Aulas 20/21

Programação Linear - Exemplo 1

- A fábrica de automóveis Xpto consegue produzir os modelos
  - A, ao ritmo de 1 por minuto
  - B, ao ritmo de 1 por cada 2 mins
  - C, ao ritmo de 1 por cada 3 mins

- A legislação obriga a que, em média, cada veículo produzido na fábrica Xpto consiga percorrer 18 milhas por gallon.

- Milhas percorridas por gallon
  - A - 25
  - B - 15
  - C - 10

- Lucro por modelo:
  - A - 1000 \$
  - B - 5000 \$
  - C - 15.000 \$

Pergunta: Qual o lucro máximo q̄ a Fábrica Xpto pode fazer num turno de 8 horas cumprindo as restrições governamentais?

Programação Linear - Exemplo 1

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Incógnitas:

- x_A - nº de As produzidos num turno de 8 h
- x_B - nº de Bs produzidos num turno de 8 h
- x_C - nº de Cs produzidos num turno de 8 h

Função Objectivo (Lucro):

Restrições:

Tempo:

Restrição governamental:

Programação Linear - Exemplo 1

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Incógnitas:

- x_A - nº de As produzidos num turno de 8 h
- x_B - nº de Bs produzidos num turno de 8 h
- x_C - nº de Cs produzidos num turno de 8 h

Função Objectivo (Lucro):

$$L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} L_i \cdot x_i$$

Restrições:

Tempo: $T_1 \cdot x_1 + T_2 \cdot x_2 + T_3 \cdot x_3 \leq 8 \cdot 60 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} T_i \cdot x_i \leq 480$

Restrição governamental:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot M_i \geq 18 \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot M_i - 18 \sum_{i=1}^{3} x_i \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} (M_i - 18) \cdot x_i \geq 0 \Rightarrow 7x_1 - 3x_2 - 8x_3 \geq 0$$

Programação Linear - Exemplo 1

i	Tipo	Tempo de Produção (T_i)	Lucro (L_i)	Milhas percorridas por Gallon (M_i)
1	A	1 min	-1 k	25
2	B	2 mins	5 k	15
3	C	3 mins	15 k	10

Função Objectivo (Lucro): $L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3$

Restrição 1: $T_1 \cdot x_1 + T_2 \cdot x_2 + T_3 \cdot x_3 \leq 480$

Restrição 2: $7 x_1 - 3 x_2 - 8 x_3 \geq 0$

Restrição 3: $\underbrace{x_1, x_2, x_3 \geq 0}_{\text{quantidades não negativas}}$

$$\max \; -1000 x_1 + 5000 x_2 + 15000 x_3$$

sujeito a:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$

$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Programa linear
- Função objectivo linear
- Restrições lineares

Programação Linear - Exemplo 2

- A fábrica de chocolates FooBar produz chocolates de dois tipos:
  - A - c/ lucro de 1 $ por caixa
  - B - c/ lucro de 6 $ por caixa
- A procura de cada tipo de caixas está limitada:
  - A - 200
  - B - 300
- A fábrica consegue produzir um máximo de 400 caixas por dia.

Pergunta: Qual é o lucro máximo q a fábrica pode fazer?

Variáveis:

x_A - nº de As

x_B - nº de Bs

Programação Linear - Exemplo 2

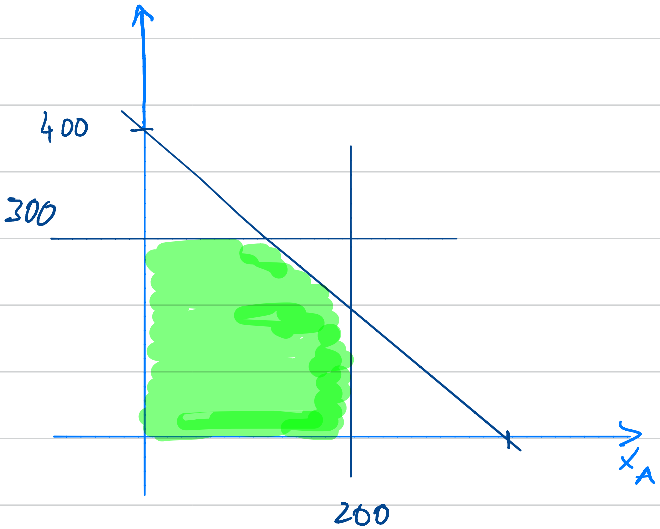
$\max \; x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

