SME0333 — Computação numérica e simulações para Engenharia Ambiental I

Prof. Eduardo F.Costa
Monitor PAE Junior R. Ribeiro

18 de maio de 2022

Sobre o modelo Predador-Presa

Um sistema de equações diferenciais bastante simples que modela a evolução de duas populações é chamado "modelo predador-presa". Vamos denotar x para presas e y para predadores.

A taxa de crescimento/decrescimento da população de presas $d\,x(t)/dt$ é proporcional ao tamanho de sua população $x(t)$ e também à sua taxa de natalidade descontada da taxa de mortalidade $(\alpha - \beta y(t))$, o que resulta em

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = x(t)(\alpha - \beta y(t)). \tag{1}$$

A taxa de crescimento/decrescimento da população de predadores $d\,y(t)/d\,t$ por sua vez é proporcional ao tamanho de sua população $y(t)$ e à taxa de predação descontada da taxa de mortalidade[1] $(\gamma x(t) - \eta)$, o que resulta em

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t} = y(t)(\gamma x(t) - \eta). \tag{2}$$

Podemos analisar essas populações individualmente com dois gráficos $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ ou conjuntamente o par $(x(t), y(t))$, também chamado "plano de fases".

Solução numérica

Para cálculo numérico das soluções, vamos utilizar o Método de Euler, que é baseado em uma aproximação da derivada, com $\delta > 0$ pequeno, descrita abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{d\,x(t)}{d\,t} \approx \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} \approx x(t)(\alpha - \beta y(t)) \iff x(t+\delta) \approx x(t) + \delta\Big[x(t)(\alpha - \beta y(t))\Big],\\
\frac{d\,y(t)}{d\,t} \approx \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta} \approx y(t)(\gamma x(t) - \eta) \iff y(t+\delta) \approx y(t) + \delta\Big[y(t)(\gamma x(t) - \eta)\Big].
\end{aligned}$$

Vamos fazer uma mudança de variável $x(t) \mapsto z_k$, $y(t) \mapsto w_k$ e $(t + r\delta) \mapsto (k + r)$ para evidenciar o fato de que essas soluções são aproximações da solução real.

$$z_{k+1} = z_k + \delta\Big[z_k(\alpha - \beta w_k)\Big], \tag{3}$$

[1] O indivíduo que não consegue uma presa tende a morrer.

$$w_{k+1} = w_k + \delta \Big[w_k(\gamma z_k - \eta) \Big]. \tag{4}$$

Determinando parâmetros dados alguns pontos

Se tivermos um conjunto de pontos da solução $(x(t), y(t))$, somos capazes de calcular os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ que deram origem a essas soluções. Tomemos dois instantes de tempo t_1 e t_2. Assim, partindo da equação (1), conseguimos construir o seguinte sistema de equações lineares para calcular $\alpha,\ \beta$.

$$\alpha - \beta y(t_1) = \lim_{\delta \to 0} \frac{x(t_1+\delta) - x(t_1)}{x(t_1)\delta},$$
$$\alpha - \beta y(t_2) = \lim_{\delta \to 0} \frac{x(t_2+\delta) - x(t_2)}{x(t_2)\delta}.$$

Podemos reescrever esse sistema em formato matricial, o que corresponde a

$$\begin{bmatrix} 1 & -y(t_1) \\ 1 & -y(t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lim_{\delta \to 0} \begin{bmatrix} \frac{x(t_1+\delta)-x(t_1)}{x(t_1)\delta} \\ \frac{x(t_2+\delta)-x(t_2)}{x(t_2)\delta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

De maneira análoga, partindo da equação (2), escrevemos

$$\gamma x(t_1) - \eta = \lim_{\delta \to 0} \frac{y(t_1+\delta) - y(t_1)}{y(t_1)\delta},$$
$$\gamma x(t_2) - \eta = \lim_{\delta \to 0} \frac{y(t_2+\delta) - y(t_2)}{y(t_2)\delta}.$$

Podemos reescrever esse sistema em formato matricial, o que corresponde a

$$\begin{bmatrix} x(t_1) & -1 \\ x(t_2) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \eta \end{bmatrix} = \lim_{\delta \to 0} \begin{bmatrix} \frac{y(t_1+\delta)-y(t_1)}{y(t_1)\delta} \\ \frac{y(t_2+\delta)-y(t_2)}{y(t_2)\delta} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Para calcular $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \eta$, basta resolver os sistemas de equações lineares (5)-(6).

