Aula 17 – Moves

Push-Relabel - Invariante 2 (Alturas)

Lema [Invariante de Alturas após Initialize]

Após Initialize(G, s) temos que:

$$\forall u, v \in V.\ (u,v) \in E_f \Rightarrow h(u) \leq h(v) + 1$$

Prova:

- Suponhamos que $(u,v) \in E_f$. Há dois casos a considerar:

  (I) $v = s$ e (u,v) é um arco de refluxo

  $$h(u) = 0 < |V| = h(v) \leq h(v) + 1$$

  (II) $v \neq s$ e (u,v) é um arco da rede

  - Concluímos que $u \neq s$ porque todos os arcos que partem de s estão saturados.
  - $h(u) = 0 = h(v) \leq h(v) + 1$ ∎

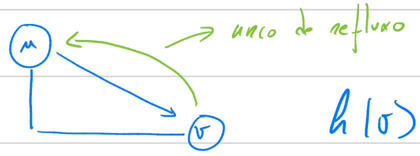
Push-Relabel - Invariante 2 (Alturas)

Lema [Invariante de Alturas após Push]
O invariante de alturas é preservado pela operação push(u,v)

Prova

- Antes da operação Push(u,v) sabemos que:
  - $\forall x,y \in V.\ (x,y) \in E_f \Rightarrow h(x) \leq h(y)+1$
  - $h(u) = h(v)+1$

- Esta operação não altera as alturas e pode criar o arco (v,u) na rede residual.



$h(v) = h(u) - 1 \leq h(u) + 1$ ✓

Push-Relabel - Invariante 2 (Alturas)

Lema [Invariante de Alturas após Relabel]

O invariante de alturas é preservado pela operação Relabel(u)

Prova

- Antes da operação Relabel(u) sabemos que:
  - $\forall x, y \in V.\ (x,y) \in E_f \Rightarrow h(x) \leq h(y) + 1$
  - $\forall v \in V.\ (u,v) \in E_f \Rightarrow h(u) \leq h(v)$

- Queremos provar q̄ depois da operação de Relabel(u) o invariante de alturas mantém-se.

- Suponhamos que $(x,y) \in E_f$:

  (I) Se $x \neq u$ não há nada a provar.

  (II) Se $x = u$, sabemos que:

$$h'(u) = \underbrace{\min\{h(v) \mid (u,v) \in E_f\}}_{\text{seja } v^* \text{ o vértice q̄ realiza o mínimo}} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$h'(u) = h(v^*) + 1$$

$$\leq h(y) + 1 \quad \text{(porque } v^* \text{ realiza o mínimo)}.$$

Push-Relabel - Invariante 1 (Pré-fluxo)

Lema [Pré-fluxo após Initialize]

Após Initialize(G, s) temos que: f é um pré-fluxo

Prova:

[Restrição de Capacidade]

$$\forall u, v \in V.\ f(u,v) \leq c(u,v)$$

(I) $u = s$:

$$f(u,v) = c(u,v) \leq c(u,v) \checkmark$$

(II) $u \neq s$

$$f(u,v) = 0 \leq c(u,v) \checkmark$$

[Conservação do Fluxo]

$$\forall u \in V \setminus \{s\}.\ \sum_{v \in V} f(v,u) \geq \sum_{v \in V} f(u,v)$$

- $u \in G.Adj[s]$

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = c(s,u) \geq \sum_{v \in V} f(u,v) = 0 \checkmark$$

- $u \notin G.Adj[s]$

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = 0 = \sum_{v \in V} f(u,v) \checkmark$$

Push-Relabel - Invariante 1 (Pré-fluxo)

Lema [Pré-fluxo após Push]
O invariante de pré-fluxo é preservado pela operação push(u, v)

Prova:

- $f \xmapsto{push(u,v)} f'$
- f é pré-fluxo

$\Big\}$ f' é pré-fluxo

- 2 casos a considerar
  - (u, v) é arco da rede
  - (u, v) é arco de refluxo

Push-Relabel - Invariante 1 (Pré-fluxo)

