Inteligência Computacional
Sistemas Fuzzy
02 - Conjuntos

Introdução

Conjuntos são utilizados para classificar elementos em conceitos gerais:

- números pares
- números impares
- cidades que são capitais na América do Sul
- times de futebol
- ...

Introdução

Os elementos são divididos em dois grupos distintos:

- MEMBROS: pertencem ao conjunto
- NÃO-MEMBROS: não pertencem ao conjunto

Universo de Discurso

Universo de discurso: espaço onde estão definidos os valores possíveis

- Notação: X

Exemplo: define-se um universo de discurso discreto X que reúne todos os números inteiros entre -100 e 100. Algebricamente, esta definição é expressa por

$$X : \{x \in X | -100 \leq x \leq 100\}$$

Dentro do universo X considere o conjunto dos números positivos (denotado por A) e o conjunto dos números negativos (denotado por B), as relações de pertinência de alguns elementos em relação a estes conjuntos podem ser obtidas por

$$\begin{aligned} 44 \in A, \quad ou, \quad \mu_A(44) = 1 \\ 101 \notin B, \quad ou, \quad \mu_B(101) = 0 \\ -11 \in B, \quad ou, \quad \mu_B(-11) = 1 \end{aligned}$$

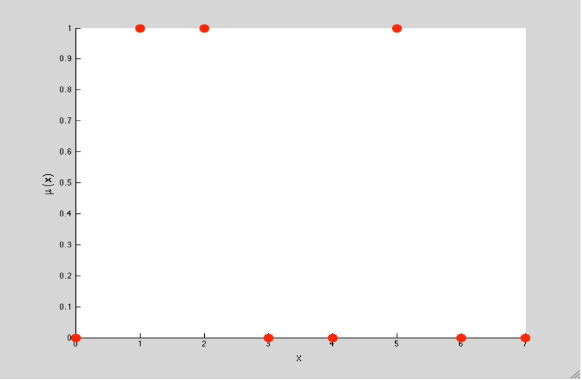
onde $\mu_y(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x em relação ao conjunto y.

Representação

- Lista dos membros: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- Método baseado em regra: $A = \{x|P(x)\}$
- Função característica: $\mu_A = 1 \ se \ x \in A \ ou \ 0$ caso contrário
- Propriedades (função característica):
  - $\mu_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$
  - $\mu_X(x) = 1 \ e \ \mu_\emptyset(x) = 0$
  - X é o Conjunto Universo ou Universo de Discurso
  - $\emptyset$ é o Conjunto Vazio

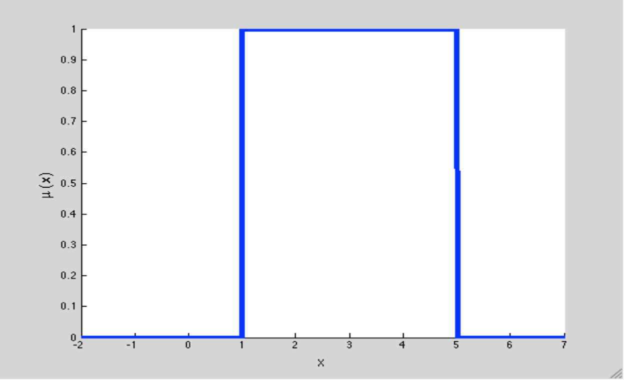
Função Característica

$A = \{1, 2, 5\}$



Função Característica

$A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$



Cardinalidade

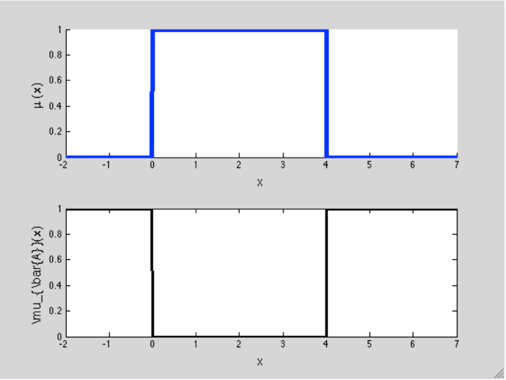
- $|A|$ = número de elementos de A.
- Exemplo: $A = \{1, 2, 5\} \Longrightarrow |A| = 3$

Potência

- $\wp$ = conjunto de partes (*power set*)
- $A = \{1, 2, 5\}$
- $\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$
- $|\wp(A)| = 2^{|A|}$
- $A = \{1, 2, 5\} \Longrightarrow |\wp(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

