

Entrega proyecto etapa 1

March 27, 2025

1 Proyecto A: Optimización en la Planeación de Transporte Vehicular Urbana Para LogistiCo

1.1 Integrantes

- Barrera Toro, Javier Steven
- Borbon Holguin, Luis Alfredo
- Rolon Toloza, Julian Santiago

1.2 1. Formulación Matemática del Modelo

1.2.1 1.1. Definición de Conjuntos

- D: Conjunto de centros de distribución:

$$D = \{D1, D2, D3\}$$

- C: Conjunto de zonas de entrega.

$$C = \{C1, C2, C3\}$$

- N Conjunto de todos los nodos.

$$N = C \cup D$$

- T: Conjunto de vehículos disponibles.

$$T = \{T1, T2, T3\}$$

- A: Conjunto de rutas posibles entre nodos, definidos por:

$$A = \{(i, j) \in N \times N | i \neq j\}$$

Además, para facilitar el recorrido sobre los conjuntos definimos el siguientes índices.

- $i, j \in N$: índices para representar los nodos (clientes y centros de distribución).
- $t \in T$: Índice para los vehículos disponibles.

1.2.2 1.2. Definición de parametros:

Los parámetros que se definen para el modelo son los siguientes:

- q_t : La capacidad máxima de carga del vehículo t .
- c_i : La capacidad máxima del almacenamiento en el centro de distribución $i \in D$.
- d_i : Demanda del cliente $i \in C$.
- a_t : Autonomia maxima de cada vehiculo

Para las distancias y tiempos entre los nodos se definen los siguientes. - d_{ij} : Distancia entre los nodos i y j . - t_{ij} : Tiempo de viaje entre los nodos i y j .

En cuanto a los costos: - c_{ij} : Costo de transporte entre nodos i y j . - f_t : Costo de flete por kilómetro de cada vehículo t . - v_t : Costo por kilómetro del vehículo t .

Los costos que se asumen constantes durante todo el proceso son los siguientes.

- Costo de mantenimiento (M): Debido a que para un camion el costo de mantenimiento cada 200 kilometros es de 119.000 pesos, realizando los calculos nos da $119,000/200km = \$600$ por km.
- Precio del combustible (G): Revisando las fuentes donde dice que en Colombia el precio de la gasolina esta en 16.184 pesos, y debido a que 1 camion consume 0.1 litros por km realizando los calculos nos da que un camion consume un precio de \$4.145 por km.
- Tarifa del servicio (P): \$600 por km este valor lo sacamos de las tarifas de envio de cabify.
- Consumo del combustible: 0,1 litros por km. Lo que significa $0,1 * G = 0,1*15.000 = 1,500$
- Costo total por km = $M+G+1.500$

<https://www.motor.com.co/actualidad/Nueva-alza-en-la-gasolina-en-Colombia-aumento-95-pesos-en-febrero-2025-20250203-0002.html>

<https://cabify.com/co/tarifas/bogota#p-envios>

<https://www.kavak.com/mx/blog/camionetas-de-8-cilindros-potencia>

1.2.3 1.3. Variables de decisión y variables:

Las variables de decisión que se utilizarán en el modelo son las siguientes.

1. $X_{i,j,t}$: Es una matriz binaria que indica si el vehículo t vaija del nodo i al nodo j . 1 si el vehículo t recorre el arco de i a j , de lo contrario $X_{i,j,t} = 0$.
2. $Q_{i,t}$: Cantidad de carga que transporta el vehículo t cuando llega al nodo i . Es una variable continua que se mantiene en los límites de capacidad del vehículo.
3. P_{ti} : Cantidad que no fue llevada del producto i en el transporte t .

En cuanto a variables auxiliares que serán utiles para el problema se las plantean las siguientes dos. 1. $d_{i,t}$: Es la demanda atendida en el nodo i por el vehículo t . 2. $u_{i,t}$: Orden de visita del nodo i por el vehículo t para eliminar subtours usando MTZ, lo cual garantiza la conectividad del recorrido.

