

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES



Compte Rendu Final

Projet réalisé sous la supervision de M. Mohamed Sbai, Senior
Quant Advisor à SGCIB

CALCUL DU PAYOFF DES OPTIONS BERMUDIENNES

Bahaa ZIAD - Mouad JBILI

Département IMI
19 Mai 2025

Contents

1	Introduction	2
2	Notions de base	2
2.1	Option	2
2.2	payoff	2
2.3	Couverture et intérêt d'un portefeuille de réplication	3
2.4	Modèle de Black-Scholes	3
3	Une première approche : Reseaux de neurones	4
3.1	Formulation du Problème	4
3.2	Méthodes Proposées	4
3.2.1	Méthode I : Réseaux de Neurones Multiples	4
3.2.2	Méthode II : Réseau de Neurones Global	4
3.3	Améliorations des Algorithmes	5
3.3.1	Variante 1 : Terme de Milstein	5
4	Contributions Clés	5
5	Une deuxième approche	5
5.1	Cadre général	5
5.2	Formulation duale	6
5.3	Décomposition en gain excédentaire	6
5.4	Convexification stricte	6
5.5	Algorithme d'implémentation	6
5.6	En pratique	7
5.7	Cas d'un put bermudien	8

1 Introduction

La valorisation des options financières, en particulier des options américaines, représente un enjeu fondamental en finance quantitative. À la différence des options européennes, ces instruments donnent au détenteur la liberté de les exercer à tout moment avant ou à l'échéance, rendant leur modélisation et leur évaluation nettement plus complexes. Ce problème s'apparente à un problème d'arrêt optimal, qui mobilise des outils issus de la théorie des probabilités, du calcul stochastique, et de l'approximation numérique.

Les méthodes traditionnelles, comme les arbres binomiaux ou certaines variantes de Monte Carlo, peinent à fournir des résultats satisfaisants dans des contextes de haute dimension. Dans ce cadre, les approches par apprentissage automatique, et notamment celles s'appuyant sur les réseaux de neurones, apparaissent comme des alternatives prometteuses. Elles permettent d'approximer les stratégies d'exercice optimales et d'estimer efficacement la valeur des options.

Dans ce travail, nous présentons deux méthodes récentes pour traiter le problème d'arrêt optimal.

2 Notions de base

2.1 Option

Une **option** est un contrat financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (*option d'achat* ou *call*) ou de vendre (*option de vente* ou *put*) un actif sous-jacent à un prix déterminé (appelé *prix d'exercice* ou *strike*) à une date ou selon certaines modalités définies à l'avance.

- **Option européenne** : l'option ne peut être exercée qu'à une date spécifique, appelée date d'échéance.
- **Option américaine** : l'option peut être exercée à tout moment entre sa date d'émission et sa date d'échéance.
- **Option bermudienne** : l'option peut être exercée uniquement à certaines dates prédéfinies pendant sa durée de vie.

2.2 payoff

Le **payoff** d'une option représente la valeur financière que le détenteur de l'option peut réaliser à l'échéance (ou selon les règles spécifiques à l'option) en exerçant son droit d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Il dépend du prix de l'actif sous-jacent à la date d'exercice et du prix d'exercice de l'option.

- **Option européenne** : Le payoff est réalisé uniquement à la date d'échéance, et il est calculé comme suit :

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) \quad \text{pour un call, ou} \quad \max(K - S_T, 0) \quad \text{pour un put,}$$

où S_T est le prix de l'actif sous-jacent à la date d'échéance et K est le prix d'exercice.

- **Option américaine** : Le payoff est similaire à celui d'une option européenne, mais le détenteur peut exercer l'option à n'importe quel moment avant la date d'échéance. Le calcul du payoff est donc plus complexe, puisqu'il dépend de la stratégie d'exercice à chaque instant.
- **Option bermudienne** : Le payoff est calculé de manière similaire à celui des options européennes, mais le détenteur peut exercer l'option à plusieurs dates spécifiques définies à l'avance. Le payoff pour chaque date d'exercice est donc fonction de la valeur de l'actif sous-jacent à ces dates.

