8.9 Euler 法与改进 Euler 法解 ODE

2.实验题：

（1）$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\sin(x/y) \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in (1,2)$

MATLAB 程序编辑如下：

（1）主函数 （注：两道实验题使用相同子函数，故只列出一次）

```
% main function for experment 8.9-1
%Initialize variables.
h=input('请输入步长：\n');
t=[1 2];
y0=1;

%euler method
[tout1,yout1]=eulerm('df1',t,y0,h);
figure(1);
plot(tout1,yout1,'b.-');
title('euler method and predict corrector euler method');
hold on;

%predict corrector method
[tout2 yout2]=pceuler('df1',t,y0,h);
plot(tout2,yout2,'r.--');
legend('EM','PCEM');
ylabel('y');
xlabel('x');
hold off;
grid on;

figure(2)
err=abs(yout2-yout1);
plot(tout1,err,'.--');
title('absolute different between euler method and predict corrector euler
method');
ylabel('erro');
xlabel('x');
grid on;
```

（2）通用子函数

1.Euler 折线法子函数：eulerm

```
%euler explict method
function [tout,yout]=eulerm(F,tspan,y0,h)
% Initialize variables.
syms ts;
syms ys;
tstart=tspan(1);
tfinal=tspan(2);
t=tstart;
y=y0;
ys=y;
ts(1)=t;
i=2;

%main compute
while (t<=tfinal)
    y=y+h*feval(F,t,y)';
    ys(i,:)=y;
    t=t+h;
    ts(i)=t;
    i=i+1;
end

%output.
tout=double(ts);
yout=double(ys');
```

2.改进 Euler 法子函数：pceuler

```
%Predictor Corrector Euler Methodmethod
function [tout,yout]=pceuler(F,tspan,y0,h)
% Initialize variables.
syms ts;
syms ys;
tstart=tspan(1);
tfinal=tspan(2);
t=tstart;
y=y0;
ys=y;
```

```
ts(1)=t;
i=2;

%main compute
while (t<=tfinal)
    k1=feval(F,t,y);
    k2=feval(F,t+h,y+k1'*h);
    y=y+h*(k1'+k2')/2;
    ys(i,:)=y;
    t=t+h;
    ts(i)=t;
    i=i+1;
end

%output.
tout=double(ts);
yout=double(ys');
```

3.待求解 ODE 子函数：df1

```
%目标常微分方程组
function yout=df1(x,y)
yout=-sin(x/y);
```

MATLAB 程序运行结果下：

1. 数值解：

为了能够列出数值解故步长取大点取 0.1，运行程序输入步长。

```
>> eulermain1
请输入步长:
0.1
```

程序运行完毕给出自动给出图象解，数值解通过输入命令：

```
>> [tout1;yout1]
```

得到：

```
ans =

    1.0000    1.0000
    1.1000    0.9159
    1.2000    0.8226
```

```
    1.3000    0.7232
    1.4000    0.6258
    1.5000    0.5472
    1.6000    0.5082
    1.7000    0.5089
    1.8000    0.5287
    1.9000    0.5547
    2.0000    0.5827
```

上面结果中第一列为 t 第二列为 y 方法采用的是显式欧拉法

再输入命令：

```
>> [tout2',yout2']
```

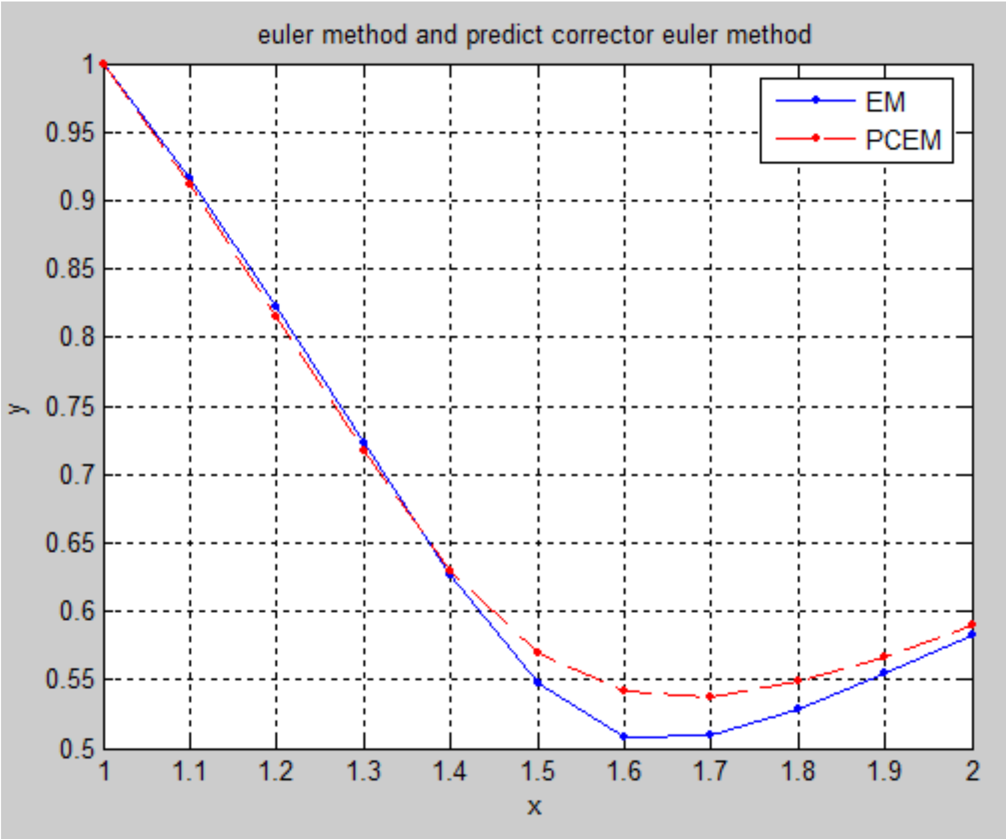
得到：

```
ans =

    1.0000    1.0000
    1.1000    0.9113
    1.2000    0.8148
    1.3000    0.7166
    1.4000    0.6295
    1.5000    0.5696
    1.6000    0.5418
    1.7000    0.5378
    1.8000    0.5484
    1.9000    0.5671
    2.0000    0.5904
```

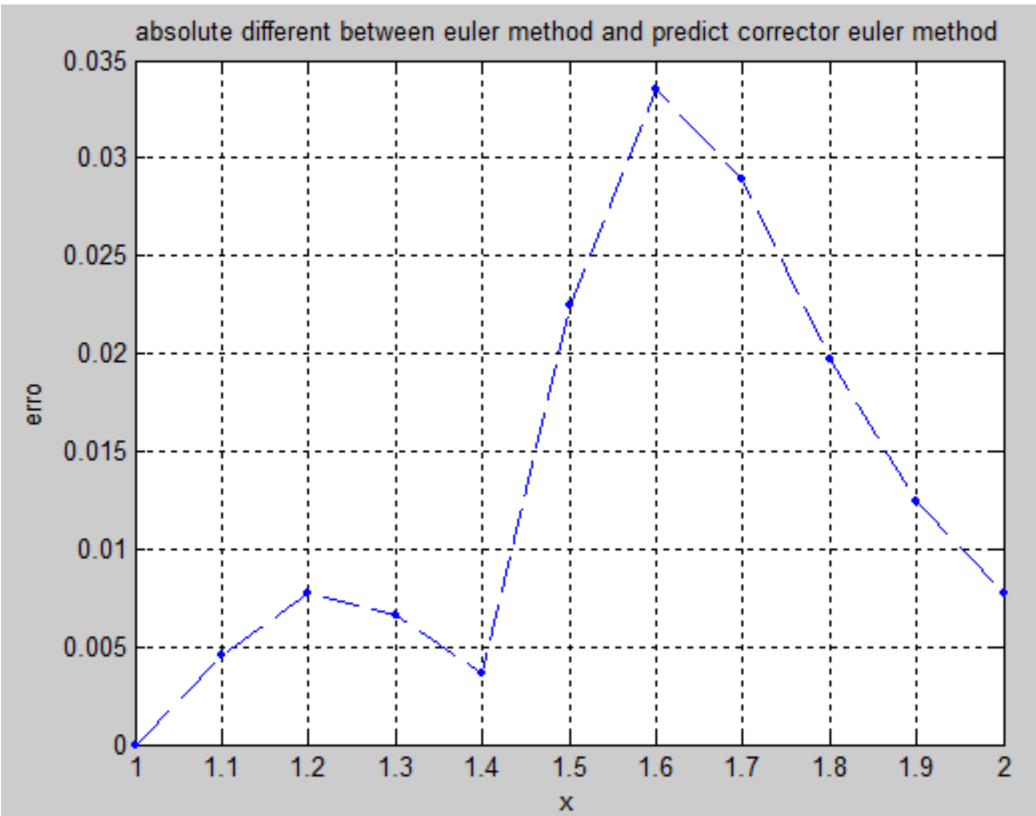
上面结果第一列为 t 第二列为 y 采用的方法是预测校正欧拉法。
对比两次结果发现两种方法所得到的结果有一定差别。