Lema [Pré-fluxo após Push]
O invariante de pré-fluxo é preservado pela operação push(u,v)

Prova:

Caso I - (u,v) é arco da rede

$$f'(u,v) = f(u,v) + \min\underbrace{\left(e(u),\ c_f(u,v)\right)}_{\Delta}$$

[Restrição de Capacidade]

$$\forall x,y \in V.\ f(x,y) \leq c(x,y)$$

- $(x,y) \neq (u,v)$

$$f'(x,y) = f(x,y) \leq c(x,y)$$

- $(x,y) = (u,v)$

$$\begin{aligned} f'(u,v) &= f(u,v) + \Delta \\ &\leq \cancel{f(u,v)} + \left(c(u,v) - \cancel{f(u,v)}\right) \\ &\leq c(u,v) \end{aligned}$$

[Conservação do Fluxo]

$$\forall x \in V \setminus \{s\}.\ e_{f'}(x) \geq 0$$

(a) $x \neq u, v$

$$e_{f'}(x) = e_f(x) \geq 0$$

(b) $x = u$

$$e_{f'}(u) = e_f(u) - \Delta \geq 0$$

(c) $x = v$

$$e_{f'}(v) = e_f(v) + \Delta \geq 0$$

Push-Relabel - Invariante 1 (Pré-fluxo)

Lema [Pré-fluxo após Push]
O invariante de pré-fluxo é preservado pela operação push(u,v)

Prova:

Caso I - (u,v) é arco de refluxo

$$f'(v,u) = f(v,u) - \underbrace{\min\left(e(u),\ c_f(u,v)\right)}_{\Delta}$$

[Restrição de Capacidade]

$$\forall x,y \in V.\ f(x,y) \leq c(x,y)$$

- $(x,y) \neq (v,u)$

$$f'(x,y) = f(x,y) \leq c(x,y)$$

- $(x,y) = (v,u)$

$$f'(v,u) = f(v,u) - \Delta \leq c(v,u)$$

[Conservação do Fluxo]

$$\forall x \in V \setminus \{s\}.\ e_{f'}(x) \geq 0$$

(a) $x \neq u, v$

$$e_{f'}(x) = e_f(x) \geq 0$$

(b) $x = v$

$$e_{f'}(v) = e_f(v) + \Delta \geq 0$$

(c) $x = u$

$$e_{f'}(u) = \underbrace{e_f(u) - \Delta}_{\geq 0}$$

Push - Relabel - Invariante 1 (Pré-fluxo)

Lema [Pré-fluxo após Relabel]
O invariante de pré-fluxo é preservado pela operação Relabel(u)

Prova:

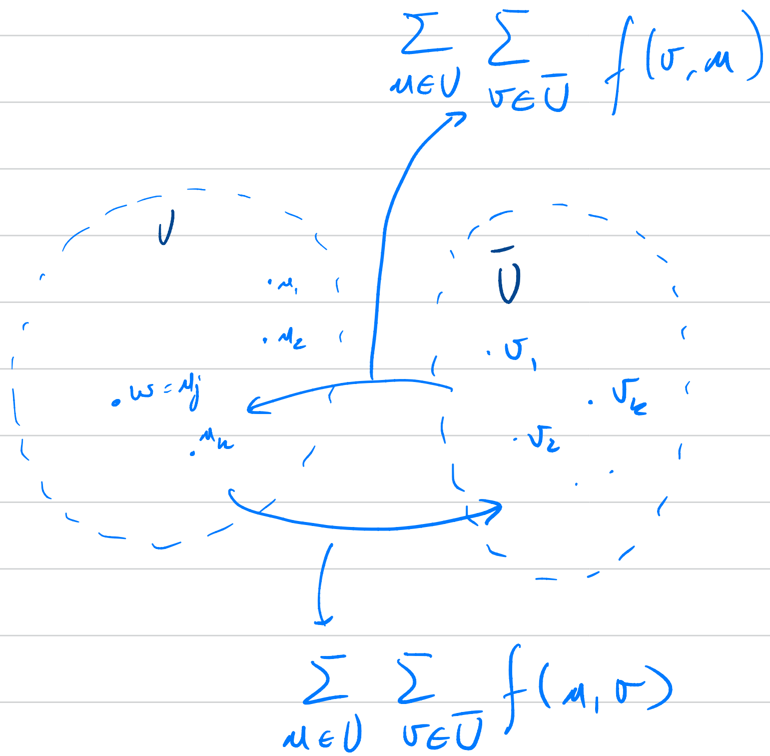
- A operação de Relabel não altera o fluxo.

