# 8.8 G-S 迭代法解线性方程组

**1.例题与程序**

解方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**MATLAB 程序编辑如下：**

**（注：例题与实验题使用相同函数，故只在实验题中列出）**

```
%Gauss-seidel 迭代法
%数据输入模块
A=input('please input matrix A\n')
b=input('please input vextor b\n')
x0=input('please input vextor x0\n')
k=input('pleas input the e\n')
M=input('please input the Max\n ')
%数据预处理模块
[Am,An]=size(A);
bn=length(b);
sym X;
%判断并计算模块
if((An~=Am)|(Am~=bn)|(An~=bn))
    fprint('矩阵或向量不合法');
else
    D=diag(diag(A))
    L=tril(A-D)
    U=triu(A-D)
    G=-(D+L)^-1*U
    h=(D+L)^-1*b
    X(:,1)=x0;
    for i=2:M
        x1=x0;
        x0=G*x0+h;
        X(:,i)=x0;
        if(norm(x0-x1,inf)<k)
            break;
        end
    end
```

```
n=length(X(1,:));
step=n;

t=1:n;
    for i=1:bn
        plot(t,X(i,:),'r')
        hold on;
    end
    grid on;
end
fprintf('线性方程的解\n：')
x0
fprintf('迭代次数:\n');
step
```

## MATLAB 程序运行结果下：

## 1. 数值解

为了让 G-S 迭代法收敛，将线性方程组进行等价的初等行变换，使得其成为等价的方程组：

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

这样的等价线性方程组的系数矩阵是一个对角绝对占优方阵，故 G-S 方法一定收敛。

```
>> GS
please input matrix A
[4 1 -1;1 6 -2;3 -2 5]

A =


     4     1    -1
     1     6    -2
     3    -2     5


please input vextor b
[4;5;6]

b =
```

```
     4
     5
     6

please input vextor x0
[0;0;0]

x0 =

     0
     0
     0

pleas input the e
1e-6

k =

  1.0000e-006

please input the Max
 200

M =

   200


D =

     4     0     0
     0     6     0
     0     0     5


L =

     0     0     0
     1     0     0
     3    -2     0


U =

     0     1    -1
```

```
     0     0    -2
     0     0     0


G =

         0   -0.2500    0.2500
         0    0.0417    0.2917
         0    0.1667   -0.0333


h =

    1.0000
    0.6667
    0.8667
```

线性方程的解

：

```
x0 =

    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

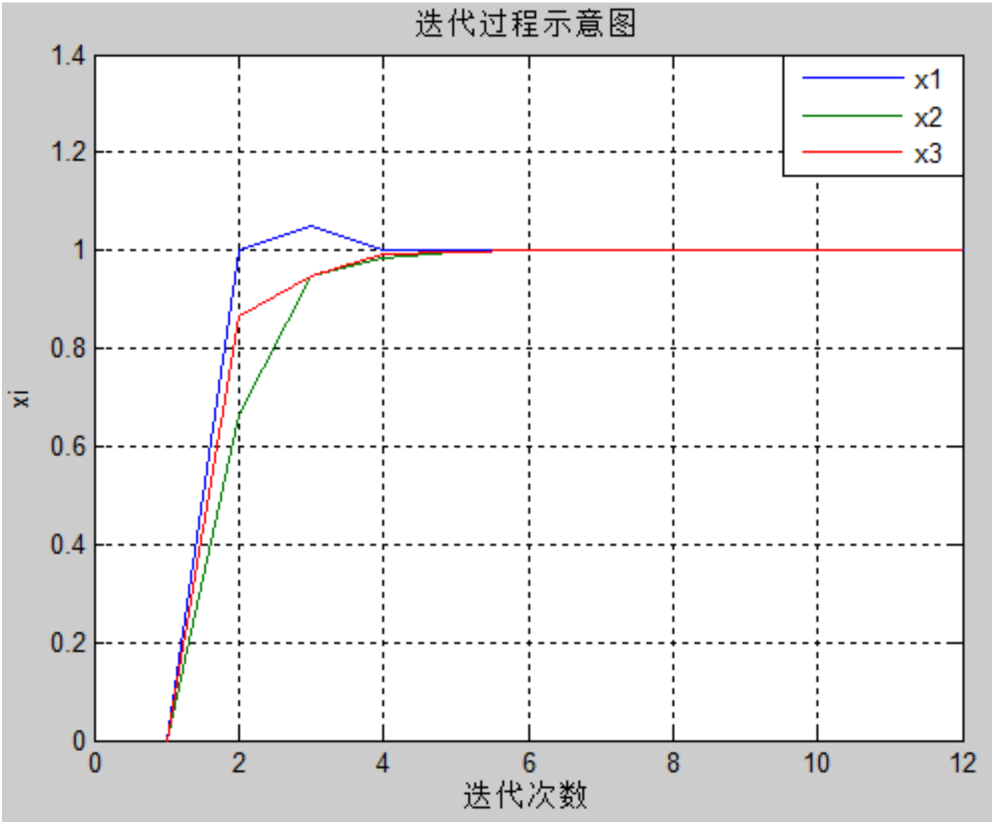
迭代次数:

```
step =

    12

>>
```

分析结果发现，所编的 G-S 迭代法求出预定精度为 1e-6 的解进行了 12 次迭代，所得结果为 x1=1.0000，x2=1.0000，x3=1.000。

将结果代会原线性方程组验证，结果正确。

2. 迭代过程图示：




观察迭代过程示意图,发现在四次迭代前数值震荡严重而在第四次迭代及以后时候，就较好的收敛了。

2.实验题　　用变步长梯形法计算

（1）

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 \\ 20 \\ 33 \end{pmatrix}$$

**为了加快收敛速度，将方程组转化为其等价方程组使得其系数方阵为主对角绝对占优方阵！**

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}$$

MATLAB 运行结果：

```
>> GS
please input matrix A
[8 -3 2;4 11 -1;6 3 12]

A =


     8    -3     2
     4    11    -1
     6     3    12

please input vextor b
[20;33;36]

b =


    20
    33
    36

please input vextor x0
[0;0;0]

x0 =


     0
     0
     0
```

```
pleas input the e
1e-6

k =

  1.0000e-006

please input the Max
 200

M =

   200


D =

     8     0     0
     0    11     0
     0     0    12


L =

     0     0     0
     4     0     0
     6     3     0


U =

     0    -3     2
     0     0    -1
     0     0     0


G =

         0    0.3750   -0.2500
         0   -0.1364    0.1818
         0   -0.1534    0.0795


h =
```

```
    2.5000
    2.0909
    1.2273
```

线性方程的解

：

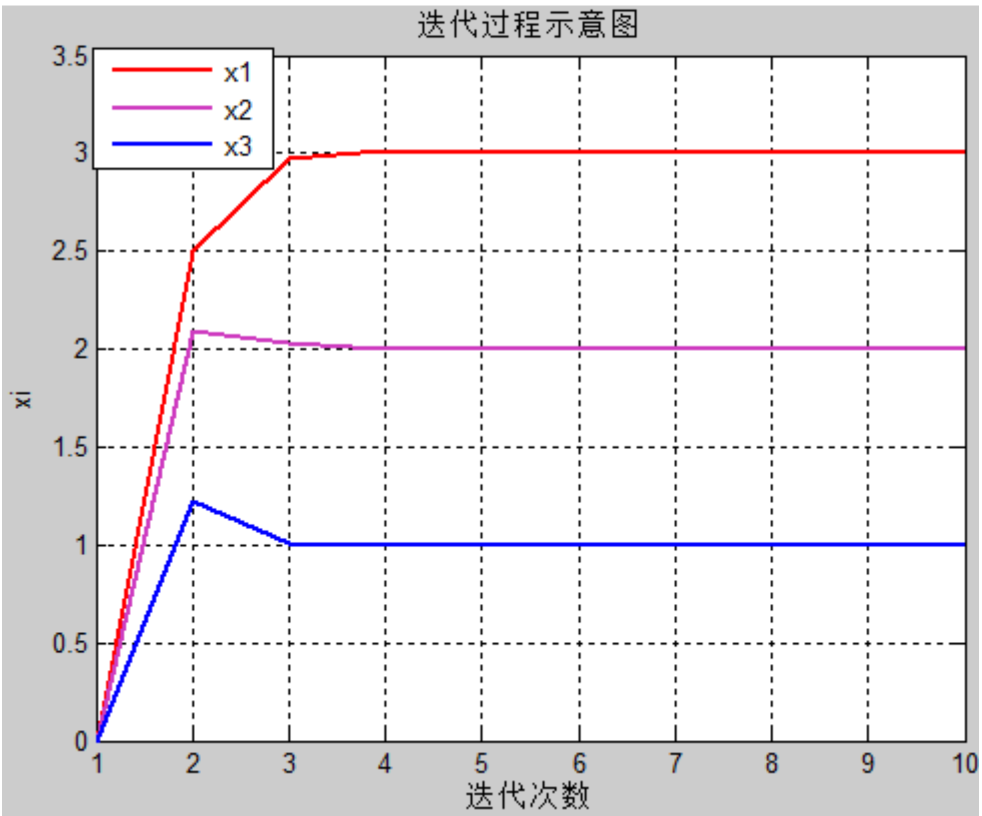
```
x0 =