2.图象解

题中 ODE 的两种方法图象解的比较

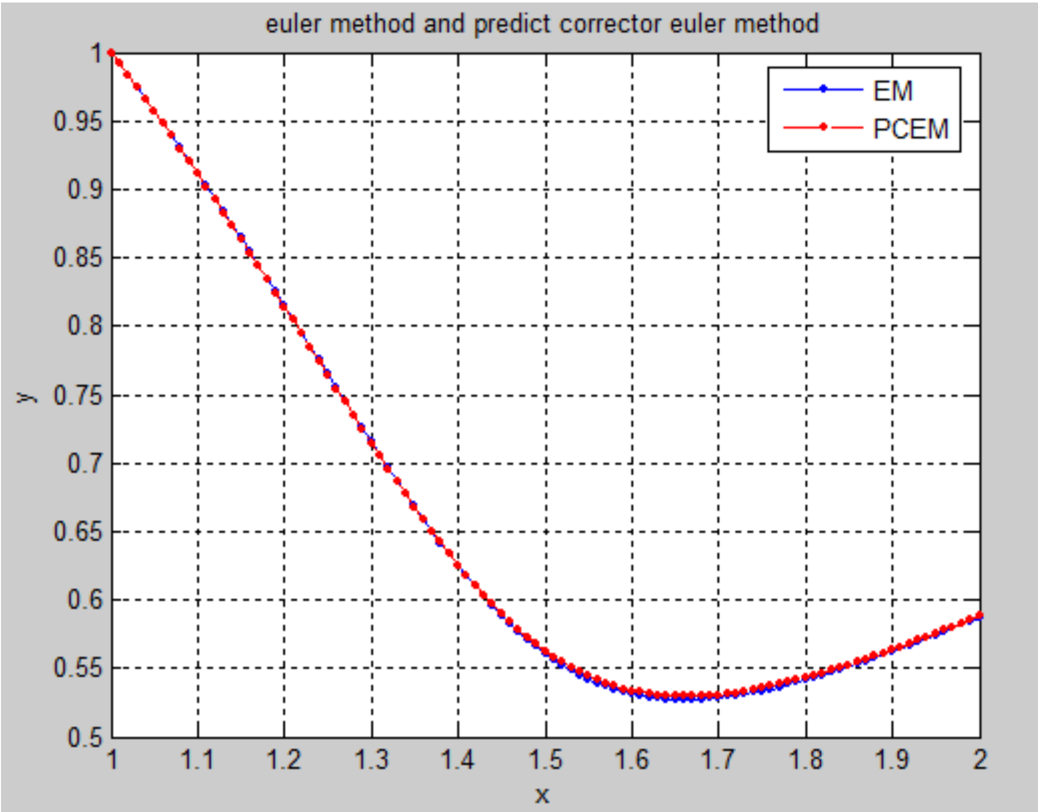


观察图象发现在 1.4 到 2.0 区间两种方法的结果有较大差异。

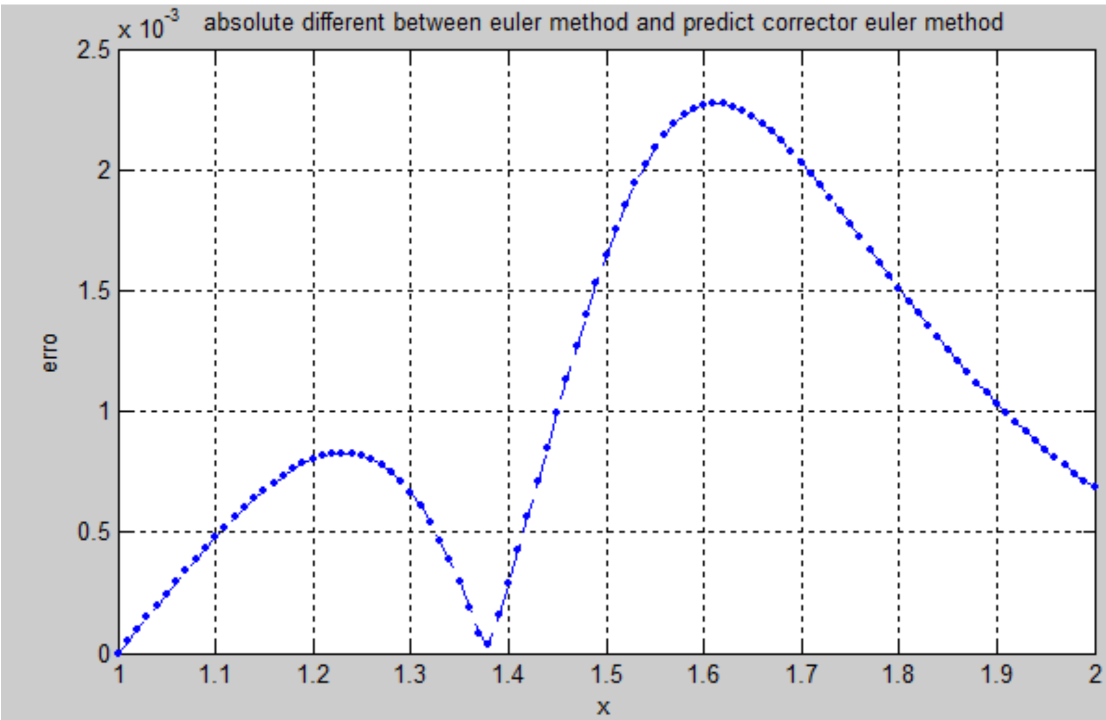


从两种方法的绝对差值曲线中看出 x=1.6 处两种方法结果差别最大。

现在调节步长到 0.01 观察图象解的变化。



观察这幅图象发现两种方法的解比步长为 0.1 时候更为接近。



观察两种方法的绝对差值曲线发现结果相差最大在 x=1.6 附近与步长为 0.1 时候不同。并且两种方法的结果差值在 1e-3 量级。

(2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 + xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in (0,1)$

1.主函数:(主函数与一题大体相同差别仅仅在于调用的子函数不同)

```
% main function for experment 8.9-2
%Initialize variables.
h=input('请输入步长:\n');
t=[0 1];
y0=1;

%euler method.
[tout1,yout1]=eulerm('df2',t,y0,h);
figure(1);
plot(tout1,yout1,'b.-');
title('euler method and predict corrector euler method');
hold on;

%predict corrector method.
[tout2 yout2]=pceuler('df2',t,y0,h);
plot(tout2,yout2,'r.--');
legend('EM','PCEM');
ylabel('y');
xlabel('x');
hold off;
grid on;

figure(2)
err=abs(yout2-yout1);
plot(tout1,err,'.--');
title('absolute different between euler method and predict corrector euler
method');
ylabel('erro');
```

```
xlabel('x');
grid on;
```

2. 待求解 ODE 子函数：

```
%目标常微分方程组
function yout=df2(x,y)
  yout=x^2+x*y^2;
```

MATLAB 运行结果：

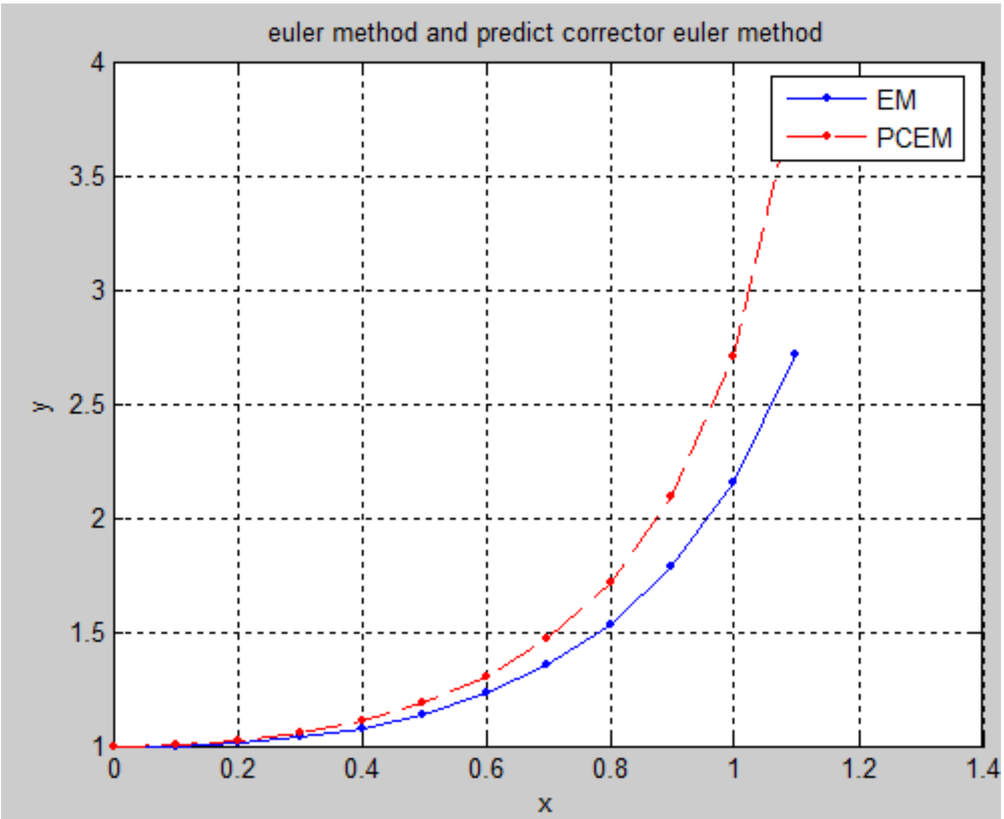
1.数值解：（为了能够列出先取步长为 0.1）

```
>> eulermain2
请输入步长：
0.1
>> [tout1',yout1']

ans =

         0    1.0000
    0.1000    1.0000
    0.2000    1.0110
    0.3000    1.0354
    0.4000    1.0766
    0.5000    1.1390
    0.6000    1.2288
    0.7000    1.3554
    0.8000    1.5330
    0.9000    1.7851
    1.0000    2.1528
    1.1000    2.7163

>> [tout2',yout2']

ans =

         0    1.0000
    0.1000    1.0055
    0.2000    1.0234
    0.3000    1.0568
    0.4000    1.1103
    0.5000    1.1900
    0.6000    1.3055
    0.7000    1.4721
    0.8000    1.7163
    0.9000    2.0895
    1.0000    2.7051
```