Complemento

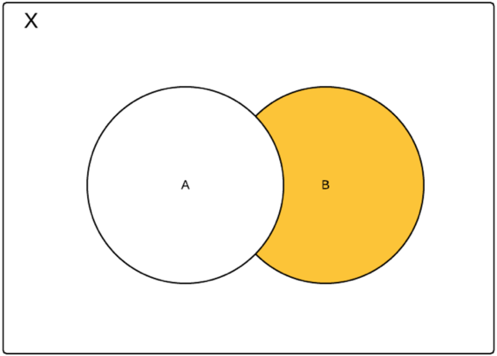
- $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$



- $\bar{A} = \{x | x \notin A\}$

Complemento Relativo

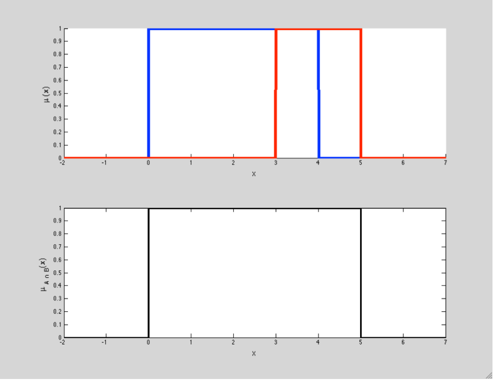
- Conjunto contendo todos os membros de B que também não são membros de A.
- $B - A = \{x | x \in \; B \text{ e } x \notin A\}$



União

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

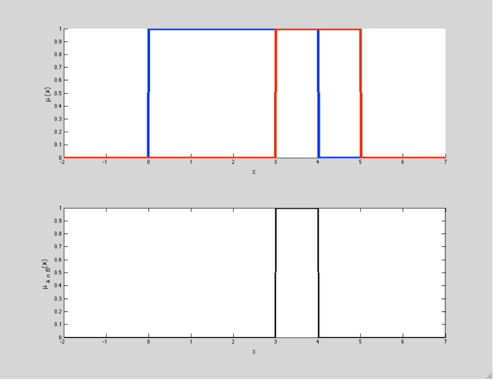
Exemplo: $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$



Intercessão

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$

Exemplo: $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$



Propriedades

- $A \cup B \Longrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
- $A \cap B \Longrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
- $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Operações com Conjuntos

- União: $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$
- Interseção: $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
- Complemento: $\overline{A} = \{x|x \; not \in A, x \in X\}$
- Diferença: $A|B = \{x|x \in A \vee x \; not \in B\}$
- Involução: $\overline{\overline{A}} = A$
- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
- Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Operações com Conjuntos

- Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$
- Absorção: $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$
- Absorção por X e $\emptyset$: $A \cap \emptyset = \emptyset$, e $A \cup X = X$
- Identidade: $A \cup \emptyset = A$, e $A \cap X = A$
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Lei da Exclusão do Meio: $A \cup \overline{A} = X$
- Lei da Não Contradição: $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Subconjunto

- Se todo elemento de A é também um elemento de B

  $x \in A \Longrightarrow x \in B$

- Pode ser escrito como

  $A \subseteq B$

- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

  $A = B$

  $A \subseteq B \text{ } if \text{ } A \cup B = B \text{ } (or \text{ } A \cap B = A) \ \forall \ A, \ B \in \wp(x)$

Partição

- Conjuntos A e B são disjuntos se

  $A \cap B = \emptyset$

- Partição = família de subconjuntos de A

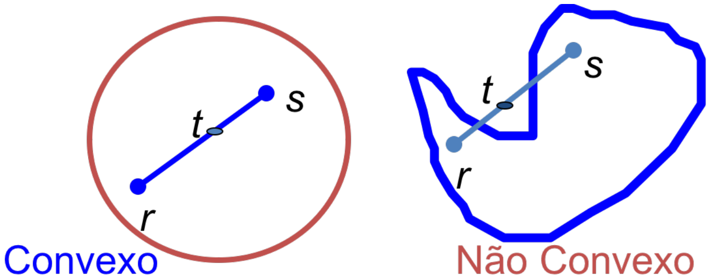
  $\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\}$