Programação Linear - Exemplo 2

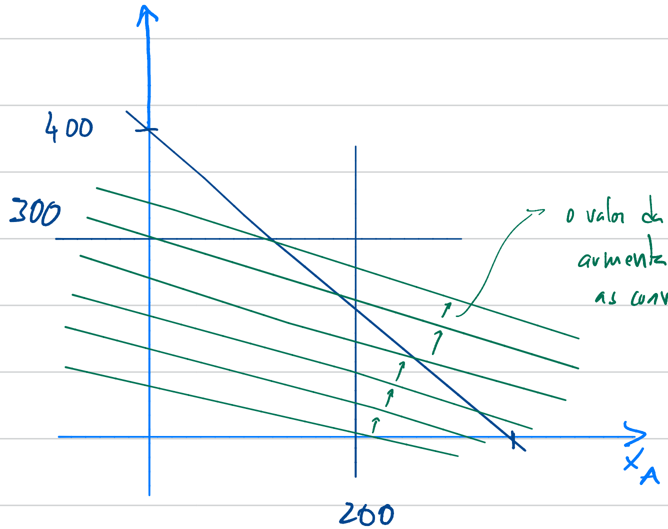
$\max \ x_A + 6x_B$

$x_A \leq 200$

$x_B \leq 300$

$x_A + x_B \leq 400$

$x_A, x_B \geq 0$



o valor da função objectivo aumenta à medida q̄ subimos as curvas de nível

- $x_A + x_B \leq 400$

  $x_B \leq 400 - x_A$

- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

- $\frac{c}{6} = 400$

  $0 = 400 - \frac{x_A}{6}$

  $x_A = 400 \times 6 = 2400$

- Curvas de nível da função Objectivo

  $x_A + 6x_B = c \Leftrightarrow x_B = c/6 - x_A/6$

  $-1/6$

Programação Linear - Exemplo 2

$\max \; x_A + 6\,x_B$

$x_A \le 200$

$x_B \le 300$

$x_A + x_B \le 400$

$x_A, x_B \geq 0$

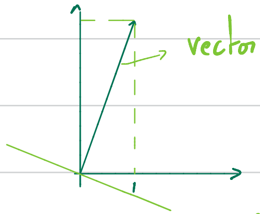
- $x_A + x_B \le 400$

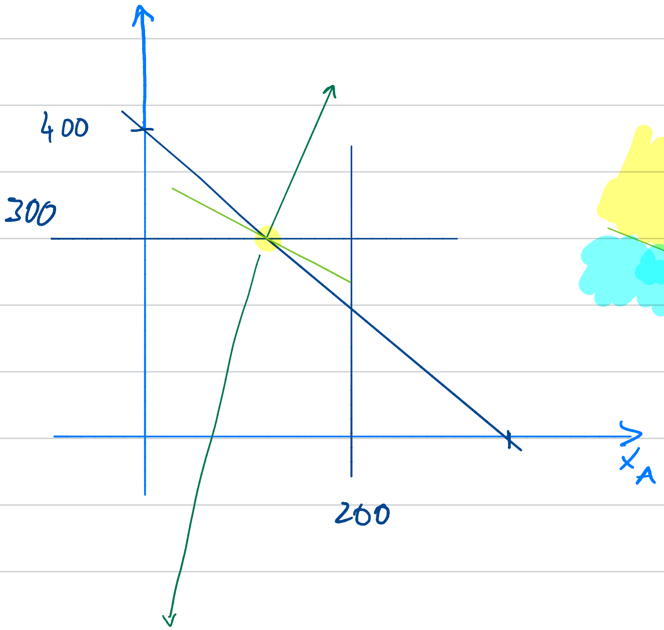
  $x_B \le 400 - x_A$

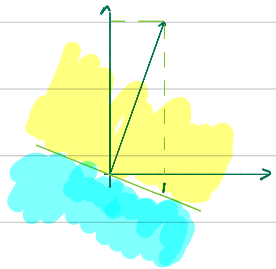
- $400 - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 400$

$f(x_A, x_B) = x_A + 6 \cdot x_B$

$\nabla f = [1, 6]$







- Para aumentarmos o valor de f temos de nos deslocar na direcção do gradiente.

Não é possível deslocarmo-nos na direcção do gradiente permanecendo dentro do conjunto factível.

Programação Linear - Forma Standard

$$\max \; c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

I $\max \; -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$
$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

II $\max \; x_A + 6x_B$

$$x_A \leq 200$$
$$x_B \leq 300$$
$$x_A + x_B \leq 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Programação Linear - Forma Standard

$$\max \quad c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(I) $\max \quad -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$
$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\rightsquigarrow$

$$\max \begin{bmatrix} -1000 & 5000 & 15000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & +3 & +8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$c = \begin{bmatrix} -1000 \\ 5000 \\ 15000 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(II) $\max \quad x_A + 6x_B$

$$x_A \leq 200$$
$$x_B \leq 300$$
$$x_A + x_B \leq 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Programação Linear – Forma Standard

$$\max \; c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

não é a forma standard

(I) $\max \; -1000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480$$
$$7 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(II) $\max \; x_A + 6x_B$

$$x_A \leq 200$$
$$x_B \leq 300$$
$$x_A + x_B \leq 400$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

$$\max \; \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Programação Linear - Forma Standard

Ⓘ Minimização versus maximização

Multiplicar por -1

Ⓘ Variáveis sem restrição de serem não negativas

$x_i \begin{cases} x_i^- \\ x_i^+ \end{cases} \qquad x_i = x_i^+ - x_i^-$

Ⓘ Restrição com igualdade

$= \Rightarrow \leq \wedge \geq$

Ⓘ Restrições com $\geq$

Multiplicar por -1

Programação Linear - Forma Standard

(I) Minimização versus maximização

Multiplicar por -1

(II) Variáveis sem restrição de serem não negativas

$$x_i \begin{cases} x_i^- \\ x_i^+ \end{cases} \qquad x_i = x_i^+ - x_i^-$$

Exemplo:

$$\min \; -2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0$$

(III) Restrição com igualdade

$= \;\Rightarrow\; \leq \;\wedge\; \geq$

(IV) Restrições com $\geq$

Multiplicar por -1

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$\begin{aligned} &\max \; 2x_1 - 3x_2 \\ &x_1 + x_2 \leq 7 \\ &-x_1 - x_2 \leq -7 \\ &x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\max \; 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ &x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\ &-x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq -7 \\ &x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\ &x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

Programação Linear - Revisitar a 1ª parte da cadeira

- Fluxo Máximo

$$\max \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs}$$

$$f_{uv} \leq c(u,v) \quad \text{for each } u, v \in V$$

$$\sum_{v \in V} f_{vu} = \sum_{v \in V} f_{uv} \quad \text{for each } u \in V \setminus \{s, t\}$$

$$f_{uv} \geq 0, \quad \text{for each } u, v \in V$$

Programação Linear - Revisitar a 1ª parte da cadeira

- Caminhos mais curtos entre s e t

$$\min \; d[t]$$

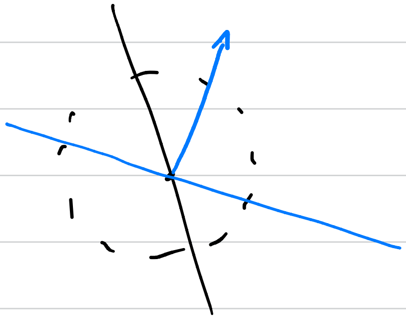
$$d[v] \leq d[u] + w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$$

$$d[s] = 0$$

$$d[v] \geq 0 \quad \forall v \in V$$

O Algoritmo Simplex

Observação central: A solução para o programa linear, a existir, vai localizar-se num vértice.