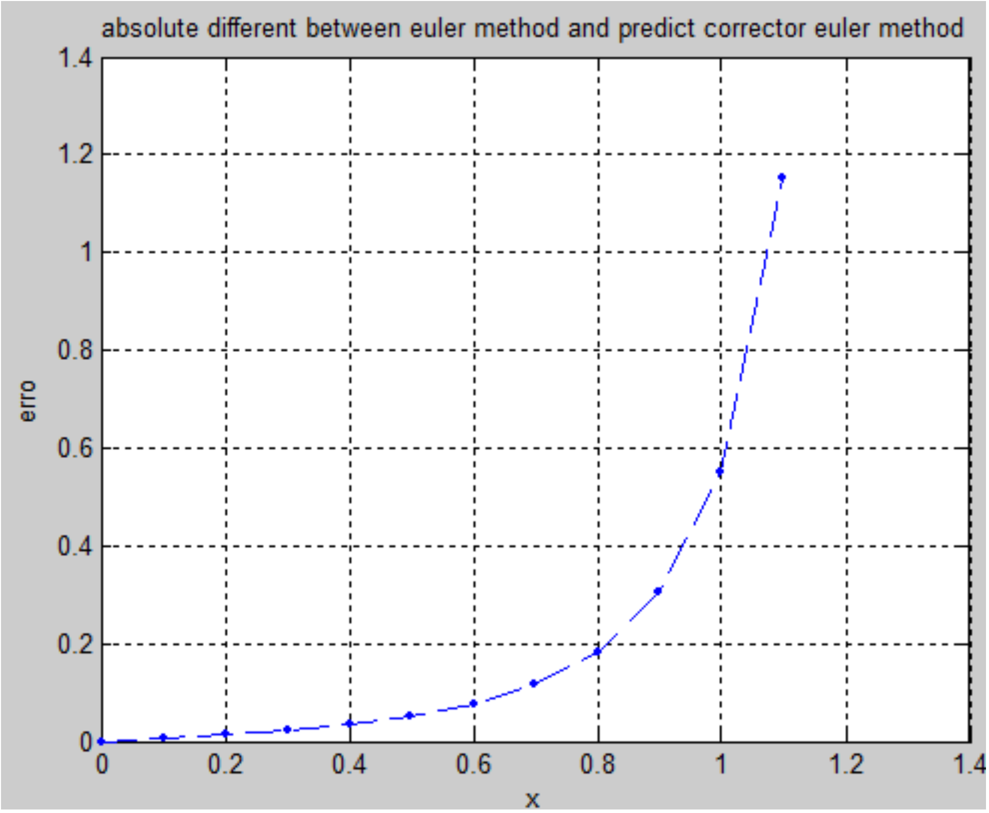
1.1000   3.8695

第一个 ans 为显式欧拉法解出的结果第一列为 x 第二列为 y，第二个 ans 为改进欧拉法解出的结果。对比可以发现，两种方法的结果有一定差别。

2. 图象解：

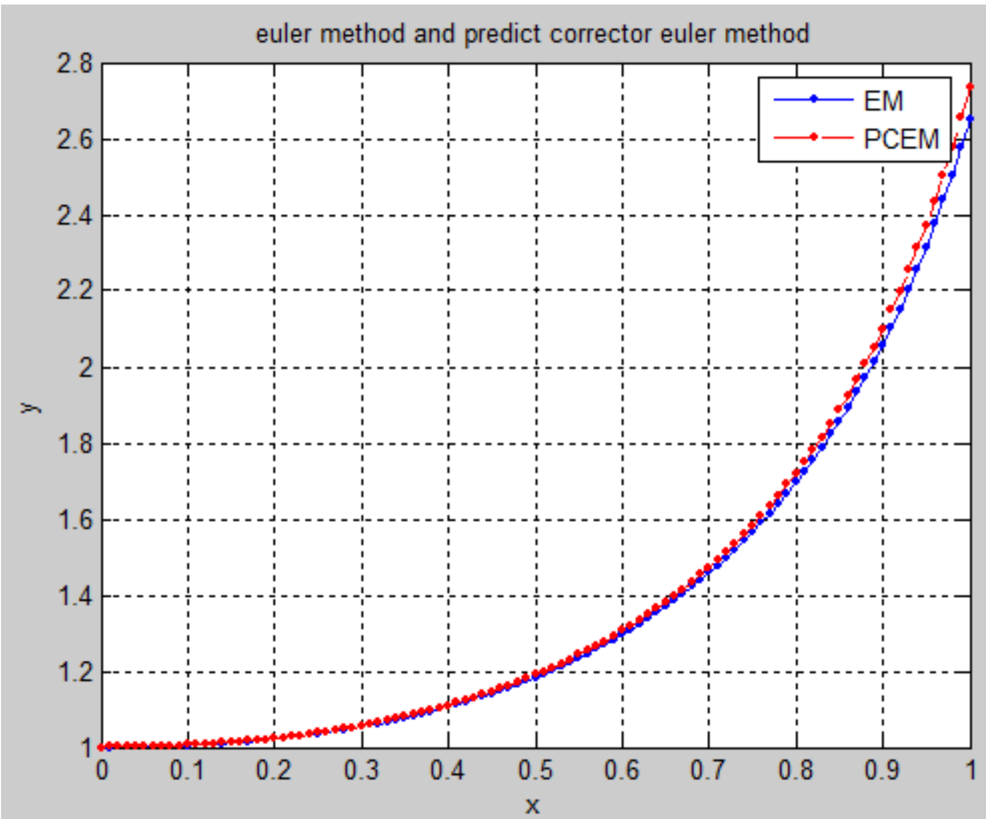


对比两种方法的图象解发现两种方法结果的差距在增大。

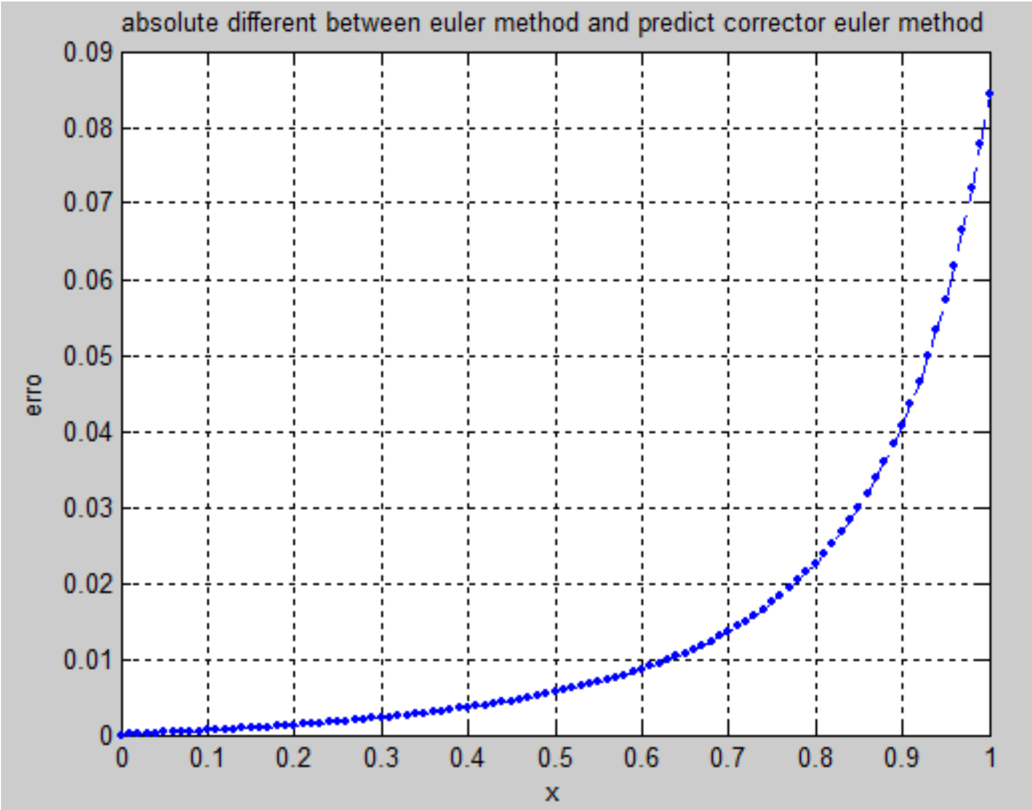


从两种方法结果的绝对差值曲线上看出，两种方法结果的差距随着 x 单调递增。

现在把步长缩短到 0.01 观察图象解：



图像上看出吧步长缩短后，两种方法的差距在减小。



显然缩短步长后的绝对差距曲线值在减小但是单调递增的趋势不变。

扩展实验：用改进欧拉法（预测校正欧拉法）和 2 到 3 阶 Runge-Kutta 法解下列 ODE。（RK23 采用自动调节步长的 BS23 算法）并比较结果：

ode23tx 程序引用自 Cleve Moler . www.mathwork.com

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=-y\\ \dot{y}(0)=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

显然该微分方程为三角函数的特征方程并且其解为 y=cos（x）

其相空间曲线为一个圆，$z=e^{i\theta}$ $\theta\in$ （$0,2\pi$）

首先化高次的常微分方程为一阶的方程组$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=z\\\frac{dz}{dx}=-y\end{cases}$

或者将其改为矩阵形式$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y(x)\\\dot{y}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(x)\\\dot{y}(x)\end{pmatrix}$

