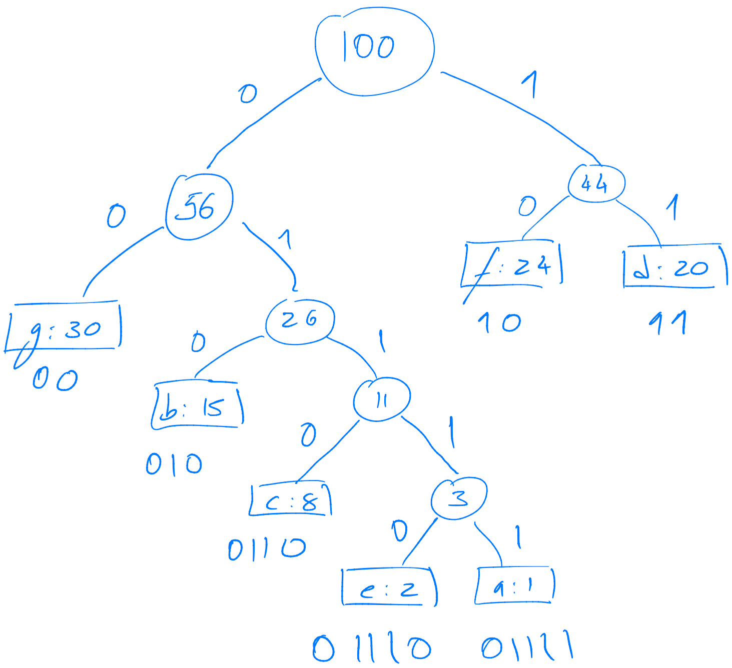
②–③: $O(n)$

Total com Ord.: $O(n \lg n)$

R2 14/15 II.b

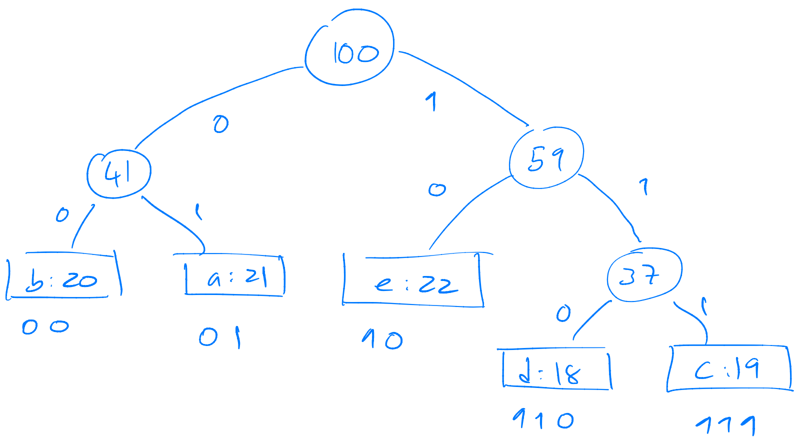
$\boxed{a:1}$ $\boxed{b:15}$ $\boxed{c:8}$ $\boxed{d:20}$ $\boxed{e:2}$ $\boxed{f:24}$ $\boxed{g:30}$

$\boxed{a:1}$ $\boxed{b:15}$ $\boxed{c:8}$ $\boxed{d:20}$ $\boxed{e:2}$ $\boxed{\cancel{f}:24}$ $\boxed{g:30}$



R2 16/17 I.a

$\boxed{a:21}$ $\boxed{b:20}$ $\boxed{c:19}$ $\boxed{d:18}$ $\boxed{e:22}$



R2 15/16 I.a

Formalização: $\min \sum_{i=1}^{n} x_i$, sabendo que: $\forall_{2 \le i \le n}.\ d_i \geq 2 \times d_{i-1}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot d_i = k$

Escolha Greedy: seja $(\langle d_1, \dots, d_n \rangle, k)$ uma instância do problema dos trocos, qualquer solução óptima para esta instância tem $x_n = \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$

Suponhamos, por contradição, que temos uma solução óptima para a instância $(\langle d_1, \dots, d_n \rangle, k)$ com $x_n \neq \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$. Temos duas opções: $x_n > \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$ ou $x_n < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$.

(i) $x_n > \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$

$$\lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor \leq \frac{k}{d_n} < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor + 1 \leq x_n$$

$$\Rightarrow \frac{k}{d_n} < x_n \Rightarrow k < x_n \cdot d_n$$ (contradição ∴)

$\vec{x}$ não é solução p/ o problema

(ii) $x_n < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor$

$$\bullet\ x_n < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor \leq \frac{k}{d_n} < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor + 1$$

$$\Rightarrow x_n < \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor \leq \frac{k}{d_n}$$

$$\Rightarrow x_n \leq \lfloor \frac{k}{d_n} \rfloor - 1 \leq \frac{k}{d_n} - 1$$

$$\Rightarrow x_n \cdot d_n \leq k - d_n$$

- Isto significa que há pelo menos d_n unidades q têm de ser pagas com denominações inferiores a d_n.
Ora, usando a denominação d_n eu posso pagar d_n unidades com uma única moeda.
Usando, uma denominação inferior a d_n, tenho de utilizar pelo menos duas moedas.
De onde segue q a solução $\vec{x}$ não é óptima!
(Contradição ∴)

```
ComputeChange(k, d⃗)
  let x⃗ be an array of size n(= d⃗.size)
  for i = n to 1
    x⃗[i] = ⌊k / d⃗[i]⌋
    k = k - x⃗[i].d⃗[i]
  return x⃗
```

Complexidade: $O(n)$

- Se a condição:

$$\forall_{2 \leq i \leq n}.\ d_i \geq 2 \times d_{i-1}$$

Não for observada, o algoritmo não funciona.

<u>Exemplo</u>

$\vec{d} = \langle 1, 7, 8 \rangle$

$k = 14$

↳ Aplicando o algoritmo: $\vec{x} = \langle 6, 0, 1 \rangle$

$C = 7$

Solução ótima: $\vec{x} = \langle 0, 2, 0 \rangle$

$C = 2$