Ideia Chave:

let v be any vertex of the feasible region
while there is a neighbour v' of v with a better objective value
    set $v = v'$

Perguntas: - Como encontrar um vértice inicial?
- Como encontrar os vizinhos de um dado vértice v?

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$$\max\ 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (1)$$

$$x_1 \leq 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

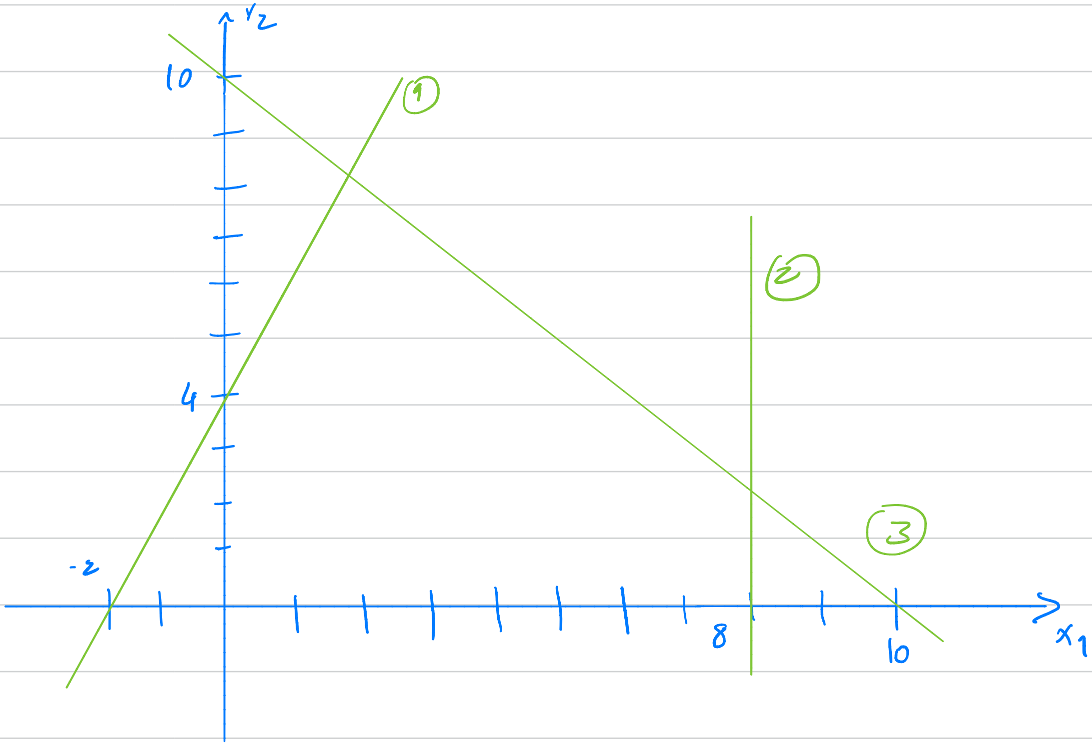
$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$



O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$\max \ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$

① $-2x_1 + x_2 = 4$

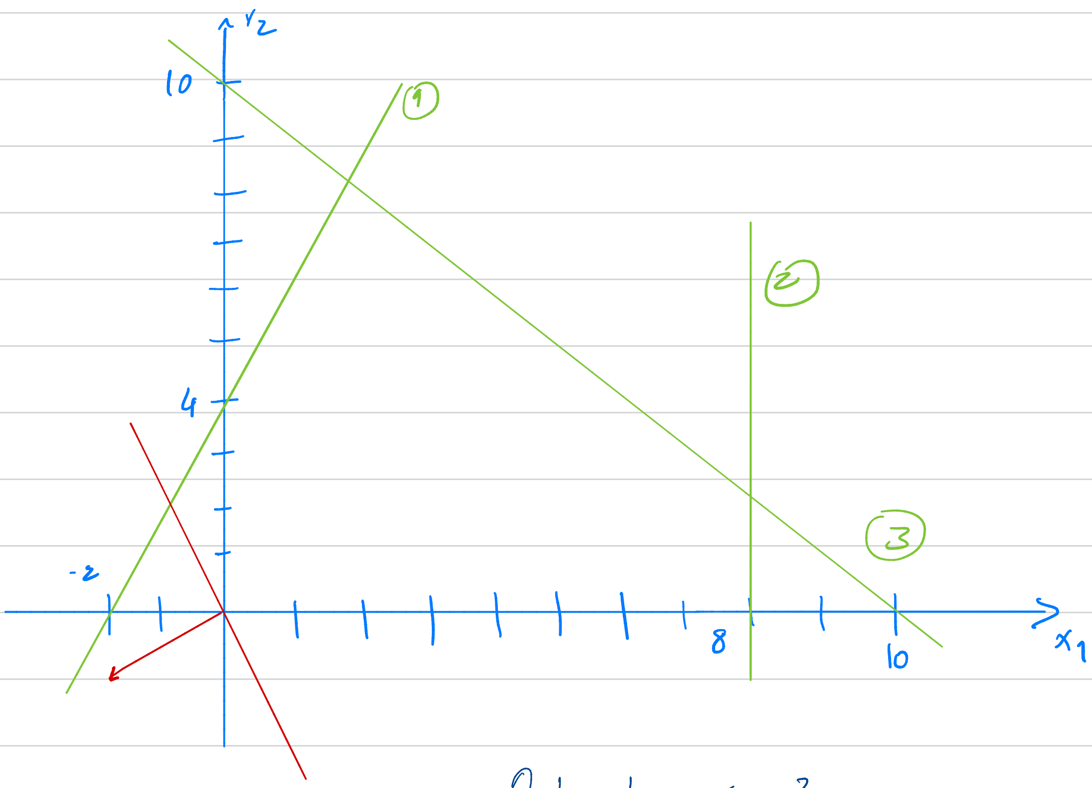
$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

③ $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$



Onde está o máximo?