Lema do Caminho v-s para vértices transbordantes

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo e f um pré-fluxo em G,
então $\forall v \in V\setminus\{s,t\}.\ v.e>0 \Rightarrow G_f \vdash v \rightsquigarrow s$ (s é atingível a partir de v na rede residual induzida por f).

Prova:

- Suponhamos que f é um pré-fluxo em G, $w.e>0$ e s não é atingível a partir de w em G_f.



- Seja U o conjunto de vértices atingíveis a partir de w em G_f.
  Por hipótese, sabemos que $s \notin U$.

- $$\sum_{u\in U} u.e = \sum_{u\in U}\left(\sum_{v\in V} f(v,u) - \sum_{v\in V} f(u,v)\right)$$

$$= \sum_{u\in U}\left(\sum_{v\in U\cup\bar U} f(v,u) - \sum_{v\in U\cup\bar U} f(u,v)\right)$$

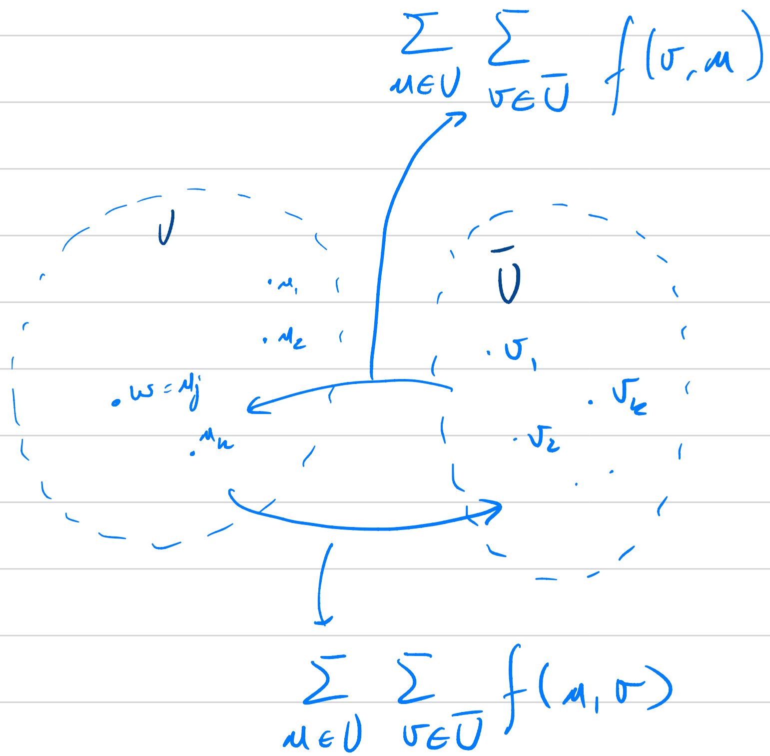
$$= \cancel{\sum_{u\in U}\sum_{v\in U} f(v,u)} + \sum_{u\in U}\sum_{v\in\bar U} f(v,u) - \cancel{\sum_{u\in U}\sum_{v\in U} f(u,v)} - \sum_{u\in U}\sum_{v\in\bar U} f(u,v)$$

$$= \sum_{u\in U}\sum_{v\in\bar U} f(v,u) - \sum_{u\in U}\sum_{v\in\bar U} f(u,v)$$

Lema do Caminho v-s para vértices transbordantes

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma rede de fluxo e f um pré-fluxo em G,
então $\forall v \in V\setminus\{s,t\}.\ v.e>0 \Rightarrow G_f \vdash v \rightsquigarrow s$ (s é atingível a partir de v na rede residual induzida por f).

