

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sistemas lineares estocásticos com saltos nos parâmetros e no domínio de tempo

Junior Rodrigues Ribeiro

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Junior Rodrigues Ribeiro

Sistemas lineares estocásticos com saltos nos parâmetros e no domínio de tempo

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

USP – São Carlos
Maio de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R696s Rodrigues Ribeiro, Junior
 Sistemas lineares estocásticos com saltos nos
 parâmetros e no domínio de tempo / Junior Rodrigues
 Ribeiro; orientador Eduardo Fontoura Costa. -- São
 Carlos, 2024.
 105 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2024.

 1. Sistemas lineares com saltos markovianos. 2.
 sistemas estocásticos. 3. estabilidade em média
 quadrática. 4. índice H2. I. Fontoura Costa,
 Eduardo, orient. II. Título.

Junior Rodrigues Ribeiro

**Stochastic linear systems with jumps in the parameters and
in the time domain**

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

USP – São Carlos
May 2024

*Aos que têm a humildade como forma, a coragem como guia, a sabedoria como norte, e o amor
como caminho.*

AGRADECIMENTOS

Ao Criador de tudo, que nem todos, como eu, tiveram o privilégio de conhecer, ainda que minimamente; que prometeu uma grande vitória na minha infância, a qual cumpre-se hoje, além de várias outras coisas quais não deixou de cumprir, já que não é homem para que minta ou que volte atrás em sua Palavra;

A meus pais pela vida, pela educação, pelo exemplo, pelo lar de paz; família meio bagunçada, mas se não fosse assim, talvez não teria graça. Grato a vocês, pais e irmãos, que nomeio: Santino, Antonia, Elenilda, Antonio Carlos, Ivan, Jonis, Nayana;

Aos amigos que conquistei ao longo da minha trajetória, uns mais chegados, outros transitórios; todos contribuíram de alguma forma. Menciono os principais: Thiago Soares Bispo, Carlos Roberto da Silva. Vocês não sabem o quanto me ajudaram, mas eu sei. E por isso agradeço-vos;

Aos professores, desde a alfabetização com Maria Conceição dos Santos (obrigado profa!), até a orientação do doutoramento, com o professor Eduardo. Só tenho a agradecê-los grandemente. Gostaria de ter palavras mais eloquentes, mas detenho-me com essas mais simples;

Ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, que contribuiu para este trabalho.

*“E Deus limpará de seus olhos toda a lágrima; e não haverá mais morte, nem pranto, nem clamor,
nem dor; porque já as primeiras coisas são passadas.”*

Apocalipse 21:4.

RESUMO

RIBEIRO, J.R. **Sistemas lineares estocásticos com saltos nos parâmetros e no domínio de tempo**. 2024. 103 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Os sistemas de controle têm diversas aplicações em problemas reais. Muitas vezes se quer implementar um sistema que opere mesmo sob falhas abruptas. Uma modelagem frutífera nesse contexto é feita com Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM). Apesar de que os SLSM têm uma vasta teoria, tradicionalmente seus resultados são apresentados em tempo contínuo (SLSM-C) ou em tempo discreto (SLSM-D) separadamente. No presente trabalho, apresentamos um modelo de sistema dinâmico linear estocástico que opera parte em domínio de tempo contínuo e parte em domínio de tempo discreto, de forma alternada, com durações aleatórias, que chamamos de SLSM a tempo Misto (SLSM-M). Conseguimos modelar os SLSM-C e SLSM-D como casos particulares do nosso modelo, de modo que os SLSM-M generalizam resultados da teoria clássica. Definimos uma noção de estabilidade em média quadrática (MSS) para o SLSM-M e mostramos uma condição necessária e suficiente para MSS em termos de inspecionar o espectro de duas matrizes. Também definimos um índice H_2 para o novo modelo e desenvolvemos uma fórmula para seu cálculo. Um exemplo numérico de um pêndulo invertido foi trazido para ilustrar a teoria.

Palavras-chave: Sistemas lineares com saltos markovianos, sistemas estocásticos, estabilidade em média quadrática, índice H_2 , sistemas híbridos.

ABSTRACT

RIBEIRO, J.R. **Stochastic linear systems with jumps in the parameters and in the time domain**. 2024. 103 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Control systems have several applications in real-world problems. One frequently wants to implement a system that works well even under abrupt changes or failures. Markov Jump Linear Systems (MJLS) is a fruitful model in this context. Even though there are numerous theories on MJLS, it is common to find them separately in continuous-time (C-MJLS) or discrete-time (D-MJLS) domains. In the present work, we present a model for a stochastic linear dynamic system that operates in continuous-time domain and in discrete-time domain, alternately, during random times in each domain, and we call it a Mixed-Time MJLS (M-MJLS). We succeed in modeling both C-MJLS and D-MJLS as particular cases of our model, such that the M-MJLS generalizes results of the classical theory. We define a notion of Mean Square Stability (MSS) for the M-MJLS and derive a necessary and sufficient condition for it in terms of the spectrum of two matrices. We also define an H_2 index for the new model, and develop a formula for computing it. A numerical example of an inverted pendulum illustrates the theory.

Keywords: Markov jump linear systems, stochastic systems, mean square stability, H_2 index, hybrid systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Hierarquia dos modelos da literatura, mostrando a interseção entre SHE e SLSM-M. É possível modelar um SLSM-C ou SLSM-D como um SHE de maneira artificial, mas não um SLSM-M.	24
Figura 2 – Regiões de estabilidade dos PVIs	33
Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema linear	35
Figura 4 – Cadeia de Markov com 3 estados a tempo discreto	36
Figura 5 – Realização de cadeia de Markov a tempo discreto	37
Figura 6 – Cadeia de Markov com 3 estados a tempo contínuo	38
Figura 7 – Realização de cadeia de Markov a tempo contínuo	39
Figura 8 – Os SLSM podem ser instáveis, mesmo que seus parâmetros sejam individualmente estáveis.	41
Figura 9 – Diagrama de blocos de um SLSM	43
Figura 10 – Diferentes representações do domínio de tempo misto: vermelho denota tempo contínuo, e azul, tempo discreto. Em verde, destacamos as variáveis aleatórias.	51
Figura 11 – Ilustração de um SLSM-M	52
Figura 12 – SLSM-M com domínio discreto degenerado	52
Figura 13 – Um pêndulo invertido com massa m sustentado em uma plataforma móvel de massa M	55
Figura 14 – Uma realização dos ângulos do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.	56
Figura 15 – Uma realização da posição do centro da plataforma do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.	56
Figura 16 – Uma realização da força aplicada para controle do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.	57
Figura 17 – Uma realização do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.	57
Figura 18 – Região de estabilidade, instabilidade e inexistência de \mathcal{T} , em função de $\text{eig}(\mathbf{A})$ (pontos azuis).	76
Figura 19 – Quando \mathbf{A} é Hurwitz estável, \mathcal{T} será estável independentemente de σ	76
Figura 20 – Diagrama mostrando o H_2 e o raio espectral de \mathcal{T} para diversos ganhos K_d para o problema do Exemplo 2.	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação entre os ganhos $K_d^{(1)}$ e $K_d^{(2)}$	89
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Publicações	29
1.2	Contribuições e estrutura da tese	29
2	CONCEITOS INICIAIS	31
2.1	Sistemas dinâmicos sem saltos nos parâmetros	31
2.2	Cadeias de Markov	35
2.3	Sistemas Lineares com Saltos Markovianos	39
3	SISTEMA DE TEMPO MISTO	47
3.1	Notações e hipóteses de trabalho	48
3.2	Definição do SLSM-M	52
4	ESTABILIDADE DO SISTEMA DE TEMPO MISTO	59
4.1	Variáveis de segundo momento	61
4.2	Outros tempos de duração dos domínios	66
4.3	Resultados de estabilidade	67
4.4	Casos particulares	74
5	SOBRE H_2	79
5.1	H_2 para Sistemas com Saltos em tempo discreto	80
5.2	H_2 para SLSM-M	83
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
6.1	Sugestões de trabalhos futuros	91
	REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A	UM PÊNDULO INVERTIDO	97
APÊNDICE B	SOBRE O TEOREMA DE KREIN-RUTMAN	101

INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle são parte integrante da sociedade moderna. São encontrados em geladeiras, máquinas de lavar, elevadores, carros inteligentes, robôs, aviões, foguetes, sondas espaciais, para citar alguns exemplos. É desejável que os controles atuem mesmo em circunstâncias desfavoráveis, como quando diante de alterações súbitas causadas pelo ambiente ou mesmo por falhas internas. Cabe ao engenheiro um projeto ou *design* inteligente de controle, baseando-se em modelos matemáticos que melhor atendam às necessidades do sistema em questão, conforme suas particularidades.

Para projetar sistemas de controle, muitas vezes se lança mão de *sistemas dinâmicos* como modelo matemático, como por exemplo $dx(t)/dt = f(x(t), \cdot)$ ou $x(k+1) = f(x(k), \cdot)$ para o caso de tempo contínuo e discreto respectivamente, em que $x(t)$ ou $x(k)$ são as variáveis de estado do sistema dinâmico (vetor de \mathbb{R}^n). No caso particular deste trabalho, temos interesse em estudar os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) (ou no inglês *Markov Jump Linear Systems–MJLS*), modelo matemático estudado desde a década de 1960 (LIDSKII, 1962), e que se mostrou exitoso ferramental teórico para modelar falhas abruptas no sistema, com muita pesquisa desde então. Nos SLSM, a função $f(\cdot, \cdot)$ é linear e contém aleatoriedade, de modo que os SLSM são sistemas dinâmicos estocásticos.

Com respeito à extensa literatura de SLSM, mencionamos algumas aplicações recentes, como um motor de corrente contínua com perdas abruptas da potência transmitida ao eixo (VARGAS; COSTA; DO VAL, 2013), um drone de quatro hélices com um modelo linearizado em torno da posição de equilíbrio (DRAGAN; COSTA, 2016), um sistema de tanques de água com falhas de sensores (STADTMANN; COSTA, 2017), o controle de momento de um giroscópio, amplamente usado como atuador em controle de atitude de satélites e espaçonaves (CARVALHO *et al.*, 2021), como também alguns livros-texto bastante conhecidos e que citam também diversas aplicações, como Costa, Fragoso e Todorov (2013) sobre SLSM a tempo contínuo e Costa, Fragoso e Marques (2005) sobre SLSM a tempo discreto, respectivamente.

Suponha que um bom modelo linear para descrever o sistema dinâmico seja \mathcal{G}_1 , mas que após uma mudança abrupta/falha outro modelo seja mais adequado, digamos \mathcal{G}_2 , e após outra mudança, um bom modelo seja \mathcal{G}_3 , etc. Suponha ainda, que todas estas diferentes situações possam ser caracterizadas por um conjunto finito de modelos $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M\}$, em que, um de cada vez, é um bom modelo para descrever o sistema. Cada um desses modelos é um *modo de operação* do sistema, e tem seu próprio conjunto de *parâmetros* (matrizes), digamos (A_i, B_i, C_i) , $i \in \mathbf{M} = \{1, 2, \dots, M\}$. Os modos de operação têm caráter qualitativo, exemplos: \mathcal{G}_1 –modo normal de operação, \mathcal{G}_2 –falha no atuador nº 1, \mathcal{G}_3 –falha no atuador nº 2, \mathcal{G}_4 –falha em ambos os atuadores, \mathcal{G}_5 –sobrecarga em um determinado componente, \mathcal{G}_6 –inutilização de um certo componente, etc. Quando esses parâmetros contêm incertezas, o leitor pode recorrer a uma abordagem por *controle robusto*, como em [Dragan, Morozan e Stoica \(2013\)](#) para tempo contínuo e [Dragan, Morozan e Stoica \(2009\)](#) para tempo discreto.

Há situações em que os parâmetros dos modelos \mathcal{G}_i precisam variar ao longo do tempo para que os \mathcal{G}_i 's sejam bons modelos. Nesses casos, estamos falando de modelos com *parâmetros variantes no tempo*, como em [Zhang e Zhang \(2017\)](#), no qual os autores trazem uma abordagem de controle robusto com *delays* (atrasos), e incertezas nas probabilidades de transição da cadeia de Markov; e em [Dolgov, Kurz e Hanebeck \(2016\)](#), no qual os autores reconstroem $x(t)$, com um estimador variante no tempo, e desenvolvem um controle que não depende da informação de qual dos modelos \mathcal{G}_i está ativo. Por outro lado, há diversas situações em que modelos \mathcal{G}_i com parâmetros conhecidos invariantes no tempo são razoáveis para a aplicação, sendo menos complexos. Nesta tese, os parâmetros (matrizes) são conhecidos, e invariantes no tempo.

Cadeias de Markov são processos estocásticos utilizados para modelar os saltos/transições entre os modelos \mathcal{G}_i nos SLSM, vamos descrevê-las brevemente na [Seção 2.2](#). O comportamento dessas transições é descrito em termos de *probabilidade de transição* entre os diferentes modos, isto é, para cada modo i , a probabilidade de sair do modo i e ir para o modo j . Assim, se denotarmos por $\theta(t) = i$ (ou $\theta(k) = i$ quando for tempo discreto) o *estado da cadeia de Markov* no instante t , isso vai nos indicar que o modelo $\mathcal{G}_{\theta(t)} = \mathcal{G}_i$ está ativo no sistema no instante t . O *espaço de estados* da cadeia de Markov será então o conjunto dos inteiros $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, M\}$, ou seja, $\theta(t) \in \mathbf{M}$, $\forall t \geq 0$. Os saltos nos parâmetros dos SLSM os fazem diferir da classe de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LIT) (*Linear Time-Invariant Systems (LTI)*). De fato, cada um dos modelos \mathcal{G}_i pode ser um LTI isoladamente, mas o modelo dos SLSM, que engloba um conjunto de tais modelos \mathcal{G}_i , não o é.

Na literatura de SLSM, muitos resultados estruturais da teoria de controle foram desenvolvidos para modelos de tempo contínuo e tempo discreto em separado. Alguns trabalhos estudam os dois domínios, como [Drăgan et al. \(2022\)](#), mas ainda assim, separadamente, por exemplo, com as seções II.A-1), III.A-1) e IV.A-1) dedicadas a tempo contínuo e II.A-2), III.A-2) e IV.A-2) para tempo discreto. Uma teoria que unifique as duas abordagens em algum sentido, trará a vantagem de que os resultados teóricos não precisem ter duas versões, e por fim, novas

possibilidades de aplicações podem decorrer de uma tal teoria.

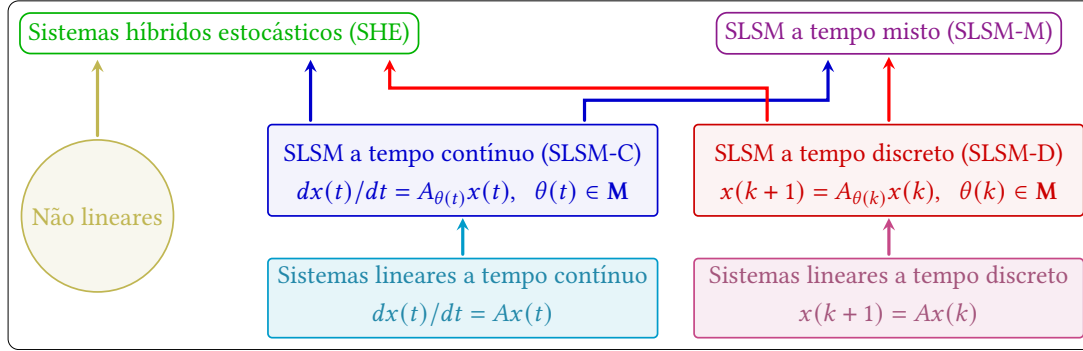
Este trabalho desenvolve uma generalização para os SLSM a tempo contínuo e a tempo discreto, ao permitir que o domínio de tempo (contínuo ou discreto) “chaveie” em instantes aleatórios, sendo que ora o domínio é de tempo contínuo e ora de tempo discreto. Para este tipo de sistema, com chaveamento entre os diferentes tipos de domínio, encontramos uma condição necessária e suficiente de estabilidade baseada em um operador linear (algo semelhante a SLSM clássicos) e uma fórmula para cálculo da norma H_2 . Nas subseções a seguir, trazemos mais informações sobre estes sistemas, assim como sobre estabilidade e norma H_2 .

Sistema de tempo misto

Apesar de ter vasta literatura, normalmente os resultados de SLSM em tempo contínuo (chamamos de SLSM-C) ou em tempo discreto (chamamos de SLSM-D) são apresentados separadamente. Não há um modelo que sirva para ambos, pois seus resultados teóricos são diferentes. Em um esforço para unificar os dois tipos de domínio, trabalhamos em um modelo de tempo misto: Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a tempo Misto (SLSM-M), que consistem em um sistema dinâmico que alterna entre o domínio de tempo contínuo e o de tempo discreto, a principal contribuição desta tese. De uma outra perspectiva, os SLSM-M podem ser interpretados como um sistema de tempo contínuo com descontinuidades modeladas por um SLSM-D. Da forma que desenvolvemos essa teoria, os SLSM-C/SLSM-D usuais passam a ser casos particulares do nosso modelo, e da mesma forma o são alguns de seus resultados de estabilidade, como mostramos na [Seção 4.4](#).

O modelo dos SLSM-M se diferencia da classe de Sistemas Híbridos Estocásticos (SHE) (*Stochastic Hybrid Systems (SHS)*). Os SHE são uma classe ampla de modelos de sistemas estocásticos em tempo misto, usualmente não lineares. São sistemas em tempo contínuo com transições/*resets* em tempo discreto (descontinuidades) na trajetória de seu estado, e tais transições podem, inclusive, ser funções de $x(t)$. Acontece que, nos modelos da literatura, essa transição é feita em apenas um passo de tempo discreto, vide [Teel, Subbaraman e Sferlazza \(2014\)](#) e suas referências. Como as descontinuidades ocorrem em apenas um passo, vamos chamá-las de *transições estáticas*. Nos SLSM-M que propomos, temos uma *transição dinâmica*: as descontinuidades podem se dar em vários passos de tempo discreto, com uma dinâmica modelada por um SLSM-D, dando uma maior versatilidade ao SLSM-M no aspecto de modelagem. Dessa forma, os resultados de SHE e do SLSM-M que trazemos nesta tese são substancialmente diferentes. O caso particular de SLSM-M com apenas um passo em tempo discreto pode ser descrito por um modelo linear de SHE, sem perdas consideráveis. A [Figura 1](#) ilustra a hierarquia dos modelos, e a interseção entre SLSM-M e SHE.

Figura 1 – Hierarquia dos modelos da literatura, mostrando a interseção entre SHE e SLSM-M. É possível modelar um SLSM-C ou SLSM-D como um SHE de maneira artificial, mas não um SLSM-M.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma dúvida que pode surgir é se um SLSM-M, como propomos, é um caso particular de SHE. De fato, podemos representar as variáveis de um SLSM-M relacionadas à dinâmica em tempo contínuo dentro de um modelo de SHE. Porém, não conseguimos representar as variáveis relacionadas à parte discreta do SLSM-M, e assim não temos a possibilidade de atribuir-lhe um custo, aplicar controle, ou realizar outra operação, durante as transições dinâmicas.

Uma forma simples de se construir um modelo de SLSM em tempo misto é fixando-se os tempos de permanência em cada domínio. Por exemplo, fixando-se 1s de tempo contínuo e 100 passos de tempo discreto, temos um modelo de tempo misto para o qual basta uma adaptação relativamente direta dos resultados da literatura de SLSM. Amorim, Gonçalves e Souza (2016) estudam um SHE desse tipo, com apenas 1 passo de tempo discreto nas descontinuidades, no contexto de dados amostrados. No artigo, o modelo considera intervalos regulares de tempo contínuo: $t \in [t_k, t_{k+1})$, com $t_k = kh$, para $h > 0$, porém não tem saltos nos parâmetros. Na Seção 4.2, daremos detalhes de como adaptar os nossos resultados a um modelo de tempo misto com tempos fixos em cada domínio.

Souza, Fioravanti e Araujo (2021) estudam um sistema linear de tempo misto, com saltos markovianos no modo de operação e saltos/descontinuidades na trajetória de x , com um passo de tempo discreto entre um domínio de tempo contínuo e outro. Na Seção 5.3, eles consideram a possibilidade de os modos discretos saltarem entre si, com um tempo de permanência fixo h_i para cada modo $i \in \mathbf{M}$, formando um processo do tipo “jump and hold” (“salta e congela”) no domínio discreto. No restante do artigo, os autores trazem um resultado de estabilidade estocástica para o SHE via equações de Lyapunov, definem H_2 e trazem, no Theorem 4.1 um resultado para calcular ganhos ótimos (no sentido de minimizar H_2) para controle do sistema. Nesta tese, o número de passos em tempo discreto é finito e aleatório, com tempo de permanência fixo e igual a Δ . Vale ainda ressaltar que temos parâmetros diferentes para a dinâmica em tempo contínuo e em tempo discreto, e fazemos uma análise de segundo momento do sistema, enquanto no referido artigo, os parâmetros são os mesmos para ambos os domínios, com a devida discretização para tempo discreto, e sua análise é via Lyapunov. Em

Artaxo e Fioravanti (2024), por outro lado, os autores modelam o tempo de permanência em domínio contínuo de três formas: tempo fixo, tempo mínimo, e tempo limitado em um intervalo $[a, b]$; apenas um passo de tempo discreto é dado, com parâmetro diferente daquele para tempo contínuo.

Modelos de tempo misto com intervalos regulares entre as transições podem ser adequados para certas aplicações, como vimos no artigo acima, mas para outras, podem não ser. Nossa proposta é trazer um modelo de SLSM-M com tempos **aleatórios** em cada domínio, e generalizar resultados da literatura de SLSM (que aqui trazemos resumidamente nos Teoremas 1 e 2), abrindo novas possibilidades de aplicações.

Os SLSM-M consistem de um SLSM-C cuja trajetória $\mathbf{x}(t)$ sofre descontinuidades em tempos aleatórios $\{t_1, t_2, \dots\}$, e as descontinuidades $\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}(t_r^-)$ são descritas por um SLSM-D com um número aleatório T_r de passos em tempo discreto. Os tempos $\{t_r \in [0, \infty)\}$ são “tempos de chegada” de um *processo de Poisson* homogêneo com taxa σ e os tempos $\{T_r \in \{0, 1, \dots, \hat{T} - 1\}\}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com uma distribuição arbitrária μ conhecida.

Estabilidade

Diversos trabalhos sobre SLSM estudam estabilidade, isto é, a condição sob a qual o estado do sistema converge em média para um ponto de equilíbrio, como Swarder (1969), Yaz (1988), Feng *et al.* (1992), Zhao, Kang e Zhao (2019), Costa, Fragoso e Todorov (2013), Costa, Fragoso e Marques (2005), Romero, Ribeiro e Costa (2023) e muitos outros. Diferentes noções de estabilidade são definidas na literatura, vide Zhao, Kang e Zhao (2019), dentre as quais a estabilidade em média quadrática, que estudaremos.

Muitos problemas práticos se beneficiam da estabilidade: deseja-se que um motor mantenha sua velocidade angular constante (VARGAS; COSTA; DO VAL, 2013); deseja-se que um levitador mantenha uma massa em uma posição constante (OLIVEIRA; COSTA; VARGAS, 1999); deseja-se equilibrar um pêndulo invertido (vamos trazê-lo no Exemplo 2). Para tais problemas, se o sistema é instável, uma solução adequada é um controle que o estabilize (controle estabilizante). Esse tipo de problema é conhecido na literatura como *regulador*, seu objetivo penaliza o afastamento do ponto de equilíbrio. O problema de *rastreamento de alvos dinâmicos* (*target tracking*), que não abordaremos, penaliza o afastamento de uma trajetória predefinida (BUENO *et al.*, 2023), e também é um problema que se beneficia de estabilidade.

Nesta tese, na seção de conceitos iniciais sobre sistemas dinâmicos, introduzimos o conceito de convergência da solução de um sistema de equações diferenciais/de diferenças para uma solução de equilíbrio na Seção 2.1. Na Definição 3 apresentamos a estabilidade em média quadrática para os SLSM-C e na Definição 4 para SLSM-D. No intuito de adequar esse mesmo conceito para os SLSM-M, precisamos fazer uma pequena modificação, e apresentamos

na [Definição 8](#). Uma definição equivalente a esta última, para os SLSM-M, é apresentada na [Definição 9](#), conforme mostrado no [Teorema 5](#).

Analisar a estabilidade de um sistema de tempo misto como este não é trivial, mesmo com os resultados da literatura de SLSM, pois temos que lidar com uma composição/encadeamento aleatória de operadores de tempo contínuo e tempo discreto, e precisamos também levar em consideração as cadeias de Markov a tempo contínuo e discreto.

A literatura tradicionalmente faz análise de estabilidade dos SLSM usando o segundo momento da trajetória $\mathbf{x}(t)$, mas devido à complexidade dos SLSM-M, não conseguimos fazê-la “diretamente”. Uma versão do segundo momento de $\mathbf{x}(t)$ condicionada aos tempos $\{\{t_r\}, \{T_r\}, r = 1, 2, \dots\}$ foi necessária para chegarmos mais próximo de obter resultados, aproveitando teoria da literatura de SLSM, mas mesmo com esta versão não conseguimos desenvolver resultados de estabilidade, sendo necessária uma terceira versão, agora condicionada aos tempos $\{t_r\}$, que, finalmente, nos deu resultado. Essas três versões do segundo momento de $\mathbf{x}(t)$ estão descritas em detalhes na [Seção 4.1](#).

Para dar uma visão geral sobre a análise de estabilidade do SLSM-M, trazemos brevemente os principais resultados do [Capítulo 3](#). A estabilidade em média quadrática do SLSM-M pode ser verificada inspecionando autovalores de duas matrizes \mathbf{A} e \mathcal{T} . Sendo \mathbf{A} e \mathbf{A}_d operadores bem conhecidos da literatura de SLSM-C e SLSM-D, respectivamente (trazidos nos Teoremas [1](#) e [2](#)), verificar a estabilidade do SLSM-M equivale a verificar uma condição para existência de \mathcal{T} ,

$$\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma,$$

e a condição de estabilidade de \mathcal{T} (operador em tempo discreto),

$$\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1,$$

em que σ é parâmetro da distribuição dos t_r e $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_{\hat{T}}]$ é a distribuição dos T_r , e

$$\mathcal{T} = -\sigma \left(\sum_{j=0}^{\hat{T}-1} \mu_{j+1} \mathbf{A}_d^j \right) (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I})^{-1},$$

é o operador que representa a média dos operadores de segundo momento que são compostos/encadeados no SLSM-M, condicionados ao processo $\{t_r\}$ e tomados em média.

Possíveis aplicações de SLSM-M podem incluir as seguintes ideias. (I) Um sistema com controle em tempo discreto, com falhas de atuação, o que resulta em uma dinâmica não controlada em tempo contínuo durante algum tempo, quando então volta a atuar normalmente em tempo discreto, após recuperar-se da falha (trazemos essa ideia no [Exemplo 2](#)). (II) Sistemas que operam durante longos períodos fazendo pequenas correções da trajetória, o que pode ser compreendido como um sistema controlado em tempo discreto, com um tempo de amostragem grande; mas que em determinadas circunstâncias mais críticas, o controle precise atuar continuamente. (III) O sistema é controlado em tempo contínuo, mas sofre falhas que

resultam em descontinuidades da trajetória. (IV) O sistema é controlado em tempo contínuo, com reinicializações aleatórias.

Ilustramos as ideias de (I) a (IV) nas seguintes aplicações. (I) um levitador magnético controlado em tempo discreto com algumas falhas aleatórias de controle (tempo contínuo); (II) uma sonda espacial precisa corrigir sua trajetória a cada 5 minutos (tempo discreto), mas precisa desviar de asteroides ou outros obstáculos, e portanto necessita de correções em tempo contínuo, digamos, a cada milissegundo; (III) um motor controlado em tempo contínuo com defeito em suas escovas tem alguns “solavancos” na tensão em seus terminais e consequentemente na velocidade (descontinuidade); outra ilustração seria com respeito a uma carga colocada abruptamente, causando uma descontinuidade na velocidade; (IV) em uma aplicação financeira, que flutua continuamente, são feitas retiradas em instantes aleatórios e o montante é reinicializado sempre com o mesmo valor (tempo discreto); neste exemplo, podemos criar variáveis de estado artificiais para funcionar como uma memória e construir parâmetros adequados para que estas memórias substituam as variáveis de interesse durante as descontinuidades.

Sobre H_2 de SLSM

O SLSM também pode ter uma *saída*, uma função $y(t) = g(x(t), \cdot)$ ou $y(k) = g(x(k), \cdot)$, para o caso de tempo contínuo e discreto respectivamente, que nos permite definir critérios objetivos para cálculo de controle, por exemplo. Com uma saída, podemos vincular um custo e desenvolver um controle que o minimize (controle ótimo). Alguns dos critérios bem conhecidos da literatura, nesse sentido, para tempo discreto, são: *Regulador Linear Quadrático (LQR)*, um controle que minimiza $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y(k)\|^2)$ ($\mathbb{E}(\cdot)$ indica valor esperado), quando não há ruído no sistema (mas pode ser adaptado para incluir ruído); *custo médio a longo prazo (long run average cost)*, um critério que minimiza o limite da média móvel $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{E}(\|y(k)\|^2)$, adequado para o caso com ruído aditivo em horizonte de tempo infinito; e *controle H_2* , que minimiza a norma H_2 do sistema, que também é um critério em termos de $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y(k)\|^2)$, para horizonte infinito. Este último critério será discutido outras vezes nesta tese. O Capítulo 4 de [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#) discute esses três critérios com mais detalhes.

O índice, custo, ou norma H_2 é bem conhecido na literatura de sistemas lineares (vamos usar essas nomenclaturas indistintamente ao longo da tese). É uma função de custo quadrática associada à saída do sistema em resposta a uma entrada específica, em um horizonte de tempo infinito. Explicamos o H_2 de um SLSM abaixo.

Considere um sistema dinâmico na variável $x(t) \in \mathbb{R}^n$, chamada *estado do sistema*¹, e considere também a variável $y(t) = y(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y}$, chamada de *saída do sistema* (no nosso trabalho, $y(t)$ será uma função linear de $x(t)$). Quando o sistema é estável ou estabilizado por

¹ Sendo mais preciso, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é apenas a componente contínua do estado, que é $(x(t), \theta(t))$. Há também a cadeia de Markov $\theta(t) \in \mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$, que é a componente discreta.

algun controle, temos que $x(t)$ tende a um ponto de equilíbrio², em média; em um sistema de coordenadas adequadas, esse ponto de equilíbrio é a origem, isto é, o zero. O índice H_2 , a grosso modo, é obtido da seguinte maneira. Com $x(0) = 0$, ponto de equilíbrio, faz-se uma perturbação com um impulso unitário no início do horizonte de tempo. Para o instante t , calcula-se a norma quadrática da saída, em média, isto é, $s(t) = \mathbb{E}(\|y(t)\|^2)$. O índice H_2 é obtido ao se **integrar** $s(t)$ para todo tempo contínuo $t \geq 0$ (**somar**, para o caso de tempo discreto).

Há numerosos trabalhos que utilizam H_2 como índice de desempenho de controle, dentre os quais destacamos [Stadtman e Costa \(2017\)](#), que estudam um SLSM de tempo contínuo com uma cadeia de Markov oculta (discutiremos cadeia oculta brevemente na [Seção 2.3](#)) e trazem uma solução de controle minimizando um limitante superior da norma H_2 (a que referem *custo garantido*) via um problema com restrições de *Linear Matrix Inequalities (LMI)* (desigualdades lineares matriciais), e [Costa, Fragoso e Todorov \(2015\)](#), que também fazem o mesmo, mas para um modelo de tempo discreto.

Devido à natureza variante no tempo da saída de um SLSM com respeito ao instante em que se aplica o impulso unitário (de forma que a norma H_2 alteraria se aplicássemos o impulso em outro instante diferente de $t = 0$), nosso grupo de pesquisa desenvolveu variações da norma H_2 , incluindo a que chamamos de H_{2rti} , que é invariante no tempo. A definição de H_{2rti} , fórmulas para calculá-la e um método para controle H_{2rti} baseado em LMI são descritos em [Romero, Ribeiro e Costa \(2023\)](#). Em continuidade deste trabalho, reportamos em [Ribeiro, Romero e Costa \(2023\)](#) um estudo estatístico comparando o novo índice H_{2rti} com o H_2 . Nele, concluímos que H_{2rti} é um índice com desempenho notavelmente melhor para obter controles quando a cadeia de Markov é periódica, e tem desempenho semelhante ao H_2 quando a cadeia é ergódica. O fato de H_{2rti} ser melhor para SLSM sugere fortemente que seja melhor também para SLSM-M, mas nesta tese não chegamos a propor H_{2rti} para SLSM-M; este seria um interessante tema para continuação da pesquisa.

