Aula 10

- Método de Ford-Fulkerson (Revisão)
- Algoritmo de Edmonds Karp
  - Complexidade
- Correspondência Bipartida Máxima
  - Correcção e Complexidade
- Correspondência Bi-partida Máxima
  - Correcção
- Aplicações:
  - Distribuição de Bilhetes

Método de Ford-Fulkerson

Complexidade:

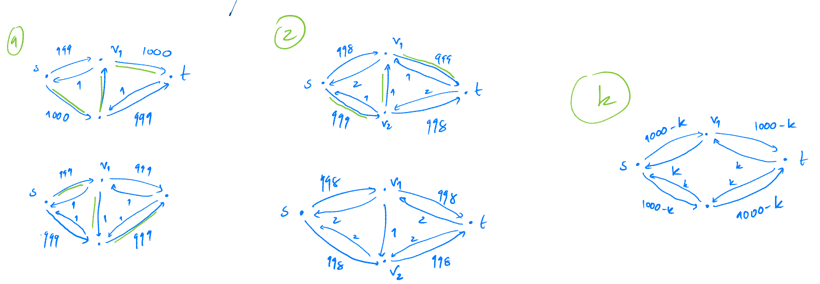
```
FordFulkerson(G)        // com G = (V, E, s, t, c)
    let f be the 0-flow on G                 ---> O(E)
    while true
        compute Gf                           ---> O(V+E)
        let p be an augmenting path in Gf    ---> ?
        if !p return f
        compute fp                           ---> O(V)
        f := f ↑ fp                          ---> O(V+E)
```

Quantas iterações? $|f|$

$O(E|f|)$

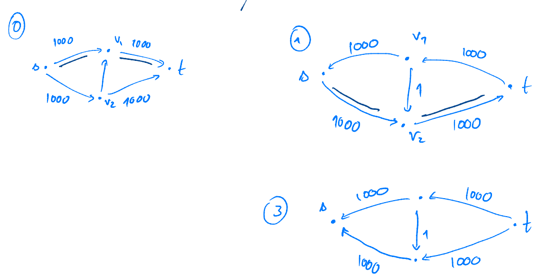
Exemplo 1 [Complexidade do Método de Ford Fulkerson]

- Caminhos de aumento não eficientes:



2000 iterações

- Caminhos de aumento "eficientes":



2 iterações

Escolhemos os caminhos mais curtos na rede residual

Algoritmo 1 [Edmonds-Karp]

Método de Ford-Fulkerson

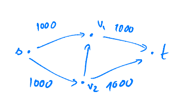
+ BFS p/ identificar os caminhos de aumento na rede residual

[Correcção]

Segue directamente do método de Ford Fulkerson

Definição 1 [Distância de Edmonds-Karp]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e u e v dois vértices em V, a distância de Edmonds-Karp entre u e v, denotada por $\delta_f(u, v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v em G_f.



$\delta_{f_0}(s,t) = 2$

[Ideia]

- $\delta_f(s,t)$ vai aumentar monotonamente em cada iteração do algoritmo de Edmonds Karp.

$$f \overset{Ek}{\longmapsto} f' \Rightarrow \delta_{f'}(s,t) \geq \delta_f(s,t)$$

- Qual é o comprimento do caminho mais longo? $|V|-1$
- Dividimos a execução do algoritmo em $|V|-2$ fases, respectivamente $i=2,\dots,|V|-1$.

Queremos um upper bound no número de iterações que se fazem em cada fase.

$O(E)$

* Qual é o valor de $\delta_f(s,t)$ quando o algoritmo termina?

- Quantas iterações há no total?

