Aula 8

- Fecho Transitivo
- Repesagem de Arcos
- Algoritmo de Johnson
  - Complexidade
  - Correcção
- Problemas

- Caminhos mais curtos entre todos os pares

- Queremos calcular duas matrizes: Π e D.
  - Π_{ij}: predecessor de j no caminho mais curto entre i e j se j é atingível a partir de i
  - D_{ij}: distância do caminho mais curto entre i e j.

- $G_{\Pi,i} = (V_{\Pi,i}, E_{\Pi,i})$ // O grafo dos caminhos mais curtos com origem em $\underline{i}$

$E_{\Pi,i} = \{ (\Pi_{ij}, j) \mid \Pi_{ij} \neq Nil \}$

$V_{\Pi,i} = \{ j \mid \Pi_{ij} \neq Nil \} \cup \{ i \}$

Algoritmo 3 [Caminhos Mais Curtos entre todos os pares - Solução Recursiva]

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(m)} = \min \left(l_{ij}^{(m-1)}, \min \{ l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \mid 1 \leq k \leq n \} \right)$$
$$= \min \{ l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \mid 1 \leq k \leq n \}$$

- UpdateAllPairsShortestPaths(G, D)

```
let D' be a new matrix with the dimensions of D
for i=1 to G.n
    for j=1 to G.n
        D'ij = ∞
        for k=1 to G.n
            D'ij = min(D'ij, Dik + G.Wkj)
return D'
```

[Complexidade]
$O(V^3)$

Nota: No CLRS os autores alocam a matriz duas vezes (páginas 688 e 689)

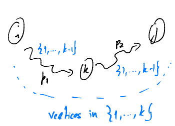
- ComputeAllPairsShortestPaths(G)

```
let D = G.W
for m=2 to |G.V|-1
    D = UpdateAllPairsShortestPaths(G, D)
```

[Complexidade]
$O(V^4)$

Algoritmo 4 [Floyd Warshall Algorithm]

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min \left(d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}, d_{ij}^{(k-1)} \right) & \text{c.c.} \end{cases}$$



FloydWarshall(G)

```
let D' = G.W
for k=2 to n
    D = D'; D' = NewMatrix(G.n, G.n)
    for i=1 to n
        for j=1 to n
            Dij = min(Dij, Dik + Dkj)
return D'
```

Remark:
- Podemos deixar de usar D' e usar apenas D?
- É a mesma coisa?

Floyd Warshall (G)

let $D^{(1)} = G.W$

let $\Pi = initPi(G.W)$

for $k = 2$ to n

let $D^{(k)}$ be a new matrix with the same dimensions as $D^{(1)}$

for $i = 1$ to n

for $j = 1$ to n

$d = D_{ik} + D_{kj}$

if $d < D_{ij}$

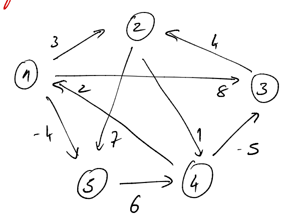
$D_{ij}^{(k)} = d$; $\Pi_{ij} = \Pi_{kj}$

Complexidade: $O(V^3)$

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} i & \text{se } (i,j) \in E \\ nil & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \Pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{k} = d_{ij}^{(k-1)} \\ \Pi_{kj}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{k} < d_{ij}^{(k-1)} \end{cases}$$

Exemplo 3 [Caminhos Mais Curtos entre Todos os Pares]



$$d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$$

$$D^0 = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

O vértice 4 é o único q consegue chegar a 1
por isso é o único cujas estimativas podem ser melhoradas.

$d_{41} + d_{1j}$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 1 [Fecho Transitivo]

Seja $G=(V,E)$ um grafo dirigido, o fecho transitivo de G, é definido como se segue:

$$G^* = (V, E^*) \quad \text{onde} \quad E^* = \{ (u,v) \mid u,v \in V \wedge u \leadsto v \}$$

Algoritmo 1 [Floyd Warshall p/ fecho transitivo]

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{true} & \text{se } i=j \vee (i,j) \in E \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \vee t_{kj}^{(k-1)} \right)$$

```
Transitive Closure (G)
  let T' = InitTMatrix(G)
  for k=1 to n
    T = T'; T' = NewMatrix(G.n, G.n)
    for i=1 to n
      for j=1 to n
        T'ij = Tij ∨ (Tik ∧ Tki)
  return T'
```

- **Algoritmo de Johnson**

Ideia:

- Dado um grafo pesado G c/ arcos c/ pesos negativos, calcular um grafo G' tal q os caminhos mais curtos em G mas G' não tem arcos c/ pesos negativos.
- Aplicar o algoritmo de Dijkstra a cada vértice de G' para calcular os caminhos mais curtos c/ origem nesse vértice.

Dúvida: Como é q digo "it holds that" em português.

Lema 1 [Repesagem dos Arcos]

Seja $G=(V,E,w)$ um grafo dirigido pesado e $h: V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja $\hat{w}: E \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguinte função:

$$\hat{w}(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$$

Então:

① se p é um caminho mais curto no grafo $G=(V,E,w)$, então p tb é um caminho mais curto em $\hat{G} = (V, E, \hat{w})$.