1. 主函数：

```
%compare between Runge-kutta methods and predict corrector euler method.
%this case's absolute solution is sin(t) and cos(t)
%so the phase space is a circle-->x^2+y^2=1
%in some ways,this is a numerical method to generate circle....

%Initialize variables.
%由于预测校正欧拉法没有自动步长调节功能所以需要指定步长
h=input('请输入预测校正欧拉法步长：\n');
t=[0 2*pi];
y0=[1 0];

%euler method
[tout1,yout1]=pceuler1('harmonic',t,y0,h);
figure(1);
subplot(1,2,1);
plot(tout1,yout1,'b.-');
legend('EM');
title('Runge-kutta method and predict corrector euler method');
hold on;

%predict corrector method
[tout2 yout2]=ode23tx(@harmonic,t,y0);
plot(tout2,yout2,'r.--');
legend('EM' , 'RK23');
ylabel('y');
xlabel('x');
hold off;
grid on;

%draw phase space line
subplot(1,2,2);
plot(yout1(1,:),yout1(2,:),'r.-',yout2(:,1),yout2(:,2),'b.--',0,0,'r*');
legend('EM','RK23');
ylabel('y"');
xlabel('y');
title('phase space line');
```

```
axis equal;
grid on;

%err line
figure(2)
err1=abs(yout1(1)-cos(tout1));
err2=abs(yout2(1)-cos(tout2));
subplot(1,2,1);
plot(tout1,err1,'r.-',tout2,err2,'b.--');
legend('EM','RK23');
title('absolute erro for y');
ylabel('y erro');
xlabel('x');
grid on;
subplot(1,2,2)
err1=abs(yout1(2)-cos(tout1));
err2=abs(yout2(2)-cos(tout2));
plot(tout1,err1,'r.-',tout2,err2,'b.--');
legend('EM','RK23');
title('absolute erro for y"');
ylabel('y" erro');
xlabel('x');
grid on;
```

2. Pceuler 子函数(改进欧拉法计算函数)

```
%Predictor Corrector Euler Methodmethod
function [tout,yout]=pceuler1(F,tspan,y0,h)
% Initialize variables.
syms ts;
syms ys;
tstart=tspan(1);
tfinal=tspan(2);
t=tstart;
y=y0;
ys=y;
ts(1)=t;
i=2;

%main compute
while (t<=tfinal)
    k1=feval(F,t,y);
    k2=feval(F,t+h,y+h*k1');
    y=y+h*(k1'+k2')/2;
    ys(i,:)=y;
```

```
        t=t+h;
        ts(i)=t;
        i=i+1;
    end

    %output.
    tout=double(ts);
yout=double(ys');
```

3. ode23tx 子函数（采用自动调节步长的 BS23 算法（RK23））：

```
    function [tout,yout] = ode23tx(F,tspan,y0,arg4,varargin)
    %ODE23TX  Solve non-stiff differential equations.  Textbook version of
ODE23.
    %
    %   ODE23TX(F,TSPAN,Y0) with TSPAN = [T0 TFINAL] integrates the system
    %   of differential equations dy/dt = f(t,y) from t = T0 to t = TFINAL.
    %   The initial condition is y(T0) = Y0.
    %
    %   The first argument, F, is a function handle or an anonymous function
    %   that defines f(t,y).  This function must have two input arguments,
    %   t and y, and must return a column vector of the derivatives, dy/dt.
    %
    %   With two output arguments, [T,Y] = ODE23TX(...) returns a column
    %   vector T and an array Y where Y(:,k) is the solution at T(k).
    %
    %   With no output arguments, ODE23TX plots the emerging solution.
    %
    %   ODE23TX(F,TSPAN,Y0,RTOL) uses the relative error tolerance RTOL
    %   instead of the default 1.e-3.
    %
    %   ODE23TX(F,TSPAN,Y0,OPTS) where OPTS = ODESET('reltol',RTOL, ...
    %   'abstol',ATOL,'outputfcn',@PLOTFUN) uses relative error RTOL instead
    %   of 1.e-3, absolute error ATOL instead of 1.e-6, and calls PLOTFUN
    %   instead of ODEPLOT after each successful step.
    %
    %   More than four input arguments, ODE23TX(F,TSPAN,Y0,RTOL,P1,P2,...),
    %   are passed on to F, F(T,Y,P1,P2,...).
    %
    %   ODE23TX uses the Runge-Kutta (2,3) method of Bogacki and Shampine
(BS23).
    %
    %   Example
    %      tspan = [0 2*pi];
```

```
%       y0 = [1 0]';
%       F = @(t,y) [0 1; -1 0]*y;
%       ode23tx(F,tspan,y0);
%
%   See also ODE23.

% Initialize variables.

rtol = 1.e-3;
atol = 1.e-6;
plotfun = @odeplot;
if nargin >= 4 & isnumeric(arg4)
   rtol = arg4;
elseif nargin >= 4 & isstruct(arg4)
   if ~isempty(arg4.RelTol), rtol = arg4.RelTol; end
   if ~isempty(arg4.AbsTol), atol = arg4.AbsTol; end
   if ~isempty(arg4.OutputFcn), plotfun = arg4.OutputFcn; end
end
t0 = tspan(1);
tfinal = tspan(2);
tdir = sign(tfinal - t0);
plotit = (nargout == 0);
threshold = atol / rtol;
hmax = abs(0.1*(tfinal-t0));
t = t0;
y = y0(:);

% Initialize output.

if plotit
   plotfun(tspan,y,'init');
else
   tout = t;
   yout = y.';
end

% Compute initial step size.

s1 = F(t, y, varargin{:});
r = norm(s1./max(abs(y),threshold),inf) + realmin;
h = tdir*0.8*rtol^(1/3)/r;

% The main loop.

while t ~= tfinal
```

```
hmin = 16*eps*abs(t);
if abs(h) > hmax, h = tdir*hmax; end
if abs(h) < hmin, h = tdir*hmin; end

% Stretch the step if t is close to tfinal.

if 1.1*abs(h) >= abs(tfinal - t)
   h = tfinal - t;
end

% Attempt a step.

s2 = F(t+h/2, y+h/2*s1, varargin{:});
s3 = F(t+3*h/4, y+3*h/4*s2, varargin{:});
tnew = t + h;
ynew = y + h*(2*s1 + 3*s2 + 4*s3)/9;
s4 = F(tnew, ynew, varargin{:});

% Estimate the error.

e = h*(-5*s1 + 6*s2 + 8*s3 - 9*s4)/72;
err = norm(e./max(max(abs(y),abs(ynew)),threshold),inf) + realmin;

% Accept the solution if the estimated error is less than the tolerance.

if err <= rtol
   t = tnew;
   y = ynew;
   if plotit
      if plotfun(t,y,'');
         break
      end
   else
      tout(end+1,1) = t;
      yout(end+1,:) = y.';
   end
   s1 = s4;     % Reuse final function value to start new step.
end

% Compute a new step size.

h = h*min(5,0.8*(rtol/err)^(1/3));

% Exit early if step size is too small.
```

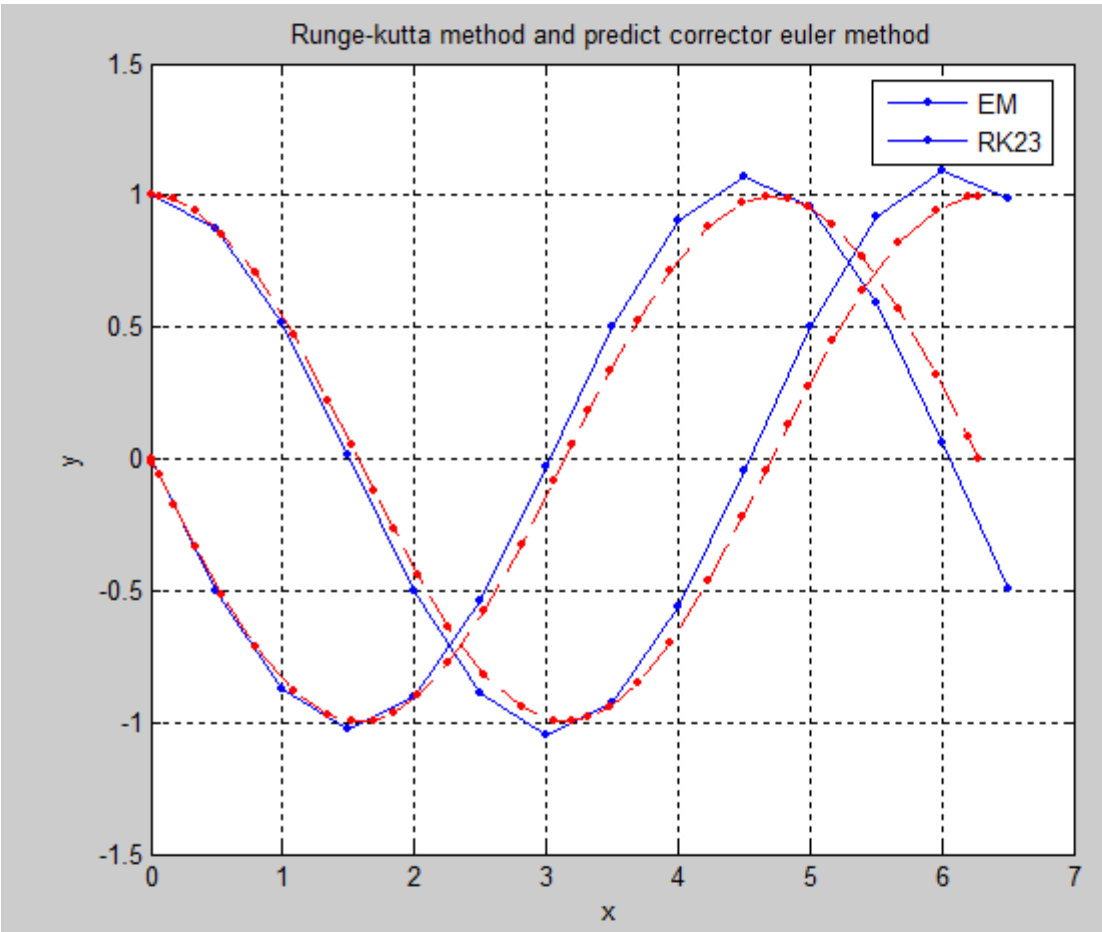
```
        if abs(h) <= hmin
            warning('Step size %e too small at t = %e.\n',h,t);
            t = tfinal;
        end
    end

    if plotit
        plotfun([],[],'done');
    end
```