1.2.4 1.4. Restricciones

1. La restricción de flujo, garantiza que si un vehiculo entra a un nodo también sale del mismo.

$$\sum_{i \in N} X_{tij} = \sum_{j \in N} X_{tji}, \forall j \in C, \forall t$$

2. La capacidad del vehículo, garantiza que la cantidad de productos transportados nunca supera la capacidad máxima de carga.

$$\sum_{(i,j) \in N} d_j X_{tij} \leq Q_{tij}, \forall t$$

3. Un cliente se atiende exactamente una vez, para simplificar el problema.

$$\sum_{i \in N} \sum_{t \in T} X_{tij} = 1, \forall j \in C$$

4. Restricción sobre la cantidad transportada a un cliente no supere la demanda.

$$Q_{tij} \leq d_j X_{tij}, \forall t \in T, \forall i \in N, \forall j \in C$$

5. La carga transportada por un vehículo no supera la capacidad máxima.

$$\sum_{j \in C} Q_{tij} \leq Q_{max} X_{tij}, \forall t \in T, \forall i \in N$$

6. La cantidad entregada a un cliente j sea igual a la demanda requerida d_j .

$$\sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in N} Q_{tij} = d_j$$

7. Conservación de flujo con las cantidades entregadas en cada uno de los nodos

$$\sum_{j \in N} Q_{tij} - \sum_{j \in N} Q_{tji} = d_i, \forall t \in T, \forall i \in N \setminus \{0\}$$

8. Cada vehículo no puede recorrer más distancia que la permitida por su autonomía máxima

$$\sum_{(i,j) \in N} d_{ij} X_{tij} \leq a_t, \forall t \in T$$

9. La cantidad total de productos enviados desde un centro de distribución no puede superar su capacidad

$$\sum_{(i,j) \in N} Q_{tij} X_{tij} \leq S_i, \forall t \in T$$

10. Para evitar ciclos en las rutas de los vehículos definimos u_i y aplicamos la restricción de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ):

$$u_i - u_j + |N| X_{tij} \leq |N| - 1, \forall (i, j) \in N$$

11. Se agrega una restricción para la penalización cuando no se cumple con la demanda requerida, donde M es un valor muy grande:

$$(d_i - \sum_{(i,j) \in N} Q_{ijt}) \leq M * P_{ti}, \forall t \in T, \forall i \in N$$

1.3 2. Función Objetivo y Proceso de indagación

Para definir esta función objetivo, se llevó a cabo un análisis relacionado con la optimización de rutas y problemas logísticos. La formulación se diseñó con el objetivo de reducir al máximo los costos de transporte, los cuales están determinados por la distancia que se recorre y los costos operativos como tarifas de flete, mantenimiento y consumo de combustible. El propósito es reducir al mínimo el costo total de transporte. Este costo se calcula teniendo en cuenta el valor por kilómetro recorrido, multiplicado por la distancia total que recorre cada vehículo en los trayectos seleccionados. Adicional, se le suma una penalización, cuando no se cumple con la demanda requerida. Por último, se agregó una restricción para poder controlar el problema de los subtours.

La función objetivo está definida como:

$$\min \left(\sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in N} C_{ij} \times X_{tij} + Penalizacion \right)$$

En el sector logístico, los principales objetivos estratégicos se centran en minimizar los costos operativos, optimizar la utilización de recursos y mejorar los tiempos de entrega. Para ello, es necesario diseñar un modelo matemático que refleje estos objetivos, considerando aspectos como la reducción del costo total del transporte, que incluye el consumo de combustible y el mantenimiento de los vehículos, así como la minimización de la distancia recorrida y la cantidad de vehículos utilizados. Además, se busca garantizar un equilibrio en la distribución del inventario, asegurando que los centros de distribución no superen su capacidad y que la demanda de los clientes sea satisfecha de manera eficiente. La optimización de rutas también es clave, permitiendo que los vehículos no solo viajen desde los centros de distribución hacia los clientes, sino que puedan realizar conexiones entre clientes para mejorar la eficiencia del sistema.

