1. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - x^3$. Analise as sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.

   i A função f não tem raízes. (F)
   $f(3) = 3^3 - 3^3 = 0$. Obviamente falso, pois $x = 3$ é uma raiz.

   ii $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (V)
   A solução mais simples é que exponenciais são mais rápidas que polinômios. Assim, o crescimento de 3^x é muito superior ao de x^3, de forma que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
   De forma mais completa, vamos calcular outro limite que nos dirá qual função cresce mais rapidamente, se 3^x ou se x^3, e vamos precisar da regra de L'Hospital:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3^x)}{\frac{d}{dx}(x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \ln(3)}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \ln^2(3)}{6x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \ln^3(3)}{6} = \infty.$$

   Vemos que 3^x cresce muito mais rapidamente que x^3 quando $x \to \infty$. Assim, o limite procurado é

   $$\lim_{x\to\infty} 3^x - x^3 = \infty.$$

   iii $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (F)
   Quando $x \to -\infty$, a exponencial $3^x \to 0$, enquanto que $x^3 \to -\infty$. Portanto

   $$\lim_{x\to-\infty} 3^x - x^3 = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

   iv $\lim_{x\to\infty} f(x)$ não existe. (F)
   Já que ii é verdadeiro, então iv é falso.

   a( ) Apenas as alternativas i, ii e iii estão corretas.

   b( ) Apenas as alternativas ii e iii estão corretas.

   c( ) Apenas a alternativa iv está correta.

   d( ) Apenas as alternativas i e ii estão corretas.

   e( ) Apenas as alternativas i e iv estão corretas.

   No fim das contas, nenhuma alternativa está correta.

2. Calcule

   $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

   Vamos aplicar racionalização duas vezes: para o denominador e para o numerador (lembre que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, produto notável da soma pela diferença).

   $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x - 2}$$

   $$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

   $$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+2} + 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Com relação aos limites e continuidade de funções é correto afirmar que:

a(V) A função $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ tal que $y=\dfrac{1}{x}$ é contínua em todo o seu domínio, com exceção do ponto $x=0$.
A função dada é contínua para todos os pontos em $\mathbb{R}$, exceto o ponto zero, onde ela não é contínua: o limite da função $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, pois os limites pela direita e pela esquerda não são iguais. Pela direita, $\lim_{x\to 0^+} = +\infty$, e pela esquerda, $\lim_{x\to 0^-} = -\infty$.

b(F) Se as funções f e g forem contínuas em um intervalo, então a função $\dfrac{f}{g}$ será contínua nesse intervalo.
Se a função g tiver uma raiz nesse intervalo, então a função racional $\dfrac{f}{g}$ terá um denominador zero nessa raiz e isso deixa a função indefinida neste ponto, já que divisão por zero não está bem definida. Portanto, a função como um todo será indefinida neste ponto. A afirmação estaria correta se fosse acrescentada a condição de que $g\neq 0$ nesse intervalo.

c(F) A função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $y=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$ e $a,b,c\in\mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos com exceção do vértice da função.
A função é contínua em qualquer ponto. Os limites laterais em relação ao vértice da função existem e são iguais ao valor da função: $\lim_{x\to x_v^+} f(x) = ax_v^2+bx_v+c = \lim_{x\to x_v^-} f(x)$.

d(F) As funções polinomiais são contínuas em todo o seu domínio com exceção das suas raízes.
As funções polinomiais são contínuas em todo o seu domínio, sem exceções. Os limites laterais de qualquer ponto são iguais e coincidem com o valor da função no dado ponto. Por esse motivo, a (c) é falsa.

e(F) As alternativas (a) e (b) estão corretas.

4. Calcule os limites, se existirem

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$
Percebe-se que ao se substituir $x=0$ na expressão, então $e^x-1=0$ e $x=0$, de forma que ambas as funções do numerador e denominador têm raízes no ponto $x=0$. Portanto, não podemos aplicar o limite diretamente, pois resultaria na indeterminação $0/0$. Vamos fazer uma substituição de variáveis, usando o numerador.