4. Harmonic 子函数（ODE 方程，描述谐波振荡）：

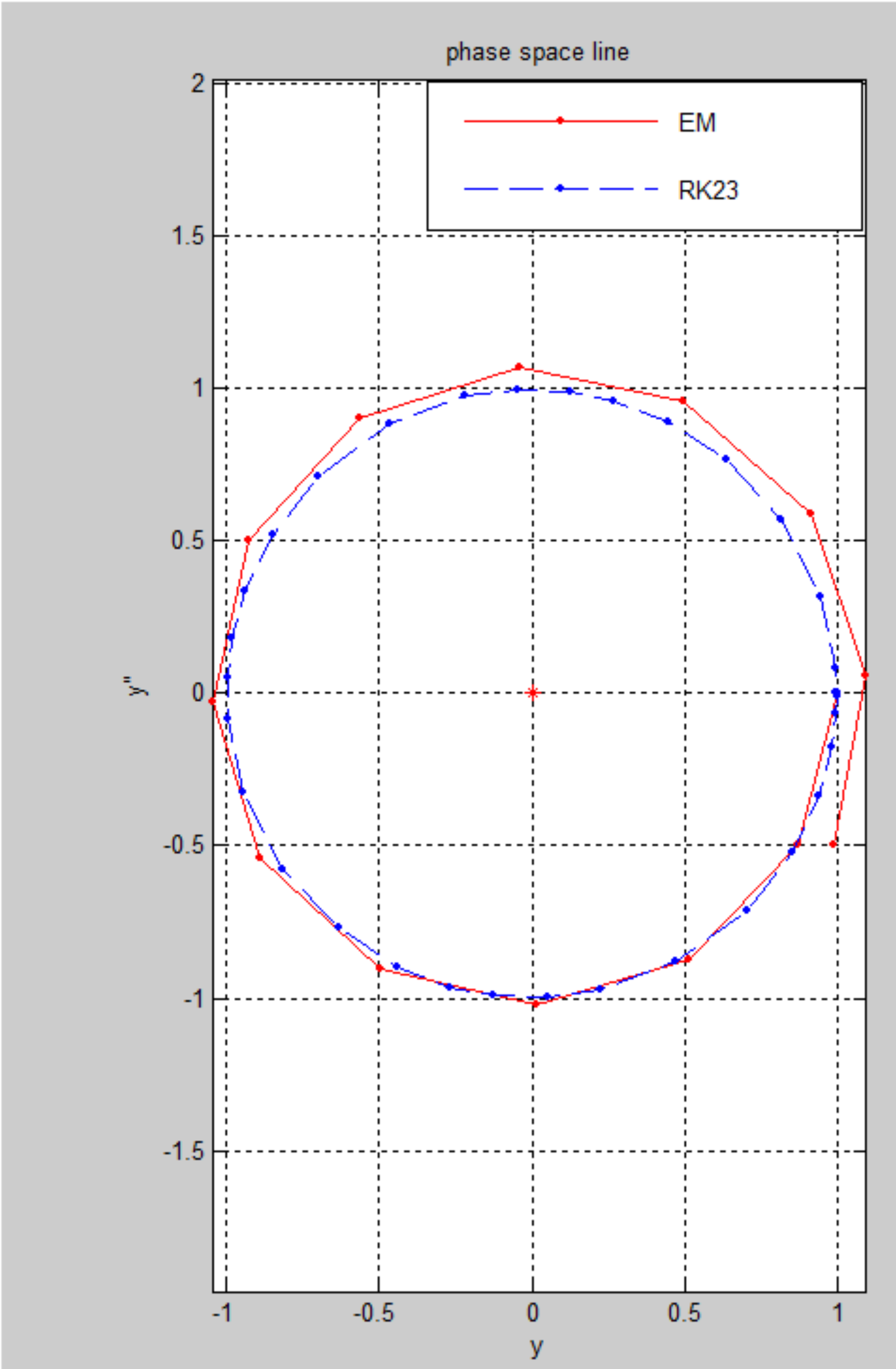
```
    function yout=harmonic(t,y)
yout=[y(2);-y(1)];
```