Para traducir estos objetivos en una función matemática, es necesario incorporar penalizaciones que desincentiven incumplimientos de restricciones operativas. Por ejemplo, se pueden incluir términos en la función objetivo que penalicen las entregas fuera de las rutas óptimas o el uso de vehículos por encima de su capacidad. También se pueden establecer penalizaciones por exceder los límites de almacenamiento en los centros de distribución, así como por recorridos que superen la autonomía de los vehículos. De esta manera, el modelo no solo minimiza costos, sino que también impone restricciones que aseguran la viabilidad operativa y la eficiencia en la distribución de productos, alineándose con los estándares y metas de LogistiCo en la optimización del transporte vehicular en Bogotá. En particular, se hace la propuesta de una penalización en dado caso que se incumpla con la demanda de los clientes.

1.4 3. Preprocesamiento de datos y análisis

En este punto se nos pide realizar la transformación de los datos ya que contamos con latitud y longitud pero se necesita el tiempo y las distancia. Una primera aproximación podría ser pensar en calcular la distancia euclidiana de estos puntos. Sin embargo, esto tiene un problema ya que obtenemos la distancia mínima entre dos puntos en un plano, ignorando completamente calles y edificios, se podría pensar que los vehículos atraviesan todo a su paso desde un centro de distribución hacia el punto de entrega, lo cual es incorrecto. Además de realizar la conversión a información que entienda el modelo se debe resolver este problema. Una solución bastante buena para este problema es utilizar el servicio de [Distance Matrix API](#) de Google Cloud, aprovechando que aún tenemos los créditos de arquisoft.

```
[4]: try:
      import googlemaps
    except Exception:
      print("googlemaps module not found")
```

En la siguiente celda se definen el código necesario para generar la matriz de distancias y la matriz de tiempo. Una vez se tiene esto se pueden calcular las matrices de costos facilmente unicamente multiplicando el valor que se definio por la matriz, gracias a que se esta trabajando con `numpy` el valor se multiplica de una vez por todas las entradas de la matriz.

```
[5]: # import numpy as np

# # Reemplaza con tu clave de API de Google Maps
# API_KEY = ""
# gmaps = googlemaps.Client(key=API_KEY)

# ubicaciones = [
#     ("CD1", "Bodega Norte", 4.7110, -74.0721),
#     ("CD2", "Bodega Sur", 4.6050, -74.0835),
#     ("CD3", "Bodega Este", 4.6700, -74.0300),
#     ("C1", "Catalina", 4.6486, -74.0608),
#     ("C2", "Rodrigo", 4.7333, -74.0700),
#     ("C3", "Luis", 4.7000, -74.0200),
# ]

# # Crear un diccionario para mapear nombres a coordenadas
# coords = {loc[0]: (loc[2], loc[3]) for loc in ubicaciones}
# n = len(ubicaciones) # Número total de ubicaciones

# # Inicializar matrices para distancias y tiempos
# distancias = np.zeros((n, n))
# tiempos = np.zeros((n, n))

# # Función para obtener distancia y tiempo entre dos ubicaciones
# def obtener_distancias_tiempos(origen, destino):
#     resultado = gmaps.distance_matrix(
#         origins=[origen],
#         destinations=[destino],
#         mode="driving",
#         units="metric"
#     )
#     distancia = resultado["rows"][0]["elements"][0]["distance"]["value"] / 1000 # km
#     tiempo = resultado["rows"][0]["elements"][0]["duration"]["value"] / 60 # minutos
#     return distancia, tiempo
```

```
# # Llenar la matriz de distancias y tiempos
# for i in range(n):
#     for j in range(n):
#         if i != j: # No calcular la distancia de un nodo a sí mismo
#             dist, time = obtener_distancias_tiempos(coords[ubicaciones[i][0]],
#                                                         coords[ubicaciones[j][0]])
#             distancias[i, j] = dist
#             tiempos[i, j] = time
```

```
[11]: # # Imprimir matrices
# print("Matriz de Distancias (km):")
# print(distancias)

# print("\nMatriz de Tiempos (minutos):")
# print(tiempos)
```