$y=e^x-1 \iff y+1=e^x \overset{\ln(.)}{\Longrightarrow} \ln(y+1)=x$, perceba que $\lim_{y\to 0} x = 0$. Reescrevendo o limite original com as novas variáveis,

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln[(y+1)^{\frac{1}{y}}]}$$

Há um limite muito conhecido: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Perceba-o com a notação $y=\frac{1}{n} \iff n=\frac{1}{y}$. Dessa forma:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln[(y+1)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{\lim_{y\to 0} 1}{\ln[\lim_{y\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{1}{\ln[e]} = \frac{1}{1} = 1.$$

• Um ótimo exercício é tentar resolver $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ para $a>0\in\mathbb{R}$, seguindo os mesmos passos, lembrando que $\ln(a^x)=x\ln(a)$. O resultado será bem parecido. Esse resultado também é um limite muito conhecido, chamado de limite fundamental, tal como o limite $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

(a*) Pela regra de L'Hostpital (sempre que se tem um limite do tipo $0/0$ ou ∞/∞, podemos aplicá-la, usando derivadas), fica bem mais fácil

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(e^x-1)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{4^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{4^x} = \lim_{x\to\infty}(\tfrac{3}{4})^x = \lim_{x\to\infty}0.75^x = 0.$$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{4n}$

Perceba que esse limite se assemelha muito ao limite fundamental mencionado acima. Procuraremos "transformar" este limite no limite já conhecido. Faça $k = 3n$ ou $n = k/3$. Assim, $\lim_{k\to\infty} k = \infty = \lim_{n\to\infty} 3n$. Essa verificação diz que, ao fazer a mudança de variável, o limite continua o mesmo: quando $k \to \infty$, isso resulta em $n \to \infty$, pois $n = k/3$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{4n} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k/3} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{4/3} = e^{4/3}.$$

5. Considere a função $f : [-6,6] \to \mathbb{R}$ contínua em todo o seu domínio e se sabe o valor da função nos seus extremos, $f(-6) = -7$ e $f(6) = 11$.

a(F) Não se pode afirmar nada se a função f tem raízes reais ou não.
Se uma função é contínua em um domínio fechado e limitado, e os seus extremos são de sinais opostos (-7 e 11), então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum ponto $c \in [-6,6]$ de modo que $f(c) = 0$. É bem óbvio. Imagina que você tem uma função contínua qualquer que sai de -7 e chega em 11 nos pontos $x = -6$ e $x = 6$. Pense que você traçará uma curva entre esses pontos, sem tirar a caneta do papel (função contínua). Então é óbvio que em algum ponto você precisará passar pelo zero.

b(V) A função f tem ponto de mínimo e tem ponto de máximo.
Pelo Teorema de Weierstrass, toda função contínua em um conjunto fechado e limitado assume valores de mínimo e máximo. É bem óbvio. Novamente, imaginando uma função contínua de -7 a 11, a função tem um ponto de máximo em 11 ($x = 6$) ou dentro do intervalo $[-6,6]$; da mesma forma, a função tem um ponto de mínimo em -7 ($x = -6$) ou dentro do intervalo $[-6,6]$.

c(F) A função f tem ponto de mínimo, ou ponto de máximo.
Os dois extremos existem para essa função.

d(F) Uma raiz de f é o ponto $x = 0$.
A função tem sim alguma raiz, conforme dito em (a), mas não podemos determinar, com apenas as informações dadas, que esse ponto $c = 0$.

e(F) A função f é crescente.
Não temos nenhum dado que nos permite afirmá-lo. A função poderia, por exemplo, fazer um zigue-zague. E essa não seria uma função crescente.

6. Assinale com a letra (V) para as alternativas verdadeiras ou (F) para as alternativas falsas.

(V) Toda função derivável é contínua.
Sim. Há um teorema que demonstra isso. A inversa não é verdadeira. Ser derivável é uma exigência muito forte para uma função. Continuidade é uma exigência mais fraca. A diferenciabilidade nos dá de graça a continuidade, mas a continuidade não é suficiente para que uma função seja derivável. Um ótimo exemplo são funções contínuas que têm "bicos", tais como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Nos "bicos" a função não é derivável, mesmo que seja contínua. Outra nomenclatura para funções deriváveis são funções "suaves" (exatamente pelo fato de não terem bicos, são curvas suaves). Essa nomenclatura é comum em livros avançados de Análise.

