Definition: Assoziativität, Kommutativität, Idempotenz und Absorption

Vollständige Induktion

Satz vom kleinen Gauss

Definition von $n!$ und $\binom{n}{k}$

Definition Gruppe

Definition: Körper

Definition: Geordnete Menge

$\mathbb{R}$ als linear geordneter Körper

2 *Antwort*

1. Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig.
2. Induktionsschritt: Für jede $n \geq n_0$, für das $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.

1 *Antwort*

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \text{ (Assoziativität)}$$
$$A \vee B \equiv B \vee A \text{ (Kommutativität)}$$
$$A \vee A \equiv A \text{ (Idempotenz)}$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv A \text{ (Absorption)}$$

4 *Antwort*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \text{ für } n \geq k \geq 0$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \text{ für } n \geq 1, \text{ sowie } 0! = 1$$

3 *Antwort*

Sei $S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

6 *Antwort*

Auf einer Menge G sind zwei Verknüpfungen + und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- (K1) $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0
- (K2) $(G \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1.
- (K3) $\forall x, y, z \in G : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (y \cdot z)$ (Distributivgesetze)

dann ist $(G, +, \cdot)$ ein Körper.

5 *Antwort*

Sei G eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung auf G (d.h. $\forall x, y \in G : x \circ y \in G,\ x \circ y$ ist eindeutig). $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (G1) $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Assoziativität)
- (G2) Es gibt ein Element $n \in G$ mit der Eigenschaft $\forall x \in G : n \circ x = x \circ n = x$ (Existenz des neutralen Elements)
- (G3) $\forall x \in G\ \exists!\ \overline{x} \in G : x \circ \overline{x} = \overline{x} \circ x = n$ (Existenz des inversen Elements)

Falls zusätzlich gilt:

- (G4) $\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x$ (Kommutativität) so spricht man von einer kommutativen (oder abelschen) Gruppe

8 *Antwort*

Es existiert eine lineare Ordnung $\leq$ ("kleiner oder gleich") auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$

7 *Antwort*

Sei M eine Menge und $\sim$ eine Relation auf M (d.h. eine Teilmenge von $M \times M$). Für $(x, y) \in \sim$ schreiben wir $x \sim y$. Eine Relation $\sim$ heißt eine Ordnung und $(M, \sim)$ ist eine geordnete Menge, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) $\forall x \in M : x \sim x$ (Reflexivität)
- ii) $\forall x, y \in M : x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
- iii) $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Gilt darüber hinaus:

- iv) $\forall x, y \in M : x \sim y \vee y \sim x$, so heißt $\sim$ eine linearte (oder totale) Ordnung und $(M, \sim)$ eine linear (oder total) geordnete Menge.

Definition des Betrag

Eigenschaften des Betrags

Bernoullische Ungleichung

Definition: Beschränkte Menge

Definition: Supremum und Infimum

Intervallschachtelung

Definition: Konvergente Folge

Definition: divergente Folge

10 *Antwort*

Für $a, x, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gilt:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
4. $|x| < \epsilon \Leftrightarrow x < \epsilon$ und $-\epsilon < x \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon$
5. $|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon$
6. die Aussagen 4. und 5. gerlten auch, wenn $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.

9 *Antwort*

Für $x \in \mathbb{R}$ heisst

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der (Absolut-) Betrag von x.

12 *Antwort*

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für alle $x \in A$.
Man nennt K obere (bzw. untere) Schranke von A.
Die Menge A heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

11 *Antwort*

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

14 *Antwort*

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit $|I_n| < \epsilon$

13 *Antwort*

Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (bzw. Infimum) von A, falls K die kleinste obere (bzw größte untere) Schranke von A ist. Dabei heißt K die kleinste obere Schrank, falls gilt:

1. K ist eine obere Schranke
2. für jede obere Schranke K' von A gilt $K \leq K'$

(Analog für größte Untere Schranke).
Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum. D.h. das Supremum (bzw. Inifimum) von A ist, falls vorhanden eindeutig und wird mit sup(A) (bzw. inf(A)) bezeichnet.

16 *Antwort*

Eine Folge $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestiummt divergent gegen ∞, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$, $a_n > 0$ und die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. (entsprechend kann man Divergenz gegen $-\infty$ definieren)

15 *Antwort*

Eine Folge $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

.