Prova:



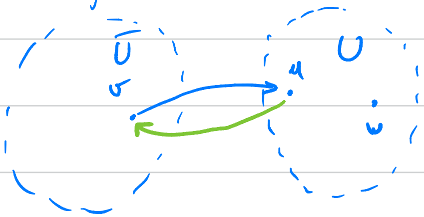
- $\sum_{u\in U} u.e = \sum_{u\in U}\sum_{v\in \bar U} f(v,u) - \sum_{u\in U}\sum_{v\in \bar U} f(u,v)$

- Dado que $w \in U$, concluímos que: $\underbrace{\sum_{u\in U} u.e > 0}$

  Todos os vértices em $V\setminus\{s\}$ têm excesso de fluxo ≥ 0

- Concluímos portanto que $\sum_{u\in U}\sum_{v\in \bar U} f(v,u) > 0$, pelo que existe $v\in\bar U$ e $u \in U$ tais que:

  $f(v,u) > 0$



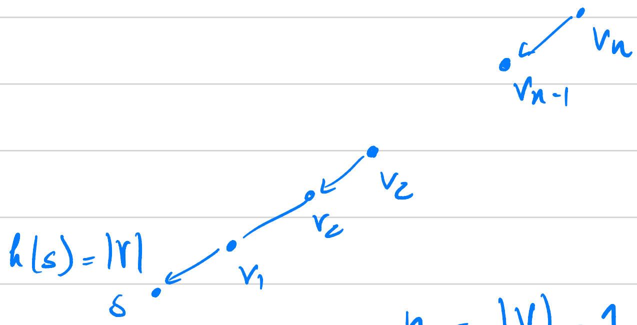
- Mas se $f(v,u)>0$, concluímos que $(u,v)\in E_f$ (rede residual) e portanto $v \in U$ (contradição)

Lema do Limite de Altura

$\forall u \in V.\ h(u) \leq 2|V| - 1$

Prova:

- A altura de um vértice é incrementada quando um vértice tem excesso de fluxo. Quantas vezes é que podemos incrementar a altura de um vértice no máximo?
- Se u tem excesso de fluxo, existe um caminho que o liga a s na rede residual..
- Qual a altura máxima que um vértice com excesso de fluxo pode ter?



$n = |V| - 1$

$h(v_n) = |V| + |V| - 1$
$= 2|V| - 1$

Lema [Upper Bound p/ o nº de Operações de Relabel]

O nº de Relabels na execução do Push-Relabel é $\leq 2|V|^2$.

Prova:

- Altura máxima de cada vértice: $2|V| - 1$
- A altura de cada vértice pode ser incrementada $2|V| - 1$ vezes. Temos $|V| - 2$ vértices disponíveis $(|V| \setminus \{s, t\})$, de onde segue que:

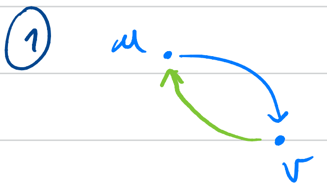
$$(2|V| - 1)(|V| - 2) = 2|V|^2 + 2 - 3|V|$$
$$\leq 2|V|^2$$

Lema [Upper Bound p/ o nº de Pushes Saturantes]

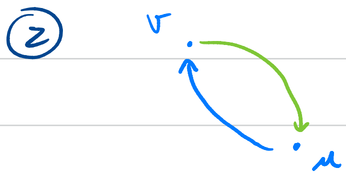
O nº de pushes saturantes na execução do Push-Relabel é $\leq 2 \cdot |E| \cdot |V|$

Prova

- Quantas vezes é que podemos saturar o arco (u, v) durante a execução do algoritmo de Push-Relabel?