② G contém ciclos negativos sse $\hat{G}$ contém ciclos negativos

Prova:

① p é um caminho mais curto em G $\iff$ p é um caminho mais curto em $\hat{G}$

· Seja $p = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, começamos por mostrar que

$$\hat{w}(p) = w(p) + h(v_0) - h(v_n)$$

$$0 \xrightarrow{w_{01}} 1 \xrightarrow{w_{12}} 2 \xrightarrow{w_{23}} 3$$

$$w(p) = (w_{01} + h(v_0) - h(v_1)) + (v_{12} + h(v_1) - h(v_2)) + (v_{23} + h(v_2) - h(v_3))$$
$$= (w_{01} + w_{12} + w_{23}) + h(v_0) + (h(v_1) - h(v_1)) + (h(v_2) - h(v_2)) - h(v_3)$$
$$= w(p) + h(v_0) - h(v_3)$$

$$\begin{aligned}
- \hat{w}(p) &= \sum_{i=0}^{n-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} h(v_i) - \sum_{i=0}^{n-1} h(v_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + \cancel{\sum_{i=1}^{n-1} h(v_i)} + h(v_0) - \left(\cancel{\sum_{i=1}^{n-1} h(v_i)} + h(v_n) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_0) - h(v_n)
\end{aligned}$$

· $\hat{w}(p) = w(p) + \underbrace{h(v_0) - h(v_n)}$

Esta quantidade não depende do caminho p que liga v_0 a v_n.

Assim sendo, o caminho mais curto entre quaisquer dois vértices v_0 e v_n em G coincide com o caminho mais curto entre esses mesmos dois vértices em $\hat{G}$.

② Suponhamos que $p = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ é um caminho circular em G e que portanto $v_0 = v_n$.

Segue que
$$\begin{aligned}
\hat{w}(p) &= w(p) + h(v_0) - h(v_n) \\
&= w(p) + h(v_0) - h(v_0) \\
&= w(p)
\end{aligned}$$

Concluímos que o peso dos caminhos circulares não é alterado pela função de repesagem.

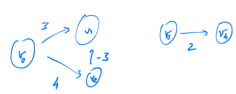
De onde segue que um caminho circular tem um peso negativo em G sse tb tem peso negativo em $\hat{G}$.

Observação: Dado um grafo pesado dirigido $G = (V, E, w)$, queremos encontrar uma função de repesagem h tal que:

$$\forall (u,v) \in E.\ \hat{w}(u,v) \geq 0$$
$$\iff w(u,v) + h(u) - h(v) \geq 0$$
$$\iff \underbrace{h(v) \leq h(u) + w(u,v)}_{\text{Desigualdade Triangular}}$$

· Dado um grafo $G = (V, E)$, escolhemos um vértice s e calculamos p/ todo o $v \in V$ $\delta(s, v)$, usando o algoritmo de Johnson.

Problema: vértices não atingíveis $(\underbrace{w + \infty - \infty}_{?})$



$h(v_1) = -1 \quad h(v_2) = 4 \quad h(v_3) = \infty \quad h(v_4) = \infty \quad h(v_0) = 0$

$$\begin{aligned}
\hat{w}(v_3, v_4) &= w(v_3, v_4) + h(v_3) - h(v_4) \\
&= 2 + \infty - \infty \\
&= ?
\end{aligned}$$

Definição 2 [Grafo Estendido c/ Vértice de Origem]

Seja $G = (V, E, w)$ um grafo dirigido pesado, a extensão de G ao vértice s, denotada por $\bar{G}_s = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{w})$ é definida como se segue:

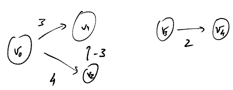
- $\bar{V} = V \cup \{s\}$
- $\bar{E} = E \cup \{(s, v) \mid v \in V\}$
- $\bar{w}(v_1, v_2) = \begin{cases} w(v_1, v_2) & \text{if } v_1, v_2 \neq s \\ 0 & \text{if } v_1 = s \wedge v_2 \in V \end{cases}$

Definição 3 [Altura de Johnson]

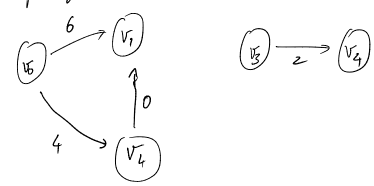
Seja $G = (V, E, w)$ um grafo pesado dirigido, a função de altura $h : V \to \mathbb{R}$ de Johnson é definida como se segue:

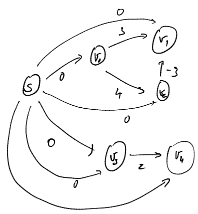
$$h(v) = \delta_{\bar{G}_s}(s, v) \quad , \text{ onde } s \notin V$$

Exemplo 1 [Altura de Johnson]



Grafo repesado:





$h(v_0) = 0$ $h(v_3) = 0$

$h(v_1) = -3$ $h(v_4) = 0$

$h(v_2) = 0$

Algoritmo 2 [Johnson]

- Calcular os caminhos curtos entre todos os pares em $G = (V, E, w)$

1. Calcular o grafo estendido $\bar{G}_s = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{w})$ com $s \notin V$ $O(V+E)$
2. Usar o algoritmo de Bellman-Ford p/ determinar a função de altura h. Se o algoritmo de Bellman-Ford retornar falso, o algoritmo de Johnson tb retorna falso. $O(E \cdot V)$
3. Calcular o grafo repesado $\hat{G} = (V, \hat{E}, \hat{w})$ $O(V+E)$
4. Para cada vértice $u \in V$, usar o algoritmo de Dijkstra D_{uv} e Π_{uv} para todo $v \in V$ $O(E \lg V)$ $\underline{\underline{O(V \cdot E \cdot \lg V)}}$
5. Retornar D e Π.

[Complexidade]

$\underline{O(V E \lg V)}$