(V) Seja f uma função e a um ponto de seu domínio, então a derivada de f no ponto a será o limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se esse limite existir e for finito.
Sim. Essa é exatamente a definição de derivada em relação a um determinado ponto a. Para a definição de derivada de uma forma geral, sem referência a um determinado ponto a, usamos a definição $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(F) Se duas funções de mesmos domínio e contradomínio tiverem a mesma derivada, então estas funções terão a mesma imagem.
Um contraexemplo bem simples são as funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \cos(x) + 1$. As derivadas dessas funções são $f'(x) = -\operatorname{sen}(x) = g'(x)$. Ambas têm domínio $\mathbb{R}$ e se considerarmos o mesmo contradomínio $\mathbb{R}$ (poderia ser outro, por exemplo $[-10, 10]$), as imagens são $Im(f) = [-1, 1]$ e $Im(g) = [0, 2]$. Portanto, derivadas iguais não implica imagens iguais.

(V) A derivada de uma função polinomial também é uma função polinomial.
Sim. Uma função da forma

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + px^2 + qx + r,$$

com $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ tem derivada da forma

$$f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} + ... + 2px + q,$$

que pode ser reescrito como

$$f'(x) = Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + ... + Px + Q,$$

em que $A = an \neq 0$, $B = b(n-1)$, ..., $P = 2p$, $Q = q$. Vemos então que f' também é um polinômio.

(V) A derivada de uma função constante é igual a zero.
Sim. Uma função constante não varia. Então a taxa de variação é zero (derivada). Vejamos pela definição de derivada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

7. Uma empresa produz e vende um único produto. Os custos de produção são expressos em função da quantidade produzida x, através da equação $C(x) = x^2 - 16x + 10$. A receita correspondente ao volume de vendas é dada pela função $R(x) = 8x$. A empresa produz apenas por encomenda, assim, toda quantidade produzida será vendida. Considere também que a empresa produz em lotes de mil unidades, assim, quando se diz, por exemplo, $x = 1$, significa que 1000 unidades foram produzidas.

   Diante do exposto, responda:

   (a) Qual é a produção que tem menor custo?
   Menor custo significa utilizar a função de custo e calcular o menor valor para $C(x)$. Basta calcular o ponto de mínimo (derivar e igualar a zero para encontrar os pontos críticos, ou calcular o vértice da parábola via Bháskara).

   Derivadas: Derivamos a função de custo e avaliamos em zero: $C'(x) = 2x - 16$. Assim, $2x - 16 = 0 \iff 2x = 16 \iff x = 8$. Encontramos o ponto crítico $x = 8$. Para saber sua qualidade, aplicamos o teste da segunda derivada: se a segunda derivada é negativa, a função original tem uma aceleração negativa, ou seja, seu **crescimento** vai perdendo força e fará uma curva para baixo (concavidade para baixo) e portanto teremos um ponto de máximo local ali. Caso a segunda derivada seja positiva, a função original tem uma aceleração positiva e seu **crescimento** vai ganhando força e fará uma curva para cima (concavidade para cima) e portanto teremos um ponto de mínimo local ali.
   A segunda derivada é $C''(x) = 2$, o que indica que temos um ponto de mínimo em $x = 8$. Assim, sabemos que o menor valor de $C(x)$ é em $x = 8$.

   Bháskara: Quanto à concavidade, basta olhar o sinal do coeficiente quadrático $a = 1 > 0$ e portanto a função é crescente. Isso nos diz que a função tem concavidade para cima. Para calcular a abscissa do vértice, basta fazermos $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{2} = 8$. Assim, sabemos que o menor valor de $C(x)$ é em $x = 8$.

   O custo mínimo é então $C(8) = 8^2 - 16 \cdot 8 + 10 = -54$, um custo negativo. Isso nos diz que produzir 8000 unidades dará um lucro de 54 (um tanto estranho, já que o custo é negativo).

   (b) Qual é o lucro máximo que a empresa poderá obter?
   O lucro é dado pela receita menos as despesas $L(x) = R(x) - C(x) = 8x - x^2 + 16x - 10 = -x^2 + 24x - 10$. Basta agora encontrar o vértice da parábola, da mesma forma como fizemos em (a).

   Derivadas: $L'(x) = -2x + 24$, igualando a zero nos dá $-2x + 24 = 0 \iff 2x = 24 \iff x = 12$. O teste da segunda derivada é $L''(x) = -2$, e então $x = 12$ é um ponto de máximo.

