Trabalho de Lógica e Matemática discreta

20 de Abril de 2020

1. Em um colégio há equipes de vôlei, futebol e basquete. Neste semestre um fato pitoresco acontecerá: quando tiver treino de basquete não terá treino de vôlei. Uma forma equivalente de se dizer esse fato pitoresco é

   (a) ( ) Quando não tiver treino de basquete, terá treino de vôlei.

   (b) (X) Quando tiver treino de vôlei, não terá treino de basquete.

   (c) ( ) Quando não tiver treino de vôlei, terá treino de basquete.

   (d) ( ) Quando tiver treino de vôlei, poderá ter treino de basquete.

   (e) ( ) Nenhuma das alternativas anteriores está correta.

   Quando temos uma proposição unidirecional, do tipo $A \Rightarrow B$ (se A, então B), uma proposição equivalente, chamada de contrapositiva, é $(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$ (se não B, então não A). Sabendo disso, vamos relacionar à proposição da questão:

   - A: há treino de basquete
   - B: não há treino vôlei.

   ★ $A \Rightarrow B$: se há treino de basquete, então não há treino de vôlei.

   * $(\sim A)$: não há treino de basquete
   * $(\sim B)$: há treino de vôlei.

   ★ $(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$: se há treino de vôlei, então não há treino de basquete.

   As duas proposições em ★ são equivalentes.

2. Qual o termo independente do binômio

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

   (a) ( ) 120

   (b) ( ) 180

   (c) (X) 220

   (d) ( ) 792

   (e) ( ) 924

   Os binômios to tipo $(a+b)$ quando elevados a uma certa potência n podem ser escritos como

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^nb^0$$

ou escrito mais concisamente como (note que a soma dos expoentes de a e b é sempre n)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{1}$$

Em que $\binom{n}{p}$ representa o número de combinações de n itens tomados p a p, dados pela fórmula

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{2}$$

Uma forma simples de calcular os binômios $\binom{n}{p}$ é usando o Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & p \\
\hline
0 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & \\
2 & 1 & 2 & 1 & & & \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

O Triângulo de Pascal tem a primeira coluna e a diagonal de 1's, em que cada elemento abaixo da diagonal é a soma entre dois elementos da linha de cima, o elemento imediatamente acima e o à esquerda deste, conforme indicado pelas cores no exemplo acima.

Por exemplo, consultando o Triângulo de Pascal acima, podemos escrever facilmente os seguintes binômios

$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.$$

Para o problema dado, precisamos verificar qual é o expoente p de modo que (veja a Equação (1))

$$(x^3)^p \left(\frac{1}{x}\right)^{12-p} = x^{3p}\left(\frac{1}{x^{12-p}}\right) = \frac{x^{3p}}{x^{12-p}} = \text{constante.} \qquad (a^p b^{n-p})$$

Precisamos que p seja um inteiro que faça com que numerador e denominador sejam iguais, pois assim a fração resultaria em 1. Isso é fácil, basta resolver a equação

$$x^{3p} = x^{12-p} \iff 3p = 12 - p \iff 4p = 12 \iff p = 3.$$

Agora, usando as Equações (1) e (2), podemos descobrir qual é o coeficiente desejado:

$$\binom{12}{3}(x^3)^3\left(\frac{1}{x}\right)^{12-3} = \binom{12}{3} x^9 \frac{1}{x^9} = \binom{12}{3} \overset{\text{Eq.(2)}}{=} \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12.11.10.9!}{9!6} = 2.11.10 = 220$$

3. Um professor pretende realizar uma atividade com 6 alunos. Estes alunos ficarão em círculo. Sabendo-se que André e Maria não poderão ficar juntos na atividade, porque conversam muito, de quantas formas o professor poderá organizar os 6 alunos?

   (a) ( ) 120

(b) (X) 72

(c) ( ) 48

(d) ( ) 24

(e) ( ) 12

Vamos fixar Maria (M) em uma posição, escolher uma posição para André (A) e contar as possibilidades para as demais posições:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{M} & \underline{4} & \underline{A} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\ & \cancel{A} & & & & \cancel{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{M} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{A} & \underline{2} & \underline{1} \\ & \cancel{A} & & & & \cancel{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{M} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{A} & \underline{1} \\ & \cancel{A} & & & & \cancel{A} \end{array}$$

Qualquer rotação dessas disposições formará o mesmo círculo, algo como: $MPARST = PARSTM = ARSTMP = RSTMPA$, etc. Assim, todas as possibilidades já estão contabilizadas, bastando multiplicar e somar, um total de $3 \times 24 = 72$.

4. Um palácio tem 5 portas. De quantas maneiras se pode abrir este palácio?

(a) ( ) 5

(b) ( ) 15

(c) ( ) 18

(d) (X) 31

(e) ( ) 32

A questão se resume a combinar quais portas serão abertas. Do total de 5 portas, podemos escolher uma porta para abrir, duas portas, 3, 4 ou as 5 portas. As combinações são, respectivamente, $\binom{5}{k}$, com $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Note que não usamos o caso $k = 0$, pois seria o caso em que nenhuma porta seria aberta.