Beschränkheit und Konvergenz von Folgen

Rechenregeln für Folgen

Teilfolge

Konvergenz von Teilfolgen

Divergenzkriterium

Monotoniekriterium

Monotone Teilfogen

Satz von Bolzano-Weierstraß

18 *Antwort*

Seien $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $g = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen und $c \in \mathbb{R}$, dann definieren wir:

1. $f + g = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $c \cdot f = c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $f \cdot g = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\frac{f}{g} = \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

17 *Antwort*

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

20 *Antwort*

Jede Teilfolge $(a'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left(a'_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(a'_n\right) = a$$

19 *Antwort*

Sei (a_{n_k}) eine Folge und $n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

22 *Antwort*

Jede beschränktê monotone Folge ist konvergent. Genauer:
Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

21 *Antwort*

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- eine divergente Teilfolge oder
- zwei konvergente Teilfolgen $(a'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a''_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(a'_{n_k}) \neq \lim_{l\to\infty}(a''_{n_l})$

so ist die Folge divergent.

24 *Antwort*

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

23 *Antwort*

Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

Mafi2 # 25

Häufungspunkt

Mafi2 # 26

Cauchy-Folge

Mafi2 # 27

Eigenschaften von Cauchy-Folgen

Mafi2 # 28

Konvergenz der Wurzelberechnung

Mafi2 # 29

Definition: Reihe

Mafi2 # 30

Leibniz-Kriterium

Mafi2 # 31

Konvergenz absolut konvergenter Reihen

Mafi2 # 32

Majorantenkriterium

26 *Antwort*

Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \epsilon$$

25 *Antwort*

Für eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt a ein Häufungspunkit, wenn es eine Teilfolge von f gibt, die gegen a konvergiert.

28 *Antwort*

Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reele Zahlen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ (d.h. $x^2 = a$)

27 *Antwort*

- Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
- Besitzt eine Cauchy-Fole eine konvergente Teilfolge , so ist sie selbst konvergent.
- Jede Cauchy-Folge ist kovergent.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

30 *Antwort*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, mit

$$\lim_{k\to\infty} (a_k) = 0$$

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

29 *Antwort*

Man nennt den formalen Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ eine unendliche Reihe und $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Teilsumme. Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, so heißt die Reihe konvergent. Eine nicht konvergente Reihe heisst divergent. Konvergiert sogar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, so nennt man die Reihe absolut konvergent.

32 *Antwort*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit ausschliesslich nicht negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

31 *Antwort*

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.

Wurzelkriterium

Quotientenkriterium

Umordnung in einer Reihe

Exponentialreihe

Cauchy-Produkt

Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$

Definition: injektiv, surjektiv und bijektiv

34 *Antwort*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq n_0$. Es gebe eine reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q \; \forall k \geq n_0$, dann ist die Reihe absolut konvergent.
Es muss gelte:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

33 *Antwort*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass $|a_k| \leq cq^k \; \forall k \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihge absolut konvergent.
Also muss gelten:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

36 *Antwort*

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

35 *Antwort*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen denselben Grenzwert.

38 *Antwort*

Konvergiert eine Potenzreihe P in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jede, Punkt $|x| < |x_0|$ absolut.

37 *Antwort*

Seien Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0$ Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right)$$

absolut konvergent.

40 *Antwort*

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- injektiv, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gehört (d.h. $x_1 neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)
- surjektiv, wenn jedes $y \in B$ als Abbild eines $x \in A$ auftaucht (d.h. $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$)
- bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

39 *Antwort*

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ ist:

- konvergent, falls $|q| < 1$
- divergent, falls $q = -1$
- divergent für $|q| > 1$

Umkehrfunktion

Komposition von Funktionen

Beschränkte Funktion

Kompakte Intervalle

Monotone Funktionen

Injektive Funktion

Berührungspunkt

Grenzwerte von Funktionen

42 *Antwort*

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ und $f(x) \in B$ für alle $x \in A$. Dann ist die Funktion $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

44 *Antwort*

Unter einem kompakten Intervall versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

46 *Antwort*

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f streng monoton, so ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ ist ebenfalls monoton (im gleichen Sinne).