Apesar de vários textos da literatura estudarem a norma H_2 , ainda não estava claro em que sentido é uma norma para SLSM-D, isto é, em que sentido satisfaz os critérios da definição de norma, pois, por exemplo, para sistemas LTI, H_2 é a norma da resposta impulsiva, resultado há muito conhecido, como se pode encontrar, por exemplo, no Capítulo 4 de [Zhou e Doyle \(1998\)](#). Com respeito aos sistemas com saltos (markovianos ou não) em tempo discreto, nosso grupo mostrou em [Ribeiro et al. \(2023\)](#) que H_2 é a norma de Frobenius da resposta impulsiva do sistema, entre outros resultados. Detalhamos mais na [Seção 5.1](#).

No [Capítulo 5](#), definimos H_2 para SLSM-M, trazemos uma fórmula para calculá-la no [Teorema 12](#) e ilustramos a teoria de SLSM-M e H_2 com um exemplo numérico ([Exemplo 9](#)).

² Existem diferentes noções de estabilidade, adequadas a diferentes versões do sistema. Aqui nos referimos a uma estabilidade para um sistema homogêneo, isto é, sem termos forçantes, ruídos ou quaisquer formas de perturbação. Sistemas estáveis como esse têm ponto de equilíbrio estável.

1.1 Publicações

Durante o doutoramento, publicamos 3 artigos e temos um submetido. Os principais resultados do artigo 1 da lista abaixo, a respeito de H_2 para sistemas com saltos (markovianos ou não) em tempo discreto, são trazidos na [Seção 5.1](#). Os artigos 2 e 3 tratam dos resultados sobre norma H_2 e H_{2rti} , e não contêm material reportado nesta tese. O artigo 4 é o que propõe o modelo dos SLSM-M e desenvolve a condição de estabilidade propostos nesta tese. Quanto ao resultado da tese referente a H_2 para SLSM-M, da [Seção 5.2](#), pretendemos estendê-lo/adaptá-lo para H_{2rti} e oportunamente submeter para publicação.

(1. Publicado) [Ribeiro et al. \(2023\)](#)

RIBEIRO, J. R.; ROMERO, L. H.; COSTA, E. F.; TODOROV, M. G. Comments on the H_2 norm of discrete-time stochastic jump parameter linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, v. 7, p. 1470–1475, 2023. (DOI [10.1109/LCSYS.2023.3268018](#))

(2. Publicado) [Romero, Ribeiro e Costa \(2023\)](#)

ROMERO, L. H.; RIBEIRO, J. R.; COSTA, E. F. On the H_2 control of hidden Markov jump linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, v. 7, p. 1315–1320, 2023. (DOI [10.1109/LCSYS.2023.3236892](#))

(3. Publicado) [Ribeiro, Romero e Costa \(2023\)](#)

RIBEIRO, J. R.; ROMERO, L. H.; COSTA, E. F. Sobre um novo índice de desempenho tipo H_2 para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto e cadeia de Markov escondida. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2023. v. 10, n. 1, p. 101001–101006. (DOI [10.5540/03.2023.010.01.0100](#))

(4. Submetido)

RIBEIRO, J.R.; COSTA, E.F.; DRAGAN, V. **A class of stochastic linear systems with jumps in the parameters and time domains**. Reportamos o modelo de tempo misto e alguns resultados desta tese ao *Systems & Control Letters*.

1.2 Contribuições e estrutura da tese

As principais contribuições desta tese são:

- (i) trazer uma proposta de modelagem de um SLSM-M ([Equação 3.1](#)–[Equação 3.7](#));

- (ii) uma definição adequada de estabilidade em média quadrática para SLSM-M ([Definição 8](#));
- (iii) uma condição necessária e suficiente para estabilidade desse tipo de sistema, por um critério facilmente verificável por inspeção simples dos autovalores de duas matrizes A e \mathcal{T} ([Teorema 4](#));
- (iv) apresentar os SLSM-C e SLSM-D como casos particulares do SLSM-M;
- (v) definição de uma noção de norma H_2 ([Definição 10](#));
- (vi) uma fórmula facilmente computável para calcular H_2 ([Teorema 12](#)).

No [Capítulo 2](#) trazemos um material de suporte sobre conceitos preliminares do nosso estudo com uma proposta didática, de forma bastante breve, abordando os temas descritos anteriormente: cadeia de Markov a tempo discreto e contínuo, sistemas dinâmicos determinísticos (sem saltos) a tempo contínuo e discreto, controle, saída, estabilidade em média quadrática, índice H_2 e SLSM a tempo contínuo e discreto. O leitor que tiver familiaridade com esses conceitos pode omiti-los de sua leitura sem prejuízo. No [Capítulo 3](#) definimos a notação, as hipóteses de trabalho e trazemos o modelo de tempo misto. No [Capítulo 4](#) desenvolvemos os resultados de estabilidade com uma análise de segundo momento. No [Capítulo 5](#) abordamos a norma H_2 para o SLSM-D, resumindo alguns resultados de pesquisa já publicados para Sistemas Lineares com Saltos a tempo discreto, e definimos a norma H_2 para o SLSM-M. No [Capítulo 6](#) fazemos nossas considerações finais e apresentamos sugestões de trabalhos futuros.

CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo traremos um material de suporte, cuja leitura pode ser omitida, caso o leitor já tenha domínio, sem prejuízo à compreensão do restante da tese. A proposta é trazer um texto didático a um leitor que não tenha familiaridade com SLSM. Definiremos a notação e resultados principais a partir do próximo capítulo.

2.1 Sistemas dinâmicos sem saltos nos parâmetros

Sistemas dinâmicos usualmente têm a grandeza *tempo* como variável independente. Muitas vezes são representados por equações diferenciais, quando se tratar de um domínio de tempo contínuo, ou equações de diferenças, quando se tratar de domínio discreto do tempo. No presente texto, estaremos interessados em sistemas dinâmicos lineares com coeficientes constantes e conhecidos. Mais especificamente, trataremos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), lineares, de primeira ordem, já que podemos reduzir a ordem de qualquer sistema de equações diferenciais lineares de ordem p com q variáveis para um sistema de ordem 1 com pq variáveis, simplesmente fazendo uma mudança de variáveis adequada¹. No restante da tese, para dar mais ênfase aos domínios contínuo e discreto, usaremos notações como $x(t)$ para tempo contínuo e $x_d(k)$, sempre com subscrito “d”, para tempo discreto. Quando não houver ambiguidade, notações como $x(\cdot)$ serão utilizadas para referir-se a ambos os domínios.

Tempo contínuo

Vejamos agora um Problema de Valor Inicial em Tempo Contínuo (PVI-C), expresso em um sistema de n equações diferenciais. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz de taxas conhecida,

¹ No exemplo do pêndulo invertido constante no [Apêndice A](#), mostramos como fazer uma redução de ordem.

$x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$, e $x_0, t_0 \geq 0$ dados. Esses parâmetros definem o seguinte PVI-C **homogêneo**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t+t_0) = Ax(t+t_0), & t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Conhecemos a equação diferencial de $x(t)$, e precisamos resolvê-la para conseguirmos calcular $x(s)$ para qualquer tempo $s \geq t_0$. Integrando a EDO, a solução geral é dada por

$$x(t+t_0) = e^{A(t+t_0)}c, \quad (2.2)$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante ainda a determinar. Utilizando (2.2) e a informação de valor inicial dada em (2.1), temos que

$$x(t_0) = x_0 = e^{At_0}c \implies c = e^{-At_0}x_0.$$

Substituindo c em (2.2), temos que a solução do PVI-C (2.1) é $x(t+t_0) = e^{A(t+t_0)-At_0}x_0$, isto é,

$$x(t+t_0) = e^{At}x_0, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.3)$$

Nesse PVI-C, conhecendo-se o valor de $x(t_0) = x_0$, podemos calcular o valor de $x(t+t_0)$ fazendo uma multiplicação pela exponencial de At , em que A é a **matriz de taxas** da EDO.

Temos uma exponenciação com uma matriz no expoente, o que pode parecer estranho em uma primeira vista. No entanto, conhecemos a expansão em série de Maclaurin da função exponencial, a qual é estendida para expoentes matriciais de forma bastante natural²:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \frac{A^4 t^4}{24} + \frac{A^5 t^5}{120} + \dots$$

Quando todos os autovalores de A estão à esquerda da origem no plano complexo, isto é, $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < 0$, dizemos que A é uma matriz **Hurwitz estável**, ou simplesmente **estável** (usamos a notação $\text{real}(\cdot)$ para a parte real de um número complexo e $\text{eig}(A)$ para denotar o espectro de A). Vide Figura 2. Quando a matriz A é Hurwitz estável, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0A.$$

(O limite acima pode ser encontrado no exercício 24.4(b) de Trefethen e Bau III (1997)). Este limite significa que a solução do PVI-C (2.1) converge para zero, um ponto de equilíbrio estável. Portanto, quando A é Hurwitz estável, temos que existe $\beta > 0$ de modo que

$$\|x(t+t_0)\| = \|e^{At}x_0\| \leq \beta \|x_0\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.4)$$

e além disso, temos a convergência de $x(t)$ para zero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t+t_0)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = \|0x_0\| = 0.$$

² A **exponencial matricial** e^{At} é feita no Matlab/Octave/Scilab com o comando **expm(A * t)**.

Tempo discreto

Vejamos um Problema de Valor Inicial em Tempo Discreto (PVI-D), expresso em uma equação de diferenças. Considere $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz conhecida e $x_{d0}, x_d(k) \in \mathbb{R}^n$, com k_0 um inteiro não negativo e x_{d0} dado. Esses parâmetros definem o PVI-D **homogêneo**:

$$\begin{cases} x_d(k+1+k_0) = A_d x_d(k+k_0), & k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ x_d(k_0) = x_{d0}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nesse PVI-D, conhecendo-se o valor de $x_d(k_0) = x_{d0}$, podemos calcular o valor de $x_d(k+1+k_0)$ simplesmente fazendo uma multiplicação por A_d , **matriz de coeficientes**, de forma recursiva, obtendo assim a solução do PVI-D $x_d(k+1+k_0) = A_d^{k+1} x_d(k_0)$, isto é,

$$x_d(k+1+k_0) = A_d^{k+1} x_{d0}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.6)$$

Quando todos os autovalores de A_d estão dentro do disco unitário do plano complexo, ou seja, $\max(|\text{eig}(A_d)|) < 1$, dizemos que a matriz A_d é **estável** (na notação, $|\cdot|$ significa o módulo de um número complexo). Vide [Figura 2](#). Quando a matriz A_d é estável, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_d^k = 0A_d.$$

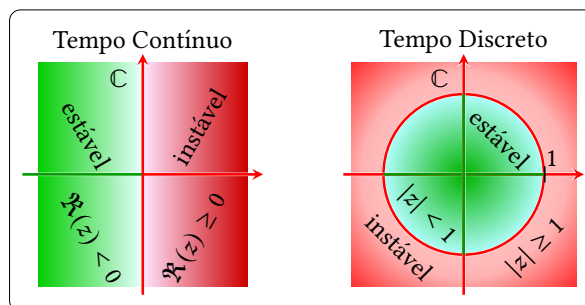
(O limite acima pode ser encontrado no exercício 24.4(a) de [Trefethen e Bau III \(1997\)](#)) Este limite significa que a solução do PVI-D (2.5) converge para zero, um ponto de equilíbrio estável. Portanto, quando A_d é estável, temos que existe $\beta > 0$ de modo que

$$\|x_d(k+k_0+1)\| = \|A_d^{k+1} x_{d0}\| \leq \beta \|x_{d0}\|, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

e além disso, temos a convergência de $x_d(k)$ para zero:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_d(k+1+k_0)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_d^{k+1} x_{d0}\| = \|0x_{d0}\| = 0.$$

Figura 2 – Regiões de estabilidade para os PVIs (2.1) e (2.5), conforme autovalores da respectiva matriz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Entrada de controle, exógena e saída do sistema

Considerando um sistema dinâmico como no PVI-C (2.1) ou no PVI-D (2.5), podemos fazer intervenções no sistema de modo a modificar seu comportamento e cumprir um objetivo. Por exemplo, podemos intervir na aceleração ou frenagem de um veículo; podemos manter um motor em sua velocidade angular de equilíbrio ao aplicar determinada tensão em seus terminais; podemos fazer um braço robótico descrever uma trajetória controlando a tensão em seus motores, etc. Para efetuar a intervenção, adicionamos um novo termo ao modelo para injetar um sinal de controle $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ para o PVI-C ou $u_d(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ para o PVI-D. Escrevemos uma forma bastante genérica:

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t, \{u(s), s \in [t_0, t)\}, \{x(s), s \in [t_0, t]\}), & t \geq t_0, \\ u_d(k) &= f_d(k, u_d(k_0), \dots, u_d(k-1), x_d(k_0), \dots, x_d(k)), & k \geq k_0, \end{aligned}$$

isto é, $u(\cdot)$, ou $u_d(\cdot)$, é uma função que, potencialmente, pode depender de todas as informações disponíveis do sistema³. Nos casos em que $u(t)$ ($u_d(k)$) depende de $x(t)$ ($x_d(k)$), dizemos que o controle é uma *realimentação de estado*. O modelo com entrada de controle tem um termo $Bu(t)$ ou $B_d u_d(k)$ adicionado, com $B, B_d \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$:

$$\frac{d}{dt}x(t+t_0) = Ax(t+t_0) + Bu(t+t_0), \quad (\text{no caso do PVI-C}), \quad (2.7)$$

$$x_d(k+1+k_0) = A_d x_d(k+k_0) + B_d u_d(k+k_0), \quad (\text{no caso do PVI-D}). \quad (2.8)$$

Quando adotamos o controle $u(\cdot)$ como uma realimentação *linear* de estado⁴, temos: $u(t) = Kx(t)$ ou $u_d(k) = K_d x_d(k)$, conforme o caso, em que $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ é chamado **ganho** do controle $u(t)$ do PVI-C e $K_d \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ é o **ganho** do controle $u_d(k)$ do PVI-D. Com essas expressões, podemos reescrever as equações (2.7)–(2.8).

$$\frac{d}{dt}x(t+t_0) = (A+BK)x(t+t_0), \quad (\text{no caso do PVI-C}), \quad (2.9)$$

$$x_d(k+1+k_0) = (A_d + B_d K_d)x_d(k+k_0), \quad (\text{no caso do PVI-D}).$$

Quando o ganho K (ou K_d) é nulo, dizemos que o sistema dinâmico em questão é **sem controle** ou **de malha aberta** (*open loop*), e quando o ganho é não nulo, dizemos que o sistema é **controlado** ou **de malha fechada** (*closed loop*); $A+BK$ e $A_d + B_d K_d$ são **matrizes de malha fechada**, funções do ganho; e A, A_d são **matrizes de malha aberta**.

Note que, quando temos uma realimentação linear de estado como acima, o sistema de malha fechada (2.9) tem a mesma forma do PVI-C com matriz de taxa $A+BK$, e do PVI-D com matriz de coeficientes $A_d + B_d K_d$, e assim, como critério de estabilidade, precisamos verificar se

³ Inclusive, pode depender da informação da saída $y(t)$ (ou $y_d(k)$). Vide Figura 3.

⁴ O controle $u(\cdot)$ como realimentação linear de estado é comum na estabilização de sistemas dinâmicos lineares que não tenham termo afim, como nos casos sem entrada exógena, por exemplo. No entanto, isso não nos impede de adotar outras formas de controle, como formas não lineares, por exemplo.

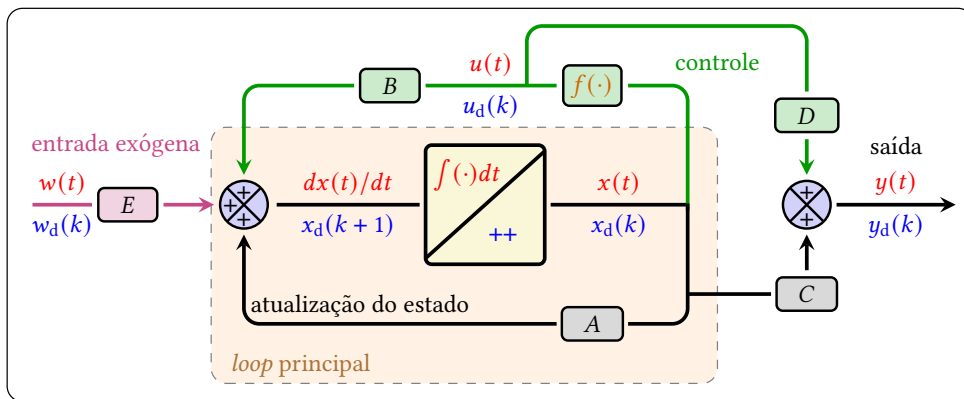
essas matrizes de malha fechada são estáveis nos seus contextos. Percebe-se da [Equação 2.9](#) que, dados A e B , um ganho estabilizante K é aquele em que

$$\max(\text{real}(\text{eig}(A + BK))) < 0,$$

e dados A_d e B_d , um ganho estabilizante K_d é aquele em que

$$\max(|\text{eig}(A_d + B_d K_d)|) < 1.$$

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema com realimentação linear de estado. Em vermelho e azul estão os modelos a tempo contínuo e discreto respectivamente. Os circuitos em verde e magenta são respectivos à adição de controle e entrada exógena ao modelo. Também ilustramos a saída do sistema.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Flutuações de temperatura, atrito ou outros agentes externos podem perturbar a dinâmica do sistema. O agente externo pode também ser uma função $w(\cdot)$ escolhida para o projeto, a depender da aplicação, ou ser um ruído, que adicionará um grau de incerteza na trajetória de $x(\cdot)$. Em casos assim, podemos adicionar um termo de entrada exógena $Ew(t)$ (ou $E_d w_d(k)$) para modelá-la, em que E, E_d são matrizes conhecidas e $w(\cdot)$ é a entrada exógena.

Podemos ainda adicionar uma função/processo associada à trajetória do sistema, aqui chamada de *saída do sistema*, e denotamos por $y(t)$ (ou $y_d(k)$). Essa saída pode ser uma função de $x(t)$ ($x_d(k)$) e, se o sistema for controlado, pode também ser função do controle. Na [Figura 3](#) representamos os seguintes sistemas dinâmicos (na figura, suprimimos “d” das matrizes A_d, B_d, C_d, D_d, E_d e de $f_d(\cdot)$):

$$\begin{cases} dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ u(t) = f(x(t), \cdot); \end{cases} \quad \begin{cases} x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k) + E_d w_d(k), \\ y_d(k) = C_d x_d(k) + D_d u_d(k), \\ u_d(k) = f_d(x_d(k), \cdot). \end{cases}$$

2.2 Cadeias de Markov

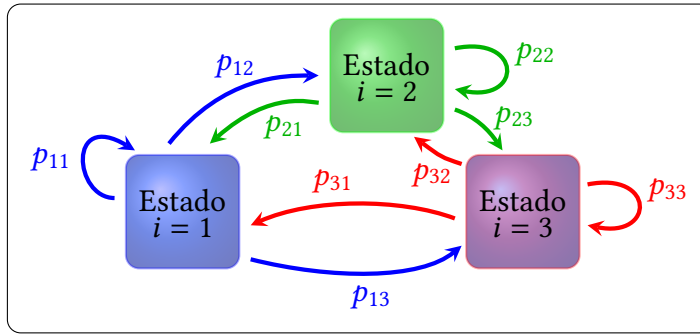
As cadeias de Markov empregadas nos modelos de SLSM são processos estocásticos em um espaço de estados discreto. São bastante simples, versáteis, e fáceis de simular computa-

cionalmente. Nos SLSM, elas modelam os saltos nos parâmetros do sistema. Vamos abordar brevemente cadeias de Markov homogêneas a tempo discreto e contínuo, em um espaço de estados finito, dando uma definição e a ideia básica para simulação.

Com relação à notação usada doravante, considere o espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}(\cdot))$, munido do operador esperança $\mathbb{E}(\cdot)$.

Definição 1 (Cadeia de Markov a tempo discreto). Um processo estocástico $\{\theta_d(k) \in \mathbf{M}, k \geq 0\}$, com espaço de estados $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$, é uma cadeia de Markov homogênea a tempo discreto quando $\mathcal{P}(\theta_d(k+1) = i \mid \theta_d(k), \theta_d(k-1), \dots, \theta_d(0)) = \mathcal{P}(\theta_d(k+1) = i \mid \theta_d(k))$ para todo $k \geq 0$.

Figura 4 – Esquema de uma cadeia de Markov com $M = 3$ estados e as probabilidades de transição p_{ij} .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Denotaremos as probabilidades de transição da cadeia por

$$\mathcal{P}(\theta_d(k+1) = j \mid \theta_d(k) = i) = p_{ij} \in [0, 1], \quad \forall i, j \in \mathbf{M},$$

que constituem a matriz $\mathbf{P} = [p_{ij}] \in [0, 1]^{M \times M}$. A matriz \mathbf{P} é chamada **matriz de probabilidade de transição** da cadeia. Ela é uma matriz $M \times M$ tal que $\sum_{j \in \mathbf{M}} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathbf{M}$ (vide a Figura 4). As probabilidades p_{ij} referem-se à cadeia saltar do estado i para o estado j . Também temos a distribuição de probabilidade da cadeia no instante k , aqui denotada por

$$\mathcal{P}(\theta_d(k) = i) = \pi_i(k) \in [0, 1], \quad \forall i \in \mathbf{M}.$$

Considerando-se a distribuição $\pi(k) = [\pi_1(k), \dots, \pi_M(k)] \in [0, 1]^{1 \times M}$ da cadeia no instante $k \geq 0$, isto é, uma matriz-linha $1 \times M$ com entradas $\pi_i(k) \in [0, 1] \quad \forall i \in \mathbf{M}$, de modo que $\sum_{i \in \mathbf{M}} \pi_i(k) = 1$, temos a bem conhecida equação de Chapman-Kolmogorov para calcular a distribuição ao longo de um horizonte de tempo:

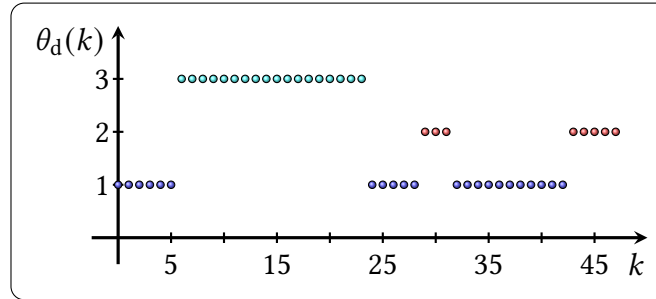
$$\pi(k+1) = \pi(k) \mathbf{P} \implies \pi(k+s) = \pi(s) \mathbf{P}^k.$$

A equação acima é resultado imediato do Teorema de Probabilidade Total (TPT), calculando-se por simples multiplicação matricial:

$$\begin{aligned}\pi_j(k+1) &= \mathcal{P}(\theta_d(k+1) = j) \\ &\stackrel{TPT}{=} \sum_{i \in \mathbf{M}} \mathcal{P}(\theta_d(k+1) = j \mid \theta_d(k) = i) \mathcal{P}(\theta_d(k) = i) \\ &= \sum_{i \in \mathbf{M}} p_{ij} \pi_i(k) \implies \pi(k+1) = \pi(k) \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Na [Figura 5](#) ilustramos uma realização de uma cadeia de Markov a tempo discreto com $M = 3$. Uma apresentação detalhada de cadeias discretas pode ser encontrada em [Ibe \(2013b\)](#).

Figura 5 – Ilustração de uma realização de cadeia de Markov a tempo discreto com $M = 3$ estados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2 (Cadeia de Markov a tempo contínuo). Um processo estocástico $\{\theta(t) \in \mathbf{M}, t \geq 0\}$, com espaço de estados $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$, é uma cadeia de Markov homogênea a tempo contínuo quando $\mathcal{P}(\theta(r+s) \mid \{\theta(t) : t \in [0, r]\}) = \mathcal{P}(\theta(r+s) \mid \theta(r))$ para todo $r, s \geq 0$.

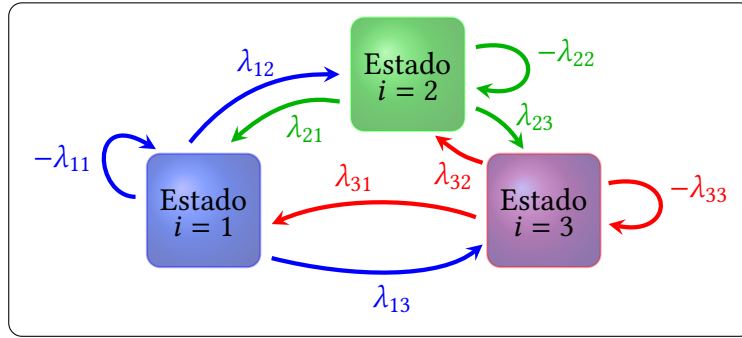
É interessante notar que, quando a cadeia salta de um estado para outro, no caso da cadeia a tempo contínuo, sua trajetória é uma curva constante, com descontinuidades em cada salto, sendo contínua à direita dos saltos (funções assim são chamadas *càdlàg*, do francês “continue à droite, limite à gauche” – contínua à direita, com limite à esquerda). O tempo de permanência em um determinado estado é um tempo aleatório com distribuição exponencial.

Para explicar o modelo de tempo contínuo, assuma as seguintes hipóteses: (i) uma vez que a cadeia de Markov não sai de \mathbf{M} , temos um sistema fechado no sentido em que todas as possibilidades de salto estão em \mathbf{M} . (ii) a taxa de saltos de i para j é proporcional à probabilidade de estar em i . Com (i)–(ii), obtemos um sistema de equações diferenciais da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\theta(t) = j) &= \lambda_{jj} \mathcal{P}(\theta(t) = j) + \sum_{i \in \mathbf{M}, i \neq j} \lambda_{ij} \mathcal{P}(\theta(t) = i), \quad \forall j \in \mathbf{M}, \\ \lambda_{jj} &= - \sum_{i \in \mathbf{M}, i \neq j} \lambda_{ij}, \quad \forall j \in \mathbf{M}, \\ \lambda_{ij} &\in [0, \infty) \quad \forall i \neq j, \quad \lambda_{jj} \in (-\infty, 0] \quad \forall i, j \in \mathbf{M}. \end{aligned} \right.$$

Estas constantes de proporcionalidade $\lambda_{ij} \geq 0, i \neq j$, são as taxas de salto do estado i para o estado j . Como o sistema é fechado, a soma das taxas de saída do estado i deve se igual à soma das taxas de chegada no estado i , de modo que “não se crie, nem se destrua probabilidade” (conservação de probabilidade), e no geral, a soma seja zero, o que explica o sinal negativo, vide [Figura 6](#). O tempo de permanência $T_{i,r}$ da cadeia no estado i após o r -ésimo salto, $r = 0, 1, \dots$, é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_{T_{i,r}}(s|\lambda_{ii}) = -\lambda_{ii}e^{\lambda_{ii}s}\mathbb{1}_{\{s>0\}}$, em que $-\lambda_{ii}$ é a taxa de saltos “do estado i para si próprio” ([Figura 7](#)). Sua média é $\mathbb{E}(T_{i,r}) = -1/\lambda_{ii}$.

Figura 6 – Esquema de uma cadeia de Markov com $M = 3$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos colocar essas taxas λ_{ij} em uma matriz $\Lambda = [\lambda_{ij}]$, que chamaremos **matriz de taxas de transição** da cadeia de Markov: na diagonal principal de Λ , os valores são não-positivos e fora da diagonal, os valores são não-negativos, com $\sum_{j \in \mathbf{M}} \lambda_{ij} = 0$ para cada $i \in \mathbf{M}$.

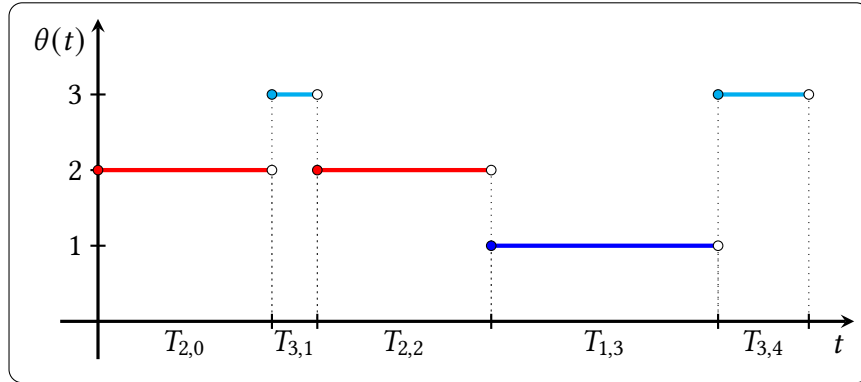
Simular uma cadeia de Markov a tempo contínuo é simples: precisamos determinar o tempo de permanência no estado i e em seguida determinar para qual estado a cadeia irá saltar após o término desse tempo. Para o primeiro caso, basta “sortear” um tempo exponencial com parâmetro $-\lambda_{ii}$ ⁵, e no segundo caso, criamos $\tilde{\Lambda}$, uma matriz de distribuições proporcionais às taxas de salto:

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda_{ij}}{-\lambda_{ii}} \mathbb{1}_{\{i \neq j\}}, & \lambda_{ii} \neq 0, \quad i, j \in \mathbf{M}, \\ \mathbb{1}_{\{i=j\}}, & \lambda_{ii} = 0, \quad i, j \in \mathbf{M}, \end{cases}$$

em que $\mathbb{1}_{\{E\}} \in \{0, 1\}$ é a *função indicadora* do evento E , que vale 1 quando E ocorre, e 0 caso contrário, e $\tilde{\Lambda}_{ij}$ é a probabilidade de saltar para j a partir de i . Ilustramos uma realização da cadeia a tempo contínuo na [Figura 7](#).

⁵ Conseguimos facilmente simular uma variável aleatória V com distribuição $f_V(t|\sigma) = \sigma e^{-\sigma t} \mathbb{1}_{\{t>0\}}$ com base em uma variável aleatória U com distribuição uniforme $f_U(t) = \mathbb{1}_{\{t \in [0,1]\}}$, bastando notar que a função de probabilidade (acumulada) é $F_V(t|\sigma) = 1 - e^{-\sigma t}$ e assim, temos a relação $U = 1 - e^{-\sigma V} \iff V = -\ln(1 - U)/\sigma$. No Matlab/Octave/Scilab, podemos fazer `V = -log(1 - rand)/sigma` ou usar `exprnd(1/sigma)`.

Figura 7 – Ilustração de uma realização de cadeia de Markov a tempo contínuo com três estados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma apresentação detalhada sobre cadeia de Markov a tempo contínuo pode ser encontrada em [Ibe \(2013c\)](#).

2.3 Sistemas Lineares com Saltos Markovianos

Agora, apresentamos as três variantes mais comuns de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos para o caso de domínio de tempo contínuo: um SLSM homogêneo, a variante mais simples, outra com adição de controle e outra com adição de um termo de entrada exógena. O caso de tempo discreto é análogo. As três variantes estão ilustradas na [Figura 9](#) para ambos: tempo discreto e tempo contínuo.

Tempo contínuo

Considere um conjunto $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$ finito de estados de uma cadeia de Markov $\theta = \{\theta(t) \in \mathbf{M}, t \geq 0\}$ a tempo contínuo, com matriz de taxa de transição Λ e distribuição inicial $\pi(0)$, e um conjunto de M matrizes reais conhecidas $A = (A_1, \dots, A_M)$, com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i \in \mathbf{M}$. Um Sistema Linear com Saltos Markovianos a tempo contínuo (SLSM-C) com esses parâmetros é um sistema dinâmico estocástico da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_{\theta(t)}x(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, & \theta(0) \sim \pi(0) \end{cases} \quad (2.10)$$

(este é o modelo apresentado no *loop* principal ilustrado na [Figura 9](#)). A esse modelo de SLSM-C, chamamos de SLSM-C *homogêneo*.

Tempo discreto

Considere um conjunto $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$ finito de estados de uma cadeia de Markov $\theta_d = \{\theta_d(k) \in \mathbf{M}, k = 0, 1, \dots\}$ a tempo discreto, com matriz de probabilidade de transição \mathbf{P} e

distribuição inicial $\pi(0)$, e um conjunto de M matrizes reais conhecidas $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM})$, com $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i \in \mathbf{M}$. Um Sistema Linear com Saltos Markovianos a tempo discreto (SLSM-D) com esses parâmetros é um sistema dinâmico estocástico da forma

$$\begin{cases} x_d(k+1) = A_{d\theta_d(k)}x_d(k), & k = 0, 1, \dots, \\ x_d(0) = x_{d0} \in \mathbb{R}^n, & \theta_d(0) \sim \pi(0) \end{cases} \quad (2.11)$$

(este é o modelo apresentado no *loop* principal ilustrado na Figura 9). A esse modelo de SLSM-D, chamamos de SLSM-D *homogêneo*.

