# 数理方程习题

中国语言文学系常代表办公室

2019/3/28

# 目录

# 1 调和方程

## 1.1 $\S_{1.3}$ 第 2 题

对一般的椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

其中 $(a_{ij})$ 为正定阵，$c \leq 0$. 证明弱极值原理，强极值原理成立.

解答:

首先我们必须叙述清楚一般椭圆型方程极值原理的含义。

弱极值原理:

若 $u \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$，满足一般椭圆方程，则 $u$ 不能在 $B_1$ 内部取到非负最大值/非正最小值.

强极值原理:

若 $u \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$，满足一般椭圆方程. 设 $x^0 \in \partial B_1$，使得

$$u(x^0) > u(x), \forall x \in B_1$$

则有

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x^0) - u(x^0 - t\boldsymbol{n})}{t} > 0$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial B_1$ 在 $x_0$ 处的单位外法向量.

证明：

先证弱极值原理. 记题中方程左端为 $L(u)$，其中 $L$ 是椭圆型微分算子，容易验证它是线性的. 则椭圆型方程可以简写成 $L(u) = 0$. 只证明非负最大值不能在内部取得. 我们先考虑 $L(u) > 0$ 时的情形，然后用摄动的方法推证 $L(u) = 0$ 时也成立.

$L(u) > 0$，用反证法，假设 $\exists x_0 \in B_1$，使得 $u$ 在 $x_0$ 处达到了非负最大值. 那么有

$$\begin{cases} u|_{x_0} & \geq 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x_0} & = 0, \forall i \\ H = \left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}\right|_{x_0} & \leq 0 \end{cases}$$

但是，在 $x_0$ 处，有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > -cu \geq 0$$

记 $A=(a_{ij})$，则它是正定阵，那么在 $x_0$ 处，有

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}>0\\ \Rightarrow\ & tr(AH)>0\\ \Rightarrow\ & tr(C^TCH)>0, \exists C\in\mathbb{R}^{n\times n}\\ \Rightarrow\ & tr(CHC^T)>0\\ \Rightarrow\ & \text{H 正定，矛盾！}\end{aligned}$$

下面考虑一般的情形，取 $h=e^{kx_1}$，其中 $k>0$，考察函数 $u_\epsilon=u+\epsilon h$，有 $L(u_\epsilon)=L(u+\epsilon h)=L(u)+\epsilon L(h)=0+\epsilon(a_{11}k^2+b_1kh+ch)h$，我们希望有 $L(u+\epsilon h)>0$，可以取 $h$ 足够大，那么对足够小的 $\epsilon$，$u_\epsilon$ 的非负最大值恒在边界上取得，考虑到 $u_\epsilon$ 的连续性，令 $\epsilon\to 0$，即得证.

下面证明强极值原理. 我们希望构造函数 $w=u-v$，对 $w$ 使用弱极值原理. 而函数 $v$ 满足

$$\begin{cases} v|_{\partial B_1}=0\\ L(v)<0, in \quad B_1\backslash B_{\frac{1}{2}}\\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}>0\end{cases}$$

可以取

$$v=v_\alpha=e^{-\alpha}-e^{-\alpha r^2}$$

取 $\alpha$ 足够大就可以满足上面的要求，剩下的工作和书上的做法是类似的.

## 1.2 $\S_{1.2}$ 第 9 题

设 $u$ 为带状区域 $\Sigma=\{(x_1,x_2)||x_1|\le 1,\quad -\infty<x_2<\infty\}$ 上的非负调和函数，证明：

$$u(x)\le u(0)e^{C|x_2|},\quad \forall |x_1|\le\frac{1}{4},\quad -\infty<x_2<\infty$$

其中常数 $C$ 不依赖于 $u$.(提示：Harnack 不等式)

解答:

对于任意的 $x=(x_1,x_2)\in\Sigma$,取半径为 $\frac{3}{16}$ 的圆,用“滚圆法”折线连接 $(x_1,x_2),(x_1,0),(0,0)$ 三点，假设总共需要 N+2 个圆 $\{B_k\}_{k=1}^{N+2}$，那么第 1，N，N+2 个圆的圆心即为这三个点，记这些圆的圆心分别为 $\{x^k\}_{k=1}^{N+2}$.

此时满足注 1.2.3 的条件，可以使用 Harnack 不等式的推论，有

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x^1) \\ &\leq C(n)u(x^2) \\ &\leq (C(n))^2 u(x^3) \\ &\leq \dots \\ &\leq (C(n))^{N+1} u(x^{N+2}) \\ &= (C(n))^{N+1} u(0) \end{aligned}$$

且显然有

$$\begin{aligned} &(N-1)\frac{3}{16} \leq |x_2| \\ \Rightarrow\ & N \leq \frac{16}{3}|x_2| + 1 \\ \Rightarrow\ & N+1 \leq \frac{16}{3}|x_2| + 2 \\ \Rightarrow\ & u(x) \leq (C(n))^{\frac{16}{3}|x_2|+2} u(0) \end{aligned}$$

原题应当有误，右端还应该多一个常数.

## 1.3 $\S_{1.2}$ 第 10 题

设 $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 为 $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ 上的调和函数. 若满足 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ 且 $u(x)$ 为有界函数，证明 $u \equiv 0$.(提示：延拓为全空间调和函数) 若把 $u$ 改为下有界函数，试举出例子使得结论不成立.

解答:

对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义 $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, -x_n)$.

我们给出 $u$ 的全空间调和延拓的构造，然后应用 Liouville 型定理即可.

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x_n \geq 0 \\ \overline{u(\bar{x})} & \text{if } x_n < 0 \end{cases}$$

若把 $u$ 改为下有界函数，结论不成立，反例有 $u(x) = x_n$.

## 1.4 $\S_{1.2}$ 第 11 题

若 $u$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数. 设 $0 < a \leq b \leq c$ 满足 $b^2 = ac$，证明

$$\int_{\mathbb{S}^1} u(x^0 + a\omega)u(x^0 + c\omega) dS_\omega = \int_{\mathbb{S}^1} u^2(x^0 + b\omega) dS_\omega$$

(提示：固定 $b$ 后，对上式左端求导.) 上述结论对一般维数 $\mathbb{R}^n$ 也成立，有兴趣的同学可以自己证明.

解答:

固定 b，记 $f(a)=\int_{\mathbb{S}^1} u(x^0+a\omega)u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)dS_\omega$，只要证明 $f^{'}(a)=0$ 即可.

$$
\begin{aligned}
f^{'}(a) &= \int_{\mathbb{S}^1} \omega\cdot\nabla u(x^0+a\omega)u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)dS_\omega - \frac{b^2}{a^2}\int_{\mathbb{S}^1} \omega\cdot\nabla u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)u(x^0+a\omega)dS_\omega \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_{\mathbb{S}^1} a\omega\cdot\nabla u(x^0+a\omega)u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)dS_\omega - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{b^2}{a}\omega\cdot\nabla u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)u(x^0+a\omega)dS_\omega\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial u(x^0+aw)}{\partial n_\omega}u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)dS_\omega - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial u(x^0+\frac{b^2}{a}w)}{\partial n_\omega}u(x^0+a\omega)dS_\omega\right) \\
&\overset{\text{Green 第二公式}}{=} \frac{1}{a}\left(\iint_{B_1} \Delta u(x^0+aw)u(x^0+\frac{b^2}{a}\omega)d\omega - \iint_{B_1} \Delta u(x^0+\frac{b^2}{a}w)u(x^0+a\omega)d\omega\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

## 1.5 $\S_{1.3}$ 第 4 题