48 *Antwort*

Sei $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von A. Man definiert dann $\lim_{x\to a} f(x) = c$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt.

41 *Antwort*

Für eine bijektive Funktion $f : A \to B$ definieren wird die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ als $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$

43 *Antwort*

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in A$ und ein $K \in \mathbb{R}$.

45 *Antwort*

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$\text{f heisst} \left\{ \begin{array}{c} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{falls} \left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$$

für $x, x' \in A$ mit $x < x'$

47 *Antwort*

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

- a heißt Berührungspunkt von A, falls in jeder $\epsilon-$Umgebung von a (d.h. $U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon), \epsilon > 0$) mindestens ein Punkt von A liegt.
- a heißt Häufungspunkt, falls in jeder $\epsilon-$ Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.

Stetigkeit

Operationen auf stetigen Funktionen

Stetigkeit und rationale Funktionen

Kompoistion von stetigen Funktionen

Zwischenwertsatz

Generalisierung des Zwischenwertsatzes

Generalisierung auf Intervalle

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

50 *Antwort*

Für 2 stetige Funktionen, $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$, die in $a \in A$ stetig sind, Dann sind auch die Funktionen die aus Verknüpfung von f und g mit $+, \cdot$ möglich sind stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\left(\frac{f}{g}\right)$ in a stetig.

49 *Antwort*

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in A$. Die Funktion f heißt stetig in a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

. f heißt stetig (in A), falls f in jedem Punkt von A stetig ist.

52 *Antwort*

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subset B$. Die funktion f sei in $a \in A$ und Funktion g sein in $b = f(a)$ stetig. Dann ist die Funktion

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}$$

in a stetig.

51 *Antwort*

Jede rationale Funktion ist stetig in ihrem Definitionsbereich.

54 *Antwort*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y$ und $f(b) > y$ (bzw. $f(a) > y$ und $f(b) < y$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = y$.

53 *Antwort*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert einb $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

56 *Antwort*

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an. D.h. es existiert ein $c \in [a, b]$, so dass $f(c) = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ und ein Punkt $d \in [a, b]$, so dass $f(d) = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$

55 *Antwort*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $I' = f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

$\epsilon - \delta -$Definition von Stetigkeit

Stetigkeit und Werte $\neq 0$

Stetigkeit und bijektive Abbildungen

Gleichmäßige Stetigkeit

Stetigkeit auf kompakten Intervallen

Eigenschaften des Logarithmus

Defintion der Sinus und Cosinus Funktionen

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

58 *Antwort*

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in A$ und $f(a) \neq 0$. Dann ist $f(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von a, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

57 *Antwort*

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion f ist genau dann im Punkt $a \in A$ stetig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ für alle $|x - a| < \delta$.

60 *Antwort*

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt in A gleichmässig stetig, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$

59 *Antwort*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Sei $J = f(I)$, dann bildet f I bijektiv auf J ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.

62 *Antwort*

$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$$
$$\ln(1) = 0 \text{ und } \ln(e) = 1$$
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$

61 *Antwort*

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.

64 *Antwort*

- $\sin^[2]x + cos^2 = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ und $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ und $sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ und $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

63 *Antwort*

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als:
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
und
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Mafi2 # 65

Differenzierbarkeit

Mafi2 # 66

Differenzierbarkeit einer Funktion

Mafi2 # 67

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Mafi2 # 68

Produktregel

Mafi2 # 69

Quotientenregel

Mafi2 # 70

Linearität von Ableitungen

Mafi2 # 71

Ableitung der Umkehrfunktion

Mafi2 # 72

Kettenregel

66 *Antwort*

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ ist in einem Häufungspunkt $a \in A$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x) \ (x \in A),$$

wobei $r(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} = \frac{r(x)}{x - a} = 0$$

. Es gilt in diesem Fall $c = f'(a)$.