$O(V \cdot E)$

$O(V \cdot E^2)$

Lema 1 [Monotonia da distância de Edmonds Karp]

$$f \overset{Ek}{\longmapsto} f' \Rightarrow \forall v \in V.\ \delta_{f'}(s,v) \geq \delta_f(s,v) \ \wedge \ \delta_{f'}(v,t) \geq \delta_f(v,t)$$

Prova

- Suponhamos que existe v tal que $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

Sem perda de generalidade, assumimos que não existe w tal que:

$$\delta_{f'}(s,w) < \delta_f(s,w) \ \wedge \ \delta_{f'}(s,w) < \delta_{f'}(s,v).$$

- Seja u o predecessor de v no caminho mais curto entre s e v. Temos que:

$$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$$
$$\geq \delta_f(s,u) + 1$$
$$\delta_f(s,v) > \delta_f(s,u) + 1 \quad (\dagger)$$

$\Downarrow$ Desigualdade Triangular

$$(u,v) \notin E_f \Rightarrow (v,u) \in E_f$$

e pertence a um caminho de aumento em G_f

portanto a um caminho mais curto:

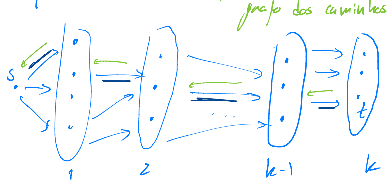
$$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$$

substituindo em $(\dagger)$

$$\delta_f(s,v) > \delta_f(s,v) + 2$$

(contradição)

$\tilde{G}_f$



$\tilde{G}_{f'}$ vai conter arcos para trás no grafo dos caminhos mais curtos

- Podem existir um vértice $v \in V$ a uma distância $k' > k$?

- Arcos "para trás" no grafo dos caminhos mais curtos podem ser utilizados para obter caminhos ainda mais curtos?

Definição 2 [Grafo dos caminhos mais curtos em Rede Residual]

Dado um fluxo f numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, o grafo dos caminhos mais [curtos] na rede residual de f, $\tilde{G}_f$ é definido como se segue:

- $\tilde{G}_f = (V, \tilde{E}_f)$
- $\tilde{E}_f = \{ e \in E_f \mid e$ pertence a um caminho mais curto entre s e t em $G_f \}$

Lema 2 [Lema dos Caminhos Mais Curtos em Rede Residual]

$$f \overset{Ek}{\longmapsto} f' \wedge \delta_{f'}(s,t) = \delta_f(s,t) \Rightarrow \tilde{E}_{f'} \subseteq \tilde{E}_f$$

Prova:

- $(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \Rightarrow (u,v) \in \tilde{E}_f$

$(u,v) \in \tilde{E}_{f'} \wedge (u,v) \notin \tilde{E}_f$

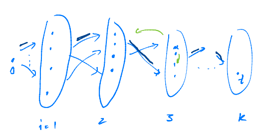
$\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u)$

$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$

$\geq \delta_f(s,u) + 1 \geq \delta_f(s,v) + 1$

$\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$

$(\delta_f(s,v) - \delta_{f'}(s,v)) < 0$



$\delta_f(s,v) + \delta_f(v,t) \geq k$

$\delta_{f'}(s,v) + \delta_{f'}(v,t) = k$

$$\underbrace{(\delta_f(s,v) - \delta_{f'}(s,v))}_{<0} + \underbrace{(\delta_f(v,t) - \delta_{f'}(v,t))}_{>0} \geq 0$$

$\delta_f(v,t) > \delta_{f'}(v,t)$

(contradiz o lema 1)

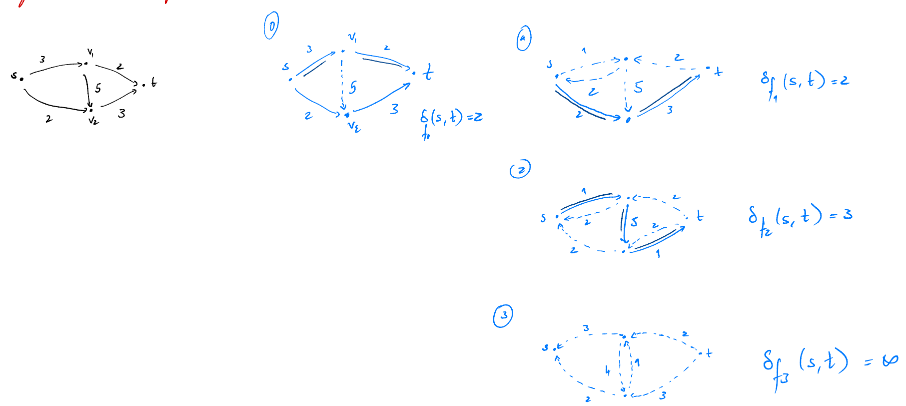
- $\tilde{E}_{f} \setminus \tilde{E}_{f'} \neq \emptyset$
  - Ao aumentarmos o fluxo ao longo do caminho de aumento pelo menos uma das arestas do caminho de aumento fica saturada e por isso não vai fazer parte de $\tilde{E}_{f'}$.