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$$\max \; 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \le 4 \qquad (1)$$

$$x_1 \le 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \le 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

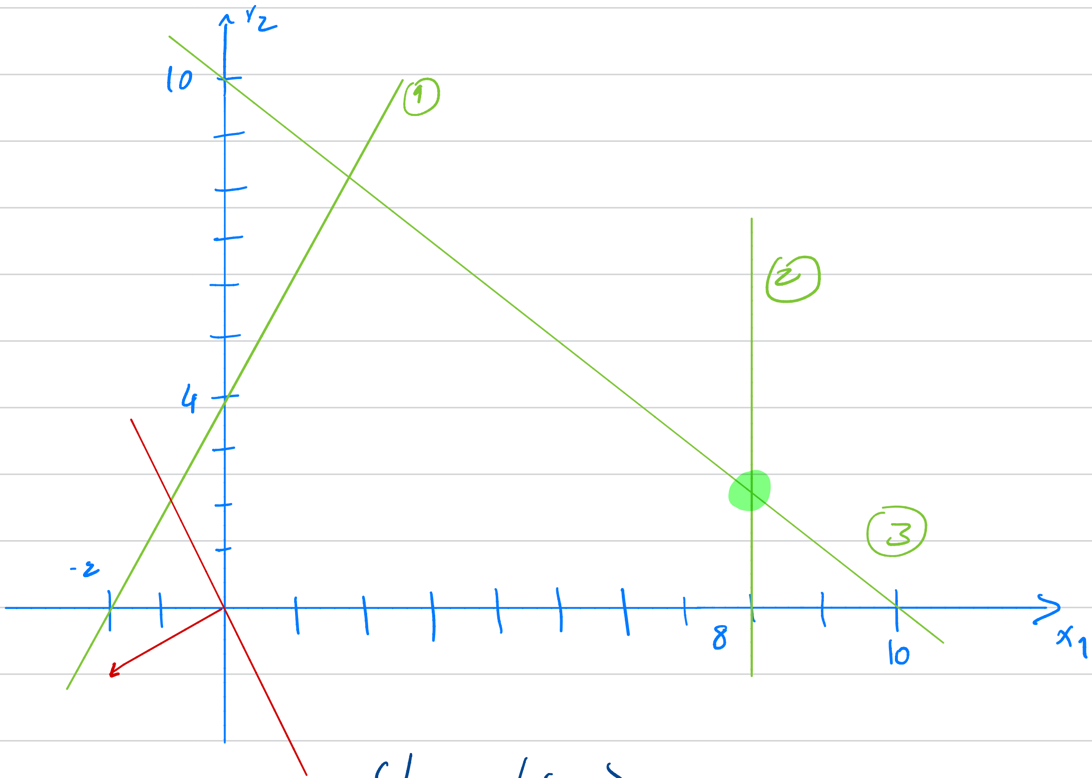
$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$



Solução: (8, 2)

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

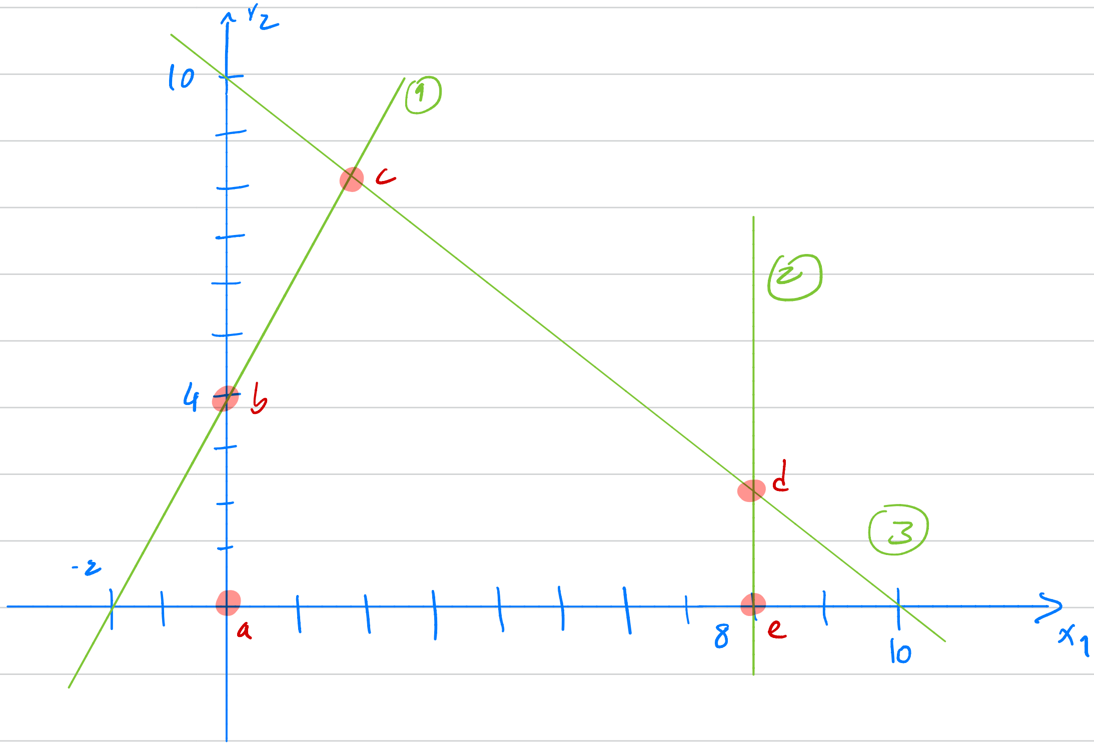
$$\max \ 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (1)$$

$$x_1 \leq 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (4), (5)$$



(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

$$x_2 = 4 + 2x_1$$

$$0 = 4 + 2x_1$$

$$x_1 = -2$$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$$x_2 = 10 - x_1$$

Observação I: Em cada vértice temos sempre duas restrições activas

Observação II: Vértices vizinhos têm ...

