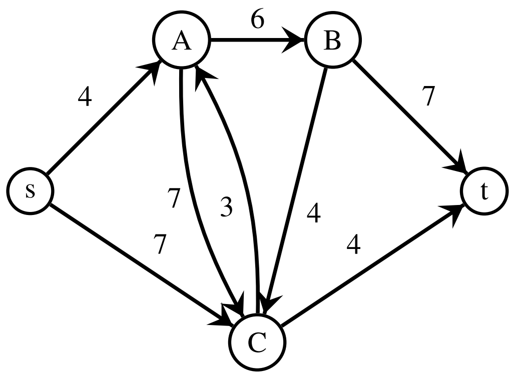
Aula Prática 12

ASA 2021/2022

Q1 (T1 08/09, III.2) Considere a rede de fluxo da figura onde s e t são respectivamente os vértices fonte e destino na rede.



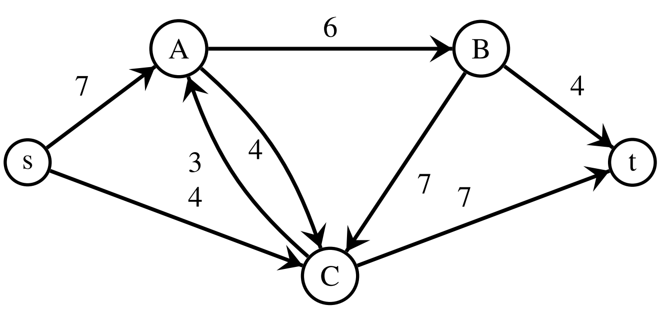
Aplique o algoritmo RELABEL-TO-FRONT para calcular o fluxo máximo da rede. Indique o valor final da altura h para cada um dos vértices da rede. Considere que inicialmente temos $L =< A, B, C >$ e as seguintes listas de vizinhos:

$N[A] =< s, B, C >$

$N[B] =< A, C, t >$

$N[C] =< s, A, B, t >$

Q2 (R1 08/09 III.3) Considere a rede de fluxo da figura onde s e t são respectivamente os vértices fonte e destino na rede.



Aplique o algoritmo RELABEL-TO-FRONT para calcular o fluxo máximo da rede. Indique o valor final da altura h para cada um dos vértices da rede.

Considere que inicialmente temos $L =< A, B, C >$ e as seguintes listas de vizinhos:

$N[A] =< s, B, C >$

$N[B] =< A, C, t >$

$N[C] =< s, A, B, t >$

Q3 (R1 19/20 II.d) O Departamento de Informática da Universidade Técnica de Caracolândia decidiu implementar uma nova aplicação para determinar automaticamente a composição dos júris de dissertações de mestrado. No semestre em consideração existem n estudantes que pretendem defender as suas dissertações, $\{S_1, ..., S_n\}$, e m professores disponíveis para participar em júris, $\{P_1, ..., P_m\}$. O problema da constituição dos júris deve respeitar as seguintes restrições:

- Cada professor P_j, com $1 \leq j \leq m$, pode participar em no máximo l_j júris;
- Cada júri deve ser constituído por três professores.
- Cada professor P_j só pode participar nos júris dos estudantes que fizeram teses na sua área de especialização. Denotamos o conjunto de professores especialistas na tese do aluno S_i por $\mathtt{SP}(S_i)$.

Admita que o problema tem solução, isto é, que, dadas as disponibilidades dos professores, é possível constituir o júri de todos os alunos. Pretende-se agora calcular uma atribuição de professores a júris.

a. Modele o problema da constituição de júris como um problema de fluxo máximo. A resposta deve incluir o procedimento utilizado para determinar a constituição dos júris a partir do fluxo calculado.

b. Indique o algoritmo que utilizaria para a calcular o fluxo máximo, bem como a respectiva complexidade assimptótica medida em função dos parâmetros do problema (número de alunos, n, e número de professores, m).
Nota: De entre os algoritmos de fluxo estudados nas aulas deve escolher aquele que garanta a complexidade assimptótica mais baixa para o problema em questão.

