Sumário

- Introdução à Programação Linear
- Formulação de Problemas
- Interpretação Geométrica
- Forma Standard
- Algoritmo Simplex: motivação

Aula 20

Programação Linear - Exemplo 1

- A fábrica de automóveis Xpto consegue produzir os modelos
  - A, ao ritmo de 1 por minuto
  - B, ao ritmo de 1 por cada 2 mins
  - C, ao ritmo de 1 por cada 3 mins

- A legislação obriga a que, em média, cada veículo produzido na fábrica Xpto consiga percorrer 18 milhas por gallon.

- Milhas percorridas por gallon
  - A - 25
  - B - 15
  - C - 10

- Lucro por modelo:
  - A - 1000 $
  - B - 5000 $
  - C - 15.000 $

Pergunta: Qual o lucro máximo q a Fábrica Xpto pode fazer num turno de 8 horas cumprindo as restrições governamentais?

Programação Linear - Exemplo 1

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Incógnitas:

- x_A - nº de As produzidos num turno de 8 h
- x_B - nº de Bs produzidos num turno de 8 h
- x_C - nº de Cs produzidos num turno de 8 h

Função Objectivo (Lucro):

Restrições:

Tempo:

Restrição governamental:

Programação Linear - Exemplo 1

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Função Objectivo (Lucro): $L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3$

Restrição 1: $T_1 \cdot x_1 + T_2 \cdot x_2 + T_3 \cdot x_3 \leq 480$

Restrição 2: $7 x_1 - 3 x_2 - 8 x_3 \geq 0$

Restrição 3: $\underbrace{x_1, x_2, x_3 \geq 0}_{\text{quantidades não negativas}}$

$$\left.\begin{array}{l} \max \ -1000\, x_1 + 5000\, x_2 + 15000\, x_3 \\ \text{sujeito a:} \\ \quad x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480 \\ \quad 7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Programa linear

- Função objectivo linear
- Restrições lineares

Programação Linear - Exemplo 2

- A fábrica de chocolates FooBar produz chocolates de dois tipos:
  - A - c/ lucro de 1 \$ por caixa
  - B - c/ lucro de 6 \$ por caixa
- A procura de cada tipo de caixas está limitada:
  - A - 200
  - B - 300
- A fábrica consegue produzir um máximo de 400 caixas por dia.

Pergunta: Qual é o lucro máximo q a fábrica pode fazer?

Variáveis:

Programação Linear - Exemplo 2

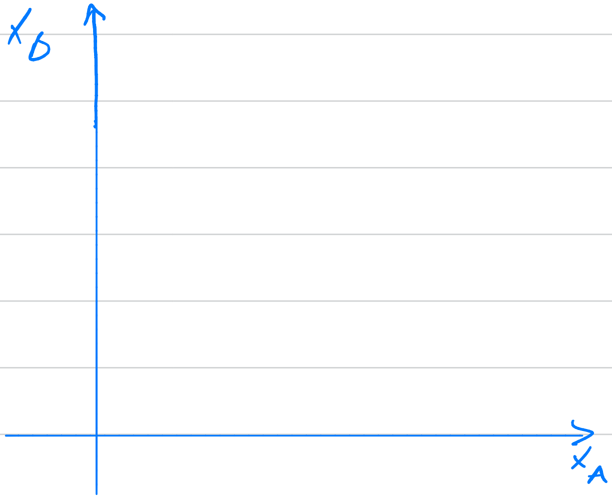
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



Programação Linear - Exemplo 2

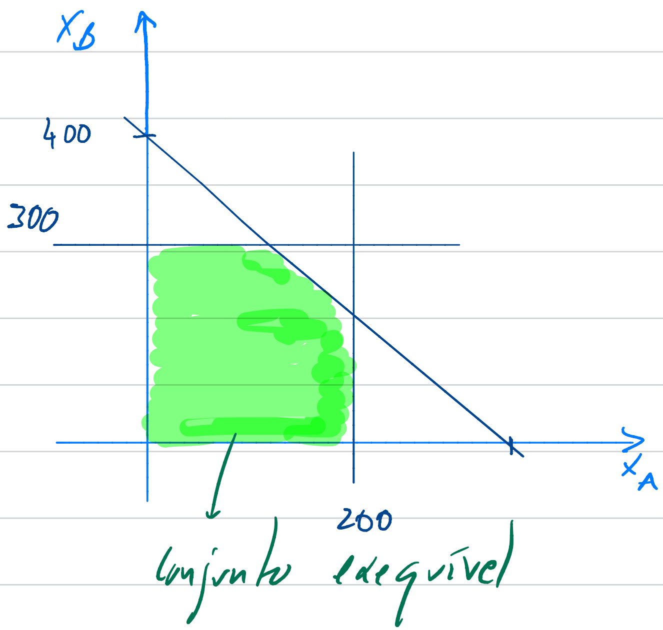
max $x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