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

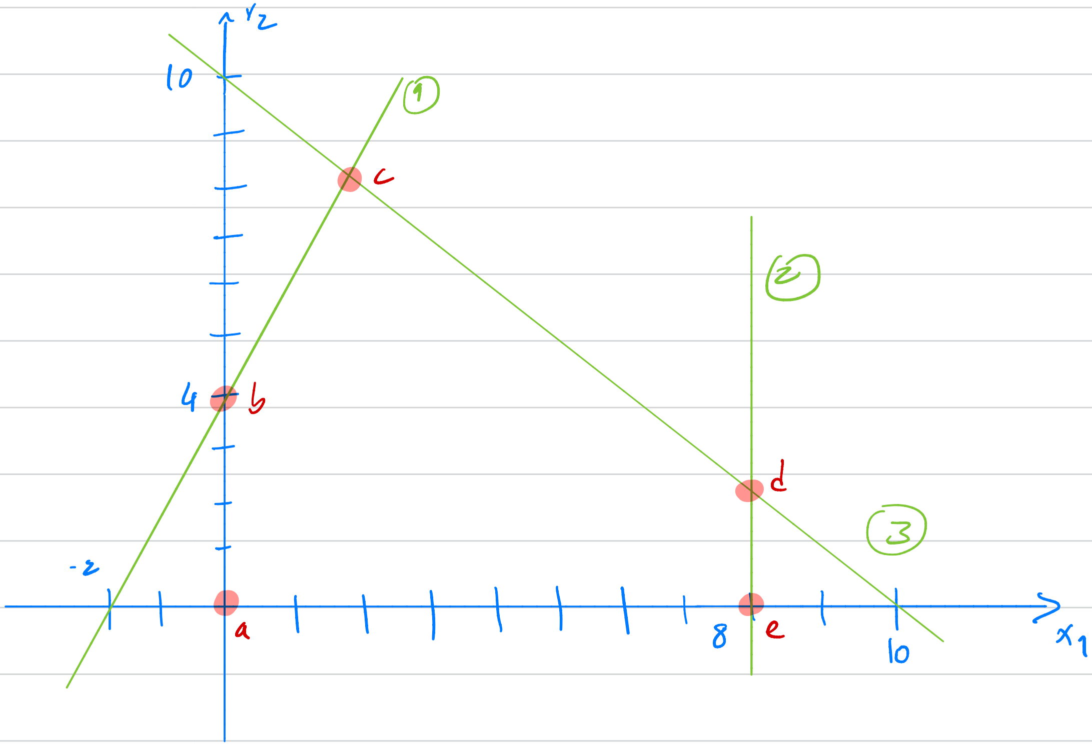
max $2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ (1)

$x_1 \leq 8$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 10$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$ (4), (5)



(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

(3) $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$

Observação I: Em cada vértice temos sempre duas restrições activas

a - 4, 5 c - 3, 1 e - 2, 4

b - 1, 5 d - 3, 2

Observação II: Vértices vizinhos têm uma restrição activa em comum

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

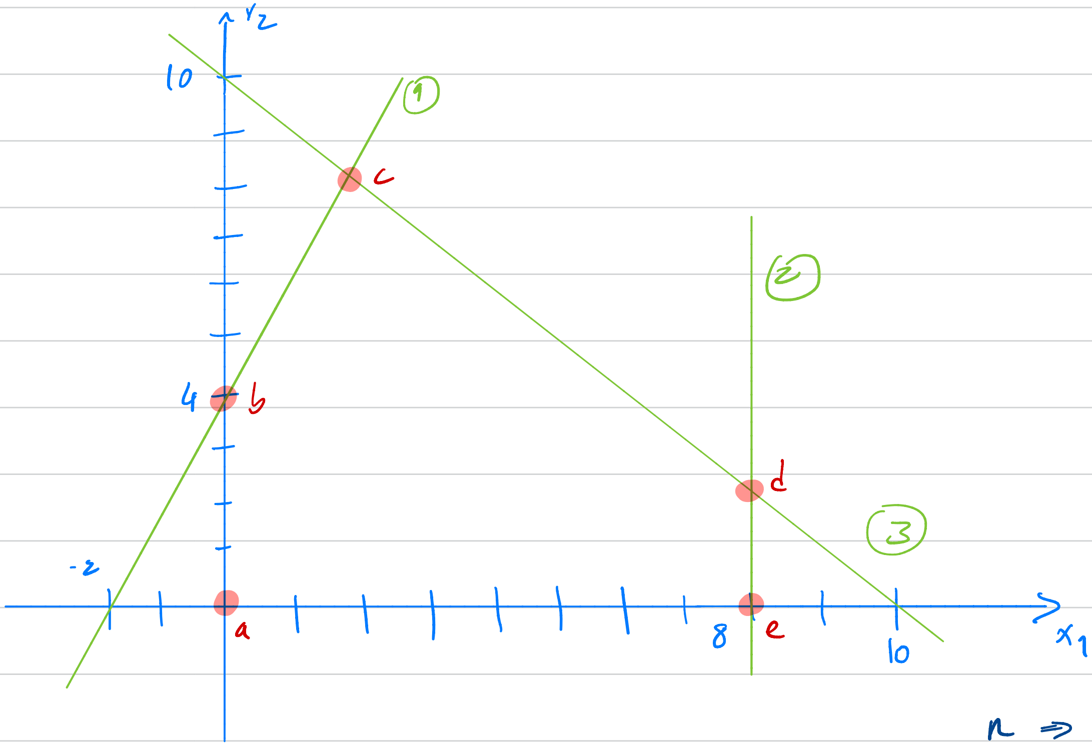
$\max \; 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$ ④, ⑤



① $-2x_1 + x_2 = 4$

$x_2 = 4 + 2x_1$

$0 = 4 + 2x_1$

$x_1 = -2$

③ $x_1 + x_2 = 10$

$x_2 = 10 - x_1$

$n \Rightarrow$ nº de variáveis

Observação I: Cada vértice é especificado por um conjunto de n restrições activas.

Observação II: Vértices vizinhos têm $n-1$ restrições activas em comum.

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

Observação I: Cada vértice é especificado por um conjunto de n restrições activas.

Observação II: Vértices vizinhos têm $n-1$ restrições activas em comum.