Matriz de Distancias (km):

```
[[ 0.    14.504 15.445  9.23   2.727  7.516]
 [15.759  0.    18.667  7.623 18.211 17.42 ]
 [14.612 19.088  0.    10.077 17.339 14.046]
 [ 8.559  8.891  9.901  0.    12.34  9.802]
 [ 2.738 18.011 17.824 12.716  0.    10.247]
 [ 8.028 19.008 15.818 10.552  8.585  0.    ]]
```

Matriz de Tiempos (minutos):

```
[[ 0.    30.73333333 41.73333333 23.1    6.21666667 21.38333333]
 [30.25  0.    47.01666667 21.21666667 35.56666667 37.76666667]
 [38.21666667 47.76666667  0.    29.73333333 44.45    38.61666667]
 [24.7    25.05    31.13333333  0.    30.1    29.61666667]
 [ 6.06666667 35.85    48.06666667 31.6    0.    29.33333333]
 [23.53333333 43.25    46.48333333 32.98333333 27.05    0.    ]]
```

Además, dado que se está buscando minimizar la función objetivo, no se puede utilizar tal cual la matriz anterior, se deben reemplazar los valores de 0 por un valor lo suficientemente grande como lo puede ser 999999.

```
[12]: # Matriz de Distancias (km)
distancias = [
    [999999, 14.504, 15.445, 9.23, 2.727, 7.516],
    [15.759, 999999, 18.667, 7.623, 18.211, 17.42],
    [14.612, 19.088, 999999, 10.077, 17.339, 14.046],
    [8.559, 8.891, 9.901, 999999, 12.34, 9.802],
    [2.738, 18.011, 17.824, 12.716, 999999, 10.247],
    [8.028, 19.008, 15.818, 10.552, 8.585, 999999]
]

# Matriz de Tiempos (minutos)
```

```

tiempos = [
    [999999, 30.73333333, 41.73333333, 23.1, 6.21666667, 21.38333333],
    [30.25, 999999, 47.01666667, 21.21666667, 35.56666667, 37.76666667],
    [38.21666667, 47.76666667, 999999, 29.73333333, 44.45, 38.61666667],
    [24.7, 25.05, 31.13333333, 999999, 30.1, 29.61666667],
    [6.06666667, 35.85, 48.06666667, 31.6, 999999, 29.33333333],
    [23.53333333, 43.25, 46.48333333, 32.98333333, 27.05, 999999]
]

```

1.5 4. Ejemplos ilustrativos

2 Ejemplo 1: Caso básico con restricciones cumplidas

2.1 Escenario:

- La bodega central es **Bodega Norte (CD1)**.
- Los clientes son **Catalina (C1)**, **Rodrigo (C2)** y **Luis (C3)**.
- La demanda de cada cliente es:
 - **C1:** 30 unidades.
 - **C2:** 20 unidades.
 - **C3:** 50 unidades.
- La capacidad máxima del vehículo es **100 unidades**.
- El costo por kilómetro es **3 UM/km**.
- El costo por minuto es **2 UM/min**.

2.1.1 Matriz de Distancias (km):

	CD1	C1	C2	C3
CD1	0	9.23	2.73	7.52
C1	9.23	0	12.34	9.80
C2	2.73	12.34	0	10.25
C3	7.52	9.80	10.25	0

2.1.2 Matriz de Tiempos (minutos):

	CD1	C1	C2	C3
CD1	0	23.1	6.2	21.4
C1	23.1	0	30.1	29.6
C2	6.2	30.1	0	29.3
C3	21.4	29.6	29.3	0

2.1.3 Ruta del Vehículo:

1. CD1 → C2 → C3 → C1 → CD1.

2.1.4 Cálculo de Costos:

1. **Distancia Total Recorrida:** $2.73 + 10.25 + 9.80 + 9.23 = 32.01$ km.
 2. **Tiempo Total:** $6.2 + 29.3 + 29.6 + 23.1 = 88.2$ min.
 3. **Costos de Transporte:**
 - Distancia: $32.01 \times 3 = 96.03$ UM.
 - Tiempo: $88.2 \times 2 = 176.4$ UM.
 4. **Costo Total:** $96.03 + 176.4 = 272.43$ UM.
-