    3.0000
    2.0000
    1.0000
```

迭代次数:

```
step =

    10

>>
```

分析程序运行结果看出求解过程程序一共进行了 10 次迭代得到的结果为 x1=3.0000，x2=2.0000，x3=1.0000。

**迭代过程示意图：**



观察迭代过程示意图发现进行了 3 次迭代后数值解就较好的收敛了。

（2）

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

观察后发现该线性方程组的系数方阵不可能经过行对换变成主对角绝对占优矩阵。故直接进行迭代。

**运行结果**

```
>> GS
please input matrix A
[4 -2 -4;-2 17 10;-4 10 9]

A =


     4    -2    -4
    -2    17    10
    -4    10     9

please input vextor b
[10;3;7]

b =


    10
     3
     7

please input vextor x0
[0;0;0]

x0 =


     0
     0
     0

pleas input the e
1e-6
```

```
k =

  1.0000e-006

please input the Max
 200

M =

   200


D =

     4     0     0
     0    17     0
     0     0     9


L =

     0     0     0
    -2     0     0
    -4    10     0


U =

     0    -2    -4
     0     0    10
     0     0     0


G =

         0    0.5000    1.0000
         0    0.0588   -0.4706
         0    0.1569    0.9673


h =

    2.5000
    0.4706
```

1.3660

线性方程的解

:

x0 =

12.5000
-6.0000
13.0000

迭代次数:

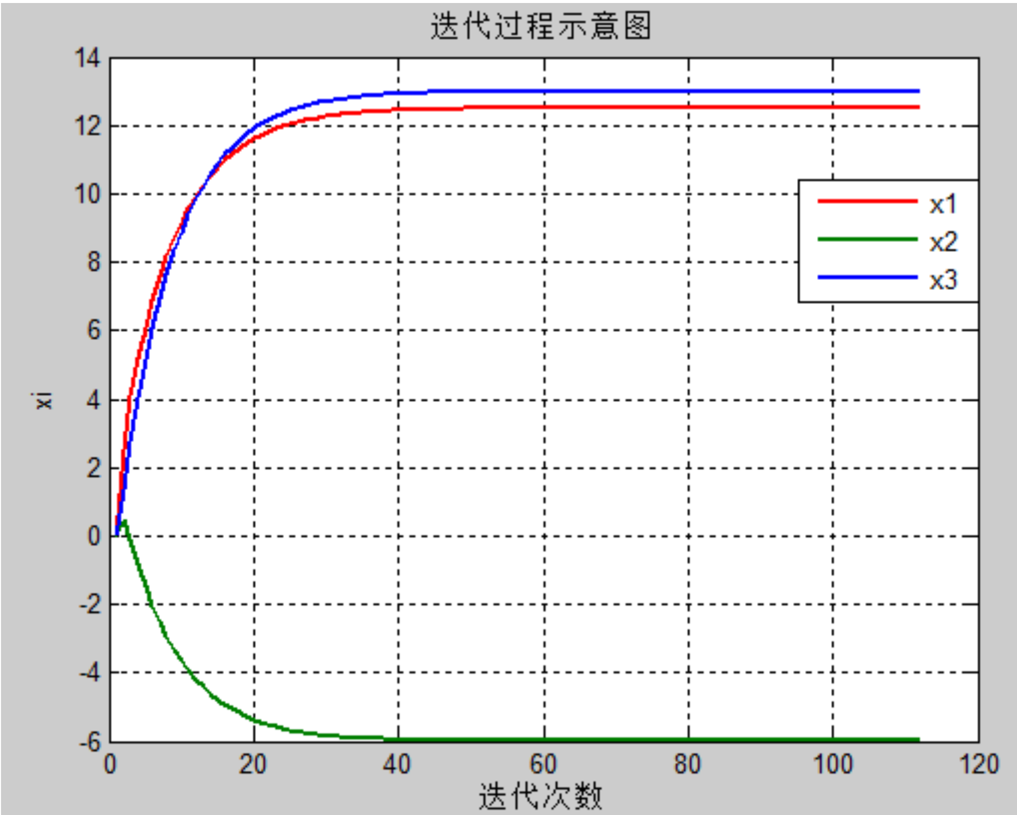
step =

112

>>

观察程序给出的结果发现经过了 112 次迭代才达到预定的精度 1e-6.程序的结果为 x1=12.5000，x2=-6.0000，x3=13.0000.

**迭代过程示意图:**




分析迭代过程示意图，在迭代次数到达 40 次时候，数值才趋于稳定。由于该线性方程组的系数矩阵不是主对角绝对占优方阵，所以收敛速度较慢。