Entrada de controle, exógena e saída do sistema

Para fazermos intervenções no sistema, podemos adicionar um termo ao modelo homogêneo para injetar um sinal de controle $B_{\theta(t)}u(t)$, ou $B_{d\theta_d(k)}u_d(k)$, em que $B = (B_1, \dots, B_M)$, $B_d = (B_{d1}, \dots, B_{dM})$, com $B_i, B_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, para todo $i \in \mathbf{M}$, são matrizes conhecidas, de modo que o sistema seja escrito na forma

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t), \\ x_d(k+1) &= A_{d\theta_d(k)}x_d(k) + B_{d\theta_d(k)}u_d(k), \end{aligned}$$

em que o controle é, em uma forma bastante genérica,

$$\begin{aligned} u(t) &= f_i(t, \{u(s) : s \in [0, t]\}, \{x(s) : s \in [0, t]\}, \{\theta(s) : s \in [0, t]\}), \quad i \in \mathbf{M}, \\ u_d(k) &= f_{di}(k, u_d(0), \dots, u_d(k-1), x_d(0), \dots, x_d(k), \theta_d(0), \dots, \theta_d(k)), \quad i \in \mathbf{M}, \end{aligned}$$

isto é, $u(\cdot)$, $u_d(\cdot)$ são funções que, potencialmente, podem depender de todas as informações disponíveis do sistema. Inclusive, podem depender da informação da saída $y(t)$ (ou $y_d(k)$), da qual falaremos adiante nesta seção, e ilustramos na Figura 9.

No caso de *realimentação linear de estado*, temos o controle na forma $u(t) = K_{\theta(t)}x(t)$ para tempo contínuo e $u_d(k) = K_{d\theta_d(k)}x_d(k)$ para tempo discreto, de modo que (2.10) e (2.11) ficam, respectivamente, da forma

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}K_{\theta(t)})x(t), \\ x_d(k+1) &= (A_{d\theta_d(k)} + B_{d\theta_d(k)}K_{d\theta_d(k)})x_d(k). \end{aligned}$$

em que $K = (K_1, \dots, K_M)$, $K_d = (K_{d1}, \dots, K_{dM})$, $K_i, K_{di} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $i \in \mathbf{M}$, são os **ganhos** do controle. Quando os ganhos são nulos, o SLSM correspondente é **sem controle** ou **de malha aberta**, e quando os ganhos são não nulos, o SLSM é **controlado** ou **de malha fechada**. As matrizes $A + BK = (A_1 + B_1K_1, \dots, A_M + B_MK_M)$ e $A_d + B_dK_d = (A_{d1} + B_{d1}K_{d1}, \dots, A_{dM} + B_{dM}K_{dM})$ são **matrizes de malha fechada**, funções dos ganhos; e $A = (A_1, \dots, A_M)$ e $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM})$ são **matrizes de malha aberta**.

Diferentemente dos casos do PVI-C e PVI-D, a estabilidade do SLSM-C e do SLSM-D **não** é garantida com as condições

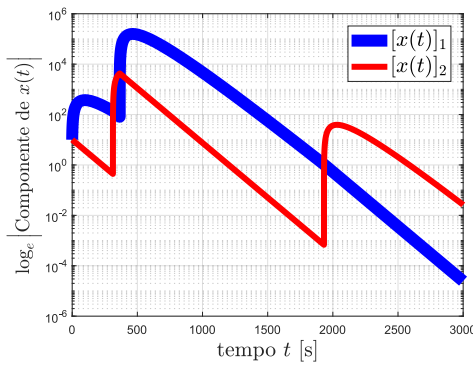
$$\max(\text{real}(\text{eig}(A_i + B_iK_i))) < 0 \quad \text{e} \quad \max(|\text{eig}(A_{di} + B_{di}K_{di})|) < 1,$$

para todo $i \in \mathbf{M}$. De fato, no [Exemplo 1](#) temos um SLSM-C instável com parâmetros estáveis.

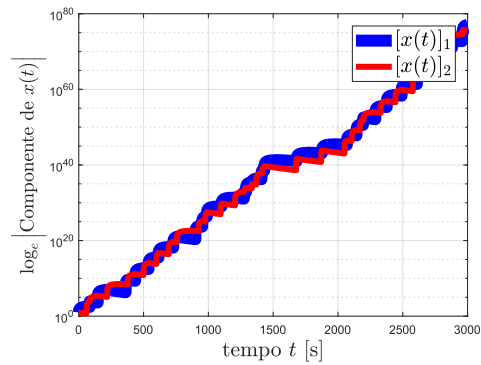
Exemplo 1 (Modos estáveis não implica sistema estável). Considere dois SLSM-C \mathcal{G}^a e \mathcal{G}^b homogêneos com os mesmos parâmetros, exceto pelas matrizes de taxa Λ^a e Λ^b correspondentes, com condição inicial $\pi(0) = [1, 0]$ e $x(0) = [10, 10]'$. Simulamos os SLSM-C uma vez e mostramos os gráficos na [Figura 8](#).

$$[A_1|A_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.01 & 1 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 1 & -0.01 \end{array} \right], \quad \Lambda^a = \begin{bmatrix} -1/4000 & 1/4000 \\ 1/3000 & -1/3000 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^b = 100\Lambda^a.$$

Figura 8 – Os SLSM podem ser instáveis, mesmo que seus parâmetros sejam individualmente estáveis.



(a) Uma realização do SLSM-C \mathcal{G}^a .



(b) Uma realização do SLSM-C \mathcal{G}^b .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os parâmetros A_1 e A_2 de ambos \mathcal{G}^a e \mathcal{G}^b são Hurwitz estáveis, pois

$$\mathbf{eig}(A_1) = \mathbf{eig}(A_2) = -0.01 < 0,$$

mas, o gráfico da [Figura 8b](#) nos sugere fortemente que o \mathcal{G}^b **não** é estável. Como a estabilidade do SLSM não pode ser avaliada diretamente a partir da estabilidade de cada um dos seus modos, recorremos a outro critério de estabilidade. No nosso caso, vamos falar sobre estabilidade em média quadrática, e a definimos na próxima subseção.

Quando temos algum meio ou processo que permita saber $\theta(t)$ em qualquer instante de tempo, dizemos que a cadeia de Markov é *completamente observada*, e nesse caso, podemos utilizar um controle condizente com o modo observado. Em outras palavras, quando o sistema saltar de $\theta(t) = i$ para $\theta(t) = j$, $i \neq j$, basta trocar a solução (controle) projetada para o modo i para a solução projetada para o modo j . Há outras abordagens que tratam do caso em que a cadeia de Markov não é completamente observada, que são de especial interesse quando for caro ou impossível observar $\theta(t)$. Dentre elas, chamamos atenção para o *detector* (*detector approach*), também chamada *hidden Markov* (cadeia de Markov escondida/oculta), ou ainda *observação parcial* da cadeia de Markov. Esta abordagem é desenvolvida em [Stadtman e Costa](#)

(2017) em SLSM em tempo contínuo e em Costa, Fragoso e Todorov (2015) para SLSM em tempo discreto. Também publicamos alguns resultados de H_2 (discutiremos adiante) envolvendo cadeia escondida em Romero, Ribeiro e Costa (2023), para tempo discreto. Uma explicação detalhada de cadeia oculta pode ser encontrada em Ibe (2013a). Na tese, consideraremos observação completa de θ , sem perdas, pois trataremos apenas o sistema homogêneo. Um sistema controlado utilizando modelo de cadeia oculta precisará ser adaptado, e pode ser tema de pesquisa no futuro.

Semelhantemente ao caso anterior, em diversas aplicações, não é possível obter informação precisa a respeito de $x(t)$, devido a ruído na leitura de sensores, ou outro processo que introduza incertezas na trajetória de $x(t)$, ou ainda devido à aproximação linear de um modelo não-linear, abordagem que pode ser razoável para algumas aplicações. Em casos assim, são de grande interesse os *estimadores de estado* ou *filtros*. Essas incertezas podem ser modeladas como um ruído na própria dinâmica do sistema, isto é, na equação diferencial $dx(t)/dt = f(\cdot)$ ou de diferenças $x(k+1) = f(\cdot)$, ou podem ser modeladas na dinâmica de uma saída $z(t) = g(\cdot)$ ou $z(k) = g(\cdot)$, ou em ambas as dinâmicas. O ruído pode ser aditivo, como em Gomes e Costa (2010), ou multiplicativo, como em Liu (2013), Li e Han (2021). Os estimadores/filtros então coletam informações da saída $z(\cdot)$ para estimar $x(\cdot)$, minimizando o erro. Nesta tese, $x(t)$ será considerado completamente observado, pois não lidaremos com o problema de filtragem.

Podemos ainda adicionar um termo de **perturbação** ao sistema, $E_{\theta(t)}w(t)$ (respectivamente $E_{d\theta(k)}w_d(k)$), passando a assumir a forma

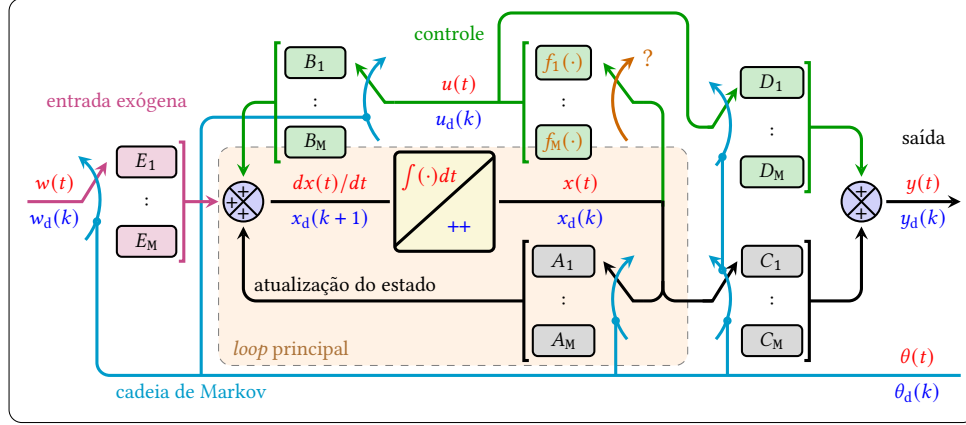
$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + E_{\theta(t)}w(t), \\ x_d(k+1) &= A_{d\theta(k)}x_d(k) + B_{d\theta(k)}u_d(k) + E_{d\theta(k)}w_d(k), \end{aligned}$$

em que $E = (E_1, \dots, E_M)$, $E_d = (E_{d1}, \dots, E_{dM})$, com $E_i, E_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, são matrizes conhecidas, para todo $i \in \mathbf{M}$, e $w(t), w_d(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada exógena.

Observação 1. As variantes acima descritas têm grande importância: são os modelos lineares adotados: (i) no caso em que se queira injetar um sinal para controlar o sistema e (ii) no caso em que se queira adicionar entrada exógena ou ruído ao sistema, o que torna o modelo mais próximo do real. Este último, com o termo de perturbação, é essencial para a definição do índice H_2 já mencionado, e que definimos melhor na Seção 2.3.

Podemos acoplar uma função/processo associada à trajetória do sistema, chamado *saída do sistema*, denotado por $y(t)$ (ou $y_d(k)$). Ela é comumente utilizada para atribuir um custo à trajetória de $x(\cdot)$ e, caso o sistema seja controlado, também à trajetória de $u(\cdot)$, possibilitando penalizar funções $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$ que não são de interesse e buscar outras $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$ mais adequadas. Também é utilizada para definir o índice H_2 .

Figura 9 – Diagrama de blocos de um SLSM. Em vermelho e azul estão os modelos a tempo contínuo e discreto respectivamente. Os circuitos em verde e magenta são respectivos à adição de controle e entrada exógena ao modelo. Também ilustramos a saída do sistema, e o chaveamento entre os modelos, dado pela cadeia de Markov. A observação da cadeia está indicada por “?”.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura [Figura 9](#) ilustramos os seguintes SLSM:

$$\begin{cases} dx(t)/dt = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + E_{\theta(t)}w(t), \\ y(t) = C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t), \\ u(t) = f_{\theta(t)}(x(t), \cdot), \end{cases}$$

para tempo contínuo

$$\begin{cases} x_d(k+1) = A_{\theta_d(k)}x_d(k) + B_{\theta_d(k)}u_d(k) + E_{\theta_d(k)}w_d(k), \\ y_d(k) = C_{\theta_d(k)}x_d(k) + D_{\theta_d(k)}u_d(k), \\ u_d(k) = f_{\theta_d(k)}(x_d(k), \cdot), \end{cases}$$

para tempo discreto, em que $C = (C_1, \dots, C_M)$, $D = (D_1, \dots, D_M)$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ e $D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ para todo $i \in M$.

MS-estabilidade e índice H_2

As seguintes definições de *estabilidade em média quadrática* aparecem em vários textos de SLSM. Mesmo em português, a nomenclatura mais comum é em inglês: *Mean Square Stability* (MSS) ou MS-estabilidade.

Definição 3 (MS-estabilidade de SLSM-C). O sistema dado em (2.10) é MSS quando, para qualquer condição inicial $(x(0), \theta(0))$, se tenha $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x(t)\|^2) = 0$, em que $\mathbb{E}(\cdot)$ é o operador valor esperado.

Definição 4 (MS-estabilidade de SLSM-D). O sistema dado em (2.11) é MSS quando, para qualquer condição inicial $(x(0), \theta(0))$, se tenha $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x(k)\|^2) = 0$.

Vamos considerar o caso de um SLSM-C, como na [Equação 2.10](#). A esse sistema, adicionamos um termo de perturbação $E_{\theta(t)}w(t)$ e uma função de saída $y(t) = C_{\theta(t)}x(t)$, o que nos dá o seguinte SLSM

$$\Phi_c : \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_{\theta(t)}x(t) + E_{\theta(t)}w(t), \\ y(t) = C_{\theta(t)}x(t), \\ x(0) = 0, \quad \theta(0) \sim \pi(0), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

no qual $A = (A_1, \dots, A_M)$, $E = (E_1, \dots, E_M)$, $C = (C_1, \dots, C_M)$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ são matrizes conhecidas para todo $i \in \mathbf{M}$. Nesse sistema, $\theta = \{\theta(t) \in \mathbf{M}, t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo.

Definição 5 (H_2 do SLSM-C Φ_c). Suponha MS-estável o sistema Φ_c com $w \equiv 0$. A norma ou índice H_2 de Φ_c , denotada por $\|\Phi_c\|_2$, é definida por

$$\|\Phi_c\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^\infty \mathbb{E}(\|y^j(t)\|^2),$$

em que $y^j(t)$ é a saída do sistema (2.12) sujeito à perturbação $w^j = \{w(t) = e_j \delta(t), t \geq 0\}$, em que e_j denota o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n_w} , e $\delta(t)$ é uma função especial, chamada *impulso unitário* ou *delta de Dirac*, e será definida na [Seção 3.1](#).

Para o caso de tempo discreto, as definições são análogas. Considere o SLSM-D, como na [Equação 2.11](#), e adicione um termo de perturbação $E_{d\theta_d(k)}w_d(k)$ e uma função de saída $y_d(k)$:

$$\Phi_d : \begin{cases} x_d(k+1) = A_{d\theta_d(k)}x_d(k) + E_{d\theta_d(k)}w_d(k), \\ y_d(k) = C_{\theta_d(k)}x_d(k), \\ x_d(0) = 0, \quad \theta_d(0) \sim \pi(0), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{cases} \quad (2.13)$$

no qual $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM})$, $E_d = (E_{d1}, \dots, E_{dM})$, $C_d = (C_{d1}, \dots, C_{dM})$, $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ e $C_{di} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ são matrizes conhecidas para todo $i \in \mathbf{M}$. Nesse sistema, $\theta_d = \{\theta_d(k) \in \mathbf{M}, k = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo.

A norma H_2 para os respectivos sistemas controlados com realimentação linear de estado é definida de forma semelhante, apenas substituindo as matrizes A_i ou A_{di} de malha aberta pelas suas versões de malha fechada $A_i + B_i K_i$ ou $A_{di} + B_{di} K_{di}$.

Definição 6 (H_2 do SLSM-D Φ_d). Suponha MS-estável o sistema Φ_d com $w_d \equiv 0$. A norma ou índice H_2 de Φ_d , denotada por $\|\Phi_d\|_2$, é definida por

$$\|\Phi_d\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d^j(k)\|^2),$$

em que $y_d^j(k)$ é a saída do sistema (2.12) sujeito a $w_d^j = \{w_d(0) = e_j, w_d(k) = 0, k > 0\}$.

Definição alternativa de H_2 , caso discreto

Em algumas situações conseguimos simplificar os cálculos envolvendo H_2 com a seguinte ideia, que é equivalente à [Definição 6](#), encontrada em textos de SLSM-D. Usaremos essa ideia para definir H_2 no [Capítulo 5](#). Vamos considerar o SLSM-D da [Equação 2.13](#). Definimos o seguinte processo estocástico

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = \{\mathbf{e}_0(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, k = 0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathcal{P}(\mathbf{e}_0(0) = e_j) = 1/n_w, \quad \forall j = 1, \dots, n_w, \\ \mathcal{P}(\mathbf{e}_0(k) = 0) = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.14)$$

Nestes termos, se assumirmos $w_d = \mathbf{e}_0$, temos, pelo Teorema de Probabilidade Total (TPT)

$$\begin{aligned} n_w \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d(k)\|^2) &\stackrel{TPT}{=} n_w \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d(k)\|^2 \mid w_d(0) = e_j, \{w_d(t) = 0, t \geq 1\}) \\ &\quad \times \mathcal{P}(w_d(0) = e_j, \{w_d(t) = 0, t \geq 1\}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d(k)\|^2 \mid w_d(0) = e_j, w_d(t) = 0, t \geq 1) \\ &= \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d^j(k)\|^2) = \|\Phi_d\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, podemos definir H_2 da seguinte forma ([Romero, Ribeiro e Costa \(2023\)](#), *Definition 1*).

Definição 7 (Definição alternativa de H_2). Suponha Φ_d MS-estável com $w_d \equiv 0$. A norma ou índice H_2 de Φ_d , denotada por $\|\Phi_d\|_2$, é definida por

$$\|\Phi_d\|_2^2 = n_w \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y_d(k)\|^2),$$

com $w_d = \mathbf{e}_0$.

Observação 2. Note que, se trocarmos $k = 0, 1, 2, \dots$ por $t \in [0, \infty)$ e $\sum_{k=0}^{\infty}(\cdot)$ por $\int_0^{\infty}(\cdot)dt$ na [Equação 2.14](#), [Equação 2.15](#) e na [Definição 7](#), os resultados permanecem válidos, portanto esta definição alternativa também funciona para sistemas de tempo contínuo.

SISTEMA DE TEMPO MISTO

Como já dantes mencionado, os SLSM têm sido amplamente estudados e já contam com uma gama bastante grande de resultados. No entanto, todos os resultados até aqui têm sido estabelecidos sobre um **domínio de tempo contínuo** ou **domínio de tempo discreto**, com resultados consolidados para um ou outro domínio separadamente. No que discorreremos neste capítulo, temos uma novidade teórica ainda não abordada na literatura, que é a apresentação e estudo de um modelo que unifica ambos os domínios de tempo, aqui denominados Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a Tempo Misto (SLSM-M).

Uma forma simples de se conseguir um modelo de tempo misto é fixando-se os tempos em cada domínio, como por exemplo, alternando-se os domínios em 1s no tempo contínuo e 10 passos de tempo discreto, comentaremos mais a respeito na [Seção 4.2](#). Os únicos trabalhos que encontramos que fazem um estudo de tempo misto são Sistemas Híbridos Estocásticos (SHE) no contexto de dados amostrados, como em [Ichikawa e Katayama \(2001\)](#), [Amorim, Gonçalves e Souza \(2016\)](#) e [Amorim *et al.* \(2020\)](#), mas os tais não abordam parâmetros com saltos. Nesses trabalhos, o tempo de permanência no domínio contínuo é constante, e apenas um passo no domínio discreto é aplicado. No que se pretende adiante é estudar um modelo com saltos nos parâmetros em que os tempos de permanência em cada domínio são aleatórios, o que já não é trivial, mesmo com a ampla literatura disponível.

O modelo que apresentaremos começa em domínio contínuo durante um tempo aleatório com distribuição exponencial, depois passará a operar em tempo discreto com uma duração aleatória de passos, conforme uma distribuição discreta arbitrária. Esse processo se repete, sempre alternando entre um domínio e outro, com tempos de permanência aleatórios. A grosso modo, o processo será uma sequência de “pedaços contínuos” e intercalados com uma sequência de “pedaços discretos”, que serão enumerados: “pedaço 0 contínuo”, “pedaço 1 discreto”, “pedaço 1 contínuo”, “pedaço 2 discreto”, etc. A [Figura 11](#) ilustra a ideia, que será matematicamente formalizada após definirmos a notação básica.

Prevendo-se que a notação ficará um pouco fatigante, já de antemão estabelecemos algumas convenções que facilitarão a leitura. Para essa enumeração dos “pedaços” supramencionados, reservaremos a letra “ r ” que assumirá valores no conjunto dos inteiros não-negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$. Também, para diferenciar os domínios contínuo e discreto, reservaremos as letras “ t ” para fazer referência ao tempo contínuo e a letra “ k ” para referir-se ao domínio discreto, que é a notação mais usada na literatura, nos seus respectivos contextos.

3.1 Notações e hipóteses de trabalho

Denotamos X' a transposta da matriz X , \mathbb{R} o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^{m \times n}$ o espaço de matrizes reais $m \times n$. Quando uma matriz $X = X'$ é positiva semidefinida, escrevemos $X \geq 0$. De modo similar, escrevemos $X \geq Y$ quando $X - Y \geq 0$ é simétrica positiva semidefinida. Denotamos por I_n a matriz identidade $n \times n$, por I o operador identidade com dimensões apropriadas, conforme o contexto. Denotamos por $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ o produto de Kronecker entre $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Exemplificamos abaixo com $m = n = p = 2$ e $q = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},$$

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{array} \right].$$

Para uma função de t , $g(t)$, denotamos $g(t^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g(t - \epsilon)$ por brevidade. Analogamente, denotamos $g(t^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g(t + \epsilon)$.

Admitimos o espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}(\cdot))$ e denotamos a esperança da variável aleatória X por $\mathbb{E}(X)$, e a esperança condicional de X dado Y por $\mathbb{E}(X | Y)$. A função indicadora de A é denotada por $\mathbb{1}_{\{A\}}$, cujo valor é 1 quando ocorre A , e é zero caso contrário. Também se faz importante a identidade a seguir, em que X, Y são variáveis aleatórias no mesmo espaço de probabilidade, que será amplamente usada nos processos de segundo momento. Vide, por exemplo, o Teorema 5.9 de [Magalhães \(2015\)](#):

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y)).$$

Do Teorema de Probabilidade Total (TPT), também temos a identidade, considerando $Y \in \mathcal{Y}$ uma variável discreta e $i \in \mathcal{Y}$:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{Y=i\}}) = \sum_{j \in \mathcal{Y}} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{Y=i\}} | Y = j) \mathcal{P}(Y = j) = \mathbb{E}(X | Y = i) \mathcal{P}(Y = i).$$

Considere os seguintes espaços, com $M \geq 1$ inteiro, e $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$.

- $\mathbb{M}^{m,n} = \{X = (X_1, \dots, X_M) : X_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i \in \mathbf{M}\}$ o espaço das sequências de M matrizes reais $m \times n$;
- $\mathbb{S}^n = \{X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{M}^{n,n} : X_i = X_i', i \in \mathbf{M}\}$ o subespaço de $\mathbb{M}^{n,n}$ de sequências de M matrizes simétricas $n \times n$ (cone convexo de matrizes simétricas);
- $\mathbb{S}^{n+} = \{X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{S}^n : X_i \geq 0, i \in \mathbf{M}\}$ o subespaço de \mathbb{S}^n de sequências de M matrizes positivas semidefinidas (cone convexo de matrizes positivas semidefinidas).

Adotamos as seguintes hipóteses de trabalho para o modelo de tempo misto.

- (1) Considere um processo de Poisson homogêneo com taxa de “chegadas” $\sigma > 0$. Os **tempos entre “chegadas”** formam o processo estocástico de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) $\{\tau_r > 0 : r \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$, em que $\tau_r \sim f_{\tau_r}(s|\sigma) = \sigma e^{-\sigma s} \mathbb{1}_{\{s \geq 0\}}$ para cada r , isto é, os tempos entre as chegadas são variáveis aleatórias exponenciais com o mesmo parâmetro σ e τ_r é estatisticamente independente de τ_s para todo $r \neq s$. Temos que τ_r é o tempo de permanência no domínio contínuo no r -ésimo “pedaço” do SLSM-M.
- (2) Considere o processo de Poisson acima descrito. Os **tempos de “chegada”** formam o processo estocástico $\{t_r = t_{r-1} + \tau_{r-1} : r \in \{1, 2, \dots\}\}$, com $t_0 := 0$.
- (3) Seja $\hat{T} \geq 1$ um inteiro. Considere o processo estocástico $\{T_r : r = 1, 2, \dots\}$, em que $T_r \in \{0, 1, \dots, \hat{T} - 1\}$ com distribuição μ satisfazendo $\mu_j = \mathcal{P}(T_r = j - 1)$, $j \in \{1, \dots, \hat{T}\}$. Temos que T_r é o número de passos discretos no r -ésimo “pedaço” do processo misto.
- (4) Os processos $\{t_r\}$ e $\{T_r\}$ são independentes mutuamente, assim como os processos $\{\tau_r\}$ e $\{T_r\}$ também o são.

Os processos estocásticos $\theta_r = \{\theta_r(t) \in \mathbf{M} : t \in [t_r, t_{r+1})\}$ são cadeias de Markov a tempo contínuo com matriz de taxa $\mathbf{A} = [\lambda_{ij}]$ e espaço de estados \mathbf{M} , para cada $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Também, os processos estocásticos $\theta_{dr} = \{\theta_{dr}(k) \in \mathbf{M} : k \in \{0, 1, \dots, T_r\}\}$ são cadeias de Markov a tempo discreto com matriz de transição $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ e mesmo espaço de estados \mathbf{M} , sem perda de generalidade, para cada $r \in \{1, 2, \dots\}$.

O espectro de uma matriz X é denotado por $\text{eig}(X)$ (conjunto dos autovalores de X , sejam reais ou complexos). A parte real de um número complexo $z = a + b\sqrt{-1}$ é denotada por $\text{real}(z) = a$. O traço de uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é denotado por $\text{tr}(X) = \sum_{i=1}^n X_{ii}$, e tem uma propriedade interessante: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ para quaisquer matrizes A, B com dimensões adequadas. Denotamos por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em \mathbb{R}^n , isto é, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|^2 = u'u = \text{tr}(uu')$. Definimos o seguinte produto interno para $X = (X_1, \dots, X_M), Y = (Y_1, \dots, Y_M) \in \mathbb{M}^{m,n}$:

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr}(X_i' Y_i).$$

Definimos uma norma induzida pelo produto interno em \mathbb{S}^{n+} da seguinte forma: para todo $X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{S}^{n+}$,

$$\| \| X \| \| = \langle \sqrt{X}, \sqrt{X} \rangle,$$

em que $\sqrt{X} = (\sqrt{X_1}, \dots, \sqrt{X_M})$. Como \sqrt{X} pode não ser única, para esta definição, escolhemos a única que está em \mathbb{S}^{n+} (aquela cujos autovalores de $\sqrt{X_i}$ são todos ≥ 0 para todo $i \in \mathbf{M}$). Note também que $\| \| I \| \| = \langle I, I \rangle = nM$, para o operador identidade $I = (I, \dots, I) \in \mathbb{S}^{n+}$. É trivial verificar que, para $X \in \mathbb{S}^{n+}$, tem-se $\| \| X \| \| = \langle X, I \rangle$, com $I \in \mathbb{S}^{n+}$.

O operador $\text{vec}_{m,n}(\cdot) : \mathbb{R}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}^{mn}$ é um isomorfismo entre o espaço de **matrizes** de dimensão $m \times n$ e o espaço de **vetores** de dimensão mn , definido pelo empilhamento das colunas da matriz, isto é, se $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então

$$\text{vec}_{m,n}(B) = [B_{11}, B_{21}, \dots, B_{m1}, B_{12}, B_{22}, \dots, B_{m2}, \dots, B_{1n}, B_{2n}, \dots, B_{mn}]'.$$

O operador $\hat{\phi}_{m,n}(\cdot) : \mathbb{M}^{m,n} \mapsto \mathbb{R}^{mnM}$ é um isomorfismo entre o espaço de **seqüências de M matrizes** de dimensões $m \times n$ e o espaço de **vetores** de dimensão mnM , definido pelo empilhamento das matrizes vetorizadas, isto é, se $X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{M}^{m,n}$, então

$$\hat{\phi}_{m,n}(X) = [\text{vec}_{m,n}(X_1)', \text{vec}_{m,n}(X_2)', \dots, \text{vec}_{m,n}(X_M)']'.$$

Note que $\text{vec}_{m,n}(\cdot)$ e $\hat{\phi}_{m,n}(\cdot)$ são invertíveis, pois são isomorfismos, portanto estão bem definidos os operadores $\text{vec}_{m,n}^{-1}(\cdot) : \mathbb{R}^{mn} \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\hat{\phi}_{m,n}^{-1}(\cdot) : \mathbb{R}^{mnM} \mapsto \mathbb{M}^{m,n}$. Por simplicidade, denotaremos $\hat{\phi}_{m,n}(\cdot)$ e $\hat{\phi}_{m,n}^{-1}(\cdot)$ simplesmente por $\hat{\phi}(\cdot)$ e $\hat{\phi}^{-1}(\cdot)$, omitindo-se n , pois serão os principais operadores que utilizaremos. Como vamos trabalhar com elementos de \mathbb{S}^{n+} vetorizados, ser-nos-á interessante definir um espaço e uma norma para esses elementos.

A função delta de Dirac centrada em d_0 é denotada por $\delta(t - d_0)$. Essa função é definida como o limite da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua centrada em d_0 , quando sua variabilidade tende a zero. É também chamada de impulso, e satisfaz as seguintes propriedades: (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - d_0) dt = 1$, (ii) vale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - d_0) dt = f(d_0)$ para qualquer função definida em $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, (iii) $\delta(t - d_0) = \infty$ se $t = d_0$, e $\delta(t - d_0) = 0$, caso contrário.

► Definimos o espaço de vetores $\hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}) = \{\hat{\phi}(X) \in \mathbb{R}^{n^2M} : X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{S}^{n+}\}$ (o espaço dos elementos de \mathbb{S}^{n+} vetorizados). Tomando-se um elemento $V = (V_1, \dots, V_M) \in \mathbb{S}^{n+}$ e o vetor $v \in \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}) \subset \mathbb{R}^{n^2M}$ tal que $\hat{\phi}(V) = v$, definimos a norma do vetor v , denotada por $\| \| v \| \|$, induzida pela norma do elemento V de \mathbb{S}^{n+} que foi vetorizado:

$$\| \| v \| \| := \| \| \hat{\phi}^{-1}(v) \| \| = \| \| V \| \| = \langle V, I \rangle.$$

Assim, temos definido $\| \| \cdot \| \|$ para elementos de \mathbb{S}^{n+} (seqüências de M matrizes positivas semidefinidas) e $\| \| \cdot \| \|$ para elementos de $\hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$ (vetores de \mathbb{R}^{n^2M} correspondendo à vetorização de elementos de \mathbb{S}^{n+}).

