

8.1 数值稳定性

1. 例题与程序

计算积分 $E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$ $n=1, 2, \dots, 9$

由分部积分法得递推式如下：

$$E_n = 1 - nE_{n-1} \quad n=2, 3, \dots, 9 \quad E_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx$$

将递推式改写为：

$$E_n = (1 - E_{n-1}) / n \quad n=\dots, 3, 2, 1$$

MATLAB 程序编辑如下：

```
EA1=zeros(1,n);
```

```
E1=exp(-1);
```

```
EA1(1,1)=E1;
```

```
for i=2:n
```

```
    EA1(1,i)=1-i*EA1(1,i-1);
```

```
end
```

```
EA2=zeros(1,n);
```

```
EA2(1,n)=0
```

```
for i=n:-1:2
```

```
    EA2(1,i-1)=(1-EA2(1,i))/n;
```

```
end
```

EA1

EA2

程序说明：EA1 为一个一行 n 列的行向量，序数从小到大分别为第一个递推公式得到的 E_1 到 E_n 的值。EA2 也为一个一行 n 列的行向量，序数从大到小分别为第二个递推公式得到的 E_n 到 E_1 的值。

运行结果：

```
>> NM
```

```
n =
```

```
20
```

```
EA1 =
```

```
Columns 1 through 11
```

```
0.3679    0.2642    0.2073    0.1709    0.1455    0.1268    0.1124    0.1009    0.0916  
0.0839    0.0774
```

```
Columns 12 through 20
```

```
0.0718    0.0669    0.0627    0.0590    0.0555    0.0572   -0.0295    1.5596   -30.1924
```

```
EA2 =
```

```
Columns 1 through 11
```

```
0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476  
0.0476    0.0476
```

```
Columns 12 through 20
```

```
0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0476    0.0475    0.0500         0
```

>>

对程序进行改变使得第二个公式的 E20 等于第一个公式的到的 E20 即-30.1924
运行结果：

>> NM

n =

20

EA1 =

Columns 1 through 11

0.3679	0.2642	0.2073	0.1709	0.1455	0.1268	0.1124	0.1009	0.0916
0.0839	0.0774							

Columns 12 through 20

0.0718	0.0669	0.0627	0.0590	0.0555	0.0572	-0.0295	1.5596	-30.1924
--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	--------	----------

EA2 =

Columns 1 through 11

0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0476
0.0476	0.0476							

Columns 12 through 20

0.0476	0.0476	0.0476	0.0476	0.0474	0.0514	-0.0280	1.5596	-30.1924
--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	--------	----------

>>

理论上说两个方法得到的结果应该相同，因为仅仅是一个正着递推，一个反着递推，但是实际结说明的两个方法算的数据差别很大。

2. 实验题

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+5x} dx \quad n=1, 2, 3, \dots, 10$$

运用裂项法的到递推公式：

$$I_n = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{5} I_{n-1} \quad n=2, 3, 4 \dots$$

$$I_1 = 1/5 - 1/25 * \log(6)$$

MATLAB 代码：

```
n=input('please input the n ');
I=zeros(1,n);
I(1,1)=1/5-1/25*log(6);

for i=2:n
    I(1,i)=1/(5*i)-1/5*I(1,i-1);
end

I
```

程序说明：

先由用户指定递推到第 n 项，由 n 来生成一个一行 n 列的行向量，然后利用递推公式循环计算。

运行结果：

```
>> NM2
please input the n 20

n =

    20

I =

Columns 1 through 11

    0.1283    0.0743    0.0518    0.0396    0.0321    0.0269    0.0232    0.0204    0.0181
    0.0164    0.0149

Columns 12 through 20

    0.0137    0.0126    0.0118    0.0110    0.0103    0.0097    0.0092    0.0087    0.0083

>>
```