3 Ejemplo 2: Penalización por unidades no entregadas

3.1 Escenario:

- La bodega central es **Bodega Norte (CD1)**.
- Los clientes son **Catalina (C1)**, **Rodrigo (C2)** y **Luis (C3)**.
- La demanda de cada cliente es:
 - **C1:** 30 unidades.
 - **C2:** 40 unidades.
 - **C3:** 50 unidades.
- La capacidad máxima del vehículo es **100 unidades**.
- Penalización por cada unidad no entregada: **10 UM**.

3.1.1 Distribución Propuesta:

1. $CD1 \rightarrow C3 \rightarrow C2 \rightarrow CD1$.
2. **Cargas y Penalización:**
 - **C3:** 50 unidades entregadas (sin penalización).
 - **C2:** Solo 50 unidades pueden ser entregadas (demanda: 40, unidades entregadas: 50 \rightarrow no penalización).
 - **C1:** No se entrega nada (demanda: 30, unidades no entregadas: 30 \rightarrow penalización).

3.1.2 Cálculo de Costos:

1. **Distancia Total Recorrida:** $7.52 + 10.25 + 2.73 = 20.5$ km.
 2. **Costos de Transporte:** $20.5 \text{ km} \times 3 \text{ UM} = 61.5$ UM.
 3. **Penalización:** $30 \text{ unidades no entregadas} \times 10 \text{ UM} = 300$ UM.
 4. **Costo Total:** $\text{Transporte} + \text{Penalización} = 61.5 + 300 = 361.5$ UM.
-

4 Ejemplo 3: Restricción de capacidad no cumplida

4.1 Escenario:

- La bodega central es **Bodega Norte (CD1)**.
- Los clientes son **Catalina (C1)**, **Rodrigo (C2)** y **Luis (C3)**.
- La demanda de cada cliente es:
 - **C1:** 40 unidades.

- **C2:** 50 unidades.
- **C3:** 20 unidades.
- La capacidad máxima del vehículo es **70 unidades**.

4.1.1 Distribución Propuesta:

1. Primera ruta: $CD1 \rightarrow C1 \rightarrow C2 \rightarrow CD1$ (70 unidades entregadas).
2. Segunda ruta: $CD1 \rightarrow C3 \rightarrow CD1$ (resto de la demanda).

4.1.2 Restricciones no cumplidas:

- El vehículo no puede transportar más de 70 unidades, pero **la primera ruta excede la capacidad permitida**.

4.1.3 Penalización:

1. El exceso de unidades debe ser transportado en otra ruta, incrementando el costo total.
2. **Costos adicionales estimados:**
 - Segunda ruta: $CD1 \rightarrow C3 \rightarrow CD1$.
 - Distancia total: $7.52 \times 2 = \mathbf{15.04 \text{ km}}$.

5 Ejemplo 4: Restricción de capacidad no cumplida

5.1 Escenario:

- La bodega central es **Bodega Sur (CD2)**.
- Los clientes son **Catalina (C1)**, **Rodrigo (C2)** y **Luis (C3)**.
- La demanda de cada cliente es:
 - **C1:** 30 unidades.
 - **C2:** 40 unidades.
 - **C3:** 60 unidades.
- La capacidad máxima del vehículo es **50 unidades**.

5.1.1 Matriz de Distancias (km):

	CD2	C1	C2	C3
CD2	0	7.62	18.21	17.42
C1	7.62	0	12.34	9.80
C2	18.21	12.34	0	10.25
C3	17.42	9.80	10.25	0

5.1.2 Matriz de Tiempos (minutos):

	CD2	C1	C2	C3
CD2	0	21.2	35.6	37.7

	CD2	C1	C2	C3
C1	21.2	0	30.1	29.6
C2	35.6	30.1	0	29.3
C3	37.7	29.6	29.3	0

5.1.3 Distribución Propuesta:

- Primera ruta: $CD2 \rightarrow C1 \rightarrow C2 \rightarrow CD2$.
 - Total unidades entregadas: **50 unidades**.
 - Demanda: **C1 (30), C2 (40)**.
 - Restricción incumplida:** No es posible cubrir toda la demanda de **C2** en esta ruta.
- Segunda ruta: $CD2 \rightarrow C3 \rightarrow CD2$.
 - Total unidades entregadas: **50 unidades**.
 - Demanda: **C3 (60)**.
 - Restricción incumplida:** Solo se entregan 50 unidades a **C3**, dejando una demanda insatisfecha de 10 unidades.