Considerando $X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{M}^{m,n}$ uma sequência de matrizes, escrevemos

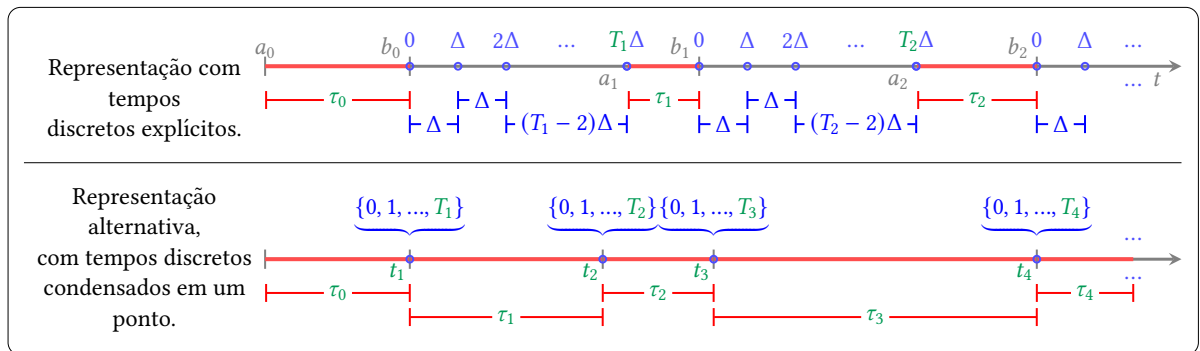
$$\mathbf{diag}_{i \in \mathbf{M}}(X_i) = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_M \end{bmatrix}.$$

Para uma matriz quadrada qualquer $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, escrevemos $\mathbf{diag}(Y) = \{Y_{ii}, i = 1, \dots, n\}$.

Podemos representar domínios de tempo misto de diferentes formas, destacamos duas delas. Uma representação bastante natural consiste na adoção de um eixo do tempo, sobre o qual é tomada uma sequência $r = 0, 1, 2, \dots$ de (i) intervalos contínuos do tipo $[a_r, b_r]$, $b_r > a_r$, cujo comprimento é $b_r - a_r = \tau_r$ e (ii) um conjunto de pontos regularmente espaçados $\{b_r, b_r + \Delta, b_r + 2\Delta, \dots, b_r + T_r\Delta\}$, para $\Delta > 0$ fixado, e definimos $a_{r+1} = b_r + T_r\Delta$. Note que o último ponto do intervalo contínuo é o ponto de início para o intervalo discreto e vice-versa.

Embora natural, a representação do domínio de tempo misto com tempos discretos explícitos traz consigo uma notação muito carregada e pouco didática, e não se tem informação do SLSM-M entre um ponto discreto e outro. **Em vez dela, adotaremos outra representação**, que não necessita usar os Δ 's acima descritos. Considere uma sequência $r = 0, 1, 2, \dots$ de (i) intervalos contínuos do tipo $[t_r, t_{r+1})$, $t_{r+1} > t_r$, cujo comprimento é $t_{r+1} - t_r = \tau_r$, e (ii) um conjunto de pontos indexados por k , $k \in \{0, 1, \dots, T_r\}$ situados em t_r , considerados “entre” t_r^- e t_r . Podemos entender essa representação como sendo igual à anterior, mas com os intervalos $[b_r, a_{r+1}]$ referentes ao domínio de tempo discreto “instantâneos” (têm medida de Lebesgue nula). Veja essas diferentes representações na Figura 10; uma ilustração do sistema de tempo misto conforme a primeira representação na Figura 11; e conforme a representação alternativa na Figura 12.

Figura 10 – Diferentes representações do domínio de tempo misto: vermelho denota tempo contínuo, e azul, tempo discreto. Em verde, destacamos as variáveis aleatórias.

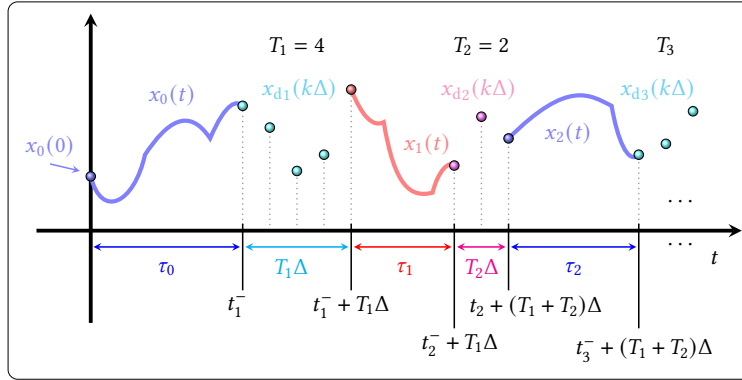


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Definição do SLSM-M

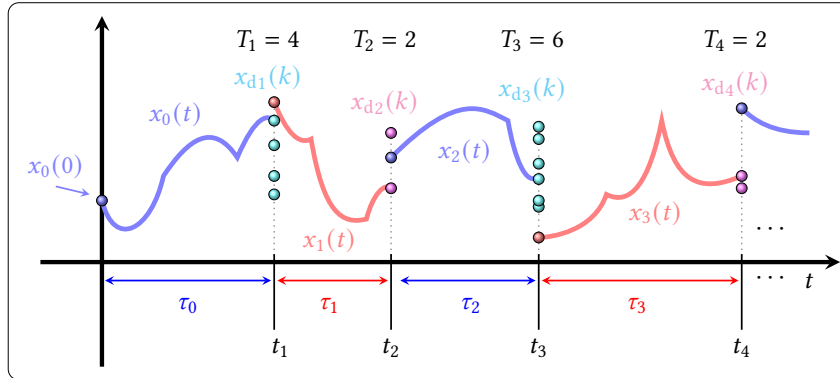
O SLSM-M é definido por partes, com SLSM-C por um tempo aleatório com distribuição exponencial seguido de SLSM-D por um tempo aleatório com distribuição arbitrária, alternando-se os domínios. Vide a ilustração da Figura 11.

Figura 11 – Ilustração de um SLSM-M. As discontinuidades das derivadas das partes contínuas ilustram os saltos na cadeia de Markov. Os pontos em domínio discreto estão explícitos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Um SLSM-M com intervalos em domínio discreto “instantâneos”.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O estado do sistema, em um determinado instante de tempo, é um par de valores (x, θ) , em que x é a componente que toma valores em \mathbb{R}^n , um espaço contínuo, referente à variável da equação diferencial ou de diferenças, conforme o caso, e θ é a componente que toma valores em \mathbf{M} , um espaço discreto, referente à cadeia de Markov. Para dar mais ênfase aos domínios de tempo contínuo e discreto, usaremos notações como (x, θ) para tempo contínuo e (x_d, θ_d) , sempre com subscrito “d”, para tempo discreto.

Dados os parâmetros $A = (A_1, \dots, A_M), A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM}) \in \mathbb{M}^{n,n}$, definimos uma sequência de “pedaços” $x_r(t) \in \mathbb{R}^n, t_r \leq t < t_{r+1}$, de SLSM-C, para cada $r = 0, 1, 2, \dots$, e uma

sequência de “pedaços” de SLSM-D, para cada $r = 1, 2, \dots$, definidos nas Equações (3.1)–(3.9).

$$\Phi_{1a} : \begin{cases} \frac{d}{dt} x_r(t) = A_{\theta_r(t)} x_r(t), & t_r \leq t < t_{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_{dr}(k+1) = A_{d\theta_{dr}(k)} x_{dr}(k), & 0 \leq k \leq T_r - 1, \quad r = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} x_0(0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n, & \text{tal que } \mathbb{E}(\|\bar{x}_0\|) < \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

A Equação 3.1 descreve um SLSM-C na variável $x_r(t)$, definido na janela de tempo $[t_r, t_{r+1})$, com parâmetros $A_{\theta_r(t)} = A_i$ correspondentes aos modos $\theta_r(t) = i \in \mathbf{M}$ da cadeia de Markov. A equação de diferenças (3.2) descreve um SLSM-D na variável $x_{dr}(k)$, definido na janela de tempo $k \in \{0, 1, \dots, T_r\}$, com parâmetros $A_{d\theta_{dr}(k)} = A_{di}$ correspondentes aos modos $\theta_{dr}(k) = i \in \mathbf{M}$ da cadeia de Markov.

A regra para transição de domínio para as variáveis de estado x_r e x_{dr} são dadas abaixo. O último valor de x_{r-1} é usado como condição inicial para x_{dr} e o último valor de x_{dr} é condição inicial para x_r :

$$\Phi_{1b} : \begin{cases} x_r(t_r) = x_{dr}(T_r), \\ x_{dr}(0) = x_{r-1}(t_r^-), \quad r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\quad (3.5)$$

A distribuição inicial da cadeia de Markov é $\mathcal{P}(\theta_0(0)) = \pi_i(0)$. Uma regra similar à anterior é aplicada para a transição de domínio entre as cadeias de Markov a tempo contínuo e a tempo discreto:

$$\Phi_{1c} : \begin{cases} \theta_r(t_r) = \theta_{dr}(T_r), \\ \theta_{dr}(0) = \theta_{r-1}(t_r^-), \quad r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\quad (3.7)$$

A cadeia de Markov a tempo contínuo $\theta_r(t)$ é governada pela matriz de taxa Λ , para todo $r \geq 0$, e a cadeia a tempo discreto $\theta_{dr}(k)$ é governada pela matriz de probabilidade de transição \mathbf{P} , para todo $r \geq 1$. Com o modelo $\Phi_1 = (\Phi_{1a}, \Phi_{1b}, \Phi_{1c})$, a trajetória do estado $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t))$ é da forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t) \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \theta_r(t) \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}}, \quad t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (3.9)$$

Observação 3. Vamos explicar a notação $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t))$, nas equações (3.8) e (3.9). Note que ambos $\mathbf{x}(t)$ e $\boldsymbol{\theta}(t)$ são definidos por partes. Dessa forma, dado t e uma realização $\{t_0, t_1, \dots\}$, identifique o índice r para o qual $t \in [t_r, t_{r+1})$. Temos as igualdades $\mathbf{x}(t) = x_r(t)$ e $\boldsymbol{\theta}(t) = \theta_r(t)$ durante todo o intervalo $[t_r, t_{r+1})$. Perceba ainda, que há descontinuidades em $t = t_r$, para todo $r = 1, 2, \dots$. Em suma, com certo abuso de linguagem, ambos $x_r(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ representam “a mesma coisa”, e idem para $\theta_r(t)$ e $\boldsymbol{\theta}(t)$, porém $x_r(t)$ e $\theta_r(t)$ deixa explícito o intervalo $[t_r, t_{r+1})$ no qual t está situado.

Observação 4. Caso queiramos que o sistema inicie em tempo discreto, podemos fazer a seguinte adaptação: adicione um novo modo m_0 para criar uma dinâmica “artificialmente” em

tempo contínuo, com respectivo parâmetro $A_{m_0} = 0$: a matriz de taxas é zero, o que indica uma dinâmica constante; e com as m_0 -ésimas colunas das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{P} iguais a uma coluna de zeros: nem as cadeias de Markov a tempo discreto e nem aquelas a tempo contínuo poderão saltar para m_0 ; a distribuição inicial é o vetor $\pi_i(0) = \mathbb{1}_{\{i=m_0\}}$ para $i \in \mathbf{M}$, indicando que a dinâmica inicial é essa artificial que acabamos de descrever. O sistema começa em uma dinâmica artificial em tempo contínuo, com $x_0(t) = \bar{x}_0$ para $t \in [0, \tau_0)$, depois saltará para uma dinâmica ordinária, em tempo discreto, e a dinâmica artificial é proibida de ser novamente realizada.

Exemplo 2 (Representação em domínio de tempo misto de um pêndulo invertido). Um pêndulo invertido, montado em uma plataforma móvel é mostrado na [Figura 13](#). Um modelo assim pode ser usado para controlar o posicionamento de um foguete, antes de seu lançamento, por exemplo. O modelo matemático está descrito em detalhes no [Apêndice A](#).

Vamos considerar um sistema cartesiano de coordenadas tridimensionais, com as direções x e y horizontais e z vertical. Um controlador digital com frequência de $\Delta^{-1} = 25\text{Hz}$ é usado para calcular as forças $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ nas direções x e y , necessárias para mover a plataforma e equilibrar o pêndulo, medidas em Newtons. Após ter operado normalmente durante um tempo $T_r\Delta$, com T_r aleatório distribuído uniformemente em $\{0, 5, 10, \dots, 45, 50\}$, esse controlador falha durante um tempo aleatório exponencial τ_r , com taxa $\sigma = 10\text{Hz}$, e depois se recupera, voltando a operar normalmente por outro tempo $T_{r+1}\Delta$, e assim sucessivamente. A massa da plataforma de sustentação é $M = 5\text{kg}$, a massa a ser equilibrada é $m = 20\text{kg}$ a uma altura de 2m da plataforma, a aceleração da gravidade considerada é $g = 10\text{m/s}^2$.

As condições iniciais são as seguintes: a plataforma começa posicionada fora do local desejado, com $x(0) = -0.5\text{m}$ e $y(0) = 1\text{m}$. O pêndulo começa fora do equilíbrio, com uma rotação de $2^\circ \approx 0.0349\text{rad}$ no plano xz e $4^\circ \approx 0.0698\text{rad}$ no plano yz . Na [Equação A.10](#), as matrizes \mathbf{A} , referente à atualização do vetor de estados, e \mathbf{B} , referente à adição de controle ao sistema, podem ser obtidas diretamente no apêndice, substituindo as informações acima. As matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d abaixo foram obtidas discretizando-se¹ \mathbf{A} e \mathbf{B} , com $\Delta = 1/25$. O ganho $\mathbf{K}_d^{(1)}$ abaixo estabiliza a dinâmica em tempo discreto, isto é, a matriz de malha fechada $\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{K}_d^{(1)}$ é uma matriz estável, com raio espectral 0.9802 dentro do círculo unitário.

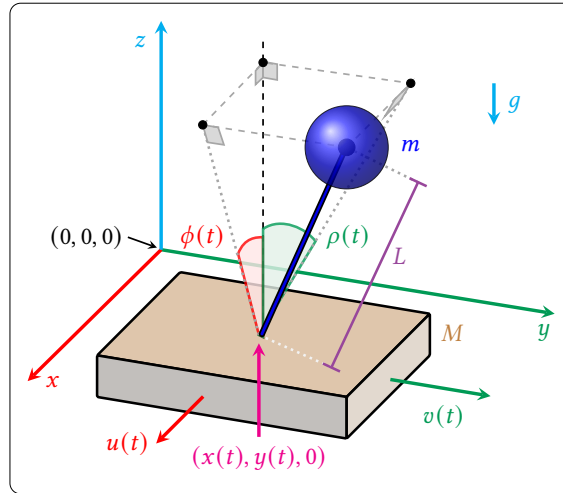
Como o modelo não apresenta saltos nos parâmetros, apenas no domínio do tempo, podemos considerar como tendo apenas um modo de operação e assim $\mathbf{M} = \{1\}$, $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{P} = 1$ e $\pi(0) = 1$. Retomaremos este exemplo no [Exemplo 9](#), considerando também o ganho $\mathbf{K}_d^{(2)}$.

¹ No Matlab, podemos fazer `params = c2d(ss(A,B,C,D), Delta, 'zoh')` para obter uma estrutura `params` com os campos `params.A`, `params.B`, `params.C`, `params.D` referentes a um sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ discretizado, com incremento Δ , usando o método “zero-order holder”.

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0400 & 0 & 0 & -0.0320 & -0.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & -1.6011 & -0.0320 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.0400 & 0 & 0 & -0.0320 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & -1.6011 & -0.0320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0020 & 0.0400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1001 & 1.0020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0020 & 0.0400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1001 & 1.0020 \end{bmatrix},$$

$$[B_d \mid K_d^{(1)'} \mid K_d^{(2)'}] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0.0002 & 0 & -0.1544 & 0.0032 & -0.3069 & 0.0003 \\ 0.0080 & 0 & -0.4485 & 0.0206 & -0.7698 & 0.0011 \\ 0 & 0.0002 & 0.0039 & -0.1737 & -0.0003 & -0.3069 \\ 0 & 0.0080 & -0.0045 & -0.4896 & -0.0011 & -0.7698 \\ -0.0001 & 0 & 50.6978 & -0.9311 & 76.0255 & -0.0312 \\ -0.0040 & 0 & 20.8625 & -0.6810 & 27.5377 & -0.0313 \\ 0 & -0.0001 & 0.3225 & 52.2129 & 0.0316 & 76.0254 \\ 0 & -0.0040 & 0.4365 & 21.4019 & 0.0316 & 27.5376 \end{array} \right].$$

Figura 13 – Um pêndulo invertido com massa m sustentado em uma plataforma móvel de massa M .

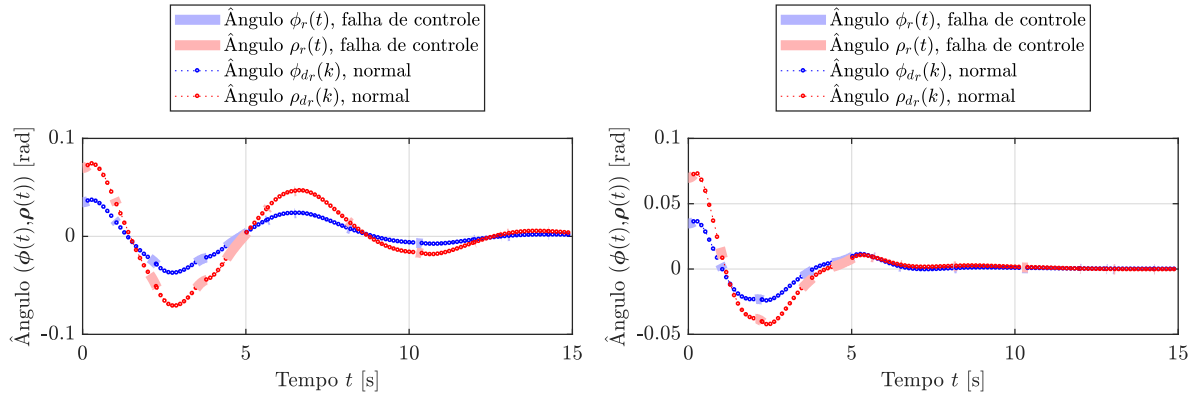


Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos mostrar uma realização do sistema para os ganhos $K_d^{(1)}$ e $K_d^{(2)}$, sob as mesmas condições, isto é, sob as mesmas observações de $\{t_r\}$ e $\{T_r\}$.

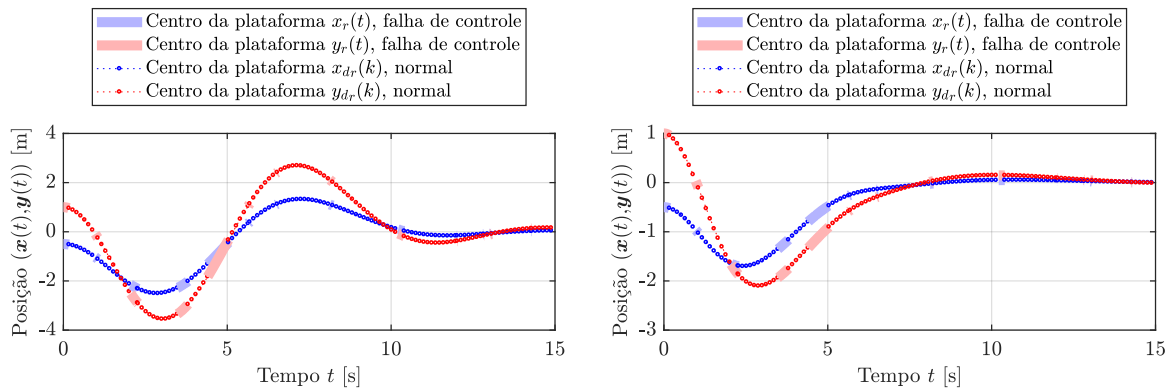
Verifica-se, na Figura 14, uma pequena oscilação dos ângulos do pêndulo com respeito às direções dos eixos x e y . Nestes gráficos, temos uma convergência mais rápida e menos oscilatória com respeito ao ganho $K_d^{(2)}$ em comparação com o ganho $K_d^{(1)}$.

Figura 14 – Uma realização dos ângulos do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

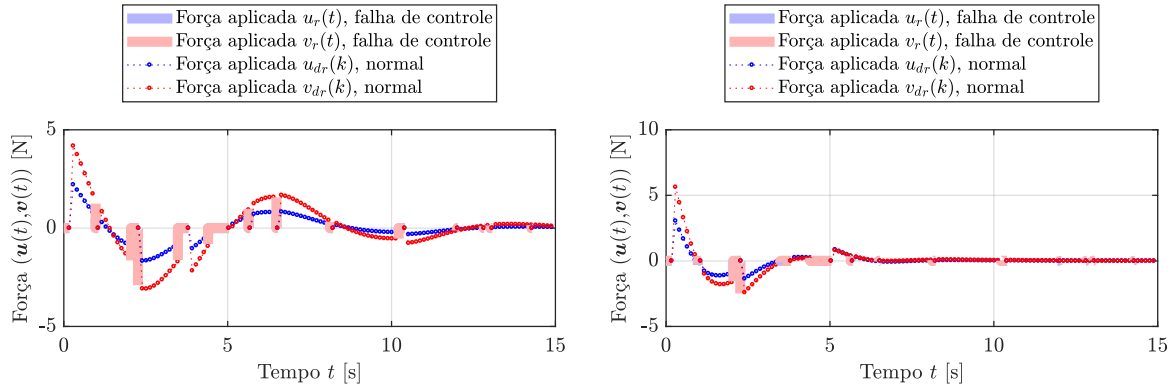
Figura 15 – Uma realização da posição do centro da plataforma do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se, na [Figura 15](#), que apenas em $t \approx 13.5s$ a plataforma alcança a origem, e se mantém com uma pequena oscilação em torno dela, quando usamos o ganho $K_d^{(1)}$. Por outro lado, vemos que a plataforma se move mais rapidamente para a origem, quando o controle utiliza o ganho $K_d^{(2)}$, de modo que em $t \approx 7s$, a plataforma já alcançou seu objetivo.

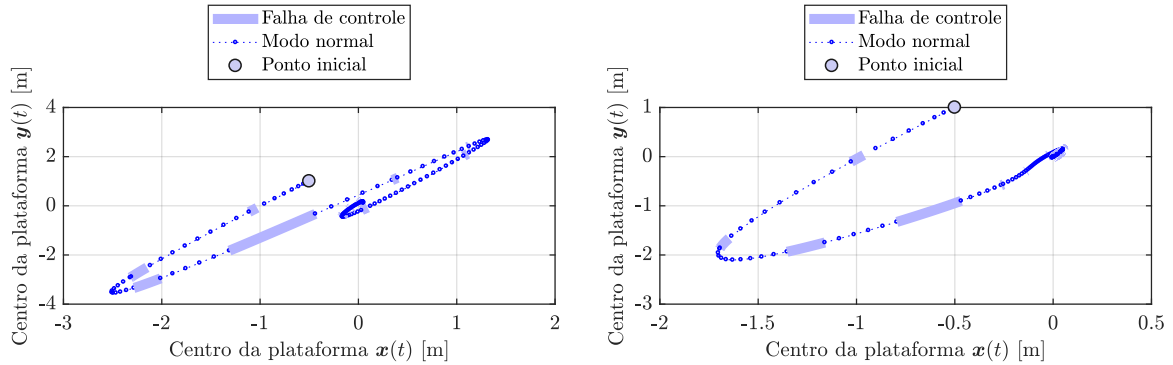
Figura 16 – Uma realização da força aplicada para controle do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Identifica-se nos gráficos da Figura 16, que a força necessária para controlar o pêndulo, é de 0N durante as falhas, por breves instantes. Nota-se a aplicação de forças para controle do pêndulo no intervalo de 0 a 15s (aproximadamente) com ganho $K_d^{(1)}$, ao passo que após 7s, já não se percebe a necessidade de mover a plataforma, quando utilizado $K_d^{(2)}$. A intensidade das forças aplicadas variam aproximadamente de -3N a 5N no primeiro caso e de -2.5N a 6N no segundo caso.

Figura 17 – Uma realização do pêndulo invertido com o ganho $K_d^{(1)}$ à esquerda e $K_d^{(2)}$ à direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No diagrama de fases da Figura 17, fica mais evidente que o ganho $K_d^{(2)}$ é mais estabilizante, já que leva a plataforma para o objetivo mais rapidamente, sem muitas oscilações.

No exemplo do pêndulo invertido, a dinâmica em tempo contínuo é de malha aberta (sem controle), pois estamos modelando a situação em que há falha do atuador, e assim, o modelo em tempo contínuo tem como parâmetro a matriz A dada na Equação A.10. Já que a dinâmica em tempo discreto é controlada (malha fechada), a matriz que é parâmetro no domínio discreto é dada por $A_d + B_d K_d^{(i)}$, para o caso do ganho $i \in \{1, 2\}$.

Outras situações podem ser modeladas, como as seguintes: falha de atuação do controle em tempo discreto na direção x (primeira coluna de B_d igual a zero); falha de atuação do controle em tempo discreto na direção y (segunda coluna de B_d igual a zero); falha de atuação do controle em tempo discreto em ambas as direções ($B_d = 0$); perda de 50% da força na atuação na direção x (primeira coluna de B_d multiplicada por 0.5), etc. Cada um desses casos é um modo de operação diferente, que terá seus respectivos parâmetros e probabilidades/taxas de transição entre eles. Por simplicidade, o exemplo que demos considera apenas um modo de operação, e, com o exposto, compor esses outros modelos é uma tarefa relativamente simples.

Apresentamos alguns conceitos iniciais para familiarizar o leitor ao tema da pesquisa, o modelo de tempo misto com sua representação natural e uma representação alternativa, mas até aqui ainda não sabemos quando um SLSM-M é estável. Como apresentamos no [Exemplo 1](#), em que tínhamos dois sistemas estáveis, quando compusemo-los como um único sistema com transições entre si, a estabilidade ficou comprometida. Portanto, precisamos de um critério para afirmar ou refutar a estabilidade de um sistema de tempo misto, em que ocorre transição entre modos de operação, transição entre domínios, ou ambas as transições. Responderemos essa questão no próximo capítulo.

ESTABILIDADE DO SISTEMA DE TEMPO MISTO

Diversos trabalhos sobre SLSM estudam estabilidade, isto é, a condição sob a qual o estado do sistema converge em média para um ponto de equilíbrio, como [Sworder \(1969\)](#), [Yaz \(1988\)](#), [Feng *et al.* \(1992\)](#), [Zhao, Kang e Zhao \(2019\)](#), [Costa, Fragoso e Todorov \(2013\)](#), [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#), [Romero, Ribeiro e Costa \(2023\)](#) e muitos outros. Diferentes noções de estabilidade são definidas na literatura, vide [Zhao, Kang e Zhao \(2019\)](#), dentre as quais a Estabilidade em Média Quadrática. Num sistema adequado de coordenadas, o ponto de equilíbrio é a origem, ou seja, o ponto zero.

Muitos problemas práticos se beneficiam da estabilidade: deseja-se que um motor mantenha sua velocidade angular constante ([VARGAS; COSTA; DO VAL, 2013](#)); deseja-se que um levitador mantenha a massa em uma posição constante ([OLIVEIRA; COSTA; VARGAS, 1999](#)); deseja-se levar um pêndulo invertido para um ponto de equilíbrio. Para tais problemas, se o sistema é instável, uma solução adequada é um controle que o estabilize (controle estabilizante). Esse tipo de problema é conhecido na literatura como *regulador*, seu objetivo penaliza o afastamento da origem (ponto de equilíbrio). Nesta seção, vamos trabalhar com o conceito de estabilidade. Mais especificamente, lidaremos com a estabilidade em média quadrática (*Mean Square Stability* — *MSS*), que envolve o segundo momento da trajetória $\mathbf{x}(t)$.

O roteiro do texto será o seguinte.

1. Definição dos processos de segundo momento do SLSM-M: \mathbf{X} (processo em tempo contínuo), \mathbf{Y} (processo em tempo misto) e \mathbf{Z} (processo em tempo discreto);
2. Desenvolvimento do [Lema 1](#) que relaciona os processos \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} ;
3. Apresentação do [Teorema 1](#), que traz resultados da literatura de SLSM-C, e do [Teorema 2](#), que traz resultados da literatura de SLSM-D;
4. Desenvolvimento do [Lema 2](#), que calcula o operador \mathcal{T} utilizado no cálculo do processo \mathbf{Z} , e que também é usado para análise de estabilidade do SLSM-M;

5. Definição de estabilidade em média quadrática (*Mean Square — MS stability*) do SLSM-M com duas condições: o processo X ser uniformemente limitado e que convirja para zero;
6. Desenvolvimento dos resultados de estabilidade: o [Teorema 3](#) traz duas condições suficientes para a não MS-estabilidade do SLSM-M; o [Lema 3](#) traz uma condição suficiente para que X seja uniformemente limitado; e o [Teorema 4](#) com uma condição necessária e suficiente para que o SLSM-M seja MS-estável;
7. SLSM-C e SLSM-D como casos particulares de um SLSM-M.

Na literatura...

Na literatura de SLSM-C, como em [Costa, Fragoso e Todorov \(2013\)](#), e analogamente de SLSM-D, como em [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#), é comum acrescentar a medida de probabilidade da cadeia de Markov no segundo momento de $x(t)$. Isto separa a matriz de segundo momento $\mathbb{E}(x(t)x(t)')$ em M matrizes, uma para cada modo da cadeia:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|x(t)\|^2) &= \mathbb{E}\left(\text{tr}(x(t)x(t)')\right) = \text{tr}\left(\mathbb{E}(x(t)x(t)')\right) \\ &= \text{tr}\left(\mathbb{E}\left(x(t)x(t)' \left[\sum_{i \in \mathbf{M}} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}\right]\right)\right) = \sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr}\left(\mathbb{E}(x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}})\right),\end{aligned}\quad (4.1)$$

em que as matrizes $X_i(t) := \mathbb{E}(x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}})$, para cada $i \in \mathbf{M}$, são o segundo momento de $x(t)$ com a “inclusão” da informação $\theta(t) = i$. A soma $\sum_{i \in \mathbf{M}} X_i(t)$ é o segundo momento de $x(t)$, irrespectivo à informação da cadeia de Markov, e seu traço é

$$\mathbb{E}(\|x(t)\|^2) = \text{tr}\left(\sum_{i \in \mathbf{M}} X_i(t)\right) = \|\|X(t)\|\|.$$

Essa variável $X(t) = (X_1(t), \dots, X_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$, como definida acima, é conveniente, pois, além de a média quadrática de $x(t)$ poder ser expressa por $\mathbb{E}(\|x(t)\|^2) = \|\|X(t)\|\|$, existem operadores lineares para cálculo de $X(t)$ tanto em tempo contínuo, que denotamos por A na [Equação 4.8](#), quanto em tempo discreto, denotado por A_d na [Equação 4.12](#). Tais operadores A e A_d são bastante interessantes, uma vez que descrevem o processo $X(t)$ de forma similar à dos sistemas sem saltos, que foram descritos no PVI-C da [Equação 2.1](#) e no PVI-D da [Equação 2.5](#), e os mesmos critérios de estabilidade desses PVIs podem ser aplicados para avaliar a estabilidade de $X(t)$, e por consequência, de $\mathbb{E}(\|x(t)\|^2)$.

Para os SLSM-M, o que muda?

Para o SLSM-M proposto na [Seção 3.2](#), o cálculo de $X(t) = (X_1(t), \dots, X_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$,

$$X_i(t) := \mathbb{E}(x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}),$$

ainda é um problema em aberto, pois essa expectância deve considerar a aleatoriedade de ambas as cadeias de Markov e também as transições de domínio, que envolve os tempos t_r e T_r , cada um destes com suas respectivas distribuições, e pode ser tema de trabalho futuro.

Já que o cálculo de $\mathbf{X}(t)$ é intratável no momento, precisamos de alternativas “indiretas” para analisar sua convergência, no intuito de estabelecer critérios de estabilidade. Nessa direção, definimos um processo condicionado aos tempos t_r e T_r , que denominamos \mathbf{Y} (processo em tempo misto) e um processo \mathbf{Z} (em tempo discreto) condicionado aos tempos t_r . Na Seção que segue, desenvolvemos essas ideias. Com esses processos auxiliares, podemos aproveitar os operadores \mathbf{A} e \mathbf{A}_d da literatura para desenvolver nossas análises.

4.1 Variáveis de segundo momento

Vamos definir os conjuntos $\mathcal{F}_r = \{t_0, T_1, t_1, \dots, T_r, t_r\}$, para $r = 0, 1, \dots$, e $\mathcal{F} = \{t_0, T_1, t_1, \dots\}$ e os processos $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}_r \in \mathbb{S}^{n+}$, $t \geq 0$, $r = 0, 1, \dots$, definidos por

$$\begin{cases} \mathbf{X}_i(t) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}), & \mathbf{X}_i(0) = \mathbb{E}(\bar{\mathbf{x}}_0\bar{\mathbf{x}}_0')\pi_i(0), \quad t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_i(t) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}} \mid \mathcal{F}), & \mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}(0), \quad t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{i,r} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}} \mid \mathcal{F}_r)), & \mathbf{Z}_0 = \mathbf{X}(0), \quad r = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.4)$$

O processo $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$ é o segundo momento de $\mathbf{x}(t)$ com a inclusão da informação de $\theta(t)$. O processo $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$ é o segundo momento de $\mathbf{x}(t)$ com a informação de $\theta(t)$, condicionado aos tempos de permanência em cada domínio de tempo. Dessa forma, $\mathbf{Y}(t)$ pode ser entendido como sendo o segundo momento de um SLSM-C ordinário nos intervalos $[t_r, t_{r+1})$ e como o segundo momento de um SLSM-D ordinário nos pontos de descontinuidade $k \in \{0, 1, \dots, T_r\}$ entre cada t_r^- e t_r . Isso nos possibilita usar \mathbf{A} e \mathbf{A}_d para cálculo de $\mathbf{Y}(t)$ nesses intervalos. E, finalmente, $\mathbf{Z}_r = (\mathbf{Z}_{1,r}, \dots, \mathbf{Z}_{M,r}) \in \mathbb{S}^{n+}$ é a média do segundo momento sobre os pontos de descontinuidade após o domínio discreto e no início do domínio contínuo.