   Bháskara: O coeficiente quadrático é negativo $a = -2 < 0$, portanto a concavidade da quadrática é para baixo. O vértice tem abscissa $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-24}{-2} = 12$.

   Portanto, ao se produzir 12000 unidades, o lucro será maximizado.

8. Considere a função f derivável em todo o seu domínio. Sabendo que a reta tangente à f no ponto $x = 2$ tem equação $y = 3x - 11$, qual é o valor de $f(2)$?

   a( ) -11

   b(X) -5

   c( ) 0

d( ) 3

e( ) 11

A reta tangente passa pelo mesmo ponto que a função, portanto, basta descobri-lo. Sabe-se a abscissa $x = 2$, e a equação da tangente $y = 3x - 11$. Substituindo, $y = 3(2) - 11 = -5$, que é o mesmo valor da função. Portanto, $f(2) = -5$, não importando qual seja a f.

9. Assinale a alternativa correta com relação às integrais

a(V) A integral de uma função par tem como resultado uma função ímpar.
Sim. Vamos fazer a demonstração. Uma função é par quando o eixo y serve como um espelho; a função é espelhada pelo eixo das ordenadas y, ou seja: $f(x) = f(-x)$. Uma função é dita ímpar quando for espelhada pela origem, ou seja: $f(x) = -f(-x)$. Defina $F(x) = \int f(x)dx$. Vamos fazer uma mudança de variável na integral, usando $y = -x$, que derivado nos dá $(-1)dy = dx$. Suponha que a função $f(x)$ seja par.

$$F(x) = \int f(x)dx \overset{\text{par}}{=} \int f(-x)dx = \int f(y)(-1)dy = -\int f(y)dy = -F(y) = -F(-x).$$

Portanto, a integral $F(x)$ de uma função par $f(x)$ é ímpar.
De forma análoga, suponha $f(x)$ ímpar.

$$F(x) = \int f(x)dx \overset{\text{ímpar}}{=} \int -f(-x)dx = -\int f(y)(-1)dy = \int f(y)dy = F(y) = F(-x).$$

Portanto, a integral $F(x)$ de uma função ímpar $f(x)$ é par.

b(F) A integral de uma função injetora também será uma função injetora.
Um contraexemplo é a função $f(x) = x$. Sua integral é $F(x) = \int f(x)\,dx = x^2/2 + c$. Temos que $f(x)$ é injetora, mas $F(x)$ não é: para pontos distintos $x = x_0$ e $x = -x_0$, a função $F(x)$ tem os mesmos valores (portanto não é injetora), enquanto que para valores distintos atribuídos a x a função $f(x)$ sempre obterá imagens distintas (sendo então injetora). Pelo que vimos, a integral não preserva injetividade.

c(F) A integral $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \cos(x) + C$.
Na verdade o que aconteceu foi uma derivada, não uma integral. A integral de $\operatorname{sen}(x)$ é $-\cos(x)$.

d(F) A integral $\int x^2\,dx = 2x + C$.
Na verdade o que aconteceu foi uma derivada, não uma integral. A integral de x^2 é $x^3/3$.

e(F) As alternativas (a) e (b) estão corretas.

10. A derivada da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é a função $g(x) = x\operatorname{sen}(x)$. Sabendo que $x = \pi$ é raiz de f, qual é a função f?
Estamos diante de uma equação diferencial. Qual é a função $f(x)$ cuja derivada faz com que $f'(x) = x\operatorname{sen}(x)$? Vamos usar integração por partes. Para tanto, vamos relembrar:

A derivada de um produto corresponde a

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \iff u\,dv = d(uv) - v\,du \iff \int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\iff \int u\,dv \overset{*}{=} uv - \int v\,du.$$

Essa última igualdade nos será útil (regra da integração por partes).

Sejam $u = x$ e $dv = \operatorname{sen}(x)$. Derivamos u e integramos dv, nos dando $du = dx$ e $v = -\cos(x)$. A equação original é então $f' = u\,dv$. Integrando ambos os lados da equação, nos dá, pela fórmula

$$f(x) = \int u\,dv \overset{(*)}{=} (x)(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C.$$

A função $f(x) = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$ tem raiz em $x = \pi$, ou seja, $f(\pi) = 0$:

$$0 = -\pi\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) + C \iff 0 = -\pi(-1) + 0 + C \iff C = -\pi.$$

Portanto, a função procurada é

$$f(x) = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - \pi.$$