5.1.4 Penalización:

- Unidades no entregadas:**
 - C2:** $40 - 20 = 20$ unidades no entregadas.
 - C3:** $60 - 50 = 10$ unidades no entregadas.
- Penalización por unidades no entregadas: **10 UM por unidad**.
 - Total penalización: $(20 + 10) \times 10 = 300$ UM.

5.1.5 Cálculo de Costos:

- Primera ruta ($CD2 \rightarrow C1 \rightarrow C2 \rightarrow CD2$):**
 - Distancia total: $7.62 + 12.34 + 18.21 = 38.17$ km.
 - Tiempo total: $21.2 + 30.1 + 35.6 = 86.9$ min.
 - Costos:
 - Distancia: $38.17 \times 3 = 114.51$ UM.
 - Tiempo: $86.9 \times 2 = 173.8$ UM.
 - Subtotal: **288.31 UM**.
- Segunda ruta ($CD2 \rightarrow C3 \rightarrow CD2$):**
 - Distancia total: $17.42 \times 2 = 34.84$ km.
 - Tiempo total: $37.7 \times 2 = 75.4$ min.
 - Costos:
 - Distancia: $34.84 \times 3 = 104.52$ UM.
 - Tiempo: $75.4 \times 2 = 150.8$ UM.
 - Subtotal: **255.32 UM**.
- Costo Total:**
 - Transporte: $288.31 + 255.32 = 543.63$ UM.
 - Penalización: **300 UM**.
 - Costo Total Final:** $543.63 + 300 = 843.63$ UM.

5.2 5. Justificación y discusión

Para simplificar el problema de planificación de transporte en Bogotá, se estableció que todos los vehículos utilizados en la distribución son idénticos en términos de capacidad de carga, consumo de combustible y costos operativos, eliminando la necesidad de considerar flotas heterogéneas. Además, se asumió que los tiempos de viaje y las distancias entre nodos son fijos y conocidos, sin variabilidad debido a condiciones externas como el tráfico, el clima o restricciones viales. La demanda de los clientes también se consideró constante y perfectamente conocida, lo que evita la necesidad de modelar incertidumbre en los pedidos y permite diseñar rutas optimizadas sin cambios imprevistos. Asimismo, se decidió que los vehículos solo pueden transportar un único tipo de producto, sin necesidad de clasificar o segmentar la carga según diferentes categorías.

En cuanto a la operación logística, se asumió que cada vehículo comienza y termina su recorrido en el mismo centro de distribución, sin permitir transferencias de carga entre vehículos en ruta ni la posibilidad de que un vehículo recargue productos en otro punto intermedio. Además, se estableció que los centros de distribución tienen capacidades fijas y limitadas, lo que significa que no se pueden almacenar más productos de los que permite su infraestructura. No se consideró la posibilidad de apertura o cierre de centros de distribución, ni su expansión o reducción de capacidad. También se descartó la existencia de horarios de operación restringidos para los centros de distribución y los clientes, asumiendo que las entregas pueden realizarse en cualquier momento del día.

En términos de costos y optimización, se definió que los costos de operación incluyen únicamente el combustible y el mantenimiento, ambos considerados constantes e iguales para todos los vehículos, eliminando costos variables como peajes, seguros o depreciación de los vehículos. Se evitó modelar situaciones estocásticas, como fallas mecánicas, retrasos inesperados o variabilidad en los costos operativos. Además, se descartó la posibilidad de múltiples visitas a un mismo cliente en un solo día, es decir, cada cliente recibe su pedido en una única entrega.