É fácil verificar que a identidade abaixo é válida para os SLSM-M, embora não possamos calcular $\mathbf{X}(t)$ para qualquer t .

$$\mathbb{E}(\|\mathbf{x}(t)\|^2) = \sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr}(\mathbf{X}_i(t)) = \|\mathbf{X}(t)\|, \quad (4.5)$$

Lema 1. É válida a relação $\mathbf{Z}_r = \mathbb{E}(\mathbf{Y}(t_r)) = \mathbb{E}(\mathbf{X}(t_r))$.

Demonstração. Temos que

$$\mathbf{Z}_{i,r} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}} \mid \mathcal{F}_r)) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}}).$$

Também temos que $\mathbf{Y}_i(t_r) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}} \mid \mathcal{F})$, por definição. Tomando o valor esperado, temos que

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i(t_r)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}} \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}}),$$

e ainda

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_i(t_r)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}})) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t_r)\mathbf{x}(t_r)'\mathbb{1}_{\{\theta(t_r)=i\}}).$$

■

Os resultados da literatura para cálculo do segundo momento $\mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}})$ de SLSM-C estão resumidos no próximo Teorema. O leitor pode consultar mais detalhes em [Costa, Fragoso e Todorov \(2013\)](#), Equações 3.9, 3.12, 3.21 — operador \mathcal{L} , Equações 3.24 e 3.25 — operador \mathcal{A} , Proposição 3.7, 3.8 e Lema 3.9.

Teorema 1 (Sobre SLSM-C). Considere um SLSM a tempo contínuo definido por

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_{\theta(t)}\mathbf{x}(t),$$

com os parâmetros $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_M) \in \mathbb{M}^{n,n}$, e a cadeia de Markov $\theta(t)$ governada pela matriz de taxa $\Lambda = [\lambda_{ij}]$. Defina o processo $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$, $\mathbf{X}_i(t) := \mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}})$ para todo $i \in \mathbf{M}$ e $t \geq t_0$. Então, para todo $t_0 \geq 0$, $\mathbf{X}(t_0) = \bar{\mathbf{X}}_0 \in \mathbb{S}^{n+}$,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{X}_i(t) + \mathbf{X}_i(t)\mathbf{A}_i' + \sum_{j \in \mathbf{M}} \lambda_{ji}\mathbf{X}_j(t), \quad \forall t \geq t_0, i \in \mathbf{M}. \quad (4.6)$$

Sua versão vetorizada é dada por

$$\hat{\varphi}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right) = \mathbf{A}\hat{\varphi}(\mathbf{X}(t)), \quad t \geq t_0, \quad (4.7)$$

em que \mathbf{A} é a matriz dada por

$$\mathbf{A} = (\Lambda' \otimes I_{n^2}) + \text{diag}(\mathbf{A}_i \otimes I + I \otimes \mathbf{A}_i), \quad i \in \mathbf{M} \quad (4.8)$$

satisfazendo $e^{\mathbf{A}t} : \hat{\varphi}(\mathbb{S}^{n+}) \mapsto \hat{\varphi}(\mathbb{S}^{n+})$ para todo $t \geq 0$.

Note que o sistema (4.7) tem a mesma forma que (2.1), e portanto a solução dessa equação diferencial tem a forma (2.3), ou seja,

$$\hat{\varphi}(\mathbf{X}(t)) = e^{\mathbf{A}t}\hat{\varphi}(\mathbf{X}(t_0)), \quad t \geq t_0. \quad (4.9)$$

Os resultados da literatura para cálculo do segundo momento $\mathbb{E}(\mathbf{x}_d(k)\mathbf{x}_d(k)'\mathbb{1}_{\{\theta_d(k)=i\}})$ de SLSM-D estão resumidos no próximo Teorema. O leitor pode consultar mais detalhes em [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#), Equações 3.3c, 3.3d, Proposição 3.1, Equação 3.7 — operador \mathcal{T} , 3.11, 3.12b–3.12d — operador \mathcal{A}_1 e Proposição 3.4.

Teorema 2 (Sobre SLSM-D). Considere um SLSM a tempo discreto definido por

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_{d\theta_d(k)}\mathbf{x}_d(k),$$

com os parâmetros $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM}) \in \mathbb{M}^{n,n}$, e a cadeia de Markov $\theta_d(k)$ governada pela matriz de transição $P = [p_{ij}]$. Defina o processo $X(k) = (X_1(k), \dots, X_M(k)) \in \mathbb{S}^{n+}$, $X_i(k) := \mathbb{E}(x_d(k)x_d(k)' \mathbb{1}_{\{\theta_d(k)=i\}})$ para todo $i \in \mathbf{M}$ e $k \geq k_0$. Então, para todo $k \geq k_0$, $X(k_0) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{S}^{n+}$,

$$X_j(k+1) = \sum_{i \in \mathbf{M}} p_{ij} A_{di} X_i(k) A_{di}', \quad \forall k \geq k_0, j \in \mathbf{M}. \quad (4.10)$$

Sua versão vetorizada é dada por

$$\hat{\phi}(X(k+1)) = A_d \hat{\phi}(X(k)), \quad k \geq k_0, \quad (4.11)$$

em que $A_d : \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}) \mapsto \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$ é a matriz dada por

$$A_d = (P' \otimes I_{n^2}) \cdot \underset{i \in \mathbf{M}}{\text{diag}}(A_{di} \otimes A_{di}). \quad (4.12)$$

O processo $Y(t)$ definido em (4.3) é dependente de uma realização \mathcal{F} dos processos $\{T_r\}$ e $\{t_r\}$. Com isso, podemos usar os Teoremas 1 e 2 acima diretamente para calculá-lo. Sendo mais claro, tendo em vista a **Observação 3**, vamos escrever explicitamente as “partes” contínua $Y_r(t) = (Y_{1,r}(t), \dots, Y_{M,r}(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$ e discreta $Y_{dr}(k) = (Y_{d1,r}(k), \dots, Y_{dM,r}(k)) \in \mathbb{S}^{n+}$ de $Y(t)$:

$$\begin{cases} Y_{i,r}(t) = \mathbb{E}(x_r(t)x_r(t)' \mathbb{1}_{\{\theta_r(t)=i\}} \mid \mathcal{F}), & t_r \leq t < t_{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} Y_{di,r}(k) = \mathbb{E}(x_{dr}(k)x_{dr}(k)' \mathbb{1}_{\{\theta_{dr}(k)=i\}} \mid \mathcal{F}), & k = 0, 1, \dots, T_r, \quad r = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} Y_{i,r}(t_r) = Y_{dri}(T_r), \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} Y_{di,r}(0) = Y_{r-1,i}(t_r^-). \end{cases} \quad (4.16)$$

Os processos $Y_r(t)$ são calculados com o **Teorema 1** para todo $t \in [t_r, t_{r+1})$ e os processos $Y_{dri}(k)$ são calculados pelo **Teorema 2** no intervalo $k = 0, 1, \dots, T_r$.

Corolário 1 (Cálculo de $Y(t)$). Considere $Y(t)$ definido na **Equação 4.3** e seja $\mathcal{F} = \{t_0, T_1, t_1, \dots\}$ dado. Então,

$$\begin{cases} \hat{\phi}(Y(t_r^-)) = e^{(A_{\tau_{r-1}})} \left(\prod_{m=1}^{r-1} A_d^{T_r-m} e^{(A_{\tau_{r-m-1}})} \right) \hat{\phi}(X(0)), \\ \hat{\phi}(Y(t_r)) = \left(\prod_{m=1}^r A_d^{T_{r+1}-m} e^{(A_{\tau_{r-m}})} \right) \hat{\phi}(X(0)), \\ \hat{\phi}(Y(t)) = e^{A(t-t_r)} \hat{\phi}(Y(t_r)), \quad t \in [t_r, t_{r+1}), \quad r \geq 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Demonstração. Dado \mathcal{F} , o corolário segue imediatamente da aplicação dos Teoremas 1 e 2 por partes. Conforme o **Teorema 1**, temos que, para todo $X(0) \in \mathbb{S}^{n+}$, a solução (4.9) nos permite escrever $Y_{i,0}(t) = \mathbb{E}(x_0(t)x_0(t)' \mathbb{1}_{\{\theta_0(t)=i\}})$ para $t \in [0, \tau_0) = [t_0, t_1)$, e no final do intervalo, escrevemos

$$\hat{\phi}(Y(t_1^-)) = \hat{\phi}(Y_0(t_1^-)) = e^{(A_{\tau_0})} \hat{\phi}(X(0)),$$

pois $(x(t), \theta(t))$ é descrito por um SLSM-C ordinário em $[0, t_1)$.

Na sequência, temos $Y_{d,i,1}(k) = \mathbb{E}(x_{d1}(k)x_{d1}(k)' \mathbb{1}_{\{\theta_{d1}(k)=i\}} \mid \mathcal{F})$ para $k \in \{0, 1, \dots, T_1\}$, isto é, em tempo discreto por T_1 passos discretos. Temos $Y_{d1}(0) = Y_0(t_1^-)$ devido à [Equação 3.5](#). De acordo com o [Teorema 2](#), a solução (4.11) nos dá, no final do intervalo discreto,

$$\hat{\phi}(Y_{d1}(T_1)) = A_d^{T_1} e^{(A\tau_0)} \hat{\phi}(X(0)).$$

Como $Y_1(t_1) = Y_{d1}(T_1)$ devido à [Equação 3.4](#), temos que $Y(t_1) = Y_1(t_1) = A_d^{T_1} e^{(A\tau_0)} \hat{\phi}(X(0))$. O processo se repete para todo r , alternando-se domínio contínuo com $t \in [t_r, t_{r+1})$, lembrando que $\tau_r = t_{r+1} - t_r$, e domínio discreto $k \in \{0, 1, \dots, T_r\}$. ■

Exemplo 3 (Cálculo de $Y(t)$). Com o [Corolário 1](#) e dada uma realização \mathcal{F} dos processos $\{t_r\}$ e $\{T_r\}$, temos, por exemplo, para $r = 4$,

$$\begin{cases} \hat{\phi}(Y(t_4^-)) = e^{(A\tau_3)} A_d^{T_3} e^{(A\tau_2)} A_d^{T_2} e^{(A\tau_1)} A_d^{T_1} e^{(A\tau_0)} \hat{\phi}(X(0)), \\ \hat{\phi}(Y(t_4)) = A_d^{T_4} e^{(A\tau_3)} A_d^{T_3} e^{(A\tau_2)} A_d^{T_2} e^{(A\tau_1)} A_d^{T_1} e^{(A\tau_0)} \hat{\phi}(X(0)) \\ \hat{\phi}(Y(t)) = e^{A(t-t_4)} A_d^{T_4} e^{(A\tau_3)} A_d^{T_3} e^{(A\tau_2)} A_d^{T_2} e^{(A\tau_1)} A_d^{T_1} e^{(A\tau_0)} \hat{\phi}(X(0)), \quad t_4 \leq t < t_5. \end{cases}$$

Considere $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < \sigma$ (a parte real dos autovalores de A está à esquerda de $\sigma > 0$ no plano complexo), com A e A_d definidos nos Teoremas 1 e 2, respectivamente. Definimos os seguintes operadores \mathbb{A} , \mathbb{A}_d , $\mathcal{T} : \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}) \mapsto \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$, matrizes reais de dimensões $n^2 M \times n^2 M$.

$$\begin{cases} \mathbb{A} = \int_0^\infty e^{As} e^{-\sigma s} ds, \\ \mathbb{A}_d = \sum_{i=1}^{\hat{T}} \mu_i \cdot A_d^{i-1}, \\ \mathcal{T} = \sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Lema 2. Considerando os processos i.i.d. $\{\tau_r\}$ e $\{T_r\}$, são válidas as identidades:

(i) $\mathbb{E}(A_d^{T_r}) = \mathbb{A}_d$, para todo $r \geq 1$, em que $T_r \sim \mu$;

(ii) Seja $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < \sigma$. Então

(a) $\mathbb{E}(e^{(A\tau_r)}) = \sigma \mathbb{A}$ existe e $\mathbb{A} = -(A - \sigma I)^{-1}$;

(b) $\mathbb{E}(A_d^{T_r} e^{(A\tau_{r-1})}) = \mathcal{T}$ existe.

Demonstração. Como $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < \sigma$, então $(A - \sigma I)$ é Hurwitz estável. Isso significa que todos os autovalores de $(A - \sigma I)$ estão à esquerda de zero no plano complexo, o que implica $(A - \sigma I)$ ser invertível (não tem autovalor zero). Como $\tau_r \sim f_{\tau_r}(t|\sigma) = \sigma e^{-\sigma t} \mathbb{1}_{\{t>0\}} \quad \forall r \geq 0$,

$$\mathbb{E}(e^{(A\tau_r)}) = \int_0^\infty e^{As} (\sigma e^{-\sigma s}) ds = \sigma \int_0^\infty e^{(A-\sigma I)s} ds.$$

Como $(A - \sigma I)$ é invertível, multiplicamos a igualdade abaixo por $(A - \sigma I)^{-1}$,

$$\frac{d}{ds} e^{(A-\sigma I)s} = (A - \sigma I) e^{(A-\sigma I)s},$$

obtendo a identidade

$$(\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} \frac{d}{ds} e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} = e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s},$$

e portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, considerando-se $(\mathbf{A} - \sigma I)$ Hurwitz,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} ds &= (\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} ds \\ &= (\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds} e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} ds \\ &= (\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} \Big|_{s=t} - e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} \Big|_{s=0} \right] \\ &= (\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{(\mathbf{A} - \sigma I)t} - e^{(\mathbf{A} - \sigma I)0} \right] \\ &= (\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} [0 - I] = -(\mathbf{A} - \sigma I)^{-1} = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Como $T_r \in \{0, 1, \dots, \hat{T} - 1\}$, e $\mu_i = \mathcal{P}(T_r = i - 1)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, \hat{T}\}$ e para todo $r \geq 1$, então

$$\mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_r}) = \sum_{i=1}^{\hat{T}} \mu_i \cdot \mathbf{A}_d^{i-1} = \mathbb{A}_d.$$

Finalmente, como $\{T_r\}$ e $\{\tau_r\}$ são processos independentes, temos que

$$\mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_r} e^{(\mathbf{A} \tau_{r-1})}) = \mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_r}) \mathbb{E}(e^{(\mathbf{A} \tau_{r-1})}) = \sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A} = \mathcal{T}.$$

■

No [Lema 2](#), o item (i) nos dá uma expressão para o operador \mathbb{A}_d , que descreve o comportamento esperado do SLSM-M durante um domínio de tempo discreto. Este operador está bem definido para o SLSM-M, pois o domínio de tempo discreto é finito para cada $r \geq 1$, condição que garante que o operador tenha norma finita. O seu análogo em tempo contínuo é $\sigma \mathbb{A}$, em (ii-(a)), sujeito a uma condição de existência (sem essa condição, a integral diverge). O comportamento esperado do SLSM-M considerando o conjunto “tempo contínuo–tempo discreto” é descrito pelo operador \mathcal{T} , no item (ii-(b)), também sujeito à mesma condição de existência, pois é uma composição dos dois operadores anteriores.

Corolário 2 (Cálculo do processo \mathbf{Z}_r). Considere o processo \mathbf{Z}_r , $r \geq 0$, conforme definido na [Equação 4.4](#), e $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$. Então

$$\hat{\phi}(\mathbf{Z}_{r+1}) = \mathcal{T} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) = \mathcal{T}^r \hat{\phi}(\mathbf{Z}_0), \quad r \geq 0. \quad (4.19)$$

Demonstração. Conforme [Lema 1](#), [Corolário 1](#) e [Lema 2](#), temos que

$$\hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) = \mathbb{E}(\hat{\phi}(\mathbf{Y}(t_r))) = \mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_r} e^{(\mathbf{A} \tau_{r-1})} \mathbf{A}_d^{T_{r-1}} e^{(\mathbf{A} \tau_{r-2})} \dots \mathbf{A}_d^{T_1} e^{(\mathbf{A} \tau_0)} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_0)).$$

Como os processos $\{T_r\}$ e $\{\tau_r\}$ são independentes, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) &= \mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_r}) \mathbb{E}(e^{(\mathbf{A} \tau_{r-1})}) \mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_{r-1}}) \mathbb{E}(e^{(\mathbf{A} \tau_{r-2})}) \dots \mathbb{E}(\mathbf{A}_d^{T_1}) \mathbb{E}(e^{(\mathbf{A} \tau_0)}) \mathbb{E}(\hat{\phi}(\mathbf{Z}_0)) \\ &= \underbrace{(\sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A})(\sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A}) \dots (\sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A})}_{r \text{ vezes}} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_0) = \mathcal{T}^r \hat{\phi}(\mathbf{Z}_0) = \mathcal{T} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_{r-1}). \end{aligned}$$

Corolário 3. Para todo $r = 1, 2, \dots$, é válido que

$$\mathbb{E}(Y_{r-1}(t_r^-)) = \hat{\phi}(\mathbb{E}(Y_{dr}(0))) = \sigma \mathbb{A} \hat{\phi}(Z_{r-1}).$$

Demonstração. A aplicação direta do [Lema 1](#) nos dá

$$Z_{r-1} = \mathbb{E}(Y(t_{r-1})).$$

O [Corolário 1](#) nos dá

$$Y(t_r^-) = e^{(A\tau_{r-1})} \hat{\phi}(Y(t_{r-1})),$$

e o [Lema 2](#) nos dá

$$\mathbb{E}(Y(t_r^-)) = \mathbb{E}(e^{(A\tau_{r-1})} \hat{\phi}(Y(t_{r-1}))) = \mathbb{E}(e^{(A\tau_{r-1})}) \hat{\phi}(\mathbb{E}(Y(t_{r-1}))) = \sigma \mathbb{A} \hat{\phi}(Z_{r-1}),$$

e levando em conta a regra de transição na [Equação 4.16](#), temos

$$\mathbb{E}(Y_{dr}(0)) = \mathbb{E}(Y_{r-1}(t_r^-)) = \mathbb{E}(Y(t_r^-)) = \sigma \mathbb{A} \hat{\phi}(Z_{r-1}).$$

4.2 Outros tempos de duração dos domínios

Se fixarmos $t_r = rh$ para algum $h > 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$, e $T_r = \hat{T}$, para todo $r = 1, 2, \dots$, com $\hat{T} \geq 1$ inteiro fixado, temos um SLSM-M com janelas de tempo fixas em cada domínio de tempo. Como, neste contexto, t_r e T_r não são variáveis aleatórias (ou podem ser consideradas variáveis aleatórias de variância zero), os operadores da [Equação 4.18](#) podem ser reescritos como

$$\begin{cases} \mathbb{A}^{\text{fixo}} = e^{Ah}, \\ \mathbb{A}_d^{\text{fixo}} = \mathbb{A}_d^{\hat{T}}, \\ \mathcal{T}^{\text{fixo}} = \mathbb{A}_d^{\text{fixo}} \mathbb{A}^{\text{fixo}}. \end{cases}$$

A condição de existência de \mathcal{T} é que h e \hat{T} sejam finitos. Toda a análise que faremos neste Capítulo, em especial as esperanças que envolvam t_r , T_r , e os operadores acima, fica simplificada.

Outras adaptações são imediatas. Se considerarmos t_r como tempos de chegada de um processo de Poisson homogêneo com taxa σ e $T_r = \hat{T}$ para \hat{T} uma constante fixada, temos $\mathcal{T}_1 = \sigma \mathbb{A}_d^{\text{fixo}} \mathbb{A}$. Por outro lado, se tivermos $t_r = rh$ e $T_r \sim \mu$, temos $\mathcal{T}_2 = \mathbb{A}_d \mathbb{A}^{\text{fixo}}$.

Para outras distribuições dos tempos t_r e T_r , a análise que faremos precisa ser re-examinada. A distribuição exponencial dos τ_r nos deu considerável vantagem, pois as soluções das equações diferenciais envolvendo domínio de tempo contínuo também envolve uma exponencial, e pudemos juntar as exponenciais em uma única, o que pode não ser possível para outras distribuições, e portanto, um certo cuidado é necessário.

4.3 Resultados de estabilidade

Já temos material suficiente para definir e desenvolver os conceitos de estabilidade em média quadrática (MSS)¹. Na [Seção 2.3](#) apresentamos o conceito de MSS para os SLSM-C e SLSM-D, e agora estendemos o conceito para os SLSM-M.

Definição 8 (MS-estabilidade do SLSM-M). O sistema misto é *Mean Square-estável* ou MSS quando, para qualquer condição inicial $\mathbf{X}(0) = (\mathbf{X}_1(0), \dots, \mathbf{X}_M(0)) \in \mathbb{S}^{n+}$, existir uma constante $0 \leq \alpha < \infty$ de modo que $\mathbf{X}(t) \leq \alpha I$ para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t)\| \stackrel{(4.5)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|\mathbf{x}(t)\|^2) = 0$, em que $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_M(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$ e $I = (I, \dots, I) \in \mathbb{S}^{n+}$ é o operador identidade em \mathbb{S}^{n+} .

As definições de MS-estabilidade de SLSM-C e SLSM-D não exigem que $\mathbf{X}(t)$ seja limitado uniformemente (a constante αI). No modelo de tempo misto isso se faz necessário, pois precisamos exigir que $\mathbf{X}(t)$ não “exploda” antes da primeira descontinuidade, em t_1 , diferentemente do caso de tempo contínuo, no qual não há descontinuidades.

Teorema 3 (MS-estabilidade). (i) Suponha $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) \geq \sigma$. Então o SLSM-M não é MSS conforme [Definição 8](#). (ii) Suponha que $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) \geq 1$. Então o SLSM-M não é MSS conforme [Definição 8](#).

Demonstração. (i) Vamos mostrar que $\mathbf{X}(t_1^-)$ é ilimitada, isto é, não existe $0 \leq \alpha < \infty$ de modo que $\mathbf{X}(t) < \alpha I$ para todo $t \geq 0$, e assim o SLSM-M não é MS-estável conforme a [Definição 8](#).

Definimos a variável auxiliar $\Gamma(t) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}(t_1^-) \mathbb{1}_{\{t > t_1\}}) \in \mathbb{S}^{n+}$. Perceba a relação

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}(t_1^-)) \geq \Gamma(t), \quad t \geq 0. \quad (4.20)$$

Do [Corolário 1](#) e do [Lema 1](#), e lembrando que $\tau_0 = t_1 \sim f_{t_1}(s|\sigma) = \sigma e^{-\sigma s} \mathbb{1}_{\{s \geq 0\}}$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \mathbb{E}(\mathbf{Y}(t_1^-) \mathbb{1}_{\{t > t_1\}}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E}(\mathbf{Y}(t_1 - \epsilon) \mathbb{1}_{\{t > t_1\}}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \hat{\phi}^{-1} \left\{ e^{\mathbf{A}(s-\epsilon)} \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\} \mathbb{1}_{\{t > s\}} f_{t_1}(s|\sigma) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \hat{\phi}^{-1} \left\{ e^{\mathbf{A}(s-\epsilon)} \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\} \mathbb{1}_{\{t > s\}} (\sigma e^{-\sigma s}) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t \hat{\phi}^{-1} \left\{ \sigma e^{\mathbf{A}s - \mathbf{A}\epsilon - \sigma s I} \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\} ds \\ &= \hat{\phi}^{-1} \left\{ \int_0^t \sigma e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} ds \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\mathbf{A}\epsilon} \right] \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\} \\ &= \hat{\phi}^{-1} \left\{ \int_0^t \sigma e^{(\mathbf{A} - \sigma I)s} ds \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\}. \end{aligned}$$

¹ Mesmo em língua portuguesa, é comum a menção do conceito com adjetivo em língua inglesa: “*Mean Square Stable (MSS)*” ou abreviadamente “MS-estável”, e que significa “estável em média quadrática”. Portanto decidimos manter a tradição da literatura.

Com isso, temos que

$$\mathbb{E}(Y(t_1^-)) \stackrel{(4.20)}{\geq} \hat{\phi}^{-1} \left\{ \int_0^t \sigma e^{(A-\sigma I)s} ds \hat{\phi}(X(0)) \right\}.$$

Como $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) \geq \sigma$, temos que $(A - \sigma I)$ não é Hurwitz estável, e portanto a última integral acima não converge quando $t \rightarrow \infty$. Assim, para todo $\gamma > 0$ existe t_γ de modo que

$$\Gamma(t_\gamma) = \hat{\phi}^{-1} \left\{ \int_0^{t_\gamma} \sigma e^{(A-\sigma I)s} ds \hat{\phi}(X(0)) \right\} \geq \gamma I,$$

ou seja, para todo $\gamma > 0$ existe t_γ tal que

$$\mathbb{E}(Y(t_1^-)) \stackrel{(4.20)}{\geq} \Gamma(t_\gamma) \geq \gamma I. \quad (4.21)$$

Finalmente, como $X(t) = \mathbb{E}(Y(t))$, temos que

$$\| \| X(t_1^-) \| \| = \| \| \mathbb{E}(Y(t_1^-)) \| \| \geq \gamma n M \geq \gamma,$$

para todo $\gamma > 0$, e assim o SLSM-M não é MS-estável.

(ii) O operador $\mathcal{T} : \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}) \mapsto \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$ satisfaz as condições do Teorema de Krein-Rutman (vide [Apêndice B](#)). O teorema diz que existe um autovalor real $\xi \geq 0$ de \mathcal{T} , que é o autovalor mais afastado da origem (ou seja, ξ é o raio espectral de \mathcal{T}), e que o autovetor associado $v \neq 0$ pertence a $\hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$. Em outras palavras, $\xi \in \text{eig}(\mathcal{T})$ tal que $\xi = \max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) \geq 1$ e $v \in \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$, $v \neq 0$, tal que $\mathcal{T}v = \xi v$.

Com isso, temos que $V = \hat{\phi}^{-1}(v) \in \mathbb{S}^{n+}$ e

$$\| \| \mathcal{T}^r \hat{\phi}(V) \| \| = \| \| \mathcal{T}^r v \| \| = \| \| \xi^r v \| \| = \xi^r \| \| v \| \| \geq \| \| v \| \|.$$

Então, se tomarmos $X(0) = V$, temos

$$\| \| \hat{\phi}(Z_r) \| \| = \| \| \mathcal{T}^r \hat{\phi}(X(0)) \| \| = \| \| \mathcal{T}^r \hat{\phi}(V) \| \| \geq \| \| v \| \| > 0, \quad \forall r \geq 0,$$

o que nos mostra que, para algum $\gamma > 0$, $\| \| Z_r \| \| \geq \| \| v \| \| > \gamma$, para todo $r \geq 0$, e assim

$$\| \| \mathbb{E}(Y(t_r)) \| \| > \gamma > 0, \quad \forall r \geq 0. \quad (4.22)$$

Demonstraremos por absurdo, assumindo que o SLSM-M seja MS-estável. Assim, existe $\alpha \geq 0$ finito de modo que $\| \| X(t) \| \| < \alpha$ para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$\mathbb{E}(Y(t)) = X(t) < \alpha I, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.23)$$

E além disso, a MS-estabilidade implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \| \| X(t) \| \| = 0$, e assim existe \bar{t} de modo que

$$\mathbb{E}(Y(t)) = X(t) < \frac{\gamma}{2nM} I, \quad t \geq \bar{t}. \quad (4.24)$$

Das desigualdades (4.23) e (4.24), temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y(t_r)) &= \mathbb{E}(Y(t_r)\mathbb{1}_{\{t_r \geq \bar{t}\}}) + \mathbb{E}(Y(t_r)\mathbb{1}_{\{t_r < \bar{t}\}}) \\
 &= \mathbb{E}(Y(t_r) \mid t_r \geq \bar{t})\mathcal{P}(t_r \geq \bar{t}) + \mathbb{E}(Y(t_r) \mid t_r < \bar{t})\mathcal{P}(t_r < \bar{t}) \\
 &< \frac{\gamma}{2nM}I\mathcal{P}(t_r \geq \bar{t}) + \alpha I\mathcal{P}(t_r < \bar{t}) \\
 &= \left(\frac{\gamma}{2nM}\mathcal{P}(t_r \geq \bar{t}) + \alpha\mathcal{P}(t_r < \bar{t})\right)I.
 \end{aligned}$$

Para r suficientemente grande, temos que $\mathcal{P}(t_r < \bar{t}) < \gamma/(2\alpha nM)$ e como $\mathcal{P}(t_r \geq \bar{t}) \leq 1$, temos

$$||| \mathbb{E}(Y(t_r)) ||| < \left(\frac{\gamma}{2nM} + \alpha\frac{\gamma}{2\alpha nM}\right) ||| I ||| = \left(\frac{\gamma}{2nM} + \alpha\frac{\gamma}{2\alpha nM}\right) nM = \gamma,$$

que é absurdo, considerando a Equação 4.22, pois

$$||| \mathbb{E}(Y(t_r)) ||| > \gamma$$

para todo $r \geq 0$ e, para r suficientemente grande,

$$||| \mathbb{E}(Y(t_r)) ||| < \gamma.$$

Portanto, o SLSM-M não é MS-estável. ■

Vamos definir alguns processos auxiliares, que serão utilizados nos próximos dois resultados. Para cada $r \geq 0$, defina o processo $\Psi_r(t) = (\Psi_{1,r}(t), \dots, \Psi_{M,r}(t)) \in \mathbb{S}^{n+}$, $\Psi_0(0) = \mathbf{X}(0)$,

$$\Psi_{i,r}(t) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}\mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} \mid t_0, t_1, \dots). \quad (4.25)$$

Como as informações $\{t_0, t_1, \dots\}$ são dadas, $\Psi_{i,r}(t)$ é um valor esperado com respeito a $\{T_1, T_2, \dots\}$ apenas. O vetorizado desse processo sobre o domínio de tempo contínuo $[t_r, t_{r+1})$ pode ser então obtido adaptando o resultado do Corolário 1, que com o Lema 2 nos dá a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(\Psi_r(t)) &= e^{\mathbf{A}(t-t_r)} \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}\tau_{r-1})} \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}\tau_{r-2})} \dots \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}\tau_0)} \hat{\varphi}(\mathbf{X}(0)) \\
 &= e^{\mathbf{A}(t-t_r)} \left(\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}\tau_{r-p})} \right) \hat{\varphi}(\mathbf{X}(0)), \quad t_r \leq t < t_{r+1}, \quad r \geq 0.
 \end{aligned}$$

Lema 3. Considere $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$. Então existe $\eta > 0$ tal que $||| \mathbf{X}(t) ||| < \eta$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Por brevidade de notação, vamos denotar por $\mathbf{u} : [0, \infty)^r \mapsto \hat{\varphi}(\mathbb{S}^{n+})$ a função definida por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = \mathbf{u}(s_0, s_1, \dots, s_{r-1}) &= \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}s_{r-1})} \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}s_{r-2})} \dots \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}s_0)} \hat{\varphi}(\mathbf{X}(0)) \\
 &= \left(\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(\mathbf{A}s_{r-p})} \right) \hat{\varphi}(\mathbf{X}(0)).
 \end{aligned}$$

Como $\tau_r \sim f_{\tau_r}(s_r|\sigma) = \sigma e^{-\sigma s_r} \mathbb{1}_{\{s_r \geq 0\}}$ para todo $r \geq 0$, e $t_r = \sum_{p=0}^{r-1} \tau_p$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\varphi}(\Psi_r(t))) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p\}} e^{(t - \sum_{p=0}^{r-1} s_p)A} \mathbf{u} f_{\tau_0}(s_0) \cdots f_{\tau_{r-1}}(s_{r-1}) ds_0 \cdots ds_r \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p\}} e^{(t - \sum_{p=0}^{r-1} s_p)A} \mathbf{u} \sigma e^{-\sigma s_0} \cdots \sigma e^{-\sigma s_{r-1}} ds_0 \cdots ds_r. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A matriz $(A - \sigma I)$ é Hurwitz estável, pela hipótese $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) < \sigma$. Assim, existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $(A - (\sigma - \epsilon)I)$ também seja Hurwitz estável. Numa situação assim, à semelhança do que acontece na [Equação 2.4](#), existe $\beta > 0$ de forma que, para todo $t \geq 0$, e todo $x \in \hat{\varphi}(\mathbb{S}^{n+})$,

$$\left\| e^{(A - (\sigma - \epsilon)I)t} x \right\| = \left\| e^{-(\sigma - \epsilon)t} e^{(At)} x \right\| \leq \beta \left\| x \right\|, \quad t \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\left\| e^{(At)} x \right\| \leq e^{(\sigma - \epsilon)t} \beta \left\| x \right\|, \quad t \geq 0.$$

Note que $\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p$ implica $t - \sum_{p=0}^{r-1} s_p < s_r$. Assim, com a desigualdade acima e a [Equação 4.26](#), avaliamos o valor da norma $n_0 := \left\| \mathbb{E}(\hat{\varphi}(\Psi_r(t))) \right\|$. Iniciamos pela desigualdade triangular da norma com respeito à integral: $\left\| \int (\cdot) dt \right\| \leq \int \left\| \cdot \right\| dt$. Aplicando em n_0 , vem

$$\begin{aligned} n_0 &\leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p\}} \left\| e^{A(t - \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} \mathbf{u} \right\| \sigma^{r+1} e^{(-\sigma \sum_{p=0}^r s_p)} ds_0 \cdots ds_r \\ &\leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p\}} e^{(\sigma - \epsilon)(t - \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} \beta \left\| \mathbf{u} \right\| \sigma^{r+1} e^{(-\sigma \sum_{p=0}^r s_p)} ds_0 \cdots ds_r \quad (4.27) \\ &< \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\sum_{p=0}^{r-1} s_p \leq t < \sum_{p=0}^r s_p\}} e^{(\sigma - \epsilon)s_r} \beta \left\| \mathbf{u} \right\| \sigma^{r+1} e^{(-\sigma \sum_{p=0}^r s_p)} ds_0 \cdots ds_r, \end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Também é válido que $\left\| \mathbf{u} \right\| = \left\| \hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{u}) \right\| = \langle \hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{u}), I \rangle$.

