

8.6 NEWTON 插值

1. 例题与程序

已知一组观测数据为

$$x_i = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$y_i = 0 \quad -5 \quad -6 \quad 3$$

试用此组数据构造 Newton 3 次插值多项式，

，并求 $y(1.5)$ 的近似值。

MATLAB 程序编辑如下：

(1) 主函数

```
%变量输入模块
sym A;
A=input(' 请输入插值点的数据矩阵[xi;yi]')
s=length(A(1,:));
%数值计算模块
D=DiffQut(A);
X=A(1,1):0.01:A(1,s);
Y=Newtonployinterp(A,D,X);
%图像处理模块
plot(X,Y,A(1,:),A(2,:), 'or');
legend(' y=Newton(x)', ' NODE');
title(' 离散数据点的 Newton 插值');
xlabel(' anxis X');
ylabel(' anxis Y');
grid on;
%符号表示模块
symx=sym(' x');
D1=DiffQut(A);
P=Newtonployinterp(A,D1,symx);
pretty(P)
simplify(P)
```

(2) 插值多项式计算函数 Newtonpolyinterp

```
function F=Newtonpolyinterp(A,D,X) %函数入口出口

n=length(A(1,:));
F=zeros(size(X));
F=F+D(1,1);
m=ones(size(X));

for k=2:n
    m=(X-A(1,k-1)).*m;
    F=F+D(k,k)*m;
end
```

(3) 差商矩阵计算子函数

```
function N=DiffQut(Node) %输入输出定义

n=length(Node(1,:)); %计算节点数目
L=zeros(n,n); %生成差分矩阵
for i=1:n
    A(i,1)=Node(2,i); %为差分矩阵赋初值
end

for j=2:n
    for i=j:n
        A(i,j)=(A(i,j-1)-A(i-1,j-1))/(Node(1,i)-Node(1,i-(j-1))); %由
n-1 阶差分计算 n 阶差分
    end
end

N=A;
```

程序说明:

- (1) 主函数功能，从用户的输入读入插值数据点的 x_i , y_i 数据，并将其存为矩阵格式，并用 `length()` 函数计算用户输入了多少数据点保存在 n 中，然后调用子函数 `Diff()`，利用用户输入的插值节点的值生成一个差商矩阵。然后生成一个步长很短的行向量区间介于 x_0 到 x_n 间，调用插值函数值计算函数 `Newtonpolyinterp()` 函数计算出这个行向量内个数据点的插值所得到的值。然后利用该

数值进行作图并将数据点也同时作图，观看拟合效果并求出需要点的值。然后利用 MATLAB 强大的符号计算功能将一个 sym 型变量传入插值函数值计算函数求出插值多项式的符号解，然后化简。

(2) 子函数 `function F=Newtonployinterp(A,D,X)` 该函数功能是计算插值多项式的数值。因为差分矩阵 A 已经计算出，并且 MATLAB 的向量点乘功能（分量与分量间做乘法），只需要一个循环就可以算出插值多项式的所有项并累加。

(3) 子函数 `function N=DiffQut(Node)`，该子函数功能是计算差分矩阵

运行结果：

符号结果：

```
>> newtonfit_1
```

```
请输入插值点的数据矩阵[xi;yi][1 2 3 4;0 -5 -6 3]
```

```
A =
```

```
1     2     3     4
0    -5    -6     3
```