Programação Linear - Exemplo 2

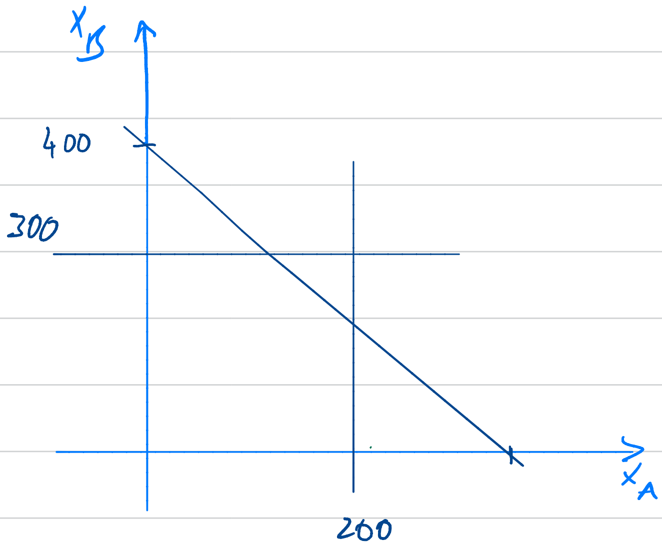
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

- Curvas de nível da função Objectivo

Programação Linear - Exemplo 2

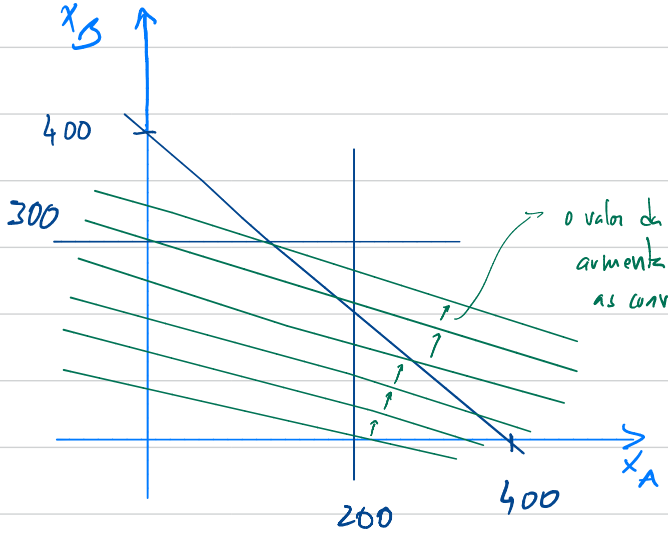
$\max\ x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