- U = Conjunto dos automóveis do Brasil

- Possíveis partições

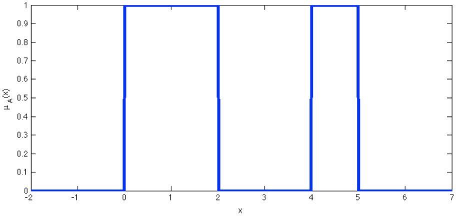
Convexidade

- Qualquer conjunto definido por um único intervalo de números reais é convexo.
- Qualquer conjunto definido por mais de um intervalo, que não contenha pontos entre os intervalos não é convexo.
- Seja $A \subseteq \Re^n$; $r \in A$ e $s \in A$
- $t = (\lambda r + (1 - \lambda)s) \in A$; $\forall \lambda \in [0, 1]$



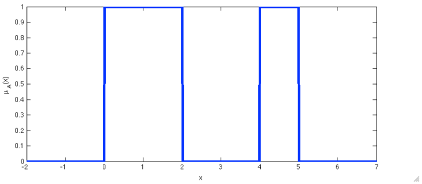
Convexidade

$A = \{x | x \in [0, 2] \cup [4, 5]\}$ é Convexo?



Convexidade

$A = \{x | x \in [0, 2] \cup [4, 5]\}$ é Convexo?



Não!!!

Seja $A \subseteq \Re^n$; $r \in A$ e $s \in A$

$t = (\lambda r + (1 - \lambda)s) \in A;\ \forall \lambda \in [0, 1]$

$r = 1,\ s = 4,\ \lambda = 0.4$

$\lambda r + (1 - \lambda)s = 2.8$

$2.8 \notin A$

Convexidade

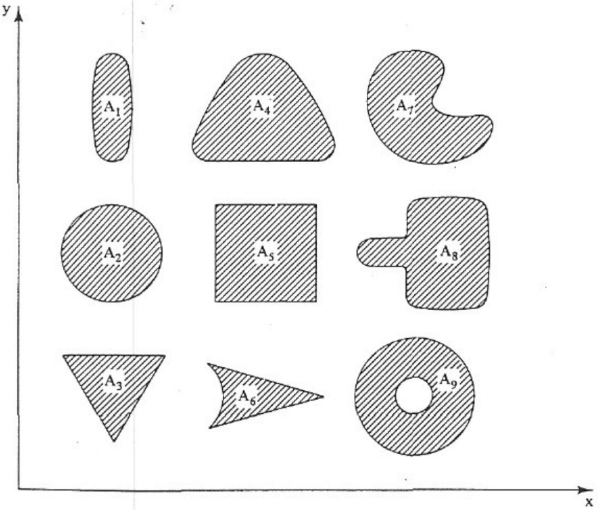


Figure 1.1 Example of sets in $\mathbb{R}^2$ that are convex (A_1–A_5) or nonconvex (A_6–A_9).

Produto Cartesiano

- $A \times B = \{(a, b) | a \in A,\ \ b \in B$
- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{a, e, i, o, u\}$
- $A \times B = \{(1, a), (1, e), (1, i), (1, o), (1, u), (2, a), (2, e), (2, i), (2, o), (2, u)\}$

Relembrando...

Conjuntos são utilizados para classificar elementos em conceitos gerais:

- números pares
- números impares
- cidades que são capitais na América do Sul
- times de futebol
- ...

???...!!!

Um elemento x pertence ou não a um conjunto...

... mas na realidade existem situações como estas:

- alta taxa de inflação
- pessoas altas
- pequeno erro de aproximação

Grande dificuldade em definir o limiar entre esses conjuntos utilizando os conjuntos ordinários.

Paradoxo[1] como enunciado: *Quando um monte de areia deixa de ser um monte de areia, caso retiremos um grão de areia de cada vez?*

E agora? Como ficam os CONJUNTOS?

[1] Paradoxo de Sorites, atribuído a Eubulides de Mileto (adversário de Aristóteles)

Introdução

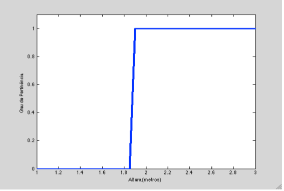
- A teoria clássica de conjuntos é governada por uma lógica que dá a uma proposição o valor falso (0) ou verdadeiro (1).
- A teoria de conjuntos fuzzy estende a teoria de conjuntos clássicos e presupõe-se valores-verdade no intervalo $[0, 1]$, isto é, cada elemento possui um grau de pertinência[2] ao conjunto entre $[0, 1]$.
- Teoria conveniente para tratamento de incerteza, termos linguísticos, redundância, imprecisão.
- Exemplos de conceitos definidos de forma imprecisa: poucos livros, uma longa história, um pouco de sal.