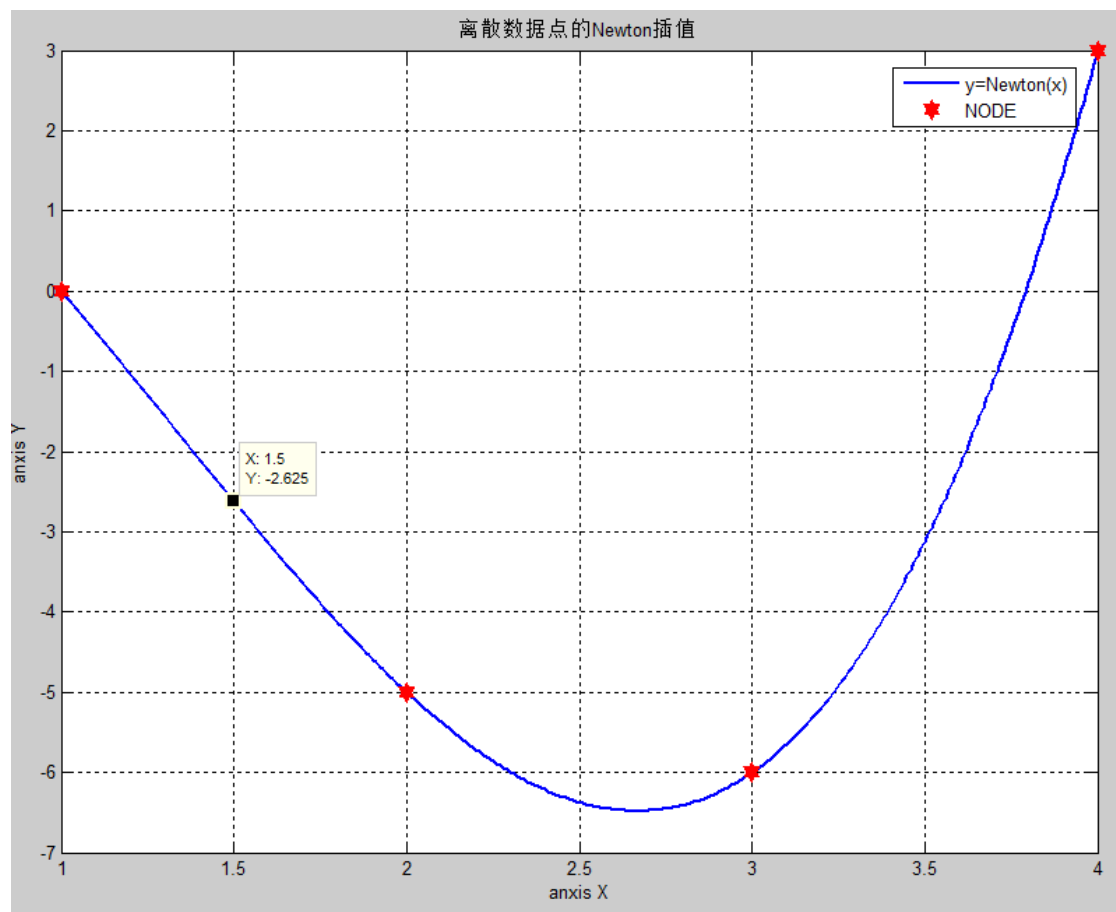
$$-5x + 5 + 2(x - 2)(x - 1) + (x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

```
ans =
```

```
3-4*x^2+x^3
```

```
>>
```

图象结果：



图中可以读出 $y(1.5) = -2.625$

2. 实验题

(1)

$x_i = 0.40 \quad 0.55 \quad 0.65 \quad 0.8 \quad 0.9$

$y_i = 0.537 \quad 0.685 \quad 0.789 \quad 0.919 \quad 1.26$

试用此组数据构造 Newton 3 次插值多项式，

，并求 $x=0.46$, $x=0.68$ 的三次插值。

(2)

$x_i=93 \quad 96 \quad 100 \quad 104 \quad 108$

$y_i=11.38 \quad 12.80 \quad 14.70 \quad 17.50 \quad 19.81$

试用此组数据构造 Newton 插值多项式，

，并求 $y(102)$ 的近似值。

第一题运行结果：

$X=0.46$ 时候 为得到较好精度去掉最后的节点。

符号解：

newtonfit_1

请输入插值点的数据矩阵 $[x_i;y_i]$ [0.40 0.55 0.65 0.8;0.537 0.685 0.789 0.919]

A =

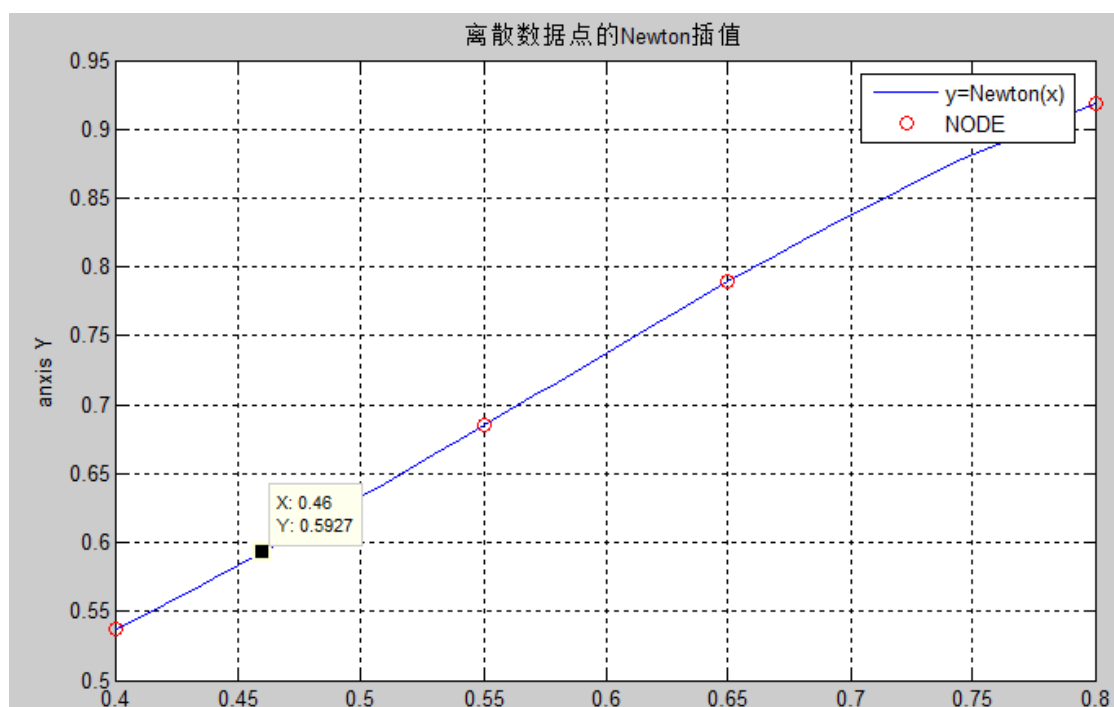
0.4000	0.5500	0.6500	0.8000
0.5370	0.6850	0.7890	0.9190