Para responder à pergunta, complete o Triângulo de Pascal até a linha $n = 5$ e então faça a soma das possibilidades. O total será 31.

5. Em uma prova de tiro ao alvo, Marcelo tem probabilidade de acertar o alvo de $\frac{2}{7}$ e a probabilidade de Antônio acertar o mesmo alvo é de $\frac{2}{5}$. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos dois acertar o alvo, considerando que ambos atiram ao mesmo tempo?

(a) ( ) $\frac{4}{35}$

(b) ( ) $\frac{8}{35}$

(c) ( ) $\frac{16}{35}$

(d) (X) $\frac{20}{35}$

(e) ( ) $\frac{32}{35}$

Marcelo acerta e Antônio erra com probabilidade $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$, Marcelo erra e Antônio acerta com probabilidade $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{35}$. Ambos acertam com probabilidade $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$. Somando tudo, temos $\frac{20}{35}$ de probabilidade de pelo menos um deles acertar.

6. Uma empresa faz salgadinhos para festas. Os salgadinhos disponíveis para encomendas são: coxinha, bolinha de queijo, quibe, empadinha e pastelzinho. Em cada encomenda, o cliente poderá escolher até 3 tipos de salgadinhos. Observe que não há a necessidade de pedir salgadinhos distintos. Por exemplo, pedir duas porções de coxinha e uma porção de pastelzinho. De quantas formas se pode fazer pedidos para essa empresa?

   (a) ( ) 5
   (b) ( ) 10
   (c) ( ) 20
   (d) ( ) 30
   (e) (X) 35

   Suponha que o cliente peça 1 porção apenas. Então temos 5 possibilidades:

   $$\underline{5}.$$

   Suponha que peça 2 porções, em que os itens são diferentes do tipo (a, b):

   $$\underline{5}\ \ \underline{4}.$$

   Temos um total de 20 possibilidades. No entanto, quando fazemos um arranjo simples dessa forma, estamos dizendo que $(a, b) \neq (b, a)$, mas são o mesmo pedido! Precisamos então descontar esses casos que contamos demasiadamente, dividindo o resultado pelo número de permutações que é $2! = 2$. Portanto, temos $20/2 = 10$ possibilidades, nas quais os itens $(a, b) = (b, a)$ são considerados iguais. Agora, como os pedidos podem ser repetidos, precisamos contá-los (os casos do tipo (a, a), que são um total de 5). O total de possibilidades para pedir 2 porções é 15.
   Suponha que o cliente peça três porções diferentes, e analogamente ao caso anterior,

   $$\underline{5}\ \ \underline{4}\ \ \underline{3}.$$

   Daí temos um total de 60 possibilidades. Mas estamos contando como sendo diferentes os pedidos da forma $(a, b, c) \neq (a, c, b) \neq (b, c, a)$, etc. Para descontar os itens contados indevidamente, precisamos dividir pelo total de suas permutações, que é $3! = 6$. Assim, o resultado é $60/6 = 10$. Mas ainda não contamos os casos do tipo (a, a, a), que são 5. Por fim, temos 15 possibilidades.
   A resposta final é a soma dos 3 casos, 35.

7. Considere uma urna com bolas numeradas de 1 a 50. Qual a probabilidade de se tirar um número que seja múltiplo de 2, 3 ou 5 em um único sorteio?

   (a) ( ) 32%
   (b) ( ) 48%
   (c) ( ) 56%

(d) ( ) 64%

(e) (X) 72%

Vamos contar quantos números são múltiplos de 2, 3 e 5. Uma forma rápida de fazer isso, já que a lista começa em 1 e vai até 50, é pegar a função "chão" $f(k) = \lfloor \frac{50}{k} \rfloor$, $k = 2, 3, 5$, definida como sendo o arredondamento para baixo para o inteiro mais próximo (ou dito de outra forma, o maior inteiro menor ou igual a $50/k$). Estamos dividindo 50 por 2, 3, 5, e pegando apenas a parte inteira. Isso nos dá

$$f(2) = \lfloor \frac{50}{2} \rfloor = \lfloor 25 \rfloor = 25,$$

$$f(3) = \lfloor \frac{50}{3} \rfloor = \lfloor 16.\bar{6} \rfloor = 16$$

$$f(5) = \lfloor \frac{50}{5} \rfloor = \lfloor 10 \rfloor = 10.$$

Dentre os 25 múltiplos de 2, há os que são múltiplos de 3, e também os múltiplos de 5 (no final das contas, são múltiplos de 6 e 10). Vamos contá-los:

$$f(6) = \lfloor \frac{50}{6} \rfloor = \lfloor 8.\bar{3} \rfloor = 8,$$

$$f(10) = \lfloor \frac{50}{10} \rfloor = 5.$$

Também temos os que são múltiplos de 3 e 5, ou seja, múltiplos de 15:

$$f(15) = \lfloor \frac{50}{15} \rfloor = \lfloor 3.\bar{3} \rfloor = 3.$$

Por fim, os que são múltiplos de 2, 3 e 5, ou seja, múltiplos de 30:

$$f(30) = \lfloor \frac{50}{30} \rfloor = \lfloor 1.\bar{6} \rfloor = 1.$$

Podemos colocar essas informações num diagrama de Venn, conforme a Figura 1.