$h(u) = h(v) + 1$



$$\begin{aligned} h'(v) &= h'(u) + 1 \\ &\geq h(u) + 1 \\ &= h(v) + 2 \end{aligned}$$

- Entre cada dois pushes saturantes de um mesmo arco (u, v), a altura de uma das extremidades do arco é incrementada de pelo menos 2 unidades. Sabendo que a altura máxima para um vértice é $2|V| - 1$, concluímos que o nº máximo de pushes saturantes por arco é: $(2|V| - 1)/2 = |V|$.

- Dado que a rede residual tem $2|E|$ arcos, concluímos que o nº máximo de pushes saturantes é: $2 \cdot |E| \cdot |V|$.

Lema [Upper Bound p/ o nº de Pushes Não Saturantes]

O nº de pushes não-saturantes na execução do Push-Relabel é $\leq 4|V|^2(|V|+|E|)$

Prova:

• Definimos a quantidade:

$$\Phi_f = \sum_{\substack{v \in V \\ v.e > 0}} h(v)$$

• $\sum_{i=1}^{n} \Phi_{f_i} \leq 2|V| \cdot (2|V|^2 + 2|E| \cdot |V|)$

$= O(|V|^2 |E|)$

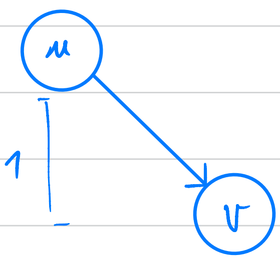
→ Cada uma das operações q incrementam Φ, incrementa o seu valor em no máximo $2|V|$ (altura máxima q um vértice pode ter).

• Φ aumenta com:

- Relabels - ✓
- Pushes-saturantes - criam excesso de fluxo no vértice de destino, podendo não eliminar todo o excesso de fluxo do vértice de origem.

• Φ diminui com:

- Pushes não saturantes



• Se o push é não-saturante, o excesso de fluxo é eliminado de u. O vértice v fica com excesso de fluxo, sendo q podia não ter excesso de fluxo antes do "push".

• $\Phi' \leq \Phi \underbrace{- h(u) + h(v)}_{= 1}$

$\leq \Phi - 1$

Lema [Upper Bound no nº de Discharges]

O nº de discharges na execução do Relabel-to-Front é $O(|V|^3)$.

Prova

Ideia: Contar o nº máximo de discharges entre cada dois relabels.

- Relabel i

  { Quantos discharges é que podem ocorrer aqui?

- Relabel $i+1$

} - Nº máximo de Discharges consecutivos sem relabel: $|V|-2$

- Nº máximo de Discharges: $(|V|-2) \cdot 2|V|^2 \leq 4|V|^3 = O(|V|^3)$.

Lema [Upper Bound para o Nº de Pushes Não Saturantes]

O número de pushes não-saturantes durante a aplicação do Relabel-to-Front é $O(|V|^3)$.

Prova:

- Durante a aplicação do Relabel-to-Front "pushes" não saturantes só podem ocorrer no fim de uma operação de discharge (não há suficiente excesso de fluxo no vértice a descarregar para saturar o arco).

- Nº de Pushes não Saturantes $\leq$ Nº de Discharges

- Nº de Pushes não saturantes é $O(|V|^3)$.

Lema [Upper Bound no nº de iterações sobre as listas de vizinhos]

O nº de iterações sobre as listas de vizinhos N_u é $O(|V|.|E|)$.

Prova:

- Quantas vezes é que podemos percorrer a lista de vizinhos de um dado vértice u?

  $\Rightarrow O(V)$ porque a altura máxima que um vértice pode ter é $2|V|-1$ e cada vez que acabamos de percorrer uma lista de vizinhos a altura do vértice é incrementada.

- Nº total de iterações sobre as listas de vizinhos é:

$$\sum_{u \in V\setminus\{s,t\}} O(|V|).|N[u]| = O(|V|). \sum_{u \in V\setminus\{s,t\}} |N[u]|$$

$$= O(|V|).O(|E|)$$

$$= O(|V|.|E|)$$