Ideia:

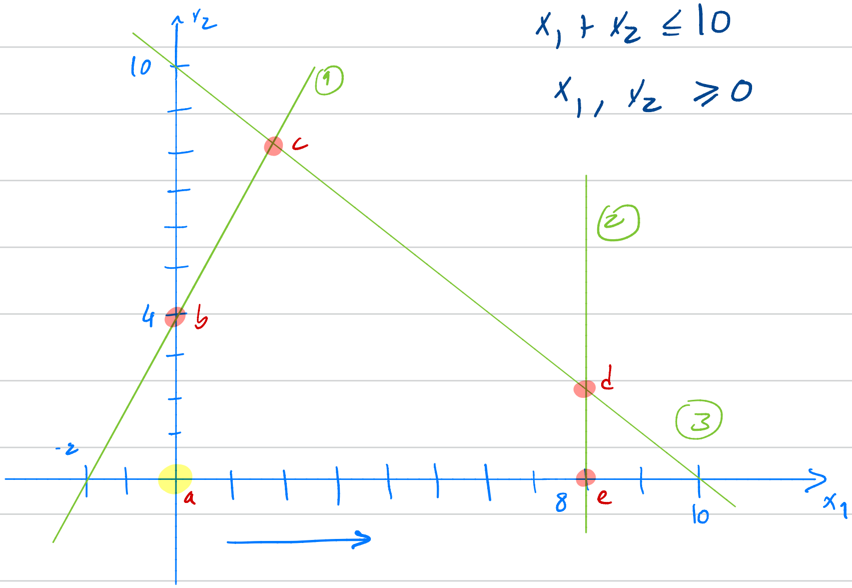
- Começamos num qualquer vértice, se não for possível melhorar a função objectivo permanecendo exequível (factível / feasible), terminamos. Caso contrário, passamos para o melhor vizinho.

- Como é que encontramos o melhor vizinho?

  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$$\min \; -2x_1 - x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$
$$x_1 \leq 8 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4), (5)$$



- Como é q encontramos o melhor vizinho?

  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.

- Vértice actual: a

  Restrições activas: 4, 5

* Que restrição é que vamos desactivar?

A restrição que, uma vez desactivada, nos permite aumentar o mais possível o valor da função objectivo.

Restrição a desactivar: 4

Que restrição vai ser activada?

(1) $-2x_1 \leq 4 \iff x_1 \geq -8$

(2) $x_1 \leq 8$

(3) $x_1 \leq 10$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

$$\min \quad 2x_1 + x_2$$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

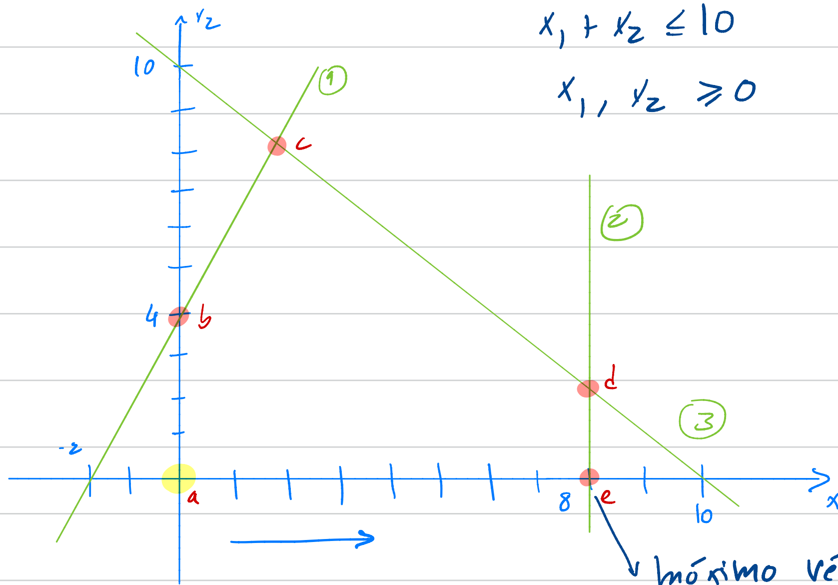
$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$ ④, ⑤

- Como é q encontramos o melhor vizinho?

  - Desactivamos uma das restrições activas e activamos outra.



- Vértice actual: $\underline{a}$
  Restrições activas: 4, 5

* Que restrição é que vamos desactivar?
  A restrição que, uma vez desactivada, nos permite aumentar o mais possível o valor da função objectivo.

  Restrição a desactivar: 4

próximo vértice: ②, ⑤

Restrições activas

Que restrição vai ser activada?

① $-2x_1 \leq 4 \iff x_1 \geq -8$

② $x_1 \leq 8$

③ $x_1 \leq 10$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

I

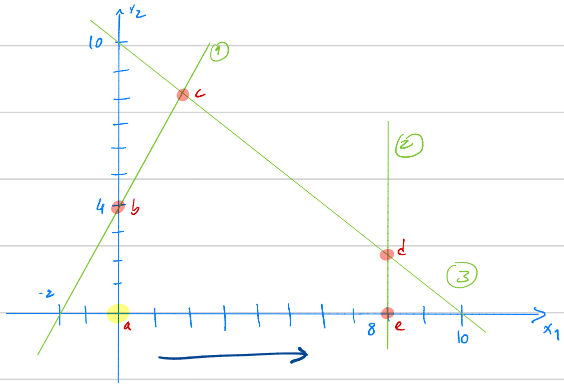
$$\min \quad 2x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$x_1 \leq 8 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4), (5)$$



- Vértice actual: a
- Restrições activas: 4, 5
- Função objectivo: 0

- Comparamos os coeficientes: $1 < 2$
- Restrição a relaxar: 4
- Nova restrição activa: 2 $\Rightarrow$ $x_1 = 8$
- Novas coordenadas:

$$y_1 = 8 - x_1 \quad e \quad y_2 = x_2$$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

I $\min \ 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$ ①

$x_1 \leq 8$ ②

$x_1 + x_2 \leq 10$ ③

$x_1, x_2 \geq 0$ ④, ⑤

- Comparamos os coeficientes: $1 < 2$
- Restrição a relaxar: 4
- Nova restrição activa: $2 \Rightarrow x_1 = 8$
- Novas coordenadas:

$$y_1 = 8 - x_1 \quad e \quad y_2 = x_2$$

* Reescrevemos as restrições e a função objectivo no novo sistema de coordenadas.