[2] Grau de pertinência é uma medida de similaridade entre o elemento e o conjunto.

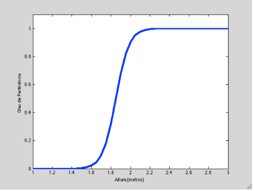
Conjuntos Ordinários x Conjuntos Fuzzy

Pessoas Altas

- Conjunto Ordinário



- Conjunto Fuzzy



Definição

A fuzzy set (class) A in X is characterized by a membership function (characteristic function) $\mu_A(x)$ *which associates with each point in X a real number in the interval* $[0, 1]$, *with the value of* $\mu_A(x)$ *at* x *representing the grade of membership of* x *in A.* - Lofti Zadeh (1921-2017).

- Extensão da teoria de conjuntos clássica
- Generalização da função característica
- Função de pertinência
  - Notações

    $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$

    $A : X \rightarrow [0, 1]$ (alternativa, encontrada em alguns livros)

Definição

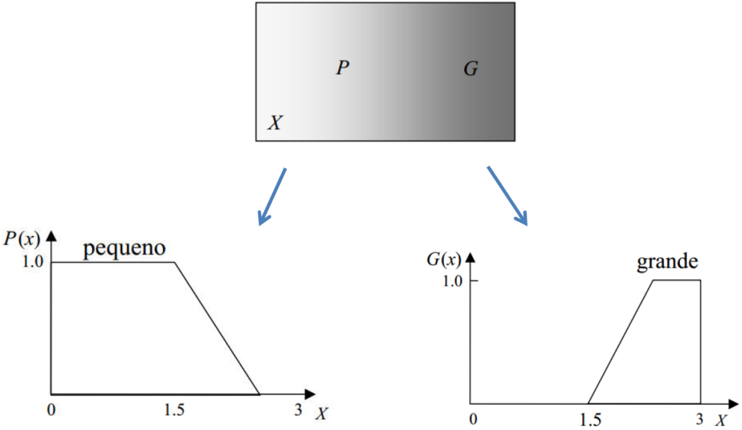
Um conjunto fuzzy A em X é definido por um conjunto de pares ordenados.

$$A = \{(x, \mu_A(x))|x \in X, \mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]\},$$

em que A é um conjunto fuzzy, $\mu_A(x)$ a função de pertinência (grau de ativação), x é um elemento do universo de discurso X.

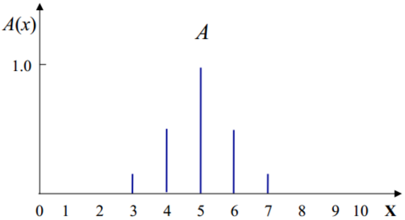
Um conjunto fuzzy A é totalmente caracterizado por sua função de pertinência μ_A

Função Característica



Conjunto Discreto

- Conjunto discreto (não representa somatório!) - $A = \sum_{x \in X} \mu_A(x_i)/x_i$



União de graus de pertinência

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (Universo discreto)

$$A = \left\{\frac{0}{0}, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0.2}{3}, \frac{0.5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.5}{6}, \frac{0.2}{7}, \frac{0}{8}, \frac{0}{9}, \frac{0}{10}\right\} \Rightarrow A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i)/x_i$$

Marcador

A pertinência de $x = 3$ no conjunto A é 0.2

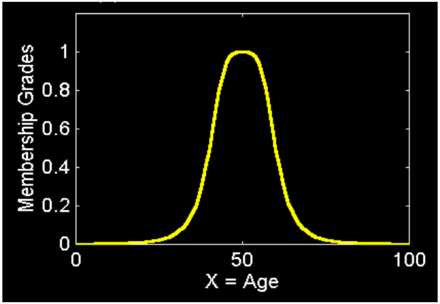
Conjunto Contínuo

- Conjunto contínuo (não representa integral!)