运行结果：（图象比较）

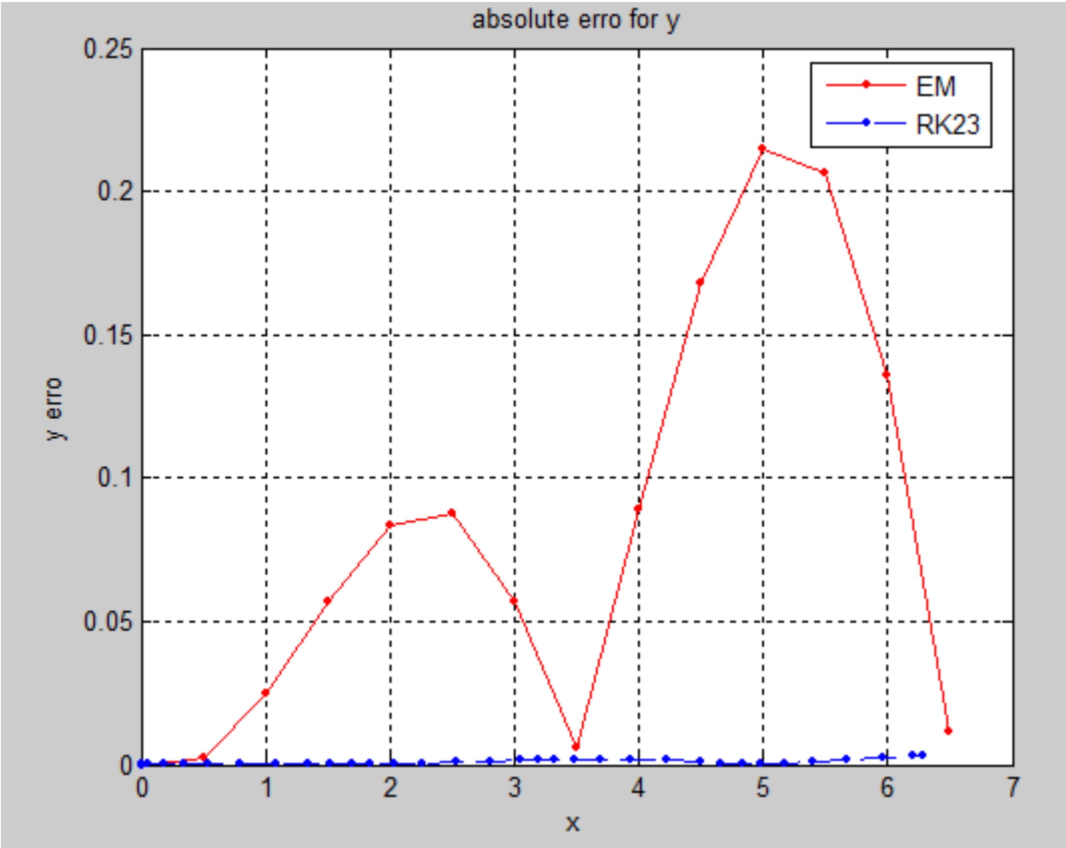
两种方法的数值解曲线

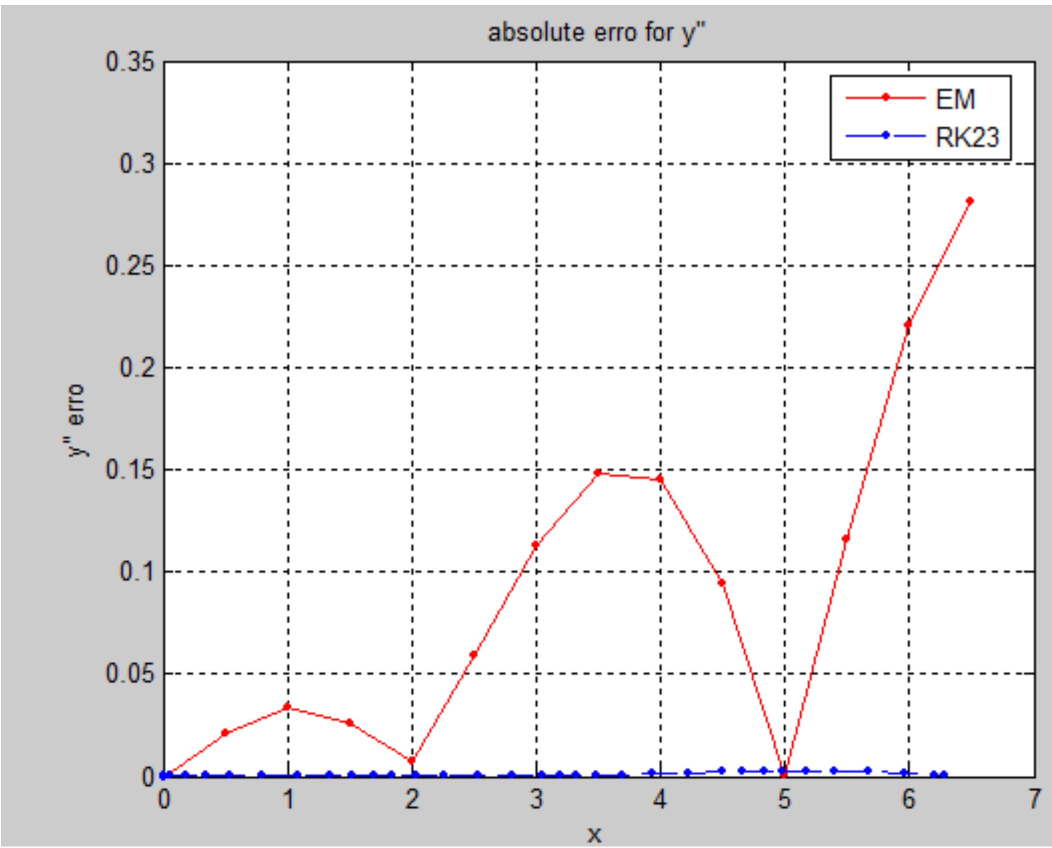


两种方法的数值解相空间曲线



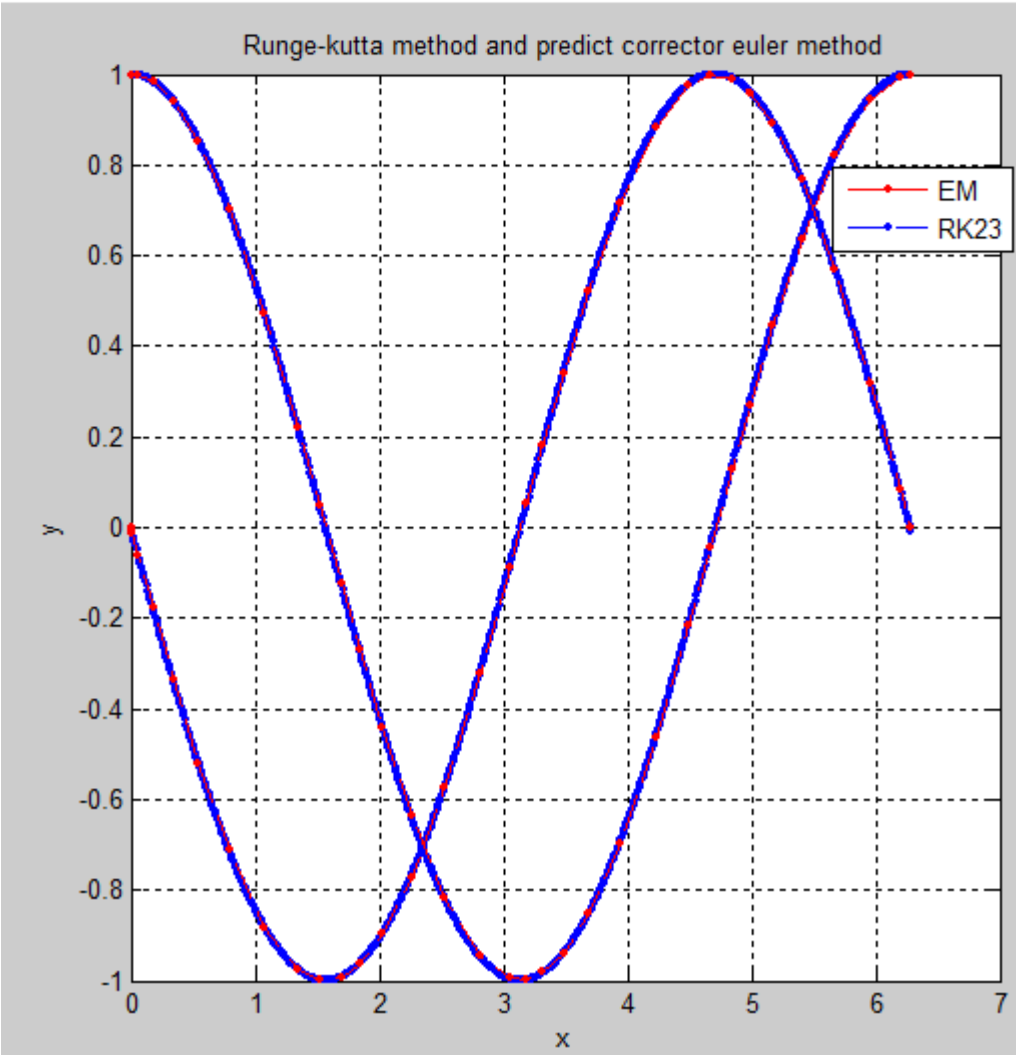
与精确解的误差比较曲线



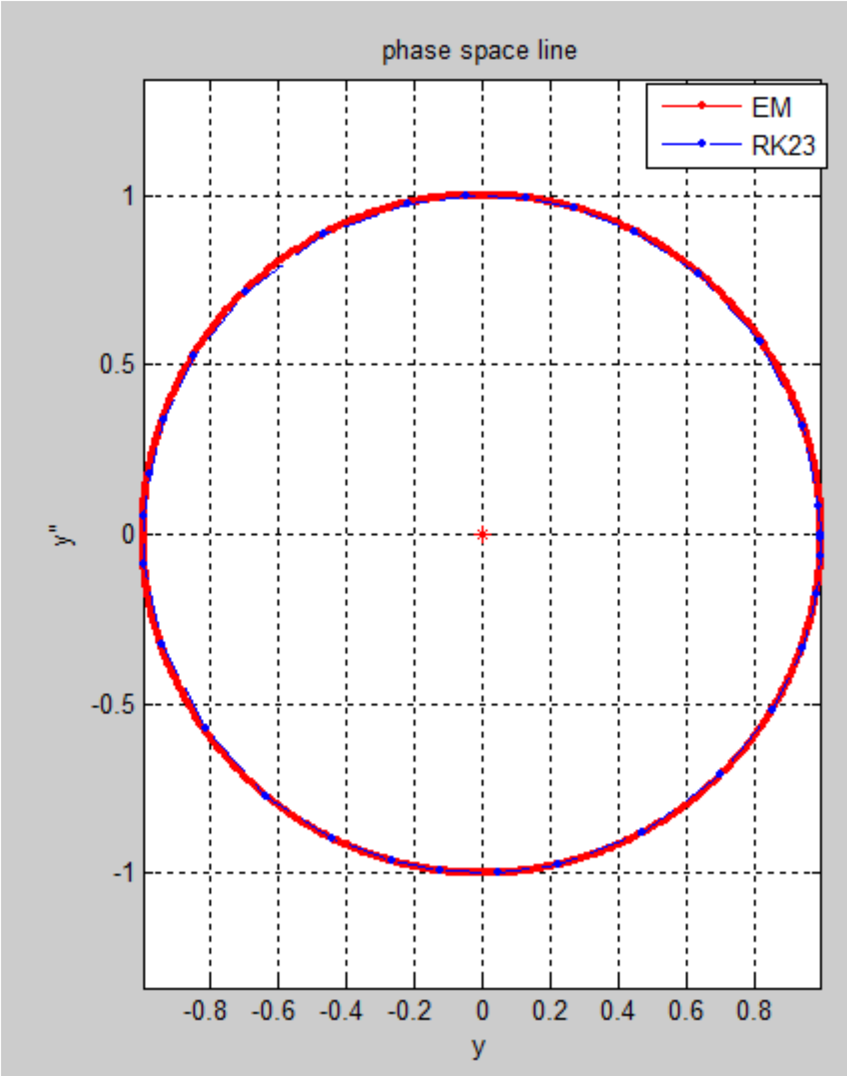


两幅一个表示 y（x）的绝对误差另一个表示 y’（x)的相对误差。

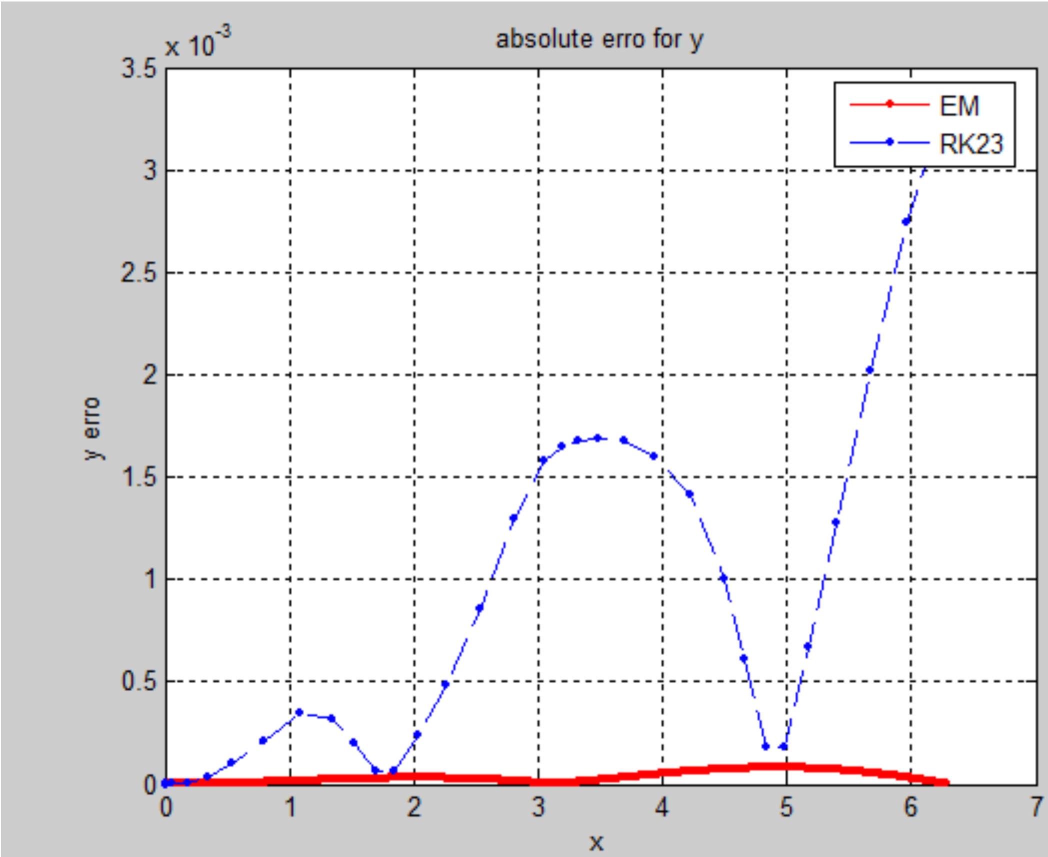
现在把欧拉法的步长缩小到 0.01 观察结果并比较：

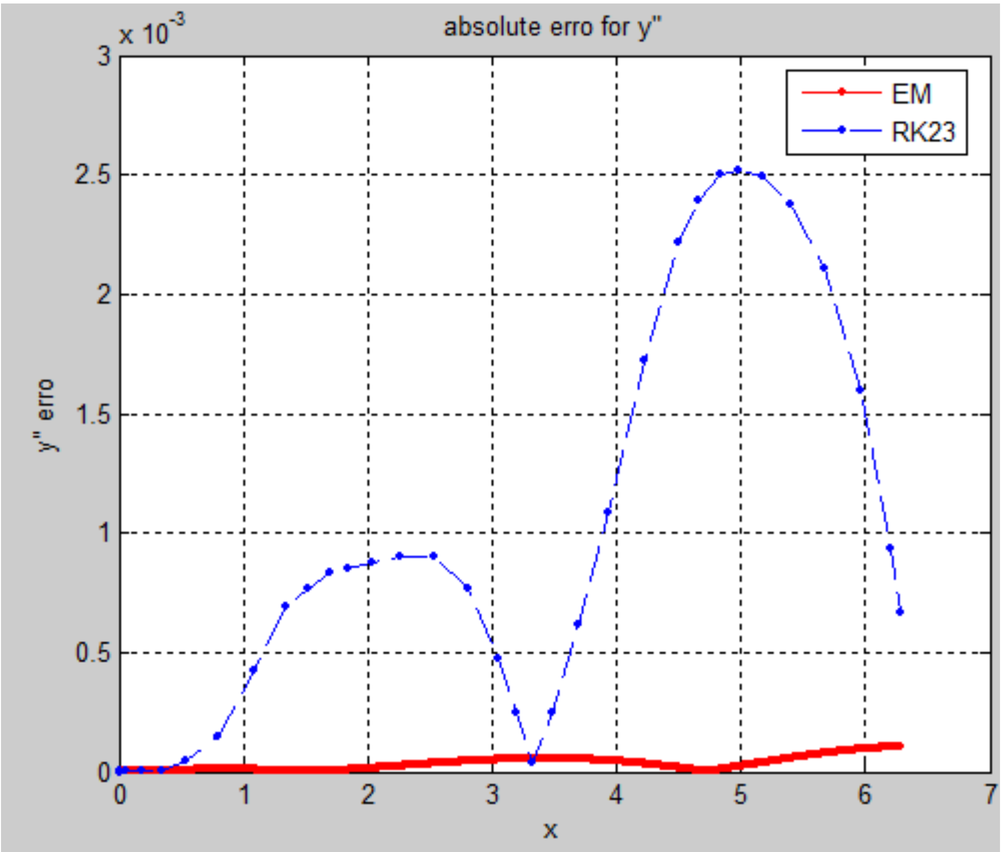


观察图象可以发现两种方法的解基本重叠在一起，两条曲线表示 y（x）下，与 y‘（x）上。



解的空间相曲线。可以看出其为一个非常好的圆，半径为 1，原点在（0,0）点。