- função objectivo $= 2x_1 + x_2 = 2(8-y_1) + y_2 = 16 - 2y_1 + y_2 \sim -2y_1 + y_2$

① $-2(8-y_1) + y_2 \leq 4 \Leftrightarrow -16 + 2y_1 + y_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 \leq 20$

② $8 - y_1 \leq 8 \Leftrightarrow -y_1 \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \geq 0$

③ $x_1 + x_2 \leq 10 \Leftrightarrow (8 - y_1) + y_2 \leq 10 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 \leq 2$

④ $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - y_1 \geq 0 \Leftrightarrow -y_1 \geq -8 \Leftrightarrow y_1 \leq 8$

⑤ $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow y_2 \geq 0$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$$\min \; -2y_1 + y_2$$

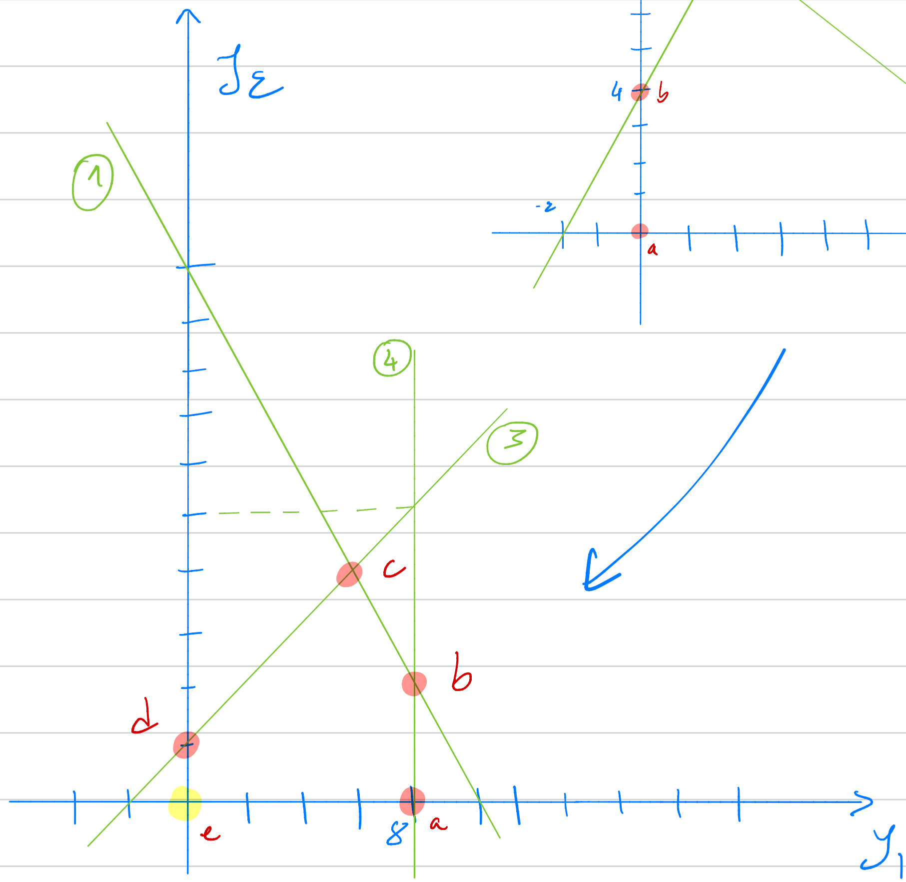
$2y_1 + y_2 \le 20$ (1)

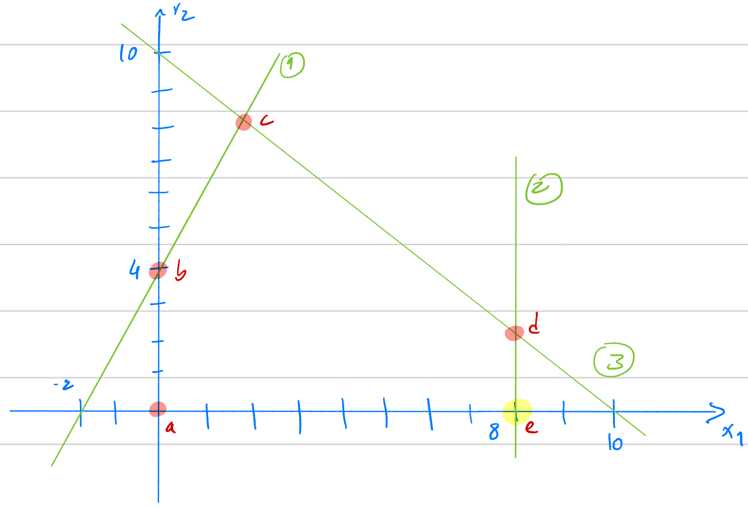
$y_1 \ge 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \le 2$ (3)

$y_1 \le 8$ (4)

$y_2 \ge 0$ (5)





(3) $-y_1 + y_2 \le 2$

$y_2 \le 2 + y_1$

$2 + y_1 = 0 \iff y_1 = -2$

(1) $2y_1 + y_2 \le 20$

$y_2 \le 20 - 2y_1$

$20 - 2y_1 = 0$

$2y_1 = 20$

$y_1 = 10$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$$\min \; -2y_1 + y_2$$