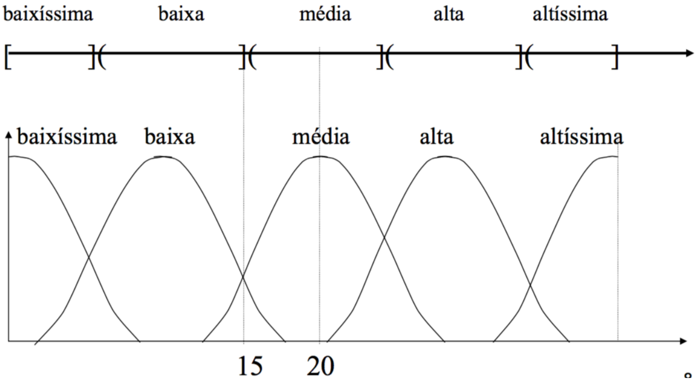
  $A = \int_x \mu_A(x)/x$

- Exemplo: idade próxima de 50

  $A = \int_{R+} \frac{1}{1+(\frac{z-50}{10})^4}/x$

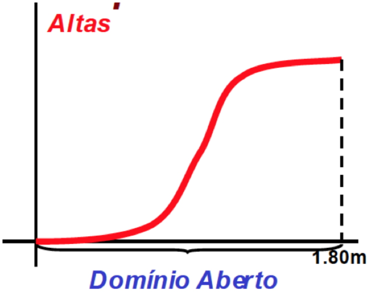


Partição Clássica vs Fuzzy



Domínio

Universo total de valores possíveis para os elementos do conjunto (x)



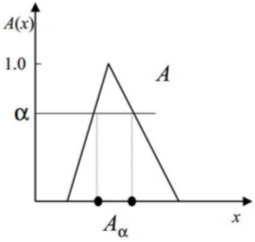
Conjunto $\alpha - cut$

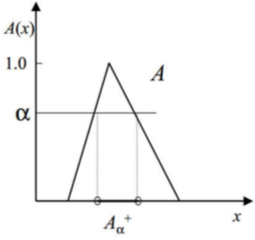
Subconjunto de todos os elementos do domínio com função de pertinência acima de um determinado valor α.

$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ($\alpha - cut$)

$A_{\alpha+} = \{x | \mu_A(x) > \alpha\}$ ($\alpha - cut$ forte)

para $\alpha \in [0, 1]$



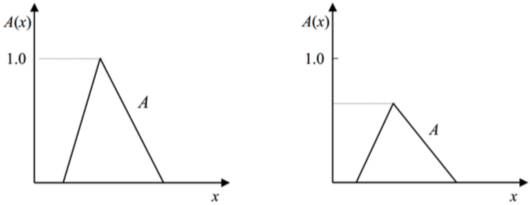


Altura

- Maior valor de pertinência obtido por qualquer elemento do conjunto

$$hgt(A) = sup_{x \in X} A(x)$$

Altura Supremo

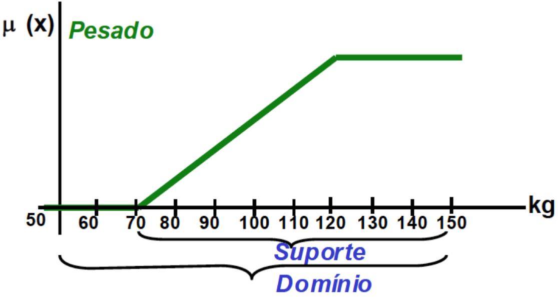


Normal $hgt(A) = 1$

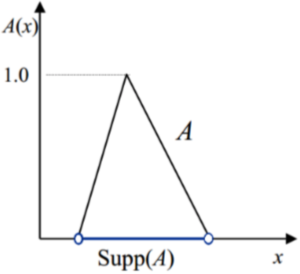
Subnormal $hgt(A) < 1$

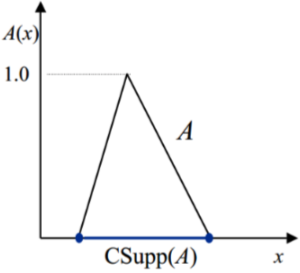
Suporte

Subconjunto dos pontos que possuem valor de pertinência maior que 0. vspace0.5cm



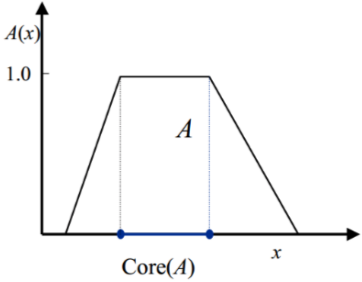
Suporte





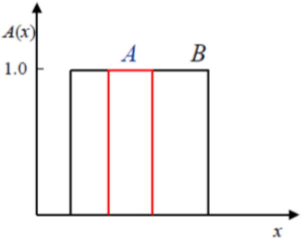
- Conjunto Aberto - $Supp(A) = \{x \in X \mid \mu A(x) > 0\}$
- Conjunto Fechado - $CSupp(A) = \{x \in X \mid \mu A(x) \geq 0\}$