o valor da função objectivo aumenta à medida q sobimos as curvas de nível

- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

- $\frac{c}{6} = 400$

  $0 = 400 - \frac{x_A}{6}$

  $x_A = 400 \times 6 = 2400$

- Curvas de nível da função Objectivo

$x_A + 6x_B = c \Leftrightarrow x_B = c/6 - x_A/6$

$-1/6$

Programação Linear - Exemplo 2

$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$

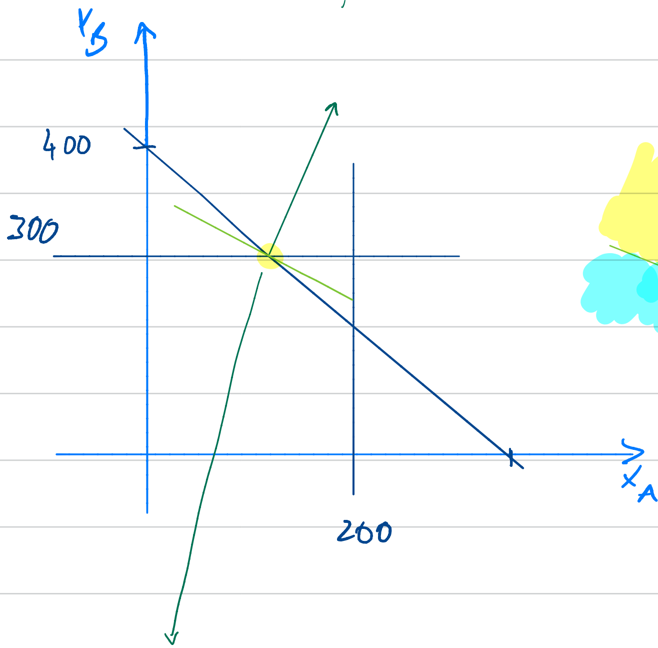
- $x_A + x_B \leq 400$

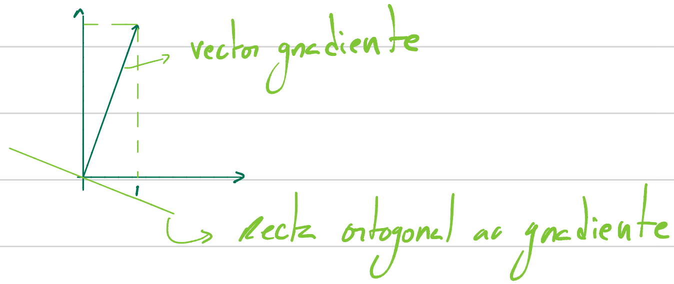
  $x_B \leq 400 - x_A$

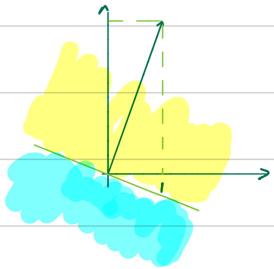
- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

$f(x_A, x_B) = x_A + 6 \cdot x_B$

$\nabla f = [1, 6]$







- Para aumentarmos o valor de f temos de nos deslocar na direcção do gradiente.

Não é possível deslocarmo-nos na direcção do gradiente permanecendo dentro do conjunto factível.

Máximo: $x_B = 300$

$x_A = 100$

Lucro: $6 \times 300 + 100 = 1900$

Programação Linear - Forma Standard

$$\max \; c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(I) $\max \; -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$
$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(II) $\max \; x_A + 6x_B$

$$x_A \leq 200$$
$$x_B \leq 300$$
$$x_A + x_B \leq 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Programação Linear - Forma Standard

$$\max \; c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(I) $\max \; -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$

$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\rightsquigarrow$

$$\max \begin{bmatrix} -1000 & 5000 & 15000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & +3 & +8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$c = \begin{bmatrix} -1000 \\ 5000 \\ 15000 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(II) $\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$

Programação Linear – Forma Standard

$$\max \quad c^T x$$
$$Ax \le b$$
$$x \geq 0$$

(I) $\max \ -1000\,x_1 + 5000\,x_2 + 15000\,x_3$

$$x_1 + 2 . x_2 + 3 . x_3 \le 480$$
$$7 . x_1 - 3 . x_2 - 8 . x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(II) $\max \ x_A + 6\,x_B$

$$x_A \le 200$$
$$x_B \le 300$$
$$x_A + x_B \le 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

$$\max \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Programação Linear - Forma Standard

Ⓘ Minimização versus maximização

Multiplicar por -1

Ⓘ Variáveis sem restrição de serem não negativas

$$x_i \begin{cases} x_i^- \\ x_i^+ \end{cases} \qquad x_i = x_i^+ - x_i^-$$

Ⓘ Restrições com igualdade

$= \Rightarrow \leq \wedge \geq$

Ⓘ Restrições com $\geq$

Multiplicar por -1

Exemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3\underline{x_2} \\ & x_1 + x_2 = 7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 - x_2 \leq -7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ & x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\ & -x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq -7 \\ & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

Programação Linear - Revisitar a 1ª parte da cadeira

- Fluxo Máximo

- Caminhos mais curtos entre s e t

Programação Linear - Revisitar a 1ª parte da cadeira

- Fluxo Máximo

$$\max \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs}$$

$$f_{uv} \leq c(u,v) \quad \text{for each } u, v \in V$$

$$\sum_{v \in V} f_{vu} = \sum_{v \in V} f_{uv} \quad \text{for each } u \in V \setminus \{s,t\}$$

$$f_{uv} \geq 0 \ , \ \text{for each } u, v \in V$$

- Caminhos mais curtos entre s e t

$$\max d[t]$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$$

$$d[s] = 0$$

$$d[v] \geq 0 \quad \forall v \in V$$