2.3 Couverture et intérêt d'un portefeuille de réplication

La couverture d'une option consiste à constituer un portefeuille dynamique, composé typiquement d'actifs sous-jacents et d'actifs sans risque, afin de répliquer le payoff de l'option à l'échéance.

Pour une option bermudienne, ce portefeuille doit s'ajuster à chaque date possible d'exercice, ce qui nécessite une estimation précise du prix de l'option à chaque instant. D'où l'intérêt d'un pricing rigoureux : il permet de déterminer les quantités optimales d'actifs à détenir dans le portefeuille à chaque pas de temps.

Un bon portefeuille de couverture limite le risque de perte due à une mauvaise estimation du prix ou à une mauvaise stratégie d'exercice. Dans ce travail, le pricing est donc envisagé comme un outil au service de la couverture.

2.4 Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes, développé en 1973 par Fischer Black, Myron Scholes et Robert C. Merton, constitue une pierre angulaire de la finance quantitative. Il décrit la dynamique d'un actif financier S_t sous une probabilité risque-neutre par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t ((r - \delta)dt + \sigma dW_t),$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, δ le taux de dividende, σ la volatilité constante, et W_t un mouvement brownien standard. Le modèle suppose des marchés complets, sans friction, et une volatilité constante. La solution explicite de cette équation est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

Le prix d'une option européenne $V(t, S_t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - \delta)S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

avec des conditions aux limites dépendant du payoff. Ce cadre analytique permet une valorisation explicite d'options vanilles et sert de référence pour l'évaluation de produits dérivés plus complexes, bien que ses hypothèses (volatilité constante, absence de sauts) soient souvent adaptées en pratique.

3 Une première approche : Reseaux de neurones

3.1 Formulation du Problème

L'article traite de la valorisation des options américaines, formulée comme un problème d'arrêt optimal dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, F, Q)$. Le prix de l'option à l'instant t est :

$$V_t = \text{ess sup}_{\tau \geq t} E[Z_\tau | \mathcal{F}_t],$$

où Z_t est le payoff actualisé. La formulation duale fournit une borne supérieure :

$$V_0 = \inf_{M \in \mathcal{M}} E \left[\sup_{t \in [0, T]} (Z_t - M_t) \right].$$

Un défi clé est d'éviter les simulations Monte Carlo imbriquées en haute dimension.

3.2 Méthodes Proposées

3.2.1 Méthode I : Réseaux de Neurones Multiples

- **Avantage** : Fournit des résultats plus stables et des bornes plus serrées dans les cas de basse dimension (e.g., options 1D).
- **Règle de Régression** : À chaque date d'exercice t_i , des réseaux distincts approchent la valeur de continuation $\Phi^i(S_{t_i})$ et l'incrément de martingale $\Psi^i(S_{t_i})$ via :

$$\min_{\Phi, \Psi} (\beta_{t_i} V_{t_{i+1}} - \Phi^i(S_{t_i}) - \Psi^i(S_{t_i}) \Delta W_{t_i})^2.$$

- **Stratégie d'Arrêt** : Exercer l'option si le payoff immédiat dépasse la valeur de continuation :

$$\tau_i = \min\{t_j \geq t_i : f(S_{t_j}) \geq \Phi^j(S_{t_j})\}.$$

3.2.2 Méthode II : Réseau de Neurones Global

- **Avantage** : Plus efficace en haute dimension (e.g., options 10D) grâce à une réduction des paramètres.

- Utilise un seul réseau avec le temps t comme entrée : $\Phi_{\Pi}(t, S_t)$ et $\Psi_{\Pi}(t, S_t)$.
- Requiert une alternance entre entraînement et mise à jour des stratégies d'arrêt.

3.3 Améliorations des Algorithmes

3.3.1 Variante 1 : Terme de Milstein

Pour améliorer la précision, l'incrément de martingale inclut un terme supplémentaire :

$$\Delta M_{t_i} \approx \Psi_1^i(S_{t_i})\Delta W_{t_i} + \Psi_2^i(S_{t_i})((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t).$$

Cette variante réduit l'écart entre les bornes de 79% pour les options 5D (voir tableau 1).