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} n_0 &< \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{(\sigma - \epsilon)s_r} \beta \left\| \mathbf{u} \right\| \sigma^{r+1} e^{(-\sigma \sum_{p=0}^r s_p)} ds_0 \cdots ds_r \\ &= \int_0^\infty \beta e^{(\sigma - \epsilon)s_r} \left(\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\| \mathbf{u} \right\| \sigma^r e^{(-\sigma \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} ds_0 \cdots ds_{r-1} \right) \sigma e^{-\sigma s_r} ds_r \\ &= \int_0^\infty \sigma \beta e^{-\epsilon s_r} \left(\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \langle \hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{u}), I \rangle \sigma^r e^{(-\sigma \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} ds_0 \cdots ds_{r-1} \right) ds_r \\ &= \int_0^\infty \sigma \beta e^{-\epsilon s_r} \left\langle \hat{\varphi}^{-1} \left(\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbf{u} \sigma^r e^{(-\sigma \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} ds_0 \cdots ds_{r-1} \right), I \right\rangle ds_r \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora substituimos \mathbf{u} pela sua expressão.

$$\begin{aligned}
n_0 &< \int_0^\infty \sigma \beta e^{-\epsilon s_r} \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(s_r-p)\mathbf{A}} \right] \sigma^r e^{(-\sigma \sum_{p=0}^{r-1} s_p)} ds_0 \cdots ds_{r-1} \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\}, I \right\rangle ds_r \\
&= \int_0^\infty \sigma \beta e^{-\epsilon s_r} \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \left(\prod_{p=1}^r \sigma \mathbb{A}_d \int_0^\infty e^{(s_r-p)\mathbf{A}} e^{-\sigma s_{r-p}} ds_{r-p} \right) \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\}, I \right\rangle ds_r \\
&\stackrel{(4.18)}{=} \sigma \beta \int_0^\infty e^{-\epsilon s_r} ds_r \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \left(\prod_{p=1}^r \sigma \mathbb{A}_d \mathbb{A} \right) \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \right\}, I \right\rangle \\
&\stackrel{(4.18)}{=} \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \langle \hat{\phi}^{-1} \{ \mathcal{T}^r \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \}, I \rangle \\
&= \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \langle \mathbf{Z}_r, I \rangle = \frac{\sigma \beta}{\epsilon} ||| \mathbf{Z}_r |||.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Note que os processos $\mathbf{X}(t)$ e $\Psi_r(t)$ se relacionam por

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_i(t) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}} \mid t_0, t_1, \dots)) \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}} \sum_{r=0}^\infty \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} \mid t_0, t_1, \dots \right) \right] \\
&= \sum_{r=0}^\infty \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}} \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} \mid t_0, t_1, \dots) \right] = \sum_{r=0}^\infty \mathbb{E}(\Psi_{i,r}(t)).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Dessa forma, considerando a [Equação 4.29](#), e novamente, pela desigualdade triangular em relação à norma e o somatório, temos que

$$\begin{aligned}
||| \mathbf{X}(t) ||| &\leq \sum_{r=0}^\infty ||| \mathbb{E}(\Psi_r(t)) ||| < \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \sum_{r=0}^\infty ||| \mathbf{Z}_r ||| = \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \sum_{r=0}^\infty ||| \hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) ||| = \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \sum_{r=0}^\infty ||| \mathcal{T}^r \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) ||| \\
&\leq \frac{\sigma \beta}{\epsilon} \sum_{r=0}^\infty ||| \mathcal{T}^r ||| ||| \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) ||| < \frac{\sigma \beta \gamma}{\epsilon} ||| \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) |||,
\end{aligned}$$

e pela *Proposition 2.5* de [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#), existe algum $0 < \zeta < 1$ e algum $\kappa > 0$ de modo que $||| \mathcal{T}^r ||| \leq \kappa \zeta^r$. Ora, temos uma progressão geométrica de razão ζ , e que, portanto, tem soma finita: $\sum_{r=0}^\infty ||| \mathcal{T}^r ||| \leq \kappa \sum_{r=0}^\infty \zeta^r = \kappa/(1 - \zeta) = \gamma < \infty$. A norma $||| \mathcal{T}^r |||$ denotada aqui é a norma da matriz \mathcal{T}^r induzida pela norma $||| \cdot |||$ de $\hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+})$, isto é, $||| \mathcal{T}^r ||| = \sup_{x \in \hat{\phi}(\mathbb{S}^{n+}), x \neq 0} ||| \mathcal{T}^r x ||| / ||| x |||$. O valor $\eta = \sigma \beta \gamma \epsilon^{-1} ||| \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) ||| < \infty$ conclui a demonstração. ■

Teorema 4. O SLSM-M é MS-estável conforme [Definição 8](#) se, e somente se $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ simultaneamente com $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$.

Demonstração.

► (MS-estabilidade $\Rightarrow \max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$).

Para provar essa proposição, podemos provar a sua contrapositiva, ou seja,

► ($\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) \geq \sigma$ ou $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) \geq 1 \Rightarrow$ não MS-estabilidade).

Mas esse é exatamente o [Teorema 3](#), já provado. Falta-nos provar a seguinte proposição:

► ($\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1 \Rightarrow$ MS-estabilidade).

Vamos aplicar o [Lema 3](#) a uma versão perturbada do sistema. Para diferenciar ambas as versões, o sistema normal é parametrizado por $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_d, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{P})$ e a notação dos operadores e variáveis será a mesma até aqui, como por exemplo, \mathbf{A} , \mathcal{T} , \mathbf{X} e Ψ . Com $\epsilon > 0$ fixado, o sistema perturbado é parametrizado por $(\mathbf{A} + \epsilon I, \mathbf{A}_d, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{P})$, isto é, trocando A_i por $(A_i + \epsilon I)$ para cada $i \in \mathbf{M}$, e a notação dos operadores e variáveis será $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathcal{T}}$, $\tilde{\mathbf{X}}$ e $\tilde{\Psi}$. Da definição de \mathbf{A} no [Teorema 1](#), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= (\mathbf{\Lambda}' \otimes I_{n^2}) + \text{diag}_{i \in \mathbf{M}} \left((A_i + \epsilon I) \otimes I + I \otimes (A_i + \epsilon I) \right) \\ &= (\mathbf{\Lambda}' \otimes I_{n^2}) + \text{diag}_{i \in \mathbf{M}} \left(A_i \otimes I + I \otimes A_i \right) + \text{diag}_{i \in \mathbf{M}} \left(\epsilon I \otimes I + I \otimes \epsilon I \right) = \mathbf{A} + 2\epsilon I. \end{aligned}$$

Segundo a [Equação 4.25](#), com a versão perturbada, lembrando que $t_r = \tau_0 + \dots + \tau_{r-1}$, temos

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tilde{\Psi}_r(t)) &= \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-t_r)} \left[\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(\tau_{r-p} \tilde{\mathbf{A}})} \right] \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \\ &= \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} e^{(\mathbf{A}+2\epsilon I)(t-t_r)} \left[\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{\tau_{r-p}(\mathbf{A}+2\epsilon I)} \right] \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \\ \hat{\phi}(\tilde{\Psi}_r(t)) &= \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} e^{2\epsilon(t-t_r + \sum_{p=1}^r \tau_{p-1})} e^{\mathbf{A}(t-t_r)} \left[\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(\tau_{r-p} \mathbf{A})} \right] \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \\ &= \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}} e^{2\epsilon t} e^{\mathbf{A}(t-t_r)} \left[\prod_{p=1}^r \mathbb{A}_d e^{(\tau_{r-p} \mathbf{A})} \right] \hat{\phi}(\mathbf{X}(0)) \\ &= e^{2\epsilon t} \Psi_r(t). \end{aligned}$$

Em acordo com a [Equação 4.30](#), o resultado acima leva a

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{\Psi}_r(t)) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{2\epsilon t} \mathbb{E}(\Psi_r(t)) = e^{2\epsilon t} \mathbf{X}(t) \iff \mathbf{X}(t) = e^{-2\epsilon t} \tilde{\mathbf{X}}(t). \quad (4.31)$$

Temos $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$ por hipótese. Pelo [Lema 3](#), $\|\mathbf{X}(t)\| < \eta_0$ para algum $\eta_0 > 0$ com $t \geq 0$, e assim mostramos que $\mathbf{X}(t)$ é uniformemente limitado. Falta-nos mostrar que seu limite é zero. Se o sistema for perturbado por $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno² então $\tilde{\mathcal{T}}$ é bem definido e cumpre $\max(|\text{eig}(\tilde{\mathcal{T}})|) < 1$. Dessa forma, temos, pelo [Lema 3](#), que existe $\eta > 0$ tal que $\|\tilde{\mathbf{X}}(t)\| < \eta$ para todo $t \geq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-2\epsilon t} \tilde{\mathbf{X}}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2\epsilon t} \|\tilde{\mathbf{X}}(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \eta e^{-2\epsilon t} = 0.$$

² Em particular, se ϵ satisfizer $\epsilon < (\sigma - \max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))))/2$, temos que $\max(\text{real}(\text{eig}(\tilde{\mathbf{A}}))) < \sigma$, isto é, $\tilde{\mathbf{A}}$ é Hurwitz estável, o que garante a existência de $\tilde{\mathcal{T}}$. Mas isso não é em geral suficiente para fazer com que $\max(|\text{eig}(\tilde{\mathcal{T}})|) < 1$, motivo pelo qual declaramos “ ϵ suficientemente pequeno”, que existe, pois $\tilde{\mathcal{T}} = \sigma \mathbb{A}_d (\mathbf{A} - (\sigma - 2\epsilon)I)^{-1}$ (vide [Lema 2](#)) é uma função contínua com respeito a ϵ , e de igual maneira o são os autovalores de $\tilde{\mathcal{T}}$, quando $\epsilon < (\sigma - \max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))))/2$. Vide [Exemplo 4](#).

Este limite conclui a MS-estabilidade do SLSM-M. ■

Corolário 4. Se o SLSM-M é MSS, então existem $\epsilon, \eta > 0$ de modo que $\mathbb{E}(\|x(t)\|^2) < \eta e^{-2\epsilon t}$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Temos $\mathbb{E}(\|x(t)\|^2) = \|\|X(t)\|\|$ (Equação 4.5). Com a Equação 4.31, juntamente com o Lema 3 aplicado a $\tilde{X}(t)$, obtemos o resultado. ■

O exemplo a seguir, gerado aleatoriamente, mostra que a escolha de ϵ para perturbar o sistema, como fizemos na prova do teorema acima, precisa ser pequeno o suficiente para não corromper a estabilidade. De fato, com $2\epsilon < \sigma - \max(\text{real}(\text{eig}(A)))$ satisfeita, existe o operador $\tilde{\mathcal{T}}$, mas isso não é suficiente para a manutenção da estabilidade após a perturbação.

Exemplo 4 (Sistema perturbado). Seja o sistema parametrizado por $S_0 = (A, A_d, \Lambda, P, \mu, \sigma)$, dados abaixo.

$$[A_1|A_2|A_{d1}|A_{d2}] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -0.4888 & -0.4231 & -0.7615 & 0.5131 & 0.48657 & 0.50707 & 0.49657 & 0.49477 \\ -0.2895 & 1.1276 & 0.4568 & -0.7638 & 0.50137 & 0.50377 & 0.50327 & 0.50687 \end{array} \right]$$

$$[\Lambda | P] = \left[\begin{array}{cc|cc} -2.4074 & 2.4074 & 0.5290 & 0.4710 \\ 0.9630 & -0.9630 & 0.6767 & 0.3233 \end{array} \right], \quad \mu = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4], \quad \sigma = 2.$$

Considere o sistema S_0 . Temos $\max(\text{real}(\text{eig}(A))) = 0.6812 < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) = 0.8996 < 1$, portanto **é um sistema MS-estável**.

Para o sistema S_1 perturbado por $\epsilon_1 = 0.65$, isto é, $S_1 = (A + \epsilon_1 I, A_d, \Lambda, P, \mu, \sigma)$, temos $\max(\text{real}(\text{eig}(\tilde{A}_1))) = 1.9812 > \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\tilde{\mathcal{T}}_1)|) = 18.9675 > 1$, em que $\tilde{A}_1, \tilde{\mathcal{T}}_1$ são os operadores A, \mathcal{T} com respeito a S_1 . Vemos que **o sistema não é MS-estável** para ϵ_1 .

Finalmente, para o sistema S_2 perturbado por $\epsilon_2 = 0.01$, ou seja, $S_2 = (A + \epsilon_2 I, A_d, \Lambda, P, \mu, \sigma)$, temos $\max(\text{real}(\text{eig}(\tilde{A}_2))) = 0.7012 < \sigma$ e $\max(|\text{eig}(\tilde{\mathcal{T}}_2)|) = 0.9087 < 1$, em que $\tilde{A}_2, \tilde{\mathcal{T}}_2$ são os operadores A, \mathcal{T} com respeito a S_2 . Assim, para ϵ_2 , **temos um sistema MS-estável**.

Definição 9 (MSS-tm). O SLSM-M é MS-estável em tempo misto (MSS-tm) se for MSS (Definição 8) e também cumprir $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq T_r} \|x_{dr}(k)\|^2) = 0$.

Teorema 5 ($\text{MSS} \iff \text{MSS-tm}$). Todo sistema misto é MSS se, e somente se for MSS-tm.

Demonstração. $\text{MSS-tm} \implies \text{MSS}$ é trivial. Vamos mostrar a recíproca. Dados os parâmetros $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM}) \in \mathbb{M}^{n,n}$, considere $\alpha = \max_{i \in M} \sup_{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1} \|A_{di}v\|$. Relembre que

$$x_{dr}(k) = A_{d\theta_{dr}(k-1)} A_{d\theta_{dr}(k-2)} \cdots A_{d\theta_{dr}(1)} A_{d\theta_{dr}(0)} x_{dr}(0).$$

Como $0 \leq k \leq T_r \leq \hat{T} - 1$ para todo $r \geq 1$, e $x_{dr}(0) = x_{r-1}(t_r^-)$, temos

$$\max_{0 \leq k \leq T_r} \|x_{dr}(k)\|^2 \leq \alpha^{2T_r} \|x_{dr}(0)\|^2 \leq \alpha^{2(\hat{T}-1)} \|x_{r-1}(t_r^-)\|^2$$

Tomando o valor esperado, temos

$$\mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq T_r} \|x_{dr}(k)\|^2) \leq \alpha^{2(\hat{T}-1)} \mathbb{E}(\|x_{r-1}(t_r^-)\|^2) = \alpha^{2(\hat{T}-1)} \mathbb{E}(\|\mathbf{x}(t_r^-)\|^2) = \alpha^{2(\hat{T}-1)} \|\mathbf{X}(t_r^-)\|.$$

Devido à MSS, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = 0$. Portanto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq T_r} \|x_{dr}(k)\|^2) \leq \alpha^{2(\hat{T}-1)} \lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t_r^-)\| = 0.$$

■

O Teorema 5 parece contraintuitivo, pois, ao se adicionar uma hipótese extra à Definição 8, tem-se uma definição equivalente a ela (Definição 9). No caso discutido, isso aconteceu porque o SLSM-M tem as partes em tempo contínuo e em tempo discreto “amarradas” entre si, de modo que, se houver convergência ou divergência de uma delas, a outra precisará acompanhar de alguma forma. Também foi importante o fato de os T_r serem finitos, porque, se $T_r = \infty$ para algum r , não teríamos $\|x_{dr}(k)\|$ garantidamente limitado. Seria necessária alguma hipótese extra para que $\|x_{dr}(k)\|$ seja limitado para todo $k = 0, \dots, T_r$ e todo r quando $T_r = \infty$.

Exemplo 5 (Pêndulo invertido: estabilidade). Damos continuidade ao Exemplo 2. Agora, calculamos algumas informações de interesse. A dinâmica em tempo contínuo é instável, como se pode observar de

$$a_0 = \max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) = 3.1623 > 0.$$

Como a_0 não está no semiplano esquerdo do plano complexo, \mathbf{A} é uma matriz Hurwitz instável. No entanto, $a_0 < \sigma = 10$, o que nos garante a existência de \mathcal{T} . Já a dinâmica em tempo discreto, controlada com ganho $K_d^{(1)}$, cumpre

$$\max(|\text{eig}(\mathbf{A}_d)|) = 0.9608 < 1,$$

dentro do círculo unitário, e portanto é uma dinâmica estável. Quando calculamos \mathcal{T} , com base na Equação 4.18 e no Lema 2, observamos que seu raio espectral é $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) = 0.7029$, dentro do disco unitário. Portanto, o SLSM-M é MS-estável.

4.4 Casos particulares

Nesta pequena seção, mostramos uma forma de obter um SLSM-C ou um SLSM-D partindo-se de um SLSM-M, e portanto aqueles passam a ser casos particulares deste. A ideia é bastante simples, na verdade. Dado um SLSM-M, um SLSM-D é obtido “congelando-se” o SLSM-C que o compõe. E de forma similar, obtemos um SLSM-C “congelando” o SLSM-D.

SLSM-C

O caso particular em que $A_{di} = I$ para todo $i \in \mathbf{M}$ leva as equações de diferenças da Equação 3.2 a terem solução constante durante todo o domínio de tempo discreto $\{0, \dots, T_r\}$.

Fazendo $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ fixamos a cadeia de Markov $\theta_{dr}(k)$ em seu estado inicial ao longo de $\{0, \dots, T_r\}$, conforme a [Equação 3.7](#). Desta forma, a trajetória $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t))$ não apresenta descontinuidades nos tempos t_r .

Nesta configuração acima, temos $\mathbf{A}_d = \mathbf{I}$, como pode ser visto no [Teorema 2](#), e assim, a combinação convexa de potências de \mathbf{A}_d , descrita na (4.18), resulta em $\mathbb{A}_d = \mathbf{I}$, e finalmente $\mathcal{T} \stackrel{(4.18)}{=} \sigma \mathbb{A}$. Vamos fazer uma análise sobre o espectro de \mathcal{T} .

Suponha R uma matriz invertível com autovalor λ_R associado ao autovetor v . Então

$$Rv = \lambda_R v \iff R^{-1}Rv = R^{-1}\lambda_R v \iff R^{-1}v = \frac{1}{\lambda_R}v,$$

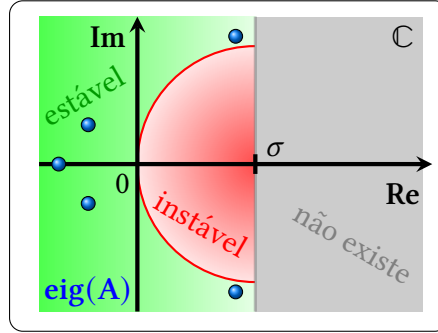
isto é, os autovalores de R^{-1} são os recíprocos dos autovalores de R . Usando esse argumento, sendo λ_A um autovalor de \mathbf{A} , e como $(\sigma\mathbf{I} - \mathbf{A})$ tem autovalor $\sigma - \lambda_A$, temos que $(\sigma\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ tem autovalor $\frac{1}{\sigma - \lambda_A}$, se essa inversa existir. Finalmente, $\mathcal{T} = \sigma(\sigma\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ tem autovalor $\frac{\sigma}{\sigma - \lambda_A}$ (vide [Lema 2](#)). Assim, $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$ acontece somente quando $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$ (condição de existência de \mathcal{T}), simultaneamente com $\left| \frac{\sigma}{\sigma - \lambda_A} \right| < 1$ que equivale a $\sigma < |\sigma - \lambda_A|$, para todo $\lambda_A \in \text{eig}(\mathbf{A})$.

Considerando modelar um SLSM-C como caso particular de um SLSM-M, o parâmetro σ não tem importância do ponto de vista de modelagem, sendo importante apenas para estabilidade do modelo misto. Por esse motivo, σ pode ser arbitrado. Com σ grande o suficiente, temos a equivalência entre a MS-estabilidade do caso misto e do caso “puramente” contínuo. Conforme Teorema 3.15 de [Costa, Fragoso e Todorov \(2013\)](#), a MS-estabilidade do SLSM-C é equivalente a $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < 0$. Vamos colocar esses resultados no seguinte teorema.

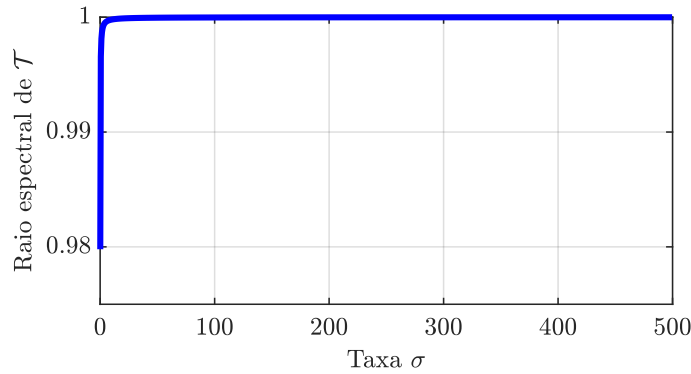
Teorema 6 (MS-estabilidade do SLSM-C subjacente). Sejam $\mathbf{A}_{di} = \mathbf{I}$ para todo $i \in \mathbf{M}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Para σ suficientemente grande, temos que o SLSM-M é MS-estável no sentido da [Definição 8](#) se, e somente se o SLSM-C é MS-estável no sentido de $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < 0$ ([Definição 3](#)).

Demonstração. A MS-estabilidade do SLSM-C clássica é equivalente à condição de \mathbf{A} ser Hurwitz estável, ou seja, $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < 0$, vide Teorema 3.15 de [Costa, Fragoso e Todorov \(2013\)](#). Ora, $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < 0 < \sigma$, garantindo a existência de $\mathcal{T} = \sigma \mathbb{A}$. E mais, como $\text{real}(\lambda_A) < 0$ para todo $\lambda_A \in \text{eig}(\mathbf{A})$, $|\sigma - \lambda_A| > \sigma$, o que garante a estabilidade de \mathcal{T} (vide [Figura 18](#) para entender a estabilidade do SLSM-M do caso particular com respeito ao espectro de \mathbf{A}). Por outro lado, seja λ_A um autovalor de \mathbf{A} fixado, satisfazendo $\text{real}(\lambda_A) > 0$ (o SLSM-C não é MS-estável). Assim, existe $\sigma > 0$ suficientemente grande de modo que o círculo centrado no complexo $\sigma + 0\sqrt{-1}$ e raio σ tenha λ_A em seu interior, isto é, $|\sigma - \lambda_A| \leq \sigma$, o que significa que \mathcal{T} tem autovalor maior que 1 em módulo e assim o SLSM-M não é MS-estável. ■

Exemplo 6. Considere \mathbf{A} do [Exemplo 1](#), mas com $\Lambda = 10^{-2}\Lambda^a$, dando-nos $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) = -0.0021$, portanto Hurwitz estável. Na [Figura 19](#) mostramos que, para \mathbf{A} Hurwitz estável, \mathcal{T} é também estável, irrespectivamente à taxa $\sigma > 0$.

Figura 18 – Região de estabilidade, instabilidade e inexistência de \mathcal{T} , em função de $\text{eig}(A)$ (pontos azuis).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Quando A é Hurwitz estável, \mathcal{T} será estável independentemente de σ .

SLSM-D

O caso particular em que $A_i = 0$ para todo $i \in \mathbf{M}$ leva as equações diferenciais da [Equação 3.1](#) a terem solução constante para todo $t \in [t_r, t_{r+1})$. Falta-nos congelar a cadeia de Markov, para que ela permaneça no estado inicial dado na [Equação 3.6](#), durante toda a duração do domínio de tempo contínuo $t \in [t_r, t_{r+1})$. Isto é feito com $\Lambda = 0$. Com isso, a trajetória do estado, $(x(t), \theta(t))$, pode ser alterada somente durante o domínio de tempo discreto, ou seja, $(x(t), \theta(t))$, $t \geq 0$, (tempo misto com SLSM-D em intervalos degenerados) passa a ser equivalente a $(x(k), \theta(k))$, $k \in \{0, 1, \dots\}$ (podemos ignorar os intervalos de tempo contínuo e atermos somente aos intervalos de tempo discreto).

Quanto aos operadores do sistema de segundo momento, vemos que $A = 0$ ([Teorema 1](#)), e como $e^{At} = e^{0t} = I$, temos que a ação de A no sistema de segundo momento dado na [Equação 4.9](#) é a de fazer com que o sistema permaneça no estado inicial para todo $t \in [t_r, t_{r+1})$. Temos também que $\mathbb{A} \stackrel{(4.18)}{=} \sigma^{-1}I$. Se $T_r = 1$ com probabilidade 1, isto é, $\mu = [0, 1]$, então $\mathbb{A}_d = A_d$, de modo que $\mathcal{T} = \mathbb{A}_d \stackrel{(4.18)}{=} A_d$. O Teorema 3.9 de [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#) diz que a MS-estabilidade do SLSM-D é equivalente a $\max(|\text{eig}(A_d)|) < 1$. Vamos colocar esses resultados no seguinte teorema.

Teorema 7 (MS-estabilidade do SLSM-D subjacente). Considere um SLSM-M com $\Lambda = 0$ e $A_i = 0$ para todo $i \in \mathbf{M}$. Se $\mu = [0, 1]$, então o SLSM-M é MS-estável no sentido da [Definição 8](#)

se, e somente se $\max(|\text{eig}(\mathbf{A}_d)|) < 1$ (Definição 4).

Demonstração. Nas configurações dadas, temos $T_r = 1$ com probabilidade 1, $\mathcal{T} = \mathbf{A}_d$ e a condição de MS-estabilidade para \mathbf{A}_d é $\max(|\text{eig}(\mathbf{A}_d)|) < 1$ pelo Teorema 3.9 de Costa, Fragoso e Marques (2005), e este é o mesmo critério de MS-estabilidade para a MS-estabilidade de \mathcal{T} pelo Teorema 4, de modo que o teorema está trivialmente demonstrado. A condição de existência de \mathcal{T} é $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) = 0 < \sigma$, e é trivialmente satisfeita, pois $\sigma > 0$ por hipótese. ■

Temos mostrado que, analisar a MS-estabilidade do SLSM-M como o que definimos não é algo trivial, e acabamos precisando “discretizar” o sistema em tempo misto por meio da variável de segundo momento \mathbf{Z} e então relacionar a estabilidade do segundo momento \mathbf{X} à estabilidade de \mathbf{Z} , o que foi feito no Lema 3. O Teorema 4 nos dá um critério fácil de ser aplicado, no intuito de determinar se um SLSM-M é ou não MS-estável. Discutimos as alterações necessárias para os casos em que a duração de tempo em cada domínio possa ser fixa, e também descrevemos as situações em que um SLSM-C é um caso particular do SLSM-M, e igualmente um SLSM-D. No próximo capítulo lidaremos com H_2 para o modelo SLSM-M, uma vez que esse índice nos dá uma medida de desempenho muito utilizada na literatura de controle.

SOBRE H_2

O *custo* ou *norma* H_2 é um índice de desempenho bem conhecido. Ele quantifica o quão rápido/devagar a norma da saída esperada do sistema tende a zero, após uma perturbação por um impulso unitário no início do horizonte de tempo. Em outras palavras, com $x(0) = 0$, aplica-se um impulso unitário ao sistema em $t = 0$ (respectivamente $k = 0$) para perturbá-lo. O índice H_2 é a integral de $\mathbb{E}(\|y(t)\|^2)$ para $t \in [0, \infty)$ (ou a soma de $\mathbb{E}(\|y(k)\|^2)$ no caso de tempo discreto, ao longo de $k = 0, 1, 2, \dots$). Como vamos falar da saída $y(t)/y(k)$ a partir daqui, recomendamos ao leitor revisitar a ilustração da [Figura 3](#) (p. 35), que mostra sistemas determinísticos/sem saltos e sua saída, e da [Figura 9](#) (p. 43), que mostra SLSM e sua saída.

Podemos mexer nas matrizes C de modo a penalizar mais ou menos algumas componentes de $x(t)$. Isso é um ótimo recurso, especialmente quando o vetor x tem componentes em diferentes escalas, como por exemplo, um componente em km e outro em mm. Vejamos: suponha que $x(t) \in \mathbb{R}^2$ e desejamos penalizar $[x(t)]_1$ dez vezes mais que $[x(t)]_2$. Podemos escolher uma matriz $C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para cumprir esta tarefa, quando a saída é algo da forma $y(t) = Cx(t)$. Há alguns trabalhos que otimizam o controle minimizando um limitante superior para H_2 (“custo garantido”, como eles denominam), como em [Costa, Fragoso e Todorov \(2015\)](#), [Stadtman e Costa \(2017\)](#). Nestes textos, os autores trazem um problema de otimização com restrições de LMI para obtenção dos ganhos de realimentação linear de estado.

Na próxima seção, trazemos alguns resultados publicados em [Ribeiro et al. \(2023\)](#), referentes a H_2 para sistemas discretos com saltos nos parâmetros (não necessariamente markovianos), no qual maiores detalhes e demonstrações podem ser consultadas. Na seção subsequente, propomos uma formulação de H_2 para o sistema em tempo misto, e uma fórmula para calculá-lo.

5.1 H_2 para Sistemas Lineares com Saltos nos Parâmetros em tempo discreto

Considere o processo estocástico $\theta = \{\theta(k) \in \mathbf{M}, k \geq 0\}$, $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots\}$ (não é necessariamente uma cadeia de Markov, pode ser outro processo) e o sistema com saltos:

$$\Phi_D : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + E_{\theta(k)}w(k), \\ y(k) = C_{\theta(k)}x(k), \\ x(0) = 0, \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que $y = \{y(k)\}$ é a saída, $w = \{w(k)\}$ é um sinal de entrada determinístico, as matrizes $A = (A_1, \dots, A_M) \in \mathbb{M}^{n,n}$, $E = (E_1, \dots, E_M) \in \mathbb{M}^{n,n_w}$, $C = (C_1, \dots, C_M) \in \mathbb{M}^{n_y,n}$ são conhecidas. A definição clássica de H_2 , denotada por $\|\Phi_D\|_2$, é a seguinte:

$$\|\Phi_D\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_w} \mathbb{E}(\|y^j(k)\|^2),$$

em que $y^j(k)$ é a saída referente ao sinal $w_j = \{w(0) = e_j, w(k) = 0, k \geq 1\}$, em que e_j é o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n_w} (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005). A norma euclidiana é denotada por $\|\cdot\|$, de modo que, para todo vetor $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \sqrt{u'u} = \sqrt{\text{tr}(uu')}$.