Lema 3 [Número de Iterações do Algoritmo de Edmonds Karp]

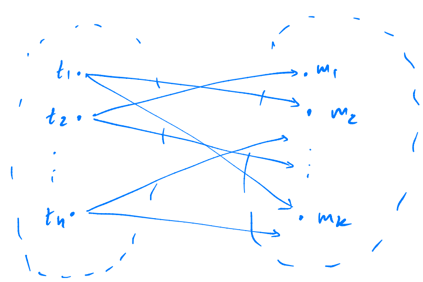
O nº de iterações do algoritmo de Edmonds Karp é $O(V.E)$.

Prova: $|V|-2$ fases. Em cada fase temos no máximo $|E|$ iterações (o tamanho de $\tilde{E}_f$ decresce sempre de pelo menos uma aresta).

Exemplo 2 [Edmonds Karp]



- **Problema da Correspondência bi-partida Máxima**



Tarefas $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ Máquinas $\{m_i\}_{i=1}^{k}$

- Um arco entre t_i e m_j significa q a máquina m_j pode executar a tarefa t_i.

- Sabendo q cada máquina só pode executar uma tarefa de cada vez, qual é o maior nº de tarefas q podemos executar em simultâneo?

Definição 3 [Bi-partição e Correspondência Bi-partida]

- Dado um grafo $G=(V,E)$, uma bi-partição de G é um par (L,R) tal que $V=L\cup R$, $L\cap R=\emptyset$ e $E\subseteq L\times R$.
- Seja $G=(V,E)$ um grafo e (L,R) uma bi-partição de G, uma correspondência bi-partida M é um subconjunto de E tal que todos os vértices de V têm um único arco incidente em M.

Definição 4 [Problema da Correspondência Bi-Partida Máxima]

Dado um grafo $G=(V,E)$ e uma bi-partição (L,R) de G, o problema da correspondência bi-partida máxima consiste em determinar a correspondência bi-partida M com maior cardinalidade.

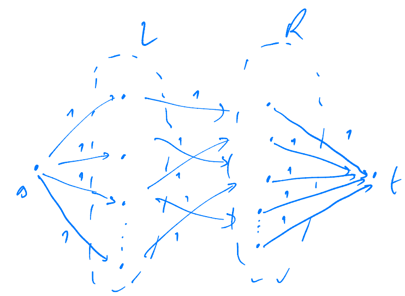
Definição 5 [Redução CBM - Fluxo Máximo]

- Seja $G=(V,E)$ um grafo e (L,T) uma bi-partição de G, a rede de fluxo $CB(G,L,R)$ é definida como se segue:

$$CB(G,L,T) = (V \cup \{s,t\}, E', s, t, c)$$

$$E' = E \cup \{(s,u) \mid u \in L\} \cup \{(v,t) \mid v \in R\}$$

$$c(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in E' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Lema 4 [Correspondência ⇒ Fluxo]

Seja M uma correspondência em G, (L,R) uma bi-partição em G, e $f_M : (V \cup \{s,t\}) \times (V \times \{s,t\}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ a seguinte função:

$$f_M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in M \\ 1 & \text{se } x = s \text{ e } y \in in(M) \\ 1 & \text{se } y = t \text{ e } x \in out(M) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- $in(M) = \{x \mid \exists y.\ (x,y) \in M\}$
- $out(M) = \{x \mid \exists y.\ (y,x) \in M\}$

- f_M é um fluxo em $CB(G,L,R)$ e $|f_M| = |M|$.