$$\frac{427}{3000} + \frac{74}{75}x + \frac{16}{75}\left|x - \frac{11}{20}\right|(x - 2/5) - \frac{34}{15}\left|x - \frac{13}{20}\right|\left|x - \frac{11}{20}\right|(x - 2/5)$$

ans =

$2567/5000 - 3343/3000x + 96/25x^2 - 34/15x^3$

图像解：



图中可以得到 $x=0.46$ 时候得到 $y=0.5927$;

$X=0.68$ 的时候为了得到较好精度舍去第一个节点

符号结果:

```
>> newtonfit_1
```

请输入插值点的数据矩阵 $[x_i; y_i]$ [0.55 0.65 0.8 0.9; 0.685 0.789 0.919 1.26]

A =

0.5500	0.6500	0.8000	0.9000
0.6850	0.7890	0.9190	1.2600

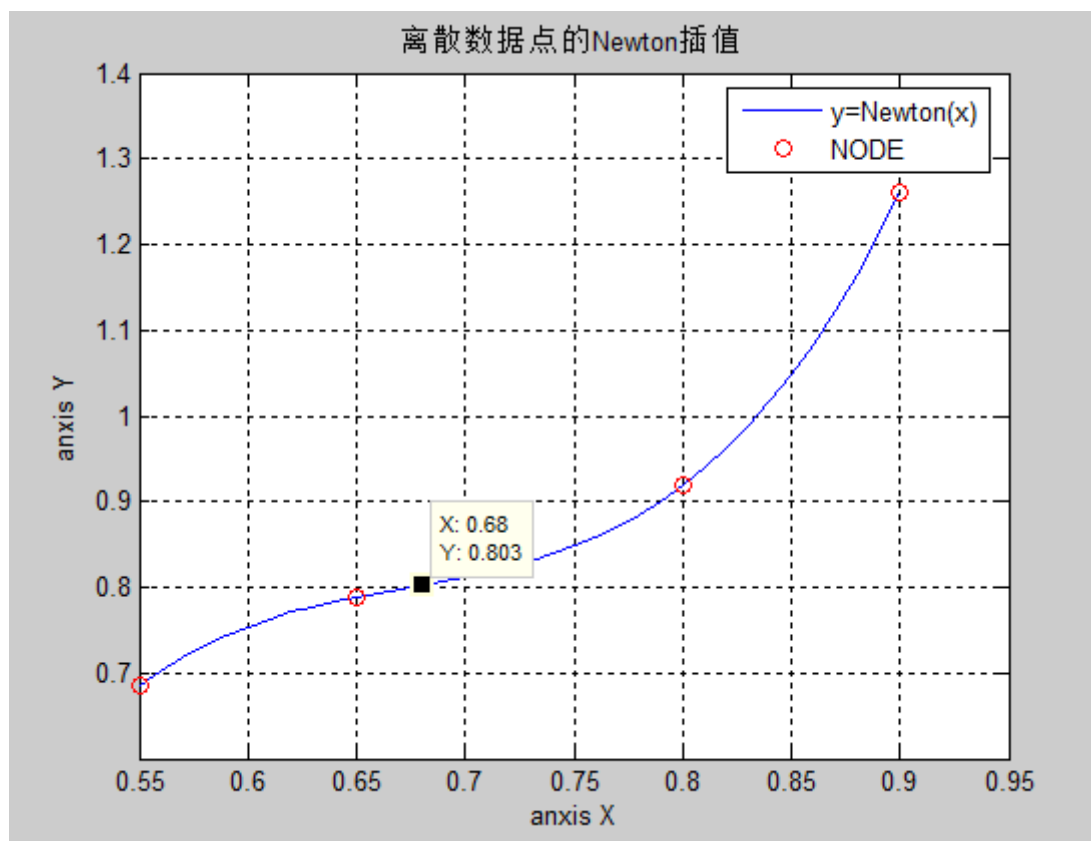
$$\frac{113}{1000} + \frac{26}{25}x - \frac{52}{75}\left|x - \frac{13}{20}\right| + \frac{11}{20}\left|x - \frac{11}{20}\right| + \frac{652}{21}\left(x - \frac{4}{5}\right)\left|x - \frac{13}{20}\right| - \frac{11}{20}\left|x - \frac{11}{20}\right|$$

ans =

$$-315507/35000 + 449161/10500x - 10988/175x^2 + 652/21x^3$$

```
>> 2567/5000-3343/3000*x+96/25*x^2-34/15*x^3
```