Definimos o processo estocástico $G = \{G(k) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}, k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\}$, a resposta impulsiva de Φ_D .

$$G(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0, \\ C_{\theta(1)}E_{\theta(0)}, & k = 1, \\ C_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}A_{\theta(k-2)} \cdots A_{\theta(1)}E_{\theta(0)}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Este processo é definido de forma que, para uma realização $\theta_0 = \{\theta(0), \theta(1), \dots\}$ do processo θ , tenhamos a correspondente saída $y^j(k) = G(k)w_j(0) = G(k)e_j$.

Denotamos norma de Frobenius por $\|\cdot\|_F$, de modo que $\|X\|_F = \sqrt{\text{tr}(X'X)}$ para toda matriz X . A respeito do sinal determinístico w (entrada), e dos processos estocásticos G (resposta impulsiva), y (saída), temos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \|G\|_F &= \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\|G(k)\|_F^2)}, \\ \|y\|_{p,r} &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\|y(k)\|_r^p) \right]^{1/p}, \\ \|w\|_{p,r} &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|w(k)\|_r^p \right]^{1/p}, \quad p, r \in [1, \infty), \end{aligned} \quad (5.3)$$

nas quais empregamos as normas usuais, como em $\|u\|_r = [\sum_{i=1}^{n_w} |u_i|^r]^{1/r}$. Quando $r = 2$, omitimos r , e escrevemos apenas $\|y\|_p$ e $\|w\|_p$. Assim, definimos os espaços dos sinais de norma finita

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,r}^{n_y} &= \{y : y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad \|y\|_{p,r} < \infty\}, & (\mathcal{L}_p^{n_y} \text{ quando } r = 2), \\ \mathcal{L}_{p,r}^{n_w} &= \{w : w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, \quad \|w\|_{p,r} < \infty\}, & (\mathcal{L}_p^{n_w} \text{ quando } r = 2).\end{aligned}$$

Teorema 8. A norma H_2 do sistema Φ_D satisfaz $\|\Phi_D\|_2 = \|G\|_F$.

Teorema 9. $\|\cdot\|_F$ definido na [Equação 5.3](#) é uma norma.

Considere o seguinte tipo de sinal determinístico:

$$\mathcal{S} = \{w : w(k) = 0, \quad k \geq 1, \quad w(0) = v, \quad v \in \mathbb{R}^{n_w}, \quad v \neq 0\}. \quad (5.4)$$

Como qualquer $v \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma combinação linear da base canônica (e_1, \dots, e_{n_w}) , podemos entender $w \in \mathcal{S}$ como uma combinação linear de impulsos em $k = 0$. A função $\phi : \mathbb{R}^{n_w} \mapsto [0, \infty)$ que definimos é uma função do complemento ortonormal de $w(0) = v \neq 0$,

$$\phi(v) = \sum_{\ell=1}^{n_w-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} (G(k) z_\ell z_\ell' G(k)') \right), \quad (5.5)$$

de modo que $(z_1, \dots, z_{n_w-1}, v\|v\|^{-1})$ seja uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n_w} . Em particular, quando $n_w = 1$, temos que $v\|v\|^{-1} = 1$ é uma base de \mathbb{R}^1 e $\phi(v) = 0$ por definição.

Mesmo que $\{z_1, \dots, z_{n_w-1}\}$ não sejam únicos, $\phi(v)$ é bem definido, pois

$$I = \frac{vv'}{\|v\|^2} + \sum_{\ell=1}^{n_w-1} z_\ell z_\ell', \quad (5.6)$$

e assim temos unicidade de $\phi(v)$:

$$\phi(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^{n_w-1} \text{tr} [G(k) z_\ell z_\ell' G(k)'] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ \text{tr} \left[G(k) \left(I - \frac{vv'}{\|v\|^2} \right) G(k)' \right] \right\}.$$

Teorema 10. Para todo sinal de entrada $w \in \mathcal{S}$, temos

$$\|y\|_2^2 = \|w\|_2^2 (\|\Phi_D\|_2^2 - \phi(w(0))).$$

Apenas em condições bastante específicas se tem $\phi(w(0)) = 0$, de modo que H_2 ser norma autoinduzida, isto é, $\|\Phi_D\|_2 = \|y\|_2 / \|w\|_2$, é um caso raro. Por exemplo, se existir uma probabilidade positiva de que $G(k)$ tenha posto completo para algum k , $\mathbb{E} \left(\text{tr} (G(k) z_\ell z_\ell' G(k)') \right) > 0$, e assim, $\phi(w(0)) > 0$, pois $z_\ell \neq 0$ leva a $G(k) z_\ell \neq 0$. Um caso trivial em que $\phi(w(0)) = 0$ é quando $n_w = 1$. Vejamos um caso não trivial em que $\phi(w(0)) = 0$.

Exemplo 7. Considere um caso em que $w(0) = e_1$ e $G(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ com probabilidade 1, para todo $k \geq 0$. O complemento ortonormal de $w(0)$ é $z_1 = e_2 = [0, 1]'$. Nestas condições,

$$\phi(w(0)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} (G(k) e_2 e_2' G(k)') \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = 0.$$

Vamos tomar doravante as seguintes hipóteses.

(h1) $\mathbf{M} = \{1, \dots, M\}$ e $\theta = \{\theta(k) \in \mathbf{M}, k \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov homogênea, com probabilidade de transição $\mathcal{P}(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i) = p_{ij}$.

(h2) A distribuição inicial da cadeia é invariante, isto é, para todo $j \in \mathbf{M}$ vale

$$\mathcal{P}(\theta(0) = j) = \sum_{i \in \mathbf{M}} \mathcal{P}(\theta(0) = i) p_{ij}.$$

(h3) O SLSM é MS-estável, isto é, para $w \equiv 0$ e quaisquer condições iniciais $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\theta(0) \in \mathbf{M}$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x(k)\|^2) = 0$.

Vamos considerar o operador $\mathcal{R}(Y) = (\mathcal{R}_1(Y), \dots, \mathcal{R}_M(Y)) \in \mathbb{S}^{n+}$, no qual $Y = (Y_1, \dots, Y_M) \in \mathbb{S}^{n+}$, definido por

$$\mathcal{R}_i(Y) = A_i' \left(\sum_{j \in \mathbf{M}} p_{ij} Y_j \right) A_i, \quad \forall i \in \mathbf{M}.$$

Denotaremos $\mathcal{R}_i^k(Y) = \mathcal{R}_i(\mathcal{R}^{k-1}(Y))$ para todo $k \geq 1$, e também $\mathcal{R}^0(Y) = Y$. O próximo Lema é bem conhecido na literatura, vide *Theorem 3.9* de [Costa, Fragoso e Marques \(2005\)](#).

Lema 4. Sob a hipótese (h1), as seguintes condições equivalem:

- (i) O SLSM dado na [Equação 5.1](#) é MS-estável.
- (i) As equações de Lyapunov acopladas $Y_i = \mathcal{R}_i(Y) + Q_i$ têm solução única $Y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_i^k(Q)$ para todo $Q = (Q_1, \dots, Q_M) \in \mathbb{S}^{n+}$.

Vamos reescrever a definição da resposta impulsiva da seguinte forma.

$$G(k+1, \ell) = C_{\theta(k+1)} \Pi(k, \ell), \quad \Pi(k, \ell) = \begin{cases} A_{\theta(k)} \cdots A_{\theta(\ell+1)} E_{\theta(\ell)}, & k > \ell, \\ E_{\theta(\ell)}, & k = \ell, \\ 0, & k < \ell. \end{cases} \quad (5.7)$$

Tendo em vista a [Equação 5.2](#), ou a expressão da [Equação 5.7](#), temos a identidade $y(k) = C_{\theta(k)} x(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} G(k, \ell) w(\ell)$, advinda da iteração do sistema [5.1](#), qualquer que seja o sinal determinístico $\{w(k)\}$. Ilustramos abaixo com $k = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ x(1) = A_{\theta(0)} 0 + E_{\theta(0)} w(0) \\ x(2) = A_{\theta(1)} [E_{\theta(0)} w(0)] + E_{\theta(1)} w(1) \\ x(3) = A_{\theta(2)} [A_{\theta(1)} E_{\theta(0)} w(0) + E_{\theta(1)} w(1)] + E_{\theta(2)} w(2) \\ y(3) = C_{\theta(3)} [A_{\theta(2)} A_{\theta(1)} E_{\theta(0)} w(0) + A_{\theta(2)} E_{\theta(1)} w(1) + E_{\theta(2)} w(2)] \\ \quad = C_{\theta(3)} [\Pi(2, 0) w(0) + \Pi(2, 1) w(1) + \underbrace{\Pi(2, 2) w(2) + \Pi(2, 3) w(3) + \dots}_{=0}] = \sum_{\ell=0}^{\infty} G(3, \ell) w(\ell). \end{array} \right.$$

Lema 5. Considere as hipóteses (h1), (h3) e a [Equação 5.1](#). Então

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G(k, \ell)' G(k, \ell)) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k, \ell)' G(k, \ell) \right) = \sum_{i \in \mathbf{M}} \mathcal{P}(\theta(\ell) = i) E_i' Y_i E_i, \quad (5.8)$$

em que $Y_i = \mathcal{R}_i(Y) + \sum_{j \in \mathbf{M}} p_{ij} C_j' C_j$.

Teorema 11. Considere as hipóteses (h1), (h2) e (h3). Seja Y como no [Lema 5](#). Assim, denotando $R = \sum_{i \in \mathbf{M}} \mathcal{P}(\theta(0) = i) E_i' Y_i E_i$, temos

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_1^{n_w}} \frac{\|y\|_2}{\|w\|_1} = \sqrt{\max(\text{eig}(R))}. \quad (5.9)$$

Corolário 5. Considere as hipóteses (h1), (h2) e (h3). Para todo $w \in \mathcal{L}_1^{n_w}$, temos

$$\|\Phi_D\|_2 \geq \frac{\|y\|_2}{\|w\|_1}. \quad (5.10)$$

Se relaxarmos hipóteses do [Corolário 5](#), a [Equação 5.10](#) não é mais válida. Veja o exemplo a seguir, em que (h2) e (h3) não são satisfeitas

Exemplo 8. Considere $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(\theta(0) = 1) = 1$, $p_{12} = p_{23} = p_{33} = 1$, $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = 1.1$, $E_i = C_i = 1$ para todo $i \in \mathbf{M}$. O sinal de entrada considerado é $w = \{w(20) = 1, w(k) = 0, k \geq 0, k \neq 20\}$, e assim $\|w\|_1 = 1$, bem como $\|\Phi_D\|_2 = \|G\|_F = 1$, e no entanto $\|y(k)\|_2$ é uma sequência divergente.

No [Exemplo 8](#), temos que a cadeia de Markov é $\theta = (\theta(0), \theta(1), \theta(2), \dots) = (1, 2, 3, 3, 3, \dots)$ com probabilidade 1. Nessas condições, é fácil ver o porquê de a sequência $\|y(k)\|$ divergir: a cadeia de Markov tem um modo absorvente instável (modo 3), e o impulso é aplicado depois de a cadeia atingir este modo. Note que, para $k \in \{0, 1\}$, $A_{\theta(k)} = 0$, e para $k \geq 2$, temos $A_{\theta(k)} = 1.1$. Se o sistema for perturbado em algum instante $k \geq 2$, então $x(k+1) = 1.1x(k)$ será uma progressão geométrica de razão 1.1, e consequentemente $y(k) = C_3 x(k) = x(k)$ divergirá. Por outro lado, $G(1) = C_{\theta(1)} E_{\theta(0)} = 1$, $G(2) = C_{\theta(2)} A_{\theta(1)} E_{\theta(0)} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, e similarmente para todo $k \geq 3$, temos $G(k) = C_{\theta(k)} A_{\theta(k-1)} \cdots A_{\theta(1)} E_{\theta(0)} = 1 \cdot (1.1)^{k-2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$, de modo que $\|G\|_F = 1$.

5.2 H_2 para SLSM-M

Para tempo discreto, temos visto resultados para SLSM-D, e para alguns sistemas com saltos nos parâmetros não necessariamente markovianos. Agora, nosso foco é os sistemas em tempo misto.

Como o índice H_2 é bem conhecido e tem uma importância na determinação de ganhos para controle, chamados *controle H_2* , é importante fazer a necessária adaptação para o modelo SLSM-M que propusemos. Chegamos a uma expressão fácil de se calcular, dada na [Equação 5.23](#).

Considere o modelo de tempo misto definido a seguir, em que $A = (A_1, \dots, A_M)$, $A_d = (A_{d1}, \dots, A_{dM}) \in \mathbb{M}^{n,n}$, $C = (C_1, \dots, C_M)$, $C_d = (C_{d1}, \dots, C_{dM}) \in \mathbb{M}^{n_y, n}$, $E = (E_1, \dots, E_M) \in \mathbb{M}^{n, n_w}$ e $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ para $t \geq 0$.

$$\Phi_1 \begin{cases} \frac{d}{dt} x_r(t) = A_{\theta_r(t)} x_r(t) + E_{\theta_r(t)} w(t), & t_r \leq t < t_{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \\ x_r(t_r) = x_{dr}(T_r), \\ x_0(0) = 0, \\ x_{dr}(k+1) = A_{d\theta_{dr}(k)} x_{dr}(k), & 0 \leq k \leq T_r - 1, \quad r = 1, 2, \dots, \\ x_{dr}(0) = x_{r-1}(t_r^-), \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.11) \\ (5.12) \\ (5.13) \\ (5.14) \\ (5.15) \end{matrix}$$

com a transição da cadeia de Markov dada por

$$\Phi_2 \begin{cases} \theta_r(t_r) = \theta_{dr}(T_r), \\ \theta_{dr}(0) = \theta_{r-1}(t_r^-), \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.16) \\ (5.17) \end{matrix}$$

com trajetória $(x(t), \theta(t))$ e saída $y(t)$ ¹ definidos por

$$\Phi_3 \begin{cases} x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t) \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}}, \\ \theta(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \theta_r(t) \mathbb{1}_{\{t_r \leq t < t_{r+1}\}}, \\ y(t) = C_{\theta(t)} x(t), & t \in [0, \infty), \\ y_{dr}(k) = C_{d\theta_r(k)} x_r(k), & 0 \leq k \leq T_r - 1, \quad r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.18) \\ (5.19) \\ (5.20) \\ (5.21) \end{matrix}$$

Definição 10 (Norma H_2 para o sistema misto). Considere MS-estável o sistema $\Phi := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ definido em (5.11)–(5.20). A norma H_2 desse sistema, denotada por $\|\Phi\|_2$, é definida por

$$\|\Phi\|_2^2 = \int_0^\infty \mathbb{E}(\|y(t)\|^2) dt + \sum_{r=1}^\infty \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \|y_{dr}(k)\|^2 \right). \quad (5.22)$$

em que $\{w(t), t \geq 0\}$ é o processo estocástico tal que $\mathcal{P}(w(t) = e_j \delta(t)) = 1/n_w$ para todo $j = 1, 2, \dots, n_w$, com e_j sendo o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n_w} .

Lema 6. Suponha que o SLSM-M é MS-estável. Então a série do processo Z_r definido na Equação 4.19 converge e é dada por

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{\varphi}(Z_r) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}^r \hat{\varphi}(Z_0) = \tilde{\mathcal{T}} \hat{\varphi}(Z_0),$$

em que $\tilde{\mathcal{T}} = (I - \mathcal{T})^{-1}$.

Demonstração. Conforme o Corolário 2, podemos escrever

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{\varphi}(Z_r) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}^r \hat{\varphi}(Z_0) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}^r \right) \hat{\varphi}(Z_0).$$

¹ Pode ser interessante revisitar a Figura 9 (p. 43), onde a saída é ilustrada.

Agora, a tarefa é determinar a série de potências de \mathcal{T} . Como o SLSM-M é estável, temos que $\max(|\text{eig}(\mathcal{T})|) < 1$, e além disso, temos que \mathcal{T} não tem autovalor em 1. Defina

$$\tilde{\mathcal{T}} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}^r = I + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \dots.$$

Multiplicando essa igualdade por \mathcal{T} , temos

$$\mathcal{T}\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \mathcal{T}^3 + \dots.$$

Subtraindo a segunda da primeira igualdade, obtemos

$$\tilde{\mathcal{T}} - \mathcal{T}\tilde{\mathcal{T}} = I \iff (I - \mathcal{T})\tilde{\mathcal{T}} = I.$$

Como \mathcal{T} não tem autovalor em 1, existe $(I - \mathcal{T})^{-1}$ e multiplicamos a última igualdade, obtendo

$$\tilde{\mathcal{T}} = (I - \mathcal{T})^{-1}.$$

■

Teorema 12 (Cálculo da norma H_2). Considere MS-estável o sistema Φ dado em (5.11)–(5.20). Sejam $R = (R_1, \dots, R_M)$, $R_d = (R_{d1}, \dots, R_{dM}) \in \mathbb{S}^{n+}$ tais que $R_i = C_i' C_i$, $R_{di} = C_{di}' C_{di}$ para todo $i \in \mathbf{M}$. A norma H_2 definida na Equação 5.22 satisfaz

$$\|\Phi\|_2^2 = \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left(\mathbb{A} \tilde{\mathcal{T}} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \right), R \right\rangle + \sigma \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left(\mathbb{D} \mathbb{A} \tilde{\mathcal{T}} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \right), R_d \right\rangle, \quad (5.23)$$

em que $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_M) \in \mathbb{S}^{n+}$ tal que $\mathbf{Q}_i = \frac{1}{n_w} E_i E_i' \pi_i(0)$, $\tilde{\mathcal{T}} = (I - \mathcal{T})^{-1}$ e $\mathbb{D} = \sum_{i=1}^{\hat{T}} \mu_i \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{A}_d^k$.

Demonstração. No que segue, vamos calcular as parcelas da Equação 5.23 em função de uma condição inicial, separadamente, mas primeiro, vamos discutir essa condição inicial.

Note, pela Equação 5.22, que a integral sobre o intervalo $[0, \infty)$ é equivalente à integral sobre o intervalo aberto $(0, \infty)$, uma vez que $y(0) = C_{\theta(0)} \mathbf{x}(0) = 0$ por definição, de modo que $y(0)$ não tem nenhuma contribuição na integral. Isso justifica empregarmos, apenas em $r = 0$, a média $\mathbf{Z}_{i,0}^+ := \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t_0^+) \mathbf{x}(t_0^+)') \mathbb{1}_{\{\theta(t_0^+)=i\}} \mid t_0^+)) = \mathbf{X}(0^+)$. Esse cuidado é necessário, pois temos $x_0(0) = 0$, $\mathbf{X}_i(0) = \mathbb{E}(x_0(0) x_0(0)') \mathbb{1}_{\{\theta_0(0)=i\}} = 0$ e $\mathbf{Z}_0 = 0$, o que leva a uma sequência \mathbf{Z}_r de zeros. No entanto, logo após $t = 0$, em $t = 0^+$, é adicionado energia ao sistema com o impulso unitário, de modo que a sequência \mathbf{Z}_r pode ser diferente de zero.

Para sermos claros, vamos considerar dois problemas. O primeiro é o problema original, com condição inicial $x_0(0) = 0$, e o segundo é um problema auxiliar, com condição inicial denotada por $\tilde{x}_0(0)$, que corresponde ao $x_0(t)$ “imediatamente após” o impulso (vamos denotar as variáveis do problema auxiliar com um til: “ \sim ”).

Primeiro, defina $\tilde{x}_0(0)$ tal que $\mathcal{P}(\tilde{x}_0(0) = E_{\theta_0(0)} e_j \mid w(t) = e_j \delta(t)) = 1$, para $j = 1, \dots, n_w$. Vamos mostrar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} x_0(t) \big|_{w(t)=e_j \delta(t)} = \tilde{x}_0(0) \big|_{w(t)=e_j \delta(t)}$ com probabilidade 1.

Para uma dada realização da cadeia de Markov $\{\theta_0^\omega(t), 0 \leq t < t_1\}$, considere $\epsilon_\omega > 0$ menor que o tempo s_ω do primeiro salto da cadeia, isto é, $\epsilon_\omega < s_\omega$, ou $\epsilon_\omega < t_1$, caso a cadeia não salte em $[0, t_1)$. A solução da [Equação 5.11](#) em $t = \epsilon_\omega$ é bem conhecida (vide, por exemplo, o Teorema 249 de [Baumeister e Leitão \(2014\)](#)), e corresponde à solução de um sistema **sem saltos**. Vamos condicioná-la a $w(t) = e_j \delta(t)$, obtendo

$$\begin{aligned} x_0(\epsilon_\omega) \Big|_{w(t)=e_j \delta(t)} &= e^{\epsilon_\omega A_{\theta_0(0)}} x_0(0) + \int_0^{\epsilon_\omega} e^{(\epsilon_\omega-s)A_{\theta_0(0)}} E_{\theta_0(s)} e_j \delta(s) ds \\ &= 0 + e^{\epsilon_\omega A_{\theta_0(0)}} E_{\theta_0(0)} e_j \quad (\text{devido à propriedade do delta de Dirac}). \end{aligned}$$

Desse modo, quando tomamos $\epsilon > 0$ pequeno, satisfazendo $\epsilon < \epsilon_\omega$, e tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, temos que $\epsilon < \epsilon_\omega$ para todo ω com probabilidade 1, e ainda, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{\epsilon A_{\theta_0(0)}} = e^0 = I$, dando-nos a identidade que vincula o problema original ao problema auxiliar:

$$x_0(0^+) \Big|_{w(t)=e_j \delta(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_0(\epsilon) \Big|_{w(t)=e_j \delta(t)} = E_{\theta_0(0)} e_j = \tilde{x}_0(0) \Big|_{w(t)=e_j \delta(t)}. \quad (5.24)$$

Finalmente, vamos calcular o segundo momento de $\tilde{x}_0(0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(0^+) &:= \mathbb{E}(x_0(0^+) x_0(0^+)' \mathbb{1}_{\{\theta_0(0^+)=i\}}) \\ &\stackrel{TPT}{=} \sum_{j=1}^{n_w} \mathbb{E}(x_0(0^+) x_0(0^+)' \mathbb{1}_{\{\theta_0(0^+)=i\}} | w(t) = e_j \delta(t)) \mathcal{P}(w(t) = e_j \delta(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n_w} \mathbb{E}(\tilde{x}_0(0) \tilde{x}_0(0)' \mathbb{1}_{\{\theta_0(0)=i\}} | w(t) = e_j \delta(t)) \mathcal{P}(w(t) = e_j \delta(t)) \\ &\stackrel{(5.24)}{=} \frac{1}{n_w} \sum_{j=1}^{n_w} \mathbb{E}(E_{\theta_0(0)} e_j e_j' E_{\theta_0(0)}' \mathbb{1}_{\{\theta_0(0)=i\}}) = \frac{1}{n_w} \mathbb{E}(E_{\theta_0(0)} E_{\theta_0(0)}' \mathbb{1}_{\{\theta_0(0)=i\}}) \\ &= \frac{1}{n_w} \mathbb{E}(E_{\theta_0(0)} E_{\theta_0(0)}' | \theta_0(0) = i) \mathcal{P}(\theta_0(0) = i) = \frac{1}{n_w} E_i E_i' \pi_i(0). \end{aligned}$$

Diante dessas considerações, podemos tomar $\mathbf{Q} = \mathbf{X}(0^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{X}(\epsilon)$ em lugar de $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{X}(0)$, uma vez que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon < s_\omega$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon < t_1$, ou seja, o resultado que obtemos é válido para qualquer $s_\omega > 0$ (qualquer realização da cadeia de Markov), e também para qualquer tempo $t_1 > 0$ (qualquer realização do processo de Poisson), com probabilidade 1.

Temos uma sequência de intervalos disjuntos $[t_r, t_{r+1})$, de modo que sua união é $\bigcup_{r=0}^{\infty} [t_r, t_{r+1}) = [0, \infty)$, em que t_r são variáveis aleatórias. Sendo $\mathcal{F} = \{t_0, T_1, t_1, T_2, t_2, \dots\}$, e denotando a primeira parcela na [Equação 5.22](#) por $\|\Phi^1\|_2^2$, referente à dinâmica em tempo contínuo, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi^1\|_2^2 &= \int_0^\infty \mathbb{E}(\|y(t)\|^2) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}(\mathbb{E}(\|y(t)\|^2 | \mathcal{F})) dt \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbb{E}(\|y(t)\|^2 | \mathcal{F}) dt \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \mathbb{E}(\|y(t)\|^2 | \mathcal{F}) dt \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \mathbb{E}(y(t)' y(t) | \mathcal{F}) dt \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \text{tr} \left(\mathbb{E}(y(t) y(t)' | \mathcal{F}) \right) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi^1\|_2^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \text{tr} \left(\mathbb{E}(C_{\theta(t)} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)' C_{\theta(t)}' \mid \mathcal{F}) \right) dt \right) \\
&\stackrel{TPT}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \text{tr} \left(\sum_{i \in \mathbf{M}} \mathbb{E}(C_{\theta(t)} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)' C_{\theta(t)}' \mid \theta(t) = i, \mathcal{F}) \mathcal{P}(\theta(t) = i \mid \mathcal{F}) \right) dt \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbf{M}} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \text{tr} \left(C_i \mathbb{E}(\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)' \mid \theta(t) = i, \mathcal{F}) C_i' \right) \mathcal{P}(\theta(t) = i \mid \mathcal{F}) dt \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbf{M}} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \text{tr} \left(\mathbb{E}(\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}} \mid \mathcal{F}) C_i' C_i \right) dt \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbf{M}} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \mathbf{Y}_{i,r}(t) dt \cdot R_i \right) \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \mathbf{Y}_r(t) dt \right), R \right\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, para cada $r \geq 0$, suponha que exista uma primitiva $\mathbf{W}_r(t)$ para o processo $\mathbf{Y}_r(t)$, de modo que, conforme o [Corolário 1](#), tenhamos o seguinte PVIC

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{W}_r(t_r + t) = \mathbf{Y}_r(t_r + t) = \hat{\phi}^{-1} \left(e^{At} \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right), \\ \mathbf{W}_r(t_r) = \mathbf{Y}_r(t_r), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\|\Phi^1\|_2^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}^-} \mathbf{Y}_r(t) dt \right), R \right\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} (\mathbf{W}_r(t_{r+1}^-) - \mathbf{W}_r(t_r)), R \right\rangle \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} (\mathbb{E}(\mathbf{W}_r(t_r + \tau_r^-) \mid t_r) - \mathbf{W}_r(t_r)), R \right\rangle \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} \sigma e^{-\sigma s} \mathbf{W}_r(t_r + s) ds - \mathbf{W}_r(t_r) \right), R \right\rangle \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \mathbb{E} (\mathbf{U}_r(t_r) - \mathbf{W}_r(t_r)), R \right\rangle,
\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{U}_r(t_r) = \int_0^{\infty} \sigma e^{-\sigma s} \mathbf{W}_r(t_r + s) ds.$$

Agora, vamos calcular $\mathbf{U}_r(t_r)$ de forma analítica, integrando por partes.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{W}_r(t_r + s), & du &= \mathbf{Y}_r(t_r + s) ds, \\ dv &= \sigma e^{-\sigma s} ds, & v &= -e^{-\sigma s}. \end{aligned}$$

Como o sistema é MS-estável, temos que $\max(\text{real}(\text{eig}(\mathbf{A}))) < \sigma$, o que implica a

existência de \mathbb{A} .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_r(t_r) &= \left[-e^{-\sigma s} \mathbf{W}_r(t_r + s) \right]_{s=0}^{s=\infty} + \int_0^\infty e^{-\sigma s} \mathbf{Y}_r(t_r + s) ds \\
 &\stackrel{(4.17)}{=} \left[\mathbf{W}(t_r) - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{W}_r(t_r + s)}{e^{\sigma s}} \right] + \int_0^\infty e^{-\sigma s} \hat{\phi}^{-1} \left(e^{As} \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right) ds \\
 &\stackrel{*}{=} \mathbf{W}_r(t_r) + 0 + \hat{\phi}^{-1} \left(\int_0^\infty e^{As} e^{-\sigma s} ds \cdot \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right) \\
 &\stackrel{(4.18)}{=} \mathbf{W}_r(t_r) + \hat{\phi}^{-1} (\mathbb{A} \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r))) \stackrel{(5.25)}{=} \mathbf{W}_r(t_r) + \hat{\phi}^{-1} (\mathbb{A} \hat{\phi}(\mathbf{W}_r(t_r))).
 \end{aligned}$$

Note em \star que, se existem $\epsilon > 0$ e $0 < \delta < \infty$ tal que $\|\mathbf{W}_r(t_r + s)\| < \delta$ para todo $s > \epsilon$ (isso significa que $\|\mathbf{W}_r(t_r + s)\|$ não cresce indefinidamente, mas é limitado por δ quando s é suficientemente grande), então o limite $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{W}_r(t_r + s)}{e^{\sigma s}}$ é zero. Do contrário (o caso em que $\|\mathbf{W}_r(t_r + s)\|$ cresce indefinidamente), podemos usar L'Hôpital e obter

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{W}_r(t_r + s)}{e^{\sigma s}} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{Y}_r(t_r + s)}{\sigma e^{\sigma s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{\phi}^{-1} \left(e^{-\sigma s} e^{As} \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right)}{\sigma} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{\phi}^{-1} \left(e^{(A - \sigma I)s} \hat{\phi}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right)}{\sigma}.$$

Como $(A - \sigma I)$ é Hurwitz estável por hipótese, o limite é zero. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \|\Phi^1\|_2^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \langle \mathbb{E}(\mathbf{U}_r(t_r) - \mathbf{W}_r(t_r)), R \rangle \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \langle \mathbb{E}(\mathbf{W}_r(t_r) + \hat{\phi}^{-1}(\mathbb{A} \hat{\phi}(\mathbf{W}_r(t_r))) - \mathbf{W}_r(t_r)), R \rangle \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \mathbb{A} \hat{\phi} \left(\mathbb{E}(\mathbf{Y}_r(t_r)) \right) \right\}, R \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Pelo [Lema 1](#) e pelo [Corolário 2](#), temos

$$\|\Phi^1\|_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \mathbb{A} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) \right\}, R \right\rangle = \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \mathbb{A} \sum_{r=0}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{Z}_r) \right\}, R \right\rangle \stackrel{\text{Lema 6}}{=} \left\langle \hat{\phi}^{-1} \left\{ \mathbb{A} \bar{\mathcal{T}} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \right\}, R \right\rangle.$$

Agora, vamos lidar com a segunda parcela da [Equação 5.22](#), referente à dinâmica de tempo discreto, e a denotaremos por $\|\Phi^2\|_2^2$. Inicialmente, vamos calcular a média

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \mathbf{A}_d^k \right) \stackrel{TPT}{=} \sum_{i=1}^{\hat{T}} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \mathbf{A}_d^k \mid T_r = i - 1 \right) \mathcal{P}(T_r = i - 1) = \sum_{i=1}^{\hat{T}} \mu_i \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}_d^k = \mathbb{D}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 \|\Phi^2\|_2^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \|y_{d_r}(k)\|^2 \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \mathbb{E}(y_{d_r}(k) y_{d_r}(k)' \mid \mathcal{F}) \right) \right) \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} \left(\sum_{k=0}^{T_r} \mathbb{E}(C_{d_{\theta_r}(k)} x_{d_r}(k) x_{d_r}(k)' C_{d_{\theta_r}(k)}' \mid \mathcal{F}) \right) \right) \\
 &\stackrel{TPT}{=} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\text{tr} \left(\sum_{i \in \mathbf{M}} \sum_{k=0}^{T_r} \mathbb{E}(C_{d_{\theta_r}(k)} x_{d_r}(k) x_{d_r}(k)' C_{d_{\theta_r}(k)}' \mid \mathcal{F}, \theta_r(k) = i) \mathcal{P}(\theta_r(k) = i \mid \mathcal{F}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi^2\|_2^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr} \left(C_{di}' C_{di} \sum_{k=0}^{T_r} \mathbb{E}(x_{dr}(k) x_{dr}(k)' \mid \mathcal{F}, \theta_r(k) = i) \mathcal{P}(\theta_r(k) = i \mid \mathcal{F}) \right) \right) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr} \left(C_{di}' C_{di} \sum_{k=0}^{T_r} \mathbb{E}(x_{dr}(k) x_{dr}(k)' \mathbb{1}_{\{\theta_r(k)=i\}} \mid \mathcal{F}) \right) \right) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i \in \mathbf{M}} \text{tr} \left(C_{di}' C_{di} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} Y_{dri}(k) \right) \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} A_d^k \hat{\phi}(Y_{dr}(0)) \right) \right] \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} A_d^k \hat{\phi}(Y_{r-1}(t_r^-)) \right) \right] \right\rangle \stackrel{\star}{=} \sum_{r=1}^{\infty} \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{T_r} A_d^k \right) \hat{\phi}(\mathbb{E}(Y_{r-1}(t_r^-))) \right] \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{D} \hat{\phi}(\mathbb{E}(Y_{r-1}(t_r^-))) \right] \right\rangle \stackrel{\text{Corolário 3}}{=} \sum_{r=1}^{\infty} \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{D} \sigma \mathbb{A} \hat{\phi}(Z_{r-1}) \right] \right\rangle \\
&= \sigma \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{D} \mathbb{A} \hat{\phi} \left(\sum_{r=0}^{\infty} Z_r \right) \right] \right\rangle \stackrel{\text{Lema 6}}{=} \sigma \left\langle R_d, \hat{\phi}^{-1} \left[\mathbb{D} \mathbb{A} \tilde{\mathcal{T}} \hat{\phi}(\mathbf{Q}) \right] \right\rangle.
\end{aligned}$$

A igualdade em \star é devida às hipóteses de independência de $\{T_r\}$ e $\{t_r\}$. ■

Exemplo 9 (H_2 do pêndulo invertido). Em continuação do [Exemplo 2](#), consideramos as matrizes $C = C_d$ e $D = D_d$ dadas na [Equação A.11](#) com $c_1 = c_2 = 5$, $c_3 = c_4 = 1$, $d_1 = d_2 = 10$. No [Teorema 12](#), usamos a matriz $C = C$, e para dois diferentes ganhos, a matriz de malha fechada $C_d = C_d + D_d K_d^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, para cálculo de H_2 , e tomamos

$$E' = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \end{bmatrix}.$$

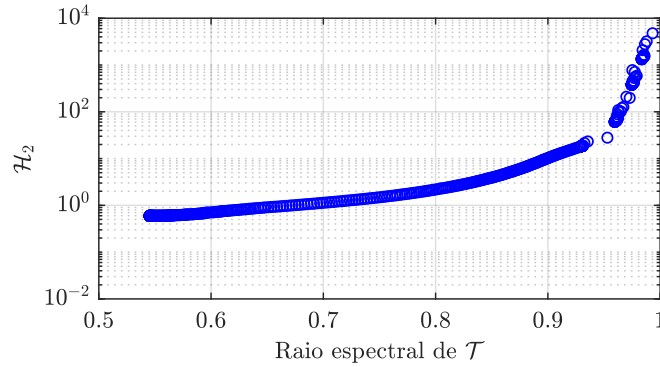
Para efeito de comparação, vamos adotar os ganhos $K_d^{(1)}$ e $K_d^{(2)}$, dados no [Exemplo 2](#). Calculamos H_2 referente à dinâmica do SLSM-M com a malha fechada $A_d \leftarrow A_d + B_d K_d^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, e obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 1 – Comparação entre os ganhos $K_d^{(1)}$ e $K_d^{(2)}$.