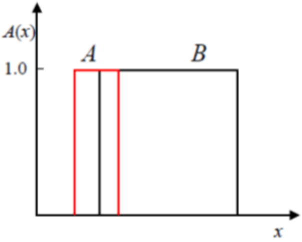
Núcleo



- $Core(A) = \{x \in X \mid \mu A(x) = 1\}$

Inclusão



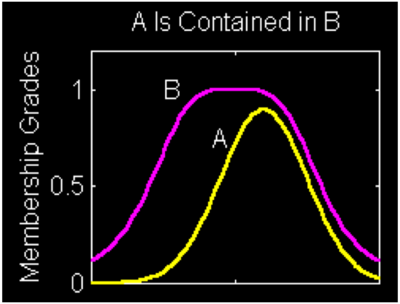


$A \subseteq B$ $\quad$ $A \not\subset B$

Subconjunto

Dado dois conjuntos fuzzy A e B

$A \subseteq B \iff \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$



Exemplo

Cidades grandes: $A = \{1/BH, 0.8/Uberlandia, 0.7/JF, 0.6/MC, 0.3/Div, 0/Tapirai\}$

- Altura de A: $hgt(A) = 1$ - A é normal
- Suporte de A: $Sup(A) = \{BH, Uberlandia, JF, MC, Div\}$
- Núcleo de A: $Core(A) = \{BH\}$
- Subconjunto de A: $B = \{0.4/BH, 0.1/Uberlandia\}$ - $B \subseteq A$

Cardinalidade

A cardinalidade $|.|$ de um conjunto A é:

$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(X)$ para X discreto

ou

$|A| = \int_x \mu_A(x)dx$ para X contínuo

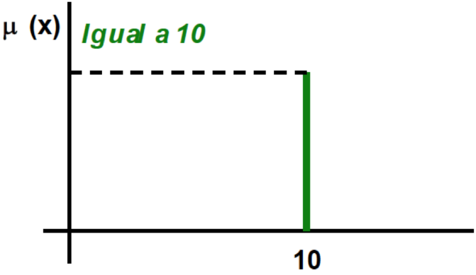
Exemplo:

$A = \{0.25/6.5, 0.5/7, 0.75/7.5, 1/8, 0.75/8.5, 0.5/9, 0.25/9.5\}$

$A = \{0.25 + 0.5 + 0.75 + 1 + 0.75 + 0.5 + 0.25 = 4\}$

Conjunto Fuzzy Singleton

Conjunto cujo suporte é um único ponto em X, com valor de pertinência igual a 1.



Convexidade

Um conjunto Fuzzy é convexo se e somente se

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Caso todos os conjuntos $\alpha - cut$ sejam convexos, o conjunto é convexo.

Convexidade

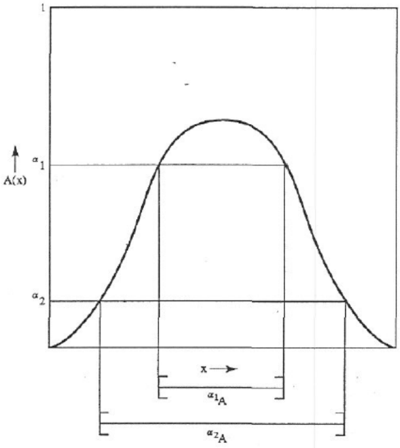


Figure 1.9 Subnormal fuzzy set that is convex.

Convexidade

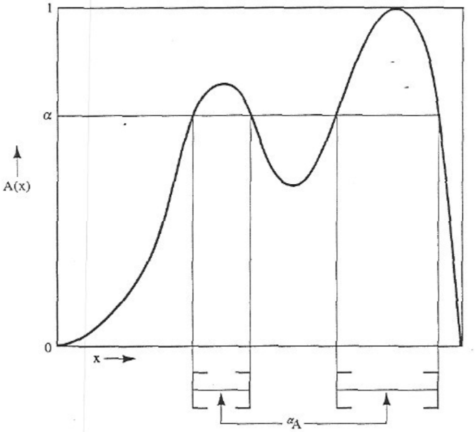
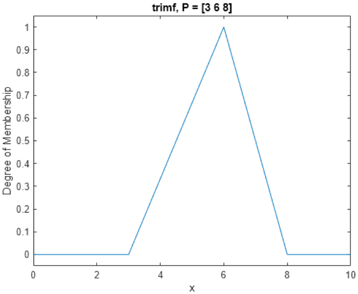


Figure 1.10 Normal fuzzy set that is not convex.