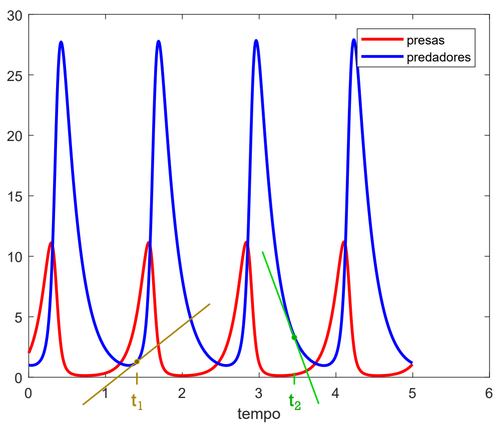

Figura 1: Conhecendo-se a solução em $\{t_1, t_1+\delta, t_2, t_2+\delta\}$, podemos calcular os parâmetros do modelo resolvendo-se (5)-(6). Na figura, ilustramos t_1 e t_2 para a equação (2).

Exercícios

Exercício 1: calcular parâmetros dados os pontos

Dado um modelo como em (1)-(2), e de posse de dois pares de pontos, calcule α, β, γ, η. Aqui, $\delta = 0.0001$.

$(x(t_1), y(t_1)) = (0.0964518798, 32.8421972968)$; $\quad (x(t_1+\delta), y(t_1+\delta)) = (0.0962122721, 32.8264097365)$,
$(x(t_2), y(t_2)) = (11.6600061041, 33.7237030890)$; $\quad (x(t_2+\delta), y(t_2+\delta)) = (11.6300122506, 33.7854849542)$.

Exercício 2: calcular soluções dados os parâmetros encontrados

Atividade 1: Agora que você calculou α, β, γ, η, faça o gráfico (z_k, w_k) para um conjunto de condições iniciais $\{z_0 = 2m,\ w_0 = m,\ \text{para } m = 1, 2, ..., 10\}$ com o mesmo δ e para $0 \leq t \leq 5$. Depois de plotar os gráficos com
`plot(z, w,'-'), hold on`,
plote as condições iniciais em preto com
`plot(2 * [1:10], [1:10], 'k*')`
e ao final nomeie os eixos com
`xlabel('presas'), ylabel('predadores')`.

Atividade 2: Agora, para a condição inicial $(z_0, w_0) = (2, 1)$, plote o gráfico para mesmo δ e mesmo intervalo de tempo e plote os gráficos (t_k, z_k) e (t_k, w_k), em que $t_k = k\delta$. Faça os gráficos da seguinte forma

```
plot(t, z, 'r-', 'linewidth', 2), hold on
plot(t, w, 'b-', 'linewidth', 2)
xlabel('tempo')
legend('presas', 'predadores').
```

Os argumentos passados na função `legend(...)` precisam aparecer na mesma ordem em que os plots foram feitos.

Exercício 3: pontos de equilíbrio

Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (1)-(2), isto é, os pontos em que as derivadas são zero. Considere os parâmetros calculados na solução do Exercício 1.

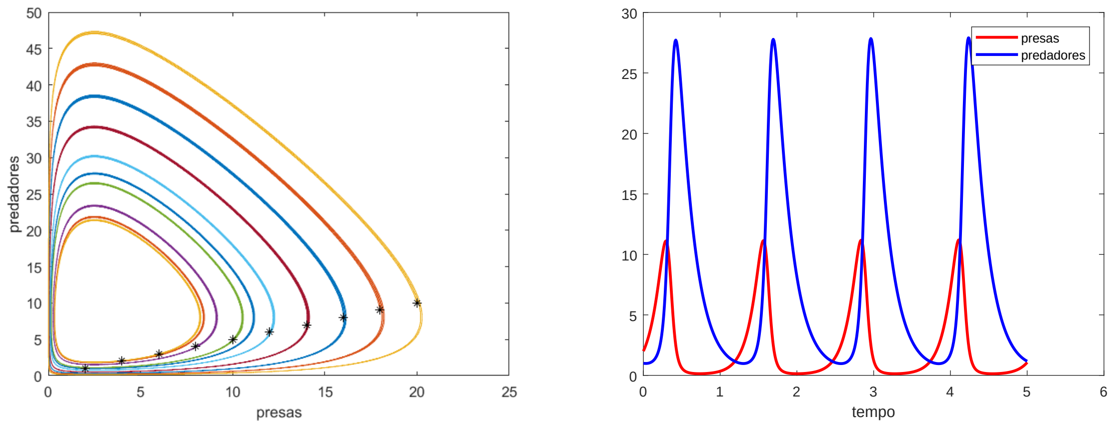

Figura 2: Soluções das atividades 1 e 2.

(Curiosidade: Formatando os gráficos) Nos plots, informamos a formatação do gráfico e a cor: `rbgycmk` são respectivamente as cores *red, blue, green, yellow, cyan, magenta, black*. As linhas do gráfico são `- -- -. :`, que informa linhas contínuas, tracejadas, traço-ponto ou pontilhadas respectivamente. Os marcadores dos pontos são `*sho+xv^` dentre outros, e significam *asterisk, square, hex-star, circle, plus, x, down-triangle, up-triangle* respectivamente. Por exemplo, a formatação `'m-.s'` produz um gráfico magenta com linha traço-ponto e marcadores quadrados, quando fazemos um `plot(dominio, imagem, 'm-.s')`.