	H_2	$\max(\text{eig}(\mathcal{T}))$
$K_d^{(1)}$	0.8878	0.7029
$K_d^{(2)}$	0.5806	0.5456

Na [Tabela 1](#), percebemos que o ganho $K_d^{(2)}$ é mais estabilizante, como se pode observar no raio espectral de \mathcal{T} . Também temos que o respectivo custo H_2 é menor.

Figura 20 – Diagrama mostrando o H_2 e o raio espectral de \mathcal{T} para diversos ganhos K_d para o problema do Exemplo 2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar de aparentarem ter uma forte relação, H_2 pequeno não implica o raio espectral de \mathcal{T} ser pequeno, como na Figura 20. Para desmistificar essa relação aparente, basta utilizar $C = C_d = 0I_8$ no Teorema 12. Teremos então que $H_2 = 0$ independentemente do ganho K_d , e o raio espectral de \mathcal{T} pode assumir diferentes valores, em função do K_d .

Apresentamos brevemente resultados de H_2 para o caso de sistemas lineares com saltos em tempo discreto, que já foram publicados, bem como alguns resultados particulares de H_2 para SLSM-D. Também trouxemos uma noção de H_2 para o SLSM-M, que pode servir como índice de desempenho para calcular ganhos de controle para estabilização da saída do sistema. Definir um método para calcular ganhos ótimos no sentido de minimizar H_2 pode ser um tema rico para pesquisa, pois temos vários casos que podem ser considerados: controle somente em tempo contínuo; somente em tempo discreto; ambos; controle que observa os modos perfeitamente; que observa parcialmente; ou que não observa os modos. Também abre a possibilidade de estudar o índice H_{2rti} , como foi feito em Romero, Ribeiro e Costa (2023).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, definimos um modelo de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a tempo Misto contínuo-discreto ([Equação 3.1–Equação 3.7](#)), um sistema dinâmico estocástico que alterna entre domínio de tempo contínuo e domínio de tempo discreto, com tempos de permanência aleatórios em cada domínio.

Estudamos sua estabilidade em sentido global ([Definição 8](#)), e com a análise feita, estabelecemos um critério para verificação dessa estabilidade, uma condição necessária e suficiente facilmente calculada, em termos dos parâmetros do modelo e que se verifica pela inspeção do espectro de duas matrizes, A (autovalores à esquerda de σ) e \mathcal{T} (autovalores dentro do disco unitário), vide [Teorema 4](#).

Colocamos em perspectiva os casos particulares do modelo de tempo misto: caso com dinâmica apenas em tempo contínuo e caso com dinâmica apenas em tempo discreto ([Seção 4.4](#)), mostrando que os critérios de estabilidade clássicos são capturados pelo modelo misto nestes casos.

Definimos a norma H_2 ([Definição 10](#)), e desenvolvemos a fórmula para seu cálculo, fácil de ser computada em termos dos parâmetros do modelo, disponível no [Teorema 12](#).

Trouxemos um exemplo completo de um pêndulo invertido, sujeito a falhas na atuação de um controlador ([Exemplo 2](#)), no qual apresentamos dois ganhos, calculamos o raio espectral de \mathcal{T} , examinamos o critério de estabilidade no [Exemplo 5](#) para o primeiro ganho, calculamos suas respectivas normas H_2 e simulamos uma trajetória do sistema para cada ganho no [Exemplo 9](#).

6.1 Sugestões de trabalhos futuros

- Definir um SLSM-M para outras distribuições dos tempos T_r e t_r .

- Definir um operador para cálculo de $X(t)$ (vide [Equação 4.2](#)).
- Desenvolver a teoria de H_2 para outras estruturas de observação da cadeia de Markov, como a observação parcial, sem observação, ou observação em clusters.
- Modelar o problema de controle como um problema de otimização, tendo em vista algum objetivo, como por exemplo minimizar H_2 .
- Desenvolver a formulação da norma H_{2rti} para o SLSM-M.
- Desenvolver algum método exato para cálculo dos ganhos do controle.
- Desenvolver a teoria de filtragem, que é o problema de se estimar $x(t)$ através de uma saída $y(t)$.
- Pesquisar aplicações da presente teoria em problemas reais, mostrando casos que se beneficiam desta modelagem.

REFERÊNCIAS

AMORIM, M. F.; GONÇALVES, A. P.; SOUZA, M. Optimal H_2 output-feedback control of sampled systems. **IFAC-PapersOnLine**, v. 49, n. 30, p. 126–131, 2016. ISSN 2405-8963. 4th IFAC Symposium on Telematics Applications TA 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.11.140>>. Citado nas páginas 24 e 47.

AMORIM, M. F.; GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; SOUZA, M. Optimal H_2 output-feedback control of sampled-data systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 93, n. 9, p. 2228–2238, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1551626>>. Citado na página 47.

ARTAXO, M. S. P. G.; FIORAVANTI, A. R. State-dependent switching control for impulsive switched systems with dwell times. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 97, n. 3, p. 480–494, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207179.2022.2155995>>. Citado na página 25.

BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à teoria de controle e programação dinâmica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 86.

BUENO, J. N. A. D.; MARCOS, L. B.; ROCHA, K. D. T.; TERRA, M. H. Regulation of uncertain Markov jump linear systems with application on automotive powertrain control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, v. 53, n. 8, p. 5019–5031, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSMC.2023.3260781>>. Citado na página 25.

CARVALHO, L. de P.; TORIUMI, F. Y.; ANGÉLICO, B. A.; COSTA, O. L. do V. Model-based fault detection filter for markovian jump linear systems applied to a control moment gyroscope. **European Journal of Control**, v. 59, p. 99–108, 2021. ISSN 0947-3580. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2021.02.003>>. Citado na página 21.

COSTA, O. L.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. **Discrete-time Markov jump linear systems**. London: Springer, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/b138575>>. Citado nas páginas 21, 25, 27, 59, 60, 62, 71, 76, 77, 80 e 82.

COSTA, O. L.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. **Continuous-time Markov jump linear systems**. Berlin: Springer, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-642-34100-7>>. Citado nas páginas 21, 25, 59, 60, 62 e 75.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. A detector-based approach for the H_2 control of Markov jump linear systems with partial information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 60, n. 5, p. 1219–1234, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2366253>>. Citado nas páginas 28, 42 e 79.

DOLGOV, M.; KURZ, G.; HANEBECK, U. D. Finite-horizon dynamic compensation of Markov jump linear systems without mode observation. In: **2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)**. [s.n.], 2016. p. 2757–2762. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CDC.2016.7798679>>. Citado na página 22.

DRAGAN, V.; COSTA, E. F. Optimal stationary dynamic output-feedback controllers for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters and additive white noise perturbations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 61, n. 12, p. 3912–3924, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2529505>>. Citado na página 21.

DRĂGAN, V.; COSTA, E. F.; POPA, I.-L.; ABERKANE, S. Exact detectability of discrete-time and continuous-time linear stochastic systems: A unified approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 67, n. 11, p. 5730–5745, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3134633>>. Citado na página 22.

DRAGAN, V.; MOROZAN, T.; STOICA, A. M. **Mathematical methods in robust control of discrete-time linear stochastic systems**. Springer, 2009. ISBN 9781441906298. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0630-4>>. Citado na página 22.

_____. **Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems**. 2nd. ed. Springer, 2013. ISBN 9781461486633. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8663-3>>. Citado na página 22.

FENG, X.; LOPARO, K.; JI, Y.; CHIZECK, H. Stochastic stability properties of jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 1, p. 38–53, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/9.109637>>. Citado nas páginas 25 e 59.

GOMES, M. J. F.; COSTA, E. F. On the stability of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters. In: **Proceedings of the 2010 American Control Conference**. [s.n.], 2010. p. 4159–4163. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5530604>>. Citado na página 42.

IBE, O. C. 14 - Hidden Markov models. In: IBE, O. C. (Ed.). **Markov processes for stochastic modeling**. Second edition. Oxford: Elsevier, 2013. p. 417–451. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407795-9.00014-1>>. Citado na página 42.

_____. 4 - Discrete-time Markov chains. In: IBE, O. C. (Ed.). **Markov Processes for Stochastic Modeling**. Second edition. Oxford: Elsevier, 2013. p. 59–84. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407795-9.00004-9>>. Citado na página 37.

_____. 5 - Continuous-time Markov chains. In: IBE, O. C. (Ed.). **Markov processes for stochastic modeling**. Second edition. Oxford: Elsevier, 2013. p. 85–102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407795-9.00005-0>>. Citado na página 39.

ICHIKAWA, A.; KATAYAMA, H. **Linear time varying systems and sampled-data systems**. Springer London, UK, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BFb0110391>>. Citado na página 47.

LI, X.; HAN, C. Optimal control for Markov jump linear system with multiplicative noise and input delay. In: **2021 33rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC)**. [s.n.], 2021. p. 7561–7566. Disponível em: <<http://doi.org/10.1109/CCDC52312.2021.9602391>>. Citado na página 42.

LIDSKII, E. On the analytic design of controls in systems with random characteristics. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 26, n. 2, p. 373–383, 1962. ISSN 0021-8928. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(62\)90067-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(62)90067-9)>. Citado na página 21.

- LIU, W. On state estimation of discrete-time linear systems with multiplicative noises and Markov jumps. In: **Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference**. [s.n.], 2013. p. 3744–3749. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6640071>>. Citado na página 42.
- MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 3. ed. São Paulo-SP: Editora USP, 2015. Citado na página 48.
- MALLET-PARET, J.; NUSSBAUM, R. D. Generalizing the Krein-Rutman theorem, measures of noncompactness and the fixed point index. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, v. 7, p. 103–143, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11784-010-0010-3>>. Citado na página 101.
- NUSSBAUM, R. D. Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear krein-rutman theorem. In: FADELL, E.; FOURNIER, G. (Ed.). **Fixed Point Theory**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 309–330. ISBN 978-3-540-38600-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BFb0092191>>. Citado na página 101.
- OLIVEIRA, V.; COSTA, E.; VARGAS, J. Digital implementation of a magnetic suspension control system for laboratory experiments. **IEEE Transactions on Education**, v. 42, n. 4, p. 315–322, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/13.804538>>. Citado nas páginas 25 e 59.
- RIBEIRO, J. R.; ROMERO, L. H.; COSTA, E. F. Sobre um novo índice de desempenho tipo H_2 para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto e cadeia de Markov escondida. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2023. v. 10, n. 1, p. 101001–101006. ISSN 2359-0793. Disponível em: <<https://doi.org/10.5540/03.2023.010.01.0100>>. Citado nas páginas 28 e 29.
- RIBEIRO, J. R.; ROMERO, L. H.; COSTA, E. F.; TODOROV, M. G. Comments on the H_2 norm of discrete-time stochastic jump parameter linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, v. 7, p. 1470–1475, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3268018>>. Citado nas páginas 28, 29 e 79.
- ROMERO, L. H.; RIBEIRO, J. R.; COSTA, E. F. On the H_2 control of hidden Markov jump linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, v. 7, p. 1315–1320, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3236892>>. Citado nas páginas 25, 28, 29, 42, 45, 59 e 90.
- SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R.; ARAUJO, V. S. Impulsive Markov jump linear systems: stability analysis and H_2 control. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 42, p. 101089, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101089>>. Citado na página 24.
- STADTMANN, F.; COSTA, O. L. V. H_2 -control of continuous-time hidden Markov jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 8, p. 4031–4037, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2616303>>. Citado nas páginas 21, 28, 42 e 79.
- SWORDER, D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 14, n. 1, p. 9–14, 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1969.1099088>>. Citado nas páginas 25 e 59.
- TEEL, A. R.; SUBBARAMAN, A.; SFERLAZZA, A. Stability analysis for stochastic hybrid systems: A survey. **Automatica**, v. 50, n. 10, p. 2435–2456, 2014. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.08.006>>. Citado na página 23.

TREFETHEN, L. N.; BAU III, D. **Numerical linear algebra**. Philadelphia, PA: SIAM, 1997. Citado nas páginas 32, 33 e 102.

VARGAS, A. N.; COSTA, E. F.; DO VAL, J. a. B. On the control of Markov jump linear systems with no mode observation: application to a DC motor device. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 23, n. 10, p. 1136–1150, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/rnc.2911>>. Citado nas páginas 21, 25 e 59.

YAZ, E. Stabilizing control of discrete systems with jump Markov parameters. In: **Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control**. [s.n.], 1988. p. 1920–1921 vol.3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CDC.1988.194662>>. Citado nas páginas 25 e 59.

ZHANG, F.; ZHANG, Y. Delay-variation-dependent stability for Markovian jump systems with time-varying delay and partial information on transition probabilities. In: **2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)**. [s.n.], 2017. p. 4290–4295. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CCDC.2017.7979252>>. Citado na página 22.

ZHAO, P.; KANG, Y.; ZHAO, Y.-B. A brief tutorial and survey on markovian jump systems: stability and control. **IEEE Systems, Man, and Cybernetics Magazine**, v. 5, n. 2, p. 37–C3, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/MSMC.2018.2881337>>. Citado nas páginas 25 e 59.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998. Citado na página 28.

UM PÊNDULO INVERTIDO

Um pêndulo invertido, montado em uma plataforma é mostrado na [Figura 13](#). O objetivo é modelar o controle de posicionamento de um foguete, antes de seu lançamento, representado pelo pêndulo. Este pode cair a qualquer instante, em qualquer direção em um plano xy , a menos que se aplique uma força $\mathbf{u} = (u, v) = (u(t), v(t))$ adequada. Vamos definir alguns elementos:

- uma massa m é colocada no pêndulo, a massa da plataforma é M , e a gravidade é g ;
- a haste tem comprimento L e massa desprezível;
- o pé da haste se situa no ponto $P = (x, y, 0) = (x(t), y(t), 0)$, centro da plataforma;
- o centro de gravidade se situa no ponto $G = G(t) = (x_G, y_G, z_G) = (x_G(t), y_G(t), z_G(t))$;
- a projeção ortogonal de $G - P$ sobre o plano xz tem comprimento $L_x = L_x(t) = \sqrt{(x_G - x)^2 + z^2}$;
- a projeção ortogonal de $G - P$ sobre o plano yz tem comprimento $L_y = L_y(t) = \sqrt{(y_G - y)^2 + z^2}$;
- o ângulo formado entre o eixo $0z$ e a projeção $G_x = G_x(t)$ do ponto $G - P$ sobre o plano xz é $\phi = \phi(t)$;
- o ângulo formado entre o eixo $0z$ e a projeção $G_y = G_y(t)$ do ponto $G - P$ sobre o plano yz é $\rho = \rho(t)$;
- o ponto G pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_G = x + L_x \sin(\phi) \\ y_G = y + L_y \sin(\rho) \\ z_G = L_x \cos(\phi) = L_y \cos(\rho); \end{cases}$$

- as forças atuando nas direções dos eixos $0x$, $0y$ e $0z$ sobre a plataforma são $f_x = f_x(t)$, $f_y = f_y(t)$ e $f_z = f_z(t)$, respectivamente.

O **movimento rotacional em torno do centro de gravidade** é descrito por

$$\begin{cases} N\ddot{\phi} = f_z(x_G - x) - f_x z_G = f_z L_x \sin(\phi) - f_x L_x \cos(\phi), \\ N\ddot{\rho} = f_z(y_G - y) - f_y z_G = f_z L_y \sin(\rho) - f_y L_y \cos(\rho), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

em que N é o momento inercial (resistência a rotação).

O **movimento linear horizontal em torno do centro de gravidade** é descrito por

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x_G) = f_x \iff m \frac{d^2}{dt^2}(x + L_x \sin(\phi)) = f_x, \\ m \frac{d^2}{dt^2}(y_G) = f_y \iff m \frac{d^2}{dt^2}(y + L_y \sin(\rho)) = f_y. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

O **movimento linear vertical em torno do centro de gravidade** é descrito por

$$m \frac{d^2}{dt^2}(z_G) = f_z - mg \iff m \frac{d^2}{dt^2}(L_x \cos(\phi)) = m \frac{d^2}{dt^2}(L_y \cos(\rho)) = f_z - mg. \quad (\text{A.3})$$

O **movimento da plataforma** é descrito por

$$\begin{cases} M \frac{d^2}{dt^2}(x) = u - f_x \iff M\ddot{x} = u - f_x \iff f_x = u - M\ddot{x}, \\ M \frac{d^2}{dt^2}(y) = v - f_y \iff M\ddot{y} = v - f_y \iff f_y = v - M\ddot{y}. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Para obtermos um modelo linear, algumas hipóteses são necessárias:

- (h1) os ângulos ϕ e ρ são pequenos, e assim, podemos assumir as aproximações $\sin(\phi) = \phi$, $\sin(\rho) = \rho$ e $\cos(\phi) = 1 = \cos(\rho)$;
- (h2) o comprimento da projeção da haste é aproximadamente igual ao comprimento da mesma, e assim $L_x = L_y = L$ (esta hipótese, necessária para linearizar o modelo, acaba por desacoplar as duas direções horizontais, de modo que passam a ser independentes).

Sob as hipóteses (h1) e (h2), temos que a [Equação A.1](#) se transforma em

$$\begin{cases} N\ddot{\phi} = f_z L \phi - f_x L, \\ N\ddot{\rho} = f_z L \rho - f_y L, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

a [Equação A.2](#) se transforma em

$$\begin{cases} m(\ddot{x} + L\ddot{\phi}) = f_x, \\ m(\ddot{y} + L\ddot{\rho}) = f_y, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

a Equação A.3 se transforma em

$$0 = f_z - mg \iff f_z = mg. \quad (\text{A.7})$$

Agora, juntando as equações de (A.4) às equações de (A.6), temos

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\phi} = u \\ (M+m)\ddot{y} + mL\ddot{\rho} = v \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{u}{mL} - \frac{(M+m)\ddot{x}}{mL}, \\ \ddot{\rho} = \frac{v}{mL} - \frac{(M+m)\ddot{y}}{mL}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a Equação A.6 e a Equação A.7 na Equação A.5, obtemos

$$\begin{cases} N\ddot{\phi} = mgL\phi - L[m(\ddot{x} + L\ddot{\phi})] \\ N\ddot{\rho} = mgL\rho - L[m(\ddot{y} + L\ddot{\rho})] \end{cases} \iff \begin{cases} (N + mL^2)\ddot{\phi} + mL\ddot{x} = mgL\phi, \\ (N + mL^2)\ddot{\rho} + mL\ddot{y} = mgL\rho, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{cases} \iff \ddot{x} = \frac{mgL\phi}{mL} - \frac{(N + mL^2)\ddot{\phi}}{mL}, \\ \iff \ddot{y} = \frac{mgL\rho}{mL} - \frac{(N + mL^2)\ddot{\rho}}{mL}. \end{cases}$$

As expressões de \ddot{x} , $\ddot{\phi}$, \ddot{y} , $\ddot{\rho}$ que isolamos acima, serão substituídas nas equações destacadas, dando-nos um sistema de equações diferenciais lineares. Uma simplificação acontece quando assumimos momento de inércia N nulo: o momento de inércia, em termos intuitivos, representa o grau de dificuldade de girar uma massa em torno de um eixo. No nosso pêndulo invertido, devido à ação gravitacional, não há dificuldade de girar a massa posta no pêndulo, quando este está “a pino”, ou muito próximo, de modo que $N = 0$ se justifica.

$$\begin{cases} (N + mL^2) \left[\frac{u}{mL} - \frac{(M+m)}{mL} \ddot{x} \right] + mL\ddot{x} = mgL\phi \xrightarrow{N=0} \ddot{x} = -\frac{mg}{M}\phi + \frac{1}{M}u, \\ (N + mL^2) \left[\frac{v}{mL} - \frac{(M+m)}{mL} \ddot{y} \right] + mL\ddot{y} = mgL\rho \xrightarrow{N=0} \ddot{y} = -\frac{mg}{M}\rho + \frac{1}{M}v, \\ (M+m) \left[\frac{mgL}{mL}\phi - \frac{N + mL^2}{mL} \ddot{\phi} \right] + mL\ddot{\phi} = u \xrightarrow{N=0} \ddot{\phi} = \frac{(M+m)g}{ML}\phi - \frac{1}{ML}u, \\ (M+m) \left[\frac{mgL}{mL}\rho - \frac{N + mL^2}{mL} \ddot{\rho} \right] + mL\ddot{\rho} = v \xrightarrow{N=0} \ddot{\rho} = \frac{(M+m)g}{ML}\rho - \frac{1}{ML}v. \end{cases}$$

Como obtivemos um sistema de quatro equações diferenciais lineares de segunda ordem, vamos reduzir a ordem fazendo uma substituição de variáveis, resultando em um sistema de ordem um, com 8 equações. Denote os vetores de variáveis

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]' = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \phi, \dot{\phi}, \rho, \dot{\rho}]',$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2]' = [u, v]', \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]' = [c_1x, c_2y, c_3\phi, c_4\rho, d_1u, d_2v]'$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{ML} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{ML} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{ML} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \iff \dot{x} = Ax + Bu. \quad (A.10)$$

Com respeito à saída do sistema, com respeito às variáveis observáveis diretamente, x, y, ϕ, ρ, u, v , escrevemos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \iff y = Cx + Du. \quad (A.11)$$

SOBRE O TEOREMA DE KREIN-RUTMAN

Vamos enunciar o Teorema de Krein-Rutman (vide, por exemplo [Mallet-Paret e Nussbaum \(2010\)](#)), cuja demonstração é técnica e não a faremos aqui (vide, por exemplo, o Teorema 2.2 de [Nussbaum \(1981\)](#)).

Teorema 13 (Krein-Rutman). Seja X um espaço de Banach, $K \subset X$ um cone total e $L : X \mapsto X$ um operador linear compacto positivo tal que $r(L) = \max(|\mathbf{eig}(L)|) > 0$ (raio espectral positivo). Então $r(L) \in \mathbf{eig}(L)$ (raio espectral é um autovalor real de L) e existe $x \in K$, $x \neq 0$, tal que $Lx = r(L)x$ (x é um autovetor de L).

Para usarmos o [Teorema 13](#) para os nossos propósitos, vamos definir um espaço de Banach e um cone adequados. Com isso teremos que o autovetor correspondente ao raio espectral é um elemento do cone. Demonstraremos apenas os resultados menos triviais; daremos uma ideia dos demais.

Dizemos que uma matriz simétrica $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva semidefinida quando, para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, se tem $v'Mv \geq 0$. Uma condição equivalente a esta é quando $\mathbf{eig}(M) \subset [0, \infty)$ (todos os autovalores são reais não negativos).

Consideremos $\mathcal{S} = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n}, M = M'\}$ o espaço das matrizes simétricas, e o subconjunto $\mathcal{S}^+ = \{M \in \mathcal{S}, M \geq 0\}$ das matrizes positivas semidefinidas. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{S}^+) = \{L : \mathcal{S}^+ \mapsto \mathcal{S}^+\}$ o espaço dos operadores lineares de \mathcal{S}^+ em \mathcal{S}^+ . Vamos elencar alguns resultados de análise bem conhecidos e demonstraremos outros.

- Um espaço vetorial \mathcal{B} completo, munido de norma, é um *espaço de Banach*.
 ▸ \mathcal{S} definido acima é um espaço de Banach, pois: (i) toda sequência convergente de matrizes simétricas converge para uma matriz simétrica, portanto é um espaço completo; (ii) qualquer norma em $\mathbb{R}^{n \times n}$ é também uma norma em $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Todo operador linear sobre um espaço de dimensão finita é um *operador compacto*.

- ▷ $\mathcal{L}(\mathcal{S}^+)$ definido acima é um espaço de operadores compactos. Esta compacidade é trivial em dimensão finita: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^+)$. Como T tem posto finito, sua imagem é um espaço normado de dimensão finita. Tomando qualquer sequência limitada $\{X_k\}$ no domínio de T , temos $\{TX_n\}$ uma sequência limitada de imagens de T (pela continuidade de T). Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência convergente de $\{TX_n\}$, e portanto T é compacto.
- Um subespaço K de um espaço de Banach é um *cone* se, (i) K é não vazio, fechado e convexo, (ii) para todo $\lambda \geq 0$, $\lambda K \subset K$ e (iii) $(K) \cap (-K) = \{0\}$.
 - ▷ No [Lema 7](#) vamos provar que \mathcal{S}^+ é um cone conforme esta definição.
- Todo operador $T : K \mapsto K$ é um operador *positivo* quando K é um cone.
 - ▷ $\mathcal{L}(\mathcal{S}^+)$ é um espaço de operadores positivos, se \mathcal{S}^+ é um cone.
- Um cone $K \subset \mathcal{B}$ é *total* quando $\mathcal{B} = \overline{K - K}$ (o fecho é igual ao espaço de Banach).
 - ▷ No [Lema 8](#) vamos provar que \mathcal{S}^+ é um cone total conforme esta definição.
- Toda matriz simétrica A é unitariamente diagonalizável: $A = Q\Lambda Q'$, com $Q^{-1} = Q'$, e Λ é uma matriz diagonal contendo os autovalores de A , e além disso, seus autovalores são reais ([TREFETHEN; BAU III, 1997, Theorem 24.7](#)).

Lema 7. \mathcal{S}^+ é um cone.

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que \mathcal{S}^+ é um cone.

- (não vazio) Obviamente \mathcal{S}^+ é não vazio, pois a matriz identidade pertence a esse espaço.
- (fechado) Podemos caracterizar \mathcal{S}^+ através dos autovalores de seus elementos, quando forem ≥ 0 . Considere sequências convergentes $\{M_k\} \rightarrow M$ em \mathcal{S}^+ . Quanto ao espectro, temos que $\text{eig}(M_k) \subset [0, \infty)$ para todo k e $\text{eig}(M_k) \rightarrow \text{eig}(M)$, portanto \mathcal{S}^+ é um conjunto fechado (igual ao próprio fecho), pois $[0, \infty)$ é fechado.
- (convexo) \mathcal{S}^+ é convexo quando qualquer combinação convexa de seus elementos pertencer a \mathcal{S}^+ . Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, $v \neq 0$, $P, Q \in \mathcal{S}^+$ tais que $v'Pv = p \geq 0$ e $v'Qv = q \geq 0$. Temos

$$v'(\alpha P + (1 - \alpha)Q)v = \alpha v'Pv + (1 - \alpha)v'Qv = \alpha p + (1 - \alpha)q \geq 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

- (invariante a escalar) Tome $P \in \mathcal{S}^+$ e $\lambda \geq 0$. Assim, $v'(\lambda P)v = \lambda v'Pv \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, de modo que $\lambda \mathcal{S}^+ \subset \mathcal{S}^+$.
- (interseção com oposto) Temos que a única matriz que pertence a ambos \mathcal{S}^+ e $-\mathcal{S}^+ = \{-X, X \in \mathcal{S}^+\}$ é a matriz nula. De modo mais claro, tome $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e faça a decomposição espectral $M = Q\Lambda Q'$ com $Q'Q = I$. Se $\text{diag}(\Lambda) \subset [0, \infty)$, então $M \in \mathcal{S}^+$, se $\text{diag}(\Lambda) \subset (-\infty, 0]$, então $M \in -\mathcal{S}^+$, e o único ponto que é interseção entre $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$ é o zero, que caracteriza a matriz nula (a matriz com todos os autovalores nulos). ■

Lema 8. \mathcal{S}^+ é um cone total.

Demonstração. Arbitremos $M \in \mathcal{S}$, vamos mostrar que M pode ser escrita como uma diferença de elementos de \mathcal{S}^+ . Fazemos a decomposição espectral: $M = Q\Lambda Q'$, $Q'Q = I$, e tome $r = \max(|\text{diag}(\Lambda)|)$ o raio espectral de M . Assim, $\text{eig}(\frac{1}{2r}M) = \text{eig}(Q(\frac{1}{2r}\Lambda)Q') \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Vamos mostrar que a matriz $P = I - \frac{1}{2r}M$ é simétrica positiva semidefinida:

$$v'Pv = v'(I - \frac{1}{2r}M)v = v'(QIQ' - \frac{1}{2r}Q\Lambda Q')v = v'Q(I - \frac{1}{2r}\Lambda)Q'v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0.$$

Temos que $\Gamma = I - \frac{1}{2r}\Lambda$ é uma matriz diagonal com $\text{diag}(\Gamma) \in [1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$. Desta forma, $u = Q'v \neq 0$ (pois Q é unitária, portanto não singular) e assim, $v'Pv = u'\Gamma u = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ii}u_i^2 \geq 0$. Portanto $P \geq 0$. Agora, temos $M = 2rI - 2rP$, de modo que $I, P \in \mathcal{S}^+$. Assim, conseguimos escrever qualquer elemento de \mathcal{S} como uma diferença de elementos de \mathcal{S}^+ , ou seja, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^+$. A relação $\mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^+ \subset \mathcal{S}$ é trivial, pois toda matriz que se escreve como uma diferença de elementos de \mathcal{S}^+ é uma matriz simétrica, e portanto de \mathcal{S} . Como $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^+$ é o espaço todo (fechado), $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^+}$. Portanto, \mathcal{S}^+ é um cone total. ■

Acabamos de mostrar que \mathcal{S} é um espaço de Banach, \mathcal{S}^+ um cone total e $\mathcal{L}(\mathcal{S}^+)$ é o espaço de operadores lineares positivos, todos estes nos moldes do que pede o [Teorema 13](#). O Teorema de Krein-Rutman pode ser aplicado ao espaço de Banach $\hat{\phi}(\mathcal{S}^+)$, no cone $\hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+})$ com respeito ao operador $\mathcal{T} : \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+}) \mapsto \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+})$, ou seja, existe $\hat{\phi}(V) \in \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+})$ autovetor de \mathcal{T} associado ao seu autovalores de maior magnitude, e este autovalor é um número real. Resumimos esse resultado no teorema abaixo.

Teorema 14. Considere $\mathcal{T} : \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+}) \mapsto \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+})$ definido na [Equação 4.18](#) com raio espectral $r(\mathcal{T}) > 0$. Assim, $r(\mathcal{T}) \in \text{eig}(\mathcal{T})$ e existe $v \in \hat{\phi}(\mathcal{S}^{n+})$, $v \neq 0$, tal que $\mathcal{T}v = r(\mathcal{T})v$.