图像解:



图中可以读出 $x=0.68$ 时候， $y=0.803$ ；

第二题

符号解：

```
>> newtonfit_1
```

请输入插值点的数据矩阵 $[x_i; y_i]$ [93 96 100 104 108; 11.38 12.80 14.70 17.05 19.81]

A =

```
93.0000    96.0000   100.0000   104.0000   108.0000
11.3800   12.8000   14.7000   17.0500   19.8100
```

```
816    71          8784163844621751
- --- + --- x + ----- (x - 96) (x - 93)
25    150      36893488147419103232
```

```
1448950321671769
+ ----- (x - 100) (x - 96) (x - 93)
1152921504606846976
```

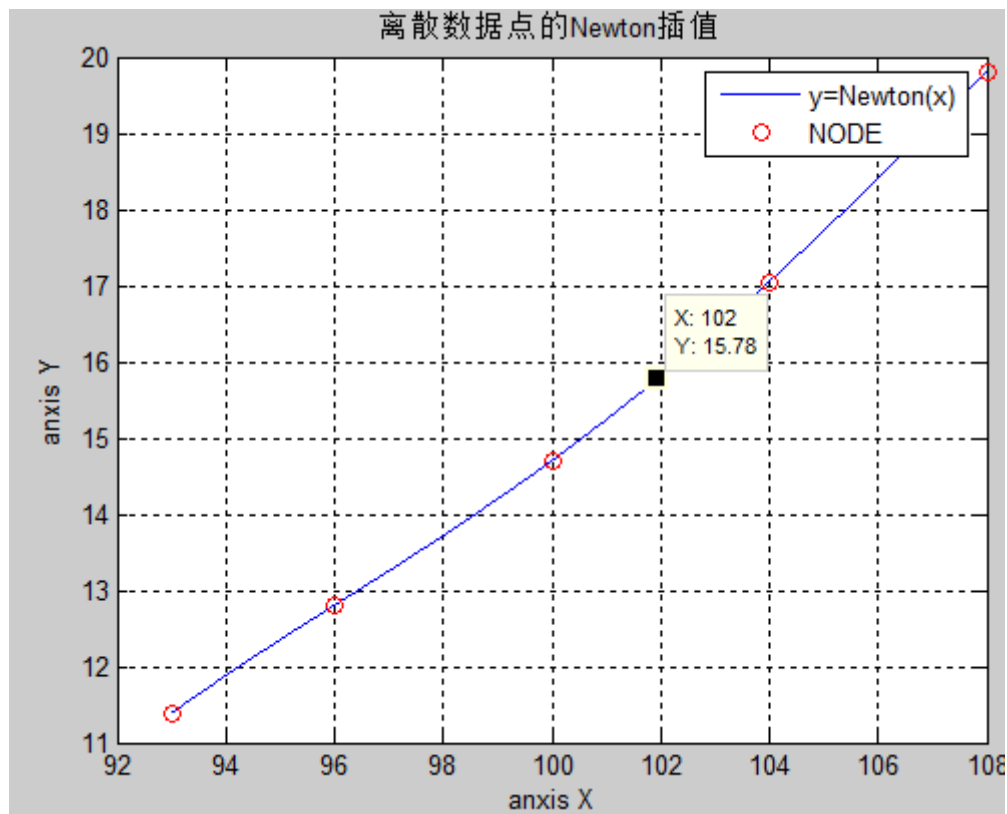
```
1673649399184001
```

$$\frac{-(x-104)(x-100)(x-96)(x-93)}{18446744073709551616}$$

ans =

-276033140418271699579191/28823037615171174400+1048650987264695174637911/276701
1611056432742400*x-207146152055709325729/36893488147419103232*x^2+6809274190260
60697/18446744073709551616*x^3-1673649399184001/18446744073709551616*x^4

图象解：



图中可以读出 $x=102$ 时候， $y=15.78$ ；

总结：

由于 MATLAB 内核中包含有 maple，并且 MATLAB 强大的图形功能，和基于线性代数的设计理念，使得 MATLAB 不仅可以实现数据的可视化，而且还可以得到其它编程语言不好的符号解。