Função Triangular

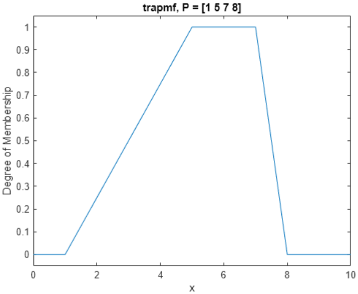


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = max\{min[(x-a)/(b-a), (c-x)/(c-b)], 0\}$$

a, b, e c são os pontos que definem a forma do triângulo.

Função Trapezoidal

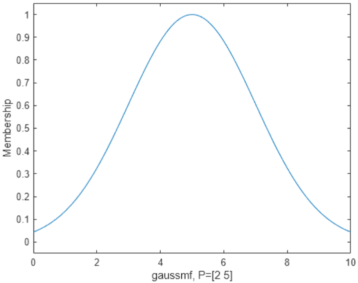


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = max\{min[(x-a)/(b-a), 1, (d-x)/(d-c)], 0\}$$

a, b, c, e d definem a forma do trapézio.

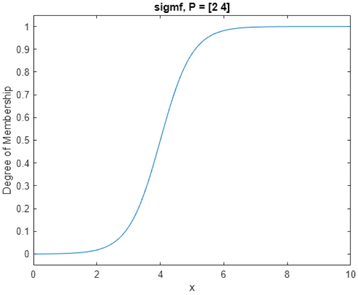
Função Gaussiana



$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}\right)$$

c é o centro da curva e σ é o desvio padrão que controla a largura.

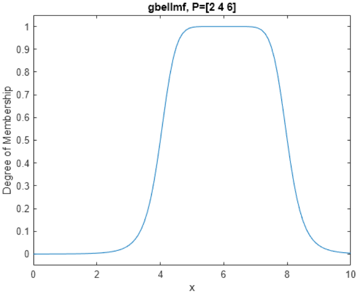
Função Sigmoidal



$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x - c))}$$

a controla a inclinação e c a posição central.

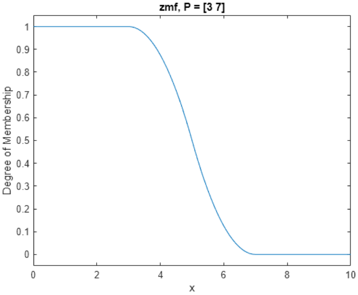
Função em Sino Generalizada



$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

a controla a largura, *b* controla a suavidade, e *c* é o ponto central.

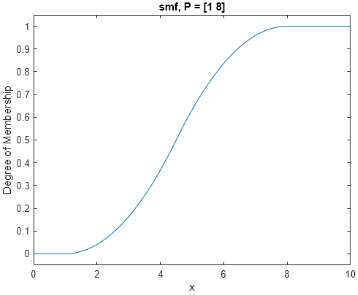
Função Z (Z-shaped)



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

a e b são os limites da função.

Função S (S-shaped)

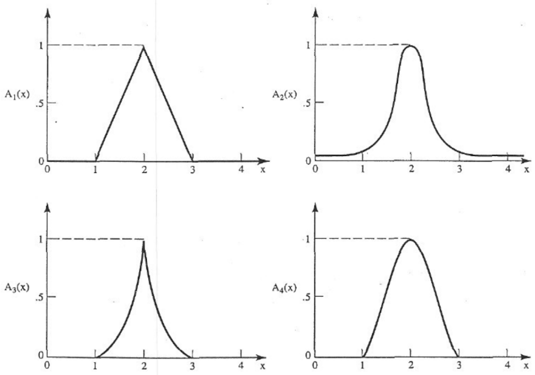


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

a e *b* são os pontos de controle da função.

Dependência de Contexto

Números próximos de 2



Nota

A escolha da função de pertinência deve refletir

- a natureza do problema
- a percepção do conceito a ser capturado
- o nível de detalhe a ser capturado
- o contexto da aplicação
- a adequação para ajuste de parâmetros (otimização)

Implementações