4 Contributions Clés

- **Performance Relative :**
 - Méthode I : Supérieure en stabilité et précision pour les problèmes de basse dimension.
 - Méthode II : Plus efficace en haute dimension grâce à son architecture simplifiée.
- **Stratégies de Couverture :** Déduites directement du processus de martingale H_t , réduisant la variance.
- **Résultats Numériques :** TBD expliquer d'avantage l'utilisation des trois termes (euler milstein et cubique(?) donner plus de résultat énoncer clairement l'algorithme avec plus de détails

5 Une deuxième approche

5.1 Cadre général

Considérons un problème d'arrêt optimal en temps discret avec :

- Horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$
- Espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, P)$
- Processus de gain adapté $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifiant $\max_{0 \leq n \leq N} E[|Z_n|^p] < \infty$

L'enveloppe de Snell U satisfait :

$$U_N = Z_N \tag{1}$$

$$U_n = \max(Z_n, E[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]), \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{2}$$

5.2 Formulation duale

Soit \mathcal{H}_p l'espace des martingales L^p -intégrables. La représentation duale s'écrit :

$$U_n = \inf_{M \in \mathcal{H}_p} E \left[\max_{n \leq j \leq N} \{Z_j - (M_j - M_n)\} \middle| \mathcal{F}_n \right] \quad (3)$$

La martingale optimale M^* vérifie :

$$U_n = \max_{n \leq j \leq N} \{Z_j - (M_j^* - M_n^*)\} \quad (4)$$

5.3 Décomposition en gain excédentaire

Décomposition du prix :

$$E \left[\max_{0 \leq j \leq N} \{Z_j - (M_j - M_0)\} \right] = E[Z_N] + \sum_{n=0}^{N-1} E \left[\left(Z_n + \Delta M_{n+1} - \max_{n+1 \leq j \leq N} \left\{ Z_j - \sum_{i=n+2}^j \Delta M_i \right\} \right)_+ \right] \quad (5)$$

5.4 Convexification stricte

Pour résoudre les problèmes de non-convexité, on introduit :

[Convexification stricte] Soit $\varphi : R \rightarrow R$ strictement convexe avec $|\varphi(x)| \leq C(1 + |x|^p)$. Alors :

$$\inf_{M \in \mathcal{H}_p} \left\{ E[Z_N] + \sum_{n=0}^{N-1} E \left[\varphi \left(Z_n + \Delta M_{n+1} - \max_{n+1 \leq j \leq N} \left\{ Z_j - \sum_{i=n+2}^j \Delta M_i \right\} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

est atteint uniquement par M^* , solution de la récurrence rétrograde :

$$\inf_{\Delta M_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}^{pr}} E \left[\varphi \left(Z_n + \Delta M_{n+1} - \max_{n+1 \leq j \leq N} \left\{ Z_j - \sum_{i=n+2}^j \Delta M_i \right\} \right) \right] \quad (7)$$

5.5 Algorithme d'implémentation

1. Choisir une fonction strictement convexe φ avec $|\varphi(x)| \leq C(1 + |x|^p)$
2. Pour chaque n , sélectionner des sous-espaces de dimension finie $\mathcal{H}_n^{pr} \subset \mathcal{H}_p$
3. Récurrence rétrograde ($n = N - 1$ à 0) :

$$\Delta M_{n+1}^* = \underset{\Delta M_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}^{pr}}{\operatorname{argmin}} E \left[\varphi \left(Z_n + \Delta M_{n+1} - \max_{n+1 \leq j \leq N} \left\{ Z_j - \sum_{i=n+2}^j \Delta M_i \right\} \right) \right] \quad (8)$$

4. Calculer le prix final :

$$\text{Prix} = E \left[\max_{0 \leq j \leq N} \{Z_j - M_j^*\} \right] \quad (9)$$

Caractéristiques clés :