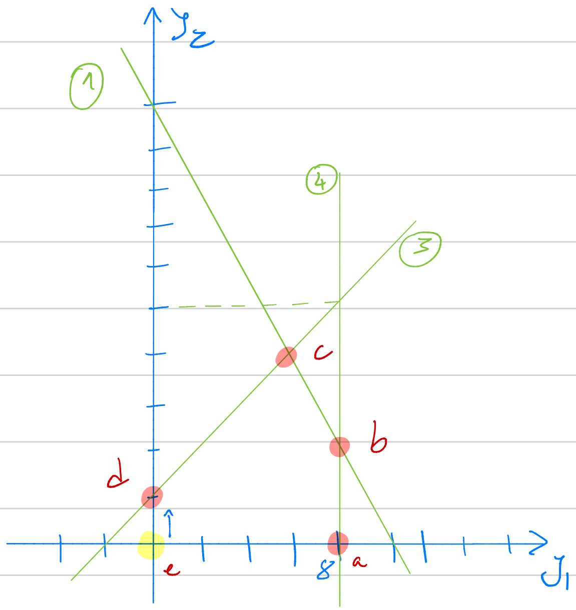
$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)



- Vértice actual: e
- Restrições activas: 2, 5
- Função objectivo: + 16

- Comparamos os coeficientes: $-2 < 1$
- Restrição a relaxar: 5
- Nova restrição activa: 3
- Novas coordenadas: $(0, 2)$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

II

$\min \; -2y_1 + y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

- Comparamos os coeficientes: $-2 < 1$
- Restrição a relaxar: 5
- Nova restrição activa: 3
- Novas coordenadas: $(0, 2)$

- Vértice actual: e
- Restrições activas: (2), (5)
- Função objectivo: $+16$

$z_1 = y_1$

$z_2 = 2 - y_2 + y_1$

$\Leftrightarrow y_2 = 2 - z_2 + y_1 \Leftrightarrow y_2 = 2 - z_2 + z_1$

- Função objectivo: $-2y_1 + y_2 = -2z_1 + (2 - z_2 + z_1)$

$= -2z_1 + 2 - z_2 + z_1 = -z_1 - z_2 + 2 \quad \sim -z_1 - z_2$

(1) $2y_1 + y_2 \leq 20 \Leftrightarrow 2z_1 + (2 - z_2 + z_1) \leq 20 \Leftrightarrow 3z_1 - z_2 \leq 18$

(2) $z_1 \geq 0$

(3) $-z_1 + (2 - z_2 + z_1) \leq 2 \Leftrightarrow z_2 \geq 0$

(4) $z_1 \leq 8$

(5) $2 - z_2 + z_1 \geq 0 \Leftrightarrow -2 + z_2 - z_1 \leq 0 \Leftrightarrow -z_1 + z_2 \leq 2$

O Algoritmo Simplex - Interpretação Geométrica

III

$$\max \; -z_1 - z_2$$
$$3z_1 - z_2 \leq 18$$
$$z_1 \leq 8$$
$$-z_1 + z_2 \leq 2$$
$$z_1, z_2 \geq 0$$

(0,0) é factível e é óptimo

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \; c^T x \qquad \rightsquigarrow \qquad \max \; c^T x$$

$$Ax \leq b \qquad\qquad \tilde{x}_s = b - Ax$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x_s \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Forma slack

variáveis não básicas

$$\begin{array}{lll}
\max \; 2x_1 + x_2 & \Rightarrow \quad \max \; 2x_1 + x_2 & \Rightarrow \quad \max \; 2x_1 + x_2 \\
-2x_1 + x_2 \leq 4 & x_3 = 4 + 2x_1 - x_2 & x_3 = 4 + 2x_1 - x_2 \\
x_1 \leq 8 & x_4 = 8 - x_1 & x_4 = 8 - x_1 \\
x_1 + x_2 \leq 10 & x_5 = 10 - x_1 - x_2 & x_5 = 10 - x_1 - x_2 \\
x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

variáveis básicas

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial

(segue directamente da forma slack)

$$z = 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica
q̄ vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

$$z = 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica q vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente negativo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q vai passar a não básica: variável de saída

$$z = 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$8 = 8/1$

$10 = 10/1$

→ Escolhemos o menor rácio

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = 10 - x_1 - x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 0 - Montar o tableau inicial
(segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica q̄ vai passar a básica: variável de entrada
(a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q̄ vai passar a não básica: variável de saída

Passo 3 - Pivotagem: expressar x_1 em termos de x_4

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= 4 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 \\ x_5 &= 10 - x_1 - x_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} z &= +16 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 20 - x_2 - 2x_4 \\ x_1 &= 8 - x_4 \\ x_5 &= 2 - x_2 + x_4 \end{aligned}$$

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

(I) $\max \quad 2x_1 + x_2$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 8 - x_1$

$x_5 = 10 - x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Passo 0 - Montar o tableau inicial (segue directamente da forma slack)

Passo 1 - Escolher a variável não básica q vai passar a básica: variável de entrada (a variável da função objectivo c/ o coeficiente positivo de maior magnitude)

Passo 2 - Escolher a variável básica q vai passar a não básica: variável de saída

Passo 3 - Pivotagem: expressar x_1 em termos de x_4

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= 4 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 \\ x_5 &= 10 - x_1 - x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} z &= 16 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 20 - x_2 - 2x_4 \\ x_1 &= 8 - x_4 \\ x_5 &= 2 - x_2 + x_4 \end{aligned}$$

$\max \ -2y_1 + y_2$

$2y_1 + y_2 \leq 20$ (1)

$y_1 \geq 0$ (2)

$-y_1 + y_2 \leq 2$ (3)

$y_1 \leq 8$ (4)

$y_2 \geq 0$ (5)

Lembrar!

Algoritmo Simplex - Sistema de Equações

(I)

$$z = +16 + x_2 - 2x_4 \qquad \Rightarrow \qquad z = +18 - x_4 - x_5$$

20/1 $\quad x_3 = 20 - x_2 - 2x_4 \qquad x_3 = 18 - 3x_4 + x_5$

$x_1 = 8 - x_4 \qquad x_1 = 8 - x_4$

2/1 $\quad x_5 = 2 - x_2 + x_4 \qquad x_2 = 2 - x_5 + x_4$

Todos os coeficientes são negativos

⇓

Terminámos!

$\max \; -z_1 - z_2$

$3z_1 - z_2 \leq 18$

$z_1 \leq 8$

$-z_1 + z_2 \leq 2$

$z_1, z_2 \geq 0$

recordar