Solução:

a. *Construção da rede de fluxo* $G = (V, E, w, s, t)$. Na construção da rede de fluxo consideramos um vértice por professor, um vértice por estudantes e e dois vértices adicionais s e t, respectivamente a fonte e o sumidouro. Formalmente:

- $V = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{P_j \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{s, t\}$
- $$\begin{array}{ll} E = \{(s, P_j, l_j) \mid 1 \leq j \leq m\} & P_j \text{ só pode participar em } l_j \text{ defesas} \\ \quad \cup \{(P_j, S_i, 1) \mid P_j \in \mathtt{SP}(S_i)\} & \\ \quad \cup \{(S_i, t, 3) \mid 1 \leq i \leq n\} & \text{3 membros por júri} \end{array}$$

Como sabemos que é possível formar todos os jurís, concluímos que o fluxo máximo é $3.n$. Uma vez calculado o fluxo máximo, f^*, o júri do aluno S_i é constituído pelos professores P_{j_1}, P_{j_2} e P_{j_3} tais que: $f^*(P_{j_1}, S_i) = 1$, $f^*(P_{j_2}, S_i) = 1$, e $f^*(P_{j_3}, S_i) = 1$.

b. *Complexidade.*

- $|V| = n + m + 2 \in O(n + m)$
- $|E| = m + m.n + n \in O(n.m)$
- $|f^*| \leq 3n \in O(n)$
- Ford-Fulkerson: $O(n^2.m)$
- RF: $O((n+m)^3)$

A melhor solução consiste em usar um algoritmo baseado no método de Ford Fulkerson.

Q4 (T1 20/21 II.d) Caracolândia tem n residentes $\{R_1,...,R_n\}$, m clubes $\{C_1,...,C_m\}$ e k partidos políticos $\{P_1,...,P_k\}$, e o seu governo decidiu estabelecer uma comissão para financiamento de eventos lúdicos. A comissão deve ser constituída por um residente indicado por cada clube. Contudo, de modo a garantir o peso relativo dos vários partidos políticos, exige-se ainda que a comissão seja integrada por exactamente c_i membros de cada partido P_i. Cada residente pode pertencer a vários clubes mas apenas a um único partido político.

O governo de Caracolândia pretende agora determinar se é possível constituir uma comissão que satisfaça as restrições estabelecidas.

a. Modele o problema da constituição da comissão como um problema de fluxo máximo.

b. Admitindo que o número total de residentes n é muito superior ao número de partidos, número de clubes, e número total de elementos da comissão, indique a complexidade assimptótica, medida em função dos parâmetros do problema, do algoritmo Relabel-To-Front e do algoritmo de Edmonds-Karp. Indique que algoritmo utilizaria para calcular o fluxo máximo.

a. *Construção da rede de fluxo:* $G = (V,E,c,s,t)$. Na construção da rede de fluxo consideramos um vértice por residente, um vértice por partido político, um vértice por comissão e dois vértices adicionais s e t, respectivamente a fonte e o sumidouro. Formalmente:

- $V = \{s,t\} \cup \{R_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
-

$E =$	$\{(s,C_i,1) \mid 1 \leq i \leq n\}$	C_i pode nomear <u>um</u> representante
	$\cup\ \{(C_i,R_j,1) \mid R_j$ é membro do clube $C_i\}$	
	$\cup\ \{(R_i,P_j,1) \mid R_i$ é membro do partido $P_j\}$	
	$\cup\ \{(P_i,t,c_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$	P_i pode nomear c_i representantes

b. *Complexidade:*

- $|V| = n+m+k+2 = O(n)$
- $|E| \leq n+n.m+2k = O(n.m)$
- $|f^*| \leq m = O(m)$, o fluxo máximo é limitado pelo número de comissões
- Edmonds Karp (upper bound de FF): $O(|f^*|.E) = O(m.n.m) = O(n.m^2)$
- Edmonds Karp (upper bound EK): $O(E^2.V) = O(n^2.m^2.n) = O(n^3.m^2)$
- Relabel-To-Front: $O(n^3)$

Dado que $n > m$, a melhor solução consiste em usar um algoritmo baseado no método de Ford Fulkerson.

Q5 (CLRS Ex. 26.4-4) Suppose that we have found a maximum flow in a flow network $G = (V,E)$ using a PUSH-RELABEL algorithm. Give a fast algorithm to find a minimum cut in G.