- Pour $p = 2$ et $\varphi(x) = x^2$, se réduit à une régression des moindres carrés
- Nécessite une estimation Monte Carlo des espérances
- Deux sources d'erreur : approximation des espaces fonctionnels et erreur Monte Carlo

5.6 En pratique

Modélisation du Marché

Nous étudions un marché financier composé de d actifs risqués $(S_t^k)_{t \geq 0}$ ($k \in \{1, \dots, d\}$), modélisés sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, P)$. Sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt *déterministe* r , les actifs actualisés $\tilde{S}_t^k = e^{-rt} S_t^k$ sont des martingales de carré intégrable. Nous considérons une option bermudienne avec N dates d'exercice régulières $T_i = \frac{iT}{N}$ ($i = 0, \dots, N$) et une filtration $\mathcal{F}_i = \mathcal{G}_{T_i}$.

Stratégie de Couverture et Optimisation

L'objectif est de construire une stratégie de couverture discrète optimale pour l'option bermudienne. La méthodologie repose sur :

- **Sous-grilles temporelles** : Chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ est divisé en \bar{N} sous-intervalles $t_{i,j} = T_i + \frac{jT}{\bar{N}N}$ ($j = 0, \dots, \bar{N}$), permettant une paramétrisation fine des incréments de martingale.
- **Fonctions de base** : Une famille de fonctions $u_p : R^d \rightarrow R$ (polynômes ou fonctions indicatrices) est utilisée pour exprimer les incréments de martingale :

$$X_{t_{i,j}}^{p,k} - X_{t_{i,j-1}}^{p,k} = u_p^{i,j-1}(S_{t_{i,j-1}}) \left(A_{t_{i,j}}^k - A_{t_{i,j-1}}^k \right),$$

où A^k représente les actifs disponibles pour la couverture (sous-jacents et/ou options européennes).

- **Décomposition des martingales** : Les incréments de la martingale de couverture ΔM_{i+1} sont décomposés sur la base $(X^{p,k})_{p,k}$, avec des coefficients $\alpha_{i,j}^{p,k}$ optimisés à chaque étape i .

Modélisation des Actifs sous Black-Scholes

Les actifs sous-jacents considérés dans cette étude suivent une dynamique de type Black-Scholes multidimensionnelle. Formellement, chaque actif S_t^k ($k = 1, \dots, d$) évolue sous la probabilité risque-neutre P selon l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t^k = S_t^k [(r - \delta_k)dt + \sigma_k dW_t^k], \quad S_0^k > 0,$$

où :

- r est le taux d'intérêt sans risque, supposé constant,
- $\delta_k \geq 0$ est le taux de dividende de l'actif k ,
- $\sigma_k > 0$ est la volatilité constante de l'actif k ,
- $(W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel sans corrélations inter-actifs :

$$d\langle W^k, W^{k'} \rangle_t = \delta_{k,k'}$$

Les actifs actualisés $\tilde{S}_t^k = e^{-(r-\delta_k)t} S_t^k$ sont des martingales sous P , ce qui garantit l'absence d'arbitrage dans le modèle. Cette structure offre deux avantages clés pour notre étude :

- **Valorisation explicite des options européennes** : Le prix d'une option européenne sur S_t^k s'exprime via la formule de Black-Scholes, permettant son intégration directe dans le portefeuille de couverture.

5.7 Cas d'un put bermudien

on considère $d=1$, $S_0 = 36$, $K=40$, $N=50$, $\sigma=0.2$, $r=0.06$. On commence par générer des vecteurs de prix selon le modèle de Black-Scholes (cf figure X)

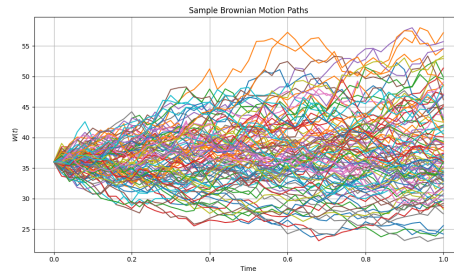


Figure 1: Exemple de vecteurs de prix (100 vecteurs)