65 *Antwort*

Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion f heißt differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

68 *Antwort*

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann ist $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

67 *Antwort*

Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in a auch stetig

70 *Antwort*

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ diffbar und $c \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$$

69 *Antwort*

Sei $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ mit $g(y) \neq 0 \ \forall y \in A$ differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

72 *Antwort*

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ $(A, B \subseteq \mathbb{R}, f(A) \subseteq B)$ Funktionen f sei in $x \in A$ differenzierbar und g sei in $y = f(x)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ im Punlt x differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

71 *Antwort*

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit J=f(I) deren Umkehrfunktion. Ist f in $x \in I$ differenzierbar und es gilt $f'(x) \neq 0$, so ist g in $y = F(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Ableitungen höherer Ordnung

Operationen auf höheren Ableitungen

Lokales Extrema

Notwendige Bedingung für Extrema

Satz von Rolle

Mittelwertsatz

Wachstum einer Funktion

Monotonie von Funktionen

74 *Antwort*

Sei $k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ und seien die Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : a \to \mathbb{R}$ in A k-mal differenzierbar.Es gilt:

- $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ und $(f-g)^{(k)} = f^{(k)} - g^{(k)}$
- $(c \cdot f)^{(k)} = c \cdot f^{(k)}$
- $(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \cdot g^{(k-i)}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)} = \frac{f^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)} \cdot g^{(k-i)}}{g}$

Ist ferne $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ in B k-mal differenzierbar, so ist es auch $g \circ f$ k-mal differenzierbar.

73 *Antwort*

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ eine Funktion. Dann ist die k-te Ableitung (bzw. ABleitung k-ter Ordnung) von f definitert als $f^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit

- $f^{(0)} = f$
- $f^{(k+1)} = (f^{(k)})' : A \to \mathbb{R}$ falls die Ableitung von $f^{(k)}$ in jedem $a \in A$ existiert.

76 *Antwort*

Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$

75 *Antwort*

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion f hat in $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\epsilon > 0$ exiswtiert, so dass

$$f(x) \geq f(y) \text{ bzw. } f(x) \leq f(y)$$

für alle y mit $|x-y| < \epsilon$, so spricht man von einem strikten lokalen Maximum (bzw. Minimum).

78 *Antwort*

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a,n) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a,b)$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

77 *Antwort*

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. f sein in (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

80 *Antwort*

- f ist genau dann in $[a,b]$ monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$
- f ist genau dann in $[a,b]$ monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$
- Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend und folglich injektiv.
- Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton folgend und folglich injektiv.

79 *Antwort*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion. Für die Ableitung $K^- \leq f'(x) \leq K^\circ +$ für alle $x \in (a,b)$ mit $K^\circ -, K^+ \in \mathbb{R}$.
Für alle $c, d \in [a,b]$ mit $c \leq d$ gilt:

$$K^-(d-c) \leq f(d) - f(c) \leq K^+(d-c)$$

Mafi2 # 81

Strenges lokales Maximum

Mafi2 # 82

Zweiter Mittelwertsatz

Mafi2 # 83

Regel von l'Hospital $(0\backslash 0)$

Mafi2 # 84

Regel von l'Hospital $(\infty\backslash\infty)$

Mafi2 # 85

Schritte der Kurvendiskussion

Mafi2 # 86

Taylorsche Formel

Mafi2 # 87

Taylor-Reihe

82 *Antwort*

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar sind.
Sei ferne $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

81 *Antwort*

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist. Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$), dann besitzt f in x ein streng lokales Minimum (bzw. Maximum).

84 *Antwort*

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar sind. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.
Gilt $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$ und existiert $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

83 *Antwort*

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar sind. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.
Gilt $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

86 *Antwort*

Sei $f : A\ to \mathbb{R}$ eine in A $n + 1$ mal stetig differenzierbare Funktion und $ainA$ Dann gilt für $x \in A$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem $x \in A$ (mindestens) ein $y \in (\min(x, a), \max(x, a))$ mit

$$R_n(y) = \frac{f^{n+1}(y)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

gibt. Gilt

$$\lim_{n \to \infty} R_n(y) = 0$$

und konvergiert die Taylor-Formel für $n \to \infty$ so stellt die Taylor-Formel in y die Funktion f dar.

85 *Antwort*

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereich
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph

87 *Antwort*

Sei $f : a \to \mathbb{R}$ eine in $a \in A$ beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann heisst

$$T\left[f, a\right](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

die Taylor Reihe von f im Entwicklungspunkt a.