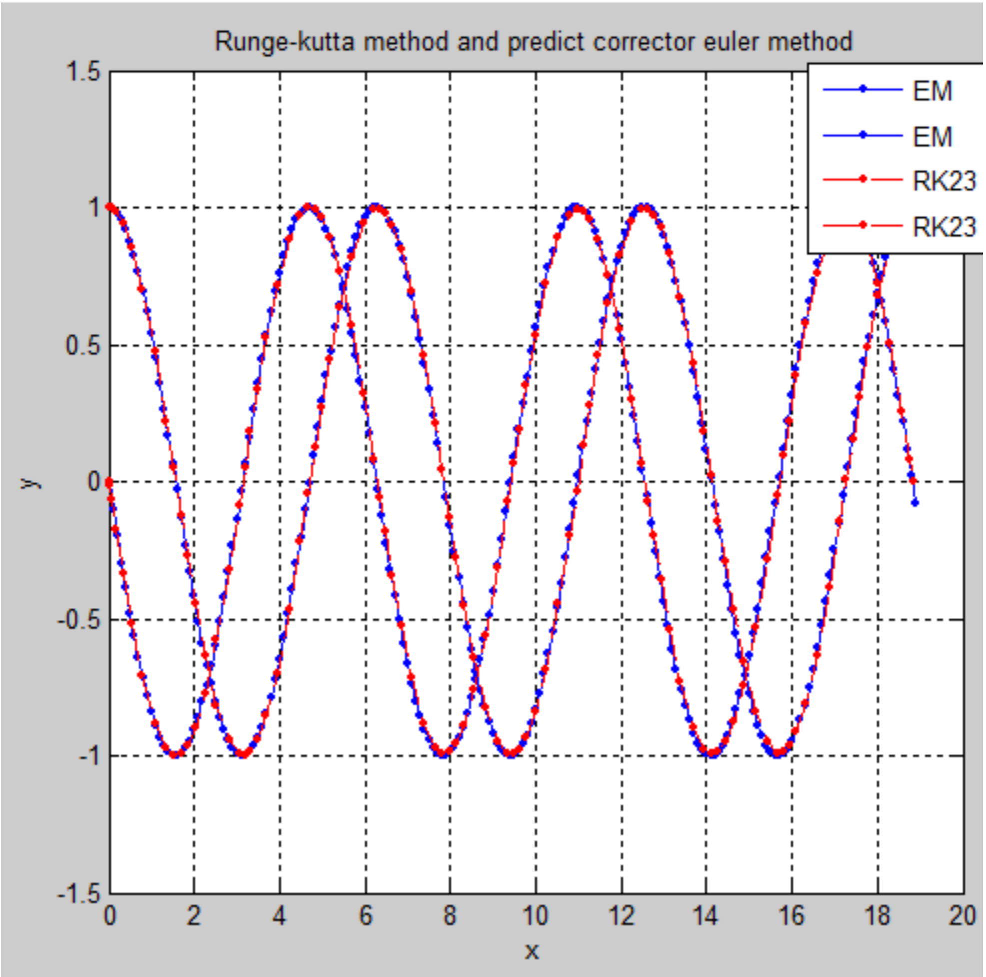


改进欧拉法数值方法的解与精确解之间的绝对误差缩到很小，由于步长选的很短，其绝对误差已经比自适应 2 到 3 阶 runge-kutta 法得到的数值解小。

而且小得多。

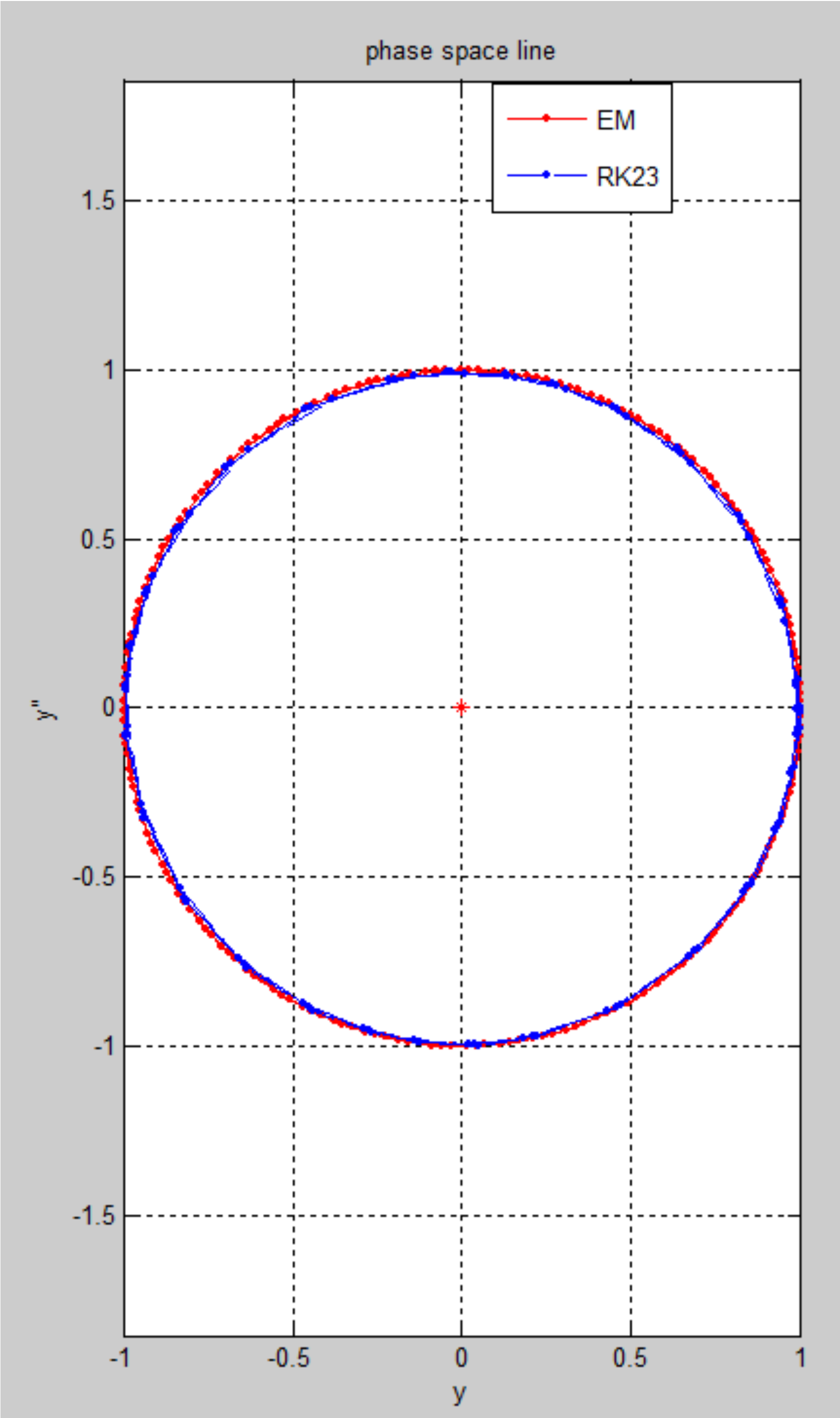
现在将时间取长一些取到 6π：　观察误差的传播情况：

解的图象：



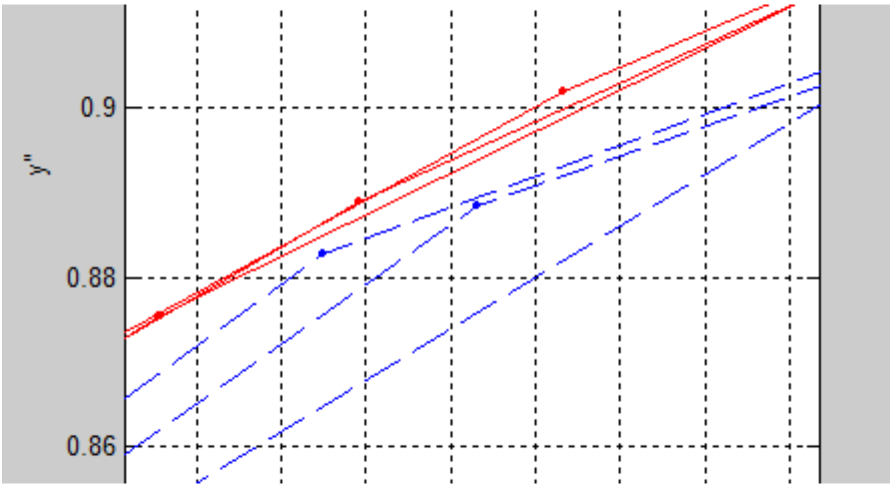
从表面上看起图形就是 cos（x）与-sin（x）正弦余弦曲线的图象，似乎方法没有问题。

相空间（拓扑空间）曲线：



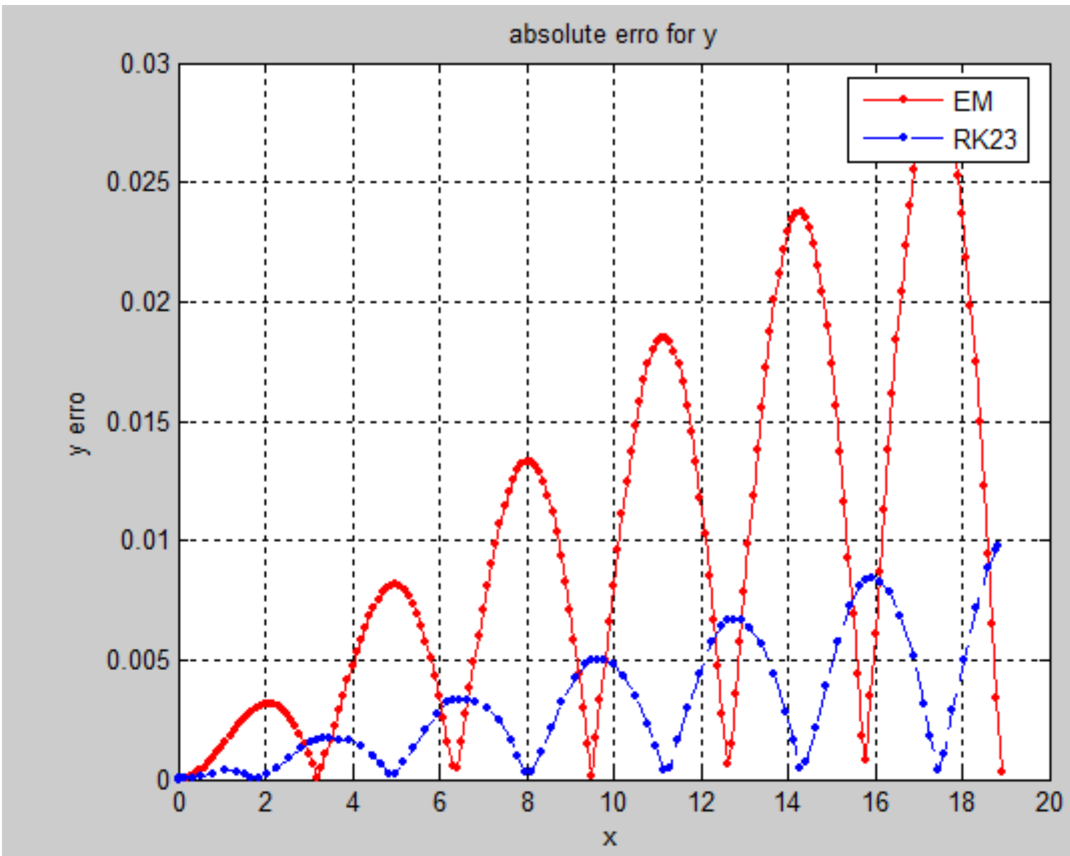
其拓扑空间的曲线仍然为一个圆，只不过已经转了三圈了。表面上看好像就是两条轨迹一红一蓝。

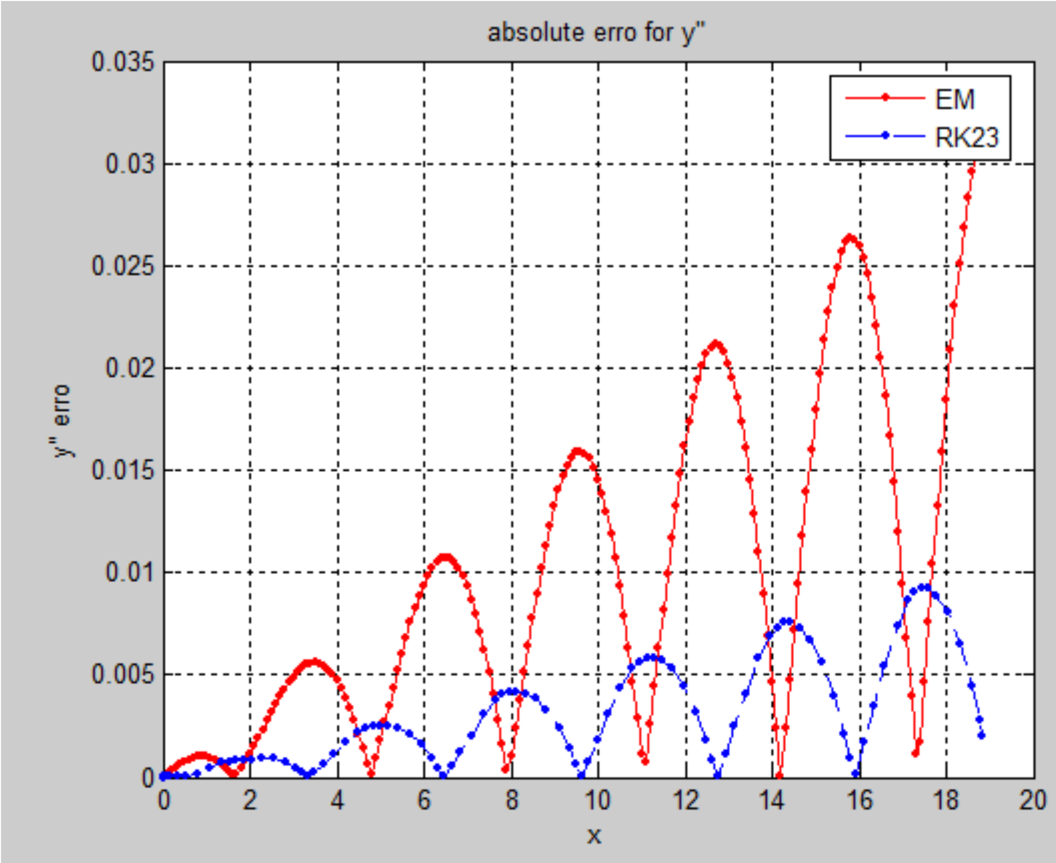
现在把图像放大：



这样可以发现明显空间相曲线是转了三圈形成的。精确解的空间相曲线无论转多少圈都应该重合。所以这里也可以看出数值方法的误差。

观察误差曲线：





观察改进 Euler 法的误差曲线（红色）发现数值解无论是 y 还是其导数 y’与精确解 cos(t),-sin(t)的误差都在不断的较快累积，虽然正大过程不是单调的是在震荡，但是总体的趋势是在不断的增大。所以该数值方法在解决这一类谐波振荡器问题时，t 偏离初始值太远后解的可靠性会较差。

观察 RK23 法的误差曲线（蓝色）发现虽然误差是在增加（积累）但是增加的较慢，而且整体而言误差比改进 Euler 法要小，随着 t 的增长 RK23 算法的误差将明显小于改进 Euler 法。所以自适应的 RK23 算法比改进 Euler 算法要好。

实验总结：

运用了 MATLAB 的向量处理功能，所编辑的欧拉法与改进欧拉法程序不但可以计算常微分方程，还可以计算高阶的常微分方程，即常微分方程组。

所编程序中步长需要事先指定，并且可以观察到步长缩短，数值解在向精确解逼近。而 BS23 算法利用的是常微分方程的 Runge-Kutta 算法并且还有自动调节步长功能，使得数值解更加可靠并且所占用空间也更合理。