Prova:

- Há que provar que f_M satisfaz a restrição de capacidade e conservação do fluxo.

[Restrição de Capacidade]

$$f_M(x,y) = 1 \Rightarrow c(x,y) = 1$$

- $(x,y) \in M \Rightarrow (x,y) \in E \Rightarrow (x,y) \in E' \Rightarrow c(x,y) = 1$
- $x = s$ e $y \in in(M) \Rightarrow (x,y) \in E' \Rightarrow c(x,y) = 1$
- $y = t$ e $y \in out(M) \Rightarrow (x,y) \in E' \Rightarrow c(x,y) = 1$

[Conservação do Fluxo]

$$\forall u \in L \cup R.\ \sum_{v \in V} f_M(v,u) = \sum_{v \in V} f_M(u,v)$$

- $u \in L$
  - $u \in in(M)$
    - $f_M(s,u) = 1 \Rightarrow \sum_{v \in V} f_M(v,u) = 1$
    - Existe um único vértice $v \in V$ tal q $(u,v) \in M$ $\Rightarrow \sum_{v \in V} f(u,v) = 1$
  - $u \notin in(M)$
    - $\sum_{v \in V} f(v,u) = 0 = \sum_{v \in V} f(u,v)$
- $u \in R$ ...

[Valor do fluxo] $|f| = |in(M)| = |M|$

Lema 5 [Fluxo $\Rightarrow$ CB]

Seja $G = (V, E)$ um grafo, (L, R) uma bi-partição em G e f um fluxo em $CB(G, L, R)$, o conjunto M_f é definido como se segue:

$$M_f = \{ (u, v) \mid u \neq s \wedge v \neq t \wedge f(u, v) = 1 \}$$

- M_f é uma correspondência bi-partida em G e $|M_f| = |f|$.

Prova:

- Considere-se um vértice $u \in L$, há que provar que u tem no máximo um arco incidente em M_f.
  - Observamos q̄ u tem um único arco incidente vindo de s, pelo q̄ u recebe no máximo uma unidade de fluxo vinda de s.
  - Assim sendo, f vai enviar, no máximo, uma unidade de fluxo de u para R, pelo q̄ existe, no máximo, um único vértice $v \in R$ tal q̄ $f(u, v) = 1$.
- O mesmo raciocínio para vértices em V.

Teorema 1 [Fluxo Máximo versus Correspondência Bi-partida Máxima]

Seja $G = (V, E)$ um grafo e (L, R) uma bi-partição de G, o valor da correspondência bipartida máxima corresponde ao valor do fluxo máximo em $CB(G, L, R)$.

Prova:

- Seja f^* um fluxo máximo em $CB(G, L, R)$, concluímos que M_{f^*} é uma correspondência bipartida em G e $|f^*| = |M_{f^*}|$ (pelo Lema 5).
- Suponhamos q̄ existe uma correspondência M' tal que $|M'| > |M_{f^*}|$.
  Então, pelo Lema 4, concluímos que $f_{M'}$ é um fluxo em $CB(G)$ e $|f_{M'}| = |M'| > |M_{f^*}| = |f^*|$.
  De $|f_{M'}| > |f^*|$ segue q̄ f^* não é um fluxo máximo. Contradição $\Rightarrow\Leftarrow$

Problema 1 [Eliminação de Equipas]

Torneio

- jogos : $1 \leq i \leq m$
- pessoas : $1 \leq i \leq n$

- Cada jogo tem um limite máximo para a assistência $(max(j_i))$
- Cada pessoa só tem direito a um bilhete único (só pode assistir no máximo a um jogo)
- $wishes(p_i) = \underbrace{\{ j_{k_1}, \dots, j_{k_\ell} \}}_{\text{jogos q̄ } p_i \text{ quer assistir}}$

- $V = P \cup J \cup \{ s, t \}$

- $E = \{ (s, p, 1) \mid p \in P \} \cup \{ (p, j, 1) \mid p \in P \wedge j \in J \wedge j \in wishes(p) \}$
  $\cup \{ (j, t, k) \mid j \in J \wedge k = max(j) \}$