Agora, basta contar, o que dá um total de 36 dentre 50 valores, ou seja, $36/50 = 0.72 = 72\%$.

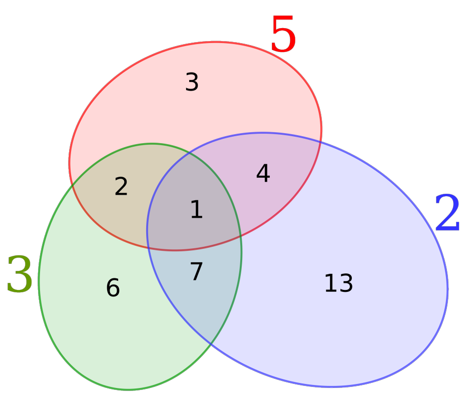

Figura 1: A quantidade de múltiplos dentre 1 e 50.

8. Na empresa X os funcionários têm uma senha para acessar os sistemas da empresa. Cada senha é formada por um número par de 4 algarismos. Quantas senhas são possíveis formar com os algarismos de 0 a 9 inclusive?

   (a) (F) 2296

   (b) (F) 2846

   (c) (F) 3024

   (d) (F) 4048

   (e) (F) 5264

   Precisamos preencher as lacunas com algarismos: __ __ __ __. Em cada lacuna, colocamos as possibilidades: $\underline{9}$ $\underline{10}$ $\underline{10}$ $\underline{5}$ com um total de 4500 possibilidades (basta multiplicar). 9 porque não podemos incluir o zero no primeiro dígito. Os dois 10 porque podemos incluir qualquer dígito, sem restrições. 5 porque a senha precisa ser um número par, e portanto precisa terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8 (5 possibilidades).

9. Considere um conjunto A com n elementos. Define-se uma partição de A como uma família de conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ todos não vazios de modo que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = A$ e os conjuntos A_i são todos disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Dizemos também que A foi particionado em $A_1, ..., A_k$. Diante disso, assinale a alternativa correta

   (a) ( ) O número de conjuntos da partição $A_1, ..., A_k$ é 2^n.

   (b) ( ) O número de conjuntos da partição $A_1, ..., A_k$ é $2^n - 2$ pois não são considerados nem o conjunto vazio, nem o próprio A.

   (c) (X) Há um número finito de conjuntos que particionam o conjunto A e o número máximo de uma família de conjuntos $A_1, ..., A_k$ que particiona o conjunto A é igual a n.

   (d) ( ) Há infinitas formas de se particionar o conjunto A.

   (e) ( ) As alternativas (b) e (d) estão corretas.

   (a) Contraexemplo: seja $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Temos $n = 6$ e uma possível partição é $\{c\} \cup \{d, f\} \cup \{a, b, e\}$, um total de 3 conjuntos, o que obviamente não é $2^6 = 64$.

   (b) O mesmo contraexemplo acima serve para esta.

   (c) A partição unitária é aquela em que cada subconjunto contém apenas um elemento cada um. No exemplo de (a), a partição unitária é $\{a\} \cup \{c\} \cup \{b\} \cup \{d\} \cup \{f\} \cup \{e\}$ com um total de 6 conjuntos, o mesmo valor de n. Percebe-se que n é o maior número de conjuntos possível para uma partição. Como n é finito, há um número finito de conjuntos que particionam A.

   (d) falsa pela explicação em (c).

10. Com relação à demonstração por absurdo e a demonstração por indução finita é correto afirmar que

   (a) ( ) A demonstração por absurdo e a demonstração por indução finita consistem em uma mesma forma de demonstrar teoremas e outros resultados em matemática.

   (b) ( ) Na demonstração por absurdo, considera-se como verdadeiro uma hipótese falsa e se chegar em um resultado verdadeiro significa que a demonstração foi realizada com sucesso.

(c) ( ) Não há necessidade da hipótese de indução em algumas situações no método de demonstração por indução finita.

(d) ( ) As alternativas (b) e (c) estão corretas.

(e) (X) Nenhuma das alternativas anteriores está correta.

(a) são demonstrações diferentes.

(b) uma hipótese falsa é considerada como verdadeira, e precisamos chegar a um resultado falso para refutar a hipótese falsa assumida.

(c) a hipótese de indução é o cerne da demonstração, pois é o fato que permite ligar um caso n ao caso $n + 1$.