Wstęp do teorii mocy zbiorów

Zachariasz Jażdżewski

21.01.2024

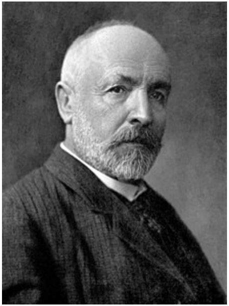
Wstęp

Teoria mocy zajmuje się ilością elementów w zbiorze i porównywaniem zbiorów ze względu na ilości ich elementów.

Wstęp

Teoria mocy zajmuje się ilością elementów w zbiorze i porównywaniem zbiorów ze względu na ilości ich elementów.

Za twórcę teorii mocy, jak i całej teorii mnogości uważa się Georga Cantora.



Równoliczność zbiorów

Definicja

Mówimy, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B, gdy istnieje bijekcja f przekształcająca zbiór A na zbiór B. Zapisujemy jako $A \sim B$.

Równoliczność zbiorów

Definicja

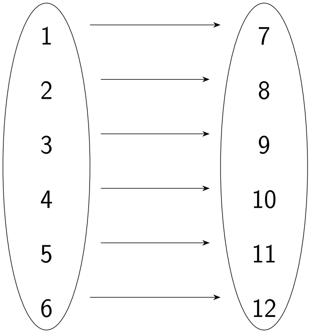
Mówimy, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B, gdy istnieje bijekcja f przekształcająca zbiór A na zbiór B. Zapisujemy jako $A \sim B$.

Przykład

Zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ są równolicznem, a przykładem funkcji ustalającej równoliczność tych zbiorów może być funkcja

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{7, 8, 9, 10, 11\}$$

taka, że $f(1) = 7, f(2) = 8, f(3) = 9,$ $f(4) = 10, f(5) = 11$



Podstawowe własności

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \implies B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \implies A \sim C$

Podstawowe własności

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \implies B \sim A$
3. $A \sim B \land B \sim C \implies A \sim C$

Podstawowe własności

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \implies B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \implies A \sim C$

Równoliczność liczb naturalnych z całkowitymi

Twierdzenie

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Równoliczność liczb naturalnych z całkowitymi

Twierdzenie

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Uzasadnienie

Równoliczność zbiorów $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ ustala funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ określona wzorem:

$$f(m) = \begin{cases} 2m & \text{gdy } m \geq 0 \\ -2m - 1 & \text{gdy } m < 0 \end{cases}$$

- Łatwo możemy zauważyć, że dla liczb całkowitych nieujemnych funkcja ta zwraca nam zbiór liczb naturalnych parzystych.
- Dla liczb całkowitych ujemnych zaś funkcja zwraca zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- Zatem dla zbioru wszystkich liczb całkowitych funkcja ustala równoliczność ze zbiorem $\mathbb{N}$.
- Jako, że funkcja jest bijekcją, to istnieje również funkcja odwrotna do niej ustalająca równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Dowód, że funkcja f jest bijekcją pomijamy)

- Łatwo możemy zauważyć, że dla liczb całkowitych nieujemnych funkcja ta zwraca nam zbiór liczb naturalnych parzystych.
- Dla liczb całkowitych ujemnych zaś funkcja zwraca zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- Zatem dla zbioru wszystkich liczb całkowitych funkcja ustala równoliczność ze zbiorem $\mathbb{N}$.
- Jako, że funkcja jest bijekcją, to istnieje również funkcja odwrotna do niej ustalająca równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Dowód, że funkcja f jest bijekcją pomijamy)

- Łatwo możemy zauważyć, że dla liczb całkowitych nieujemnych funkcja ta zwraca nam zbiór liczb naturalnych parzystych.
- Dla liczb całkowitych ujemnych zaś funkcja zwraca zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- Zatem dla zbioru wszystkich liczb całkowitych funkcja ustala równoliczność ze zbiorem $\mathbb{N}$.
- Jako, że funkcja jest bijekcją, to istnieje również funkcja odwrotna do niej ustalająca równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Dowód, że funkcja f jest bijekcją pomijamy)

- Łatwo możemy zauważyć, że dla liczb całkowitych nieujemnych funkcja ta zwraca nam zbiór liczb naturalnych parzystych.
- Dla liczb całkowitych ujemnych zaś funkcja zwraca zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- Zatem dla zbioru wszystkich liczb całkowitych funkcja ustala równoliczność ze zbiorem $\mathbb{N}$.
- Jako, że funkcja jest bijekcją, to istnieje również funkcja odwrotna do niej ustalająca równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Dowód, że funkcja f jest bijekcją pomijamy)

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, ..., n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moc zbioru

Definicja

Mocą zbioru A nazywamy cechę przypisaną zbiorowi A, oznaczaną przez $|A|$ taką, że:

1. Mocą zbioru pustego jest 0
$$|\varnothing| = 0$$
2. Mocą zbioru skończonego jest liczba jego elementów
$$|A| = n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$
3. Zbiory mają tą samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne
$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

Moc zbioru

Definicja

Mocą zbioru A nazywamy cechę przypisaną zbiorowi A, oznaczaną przez $|A|$ taką, że:

1. Mocą zbioru pustego jest 0

$$|\varnothing| = 0$$

2. Mocą zbioru skończonego jest liczba jego elementów

$$|A| = n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

3. Zbiory mają tą samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne

$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

Moc zbioru

Definicja

Mocą zbioru A nazywamy cechę przypisaną zbiorowi A, oznaczaną przez $|A|$ taką, że:

1. Mocą zbioru pustego jest 0
$$|\varnothing| = 0$$
2. Mocą zbioru skończonego jest liczba jego elementów
$$|A| = n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$
3. Zbiory mają tą samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne
$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

Porównywanie mocy zbiorów

Ponieważ moce zbiorów skończonych są liczbami naturalnymi, to można je porównywać.

Porównywanie mocy zbiorów

Ponieważ moce zbiorów skończonych są liczbami naturalnymi, to można je porównywać.
Zdefiniujmy zatem relację do porównywania mocy zbiorów.

Porównywanie mocy zbiorów

Ponieważ moce zbiorów skończonych są liczbami naturalnymi, to można je porównywać.
Zdefiniujmy zatem relację do porównywania mocy zbiorów.

Definicja $|A| \leq |B|$

Mówimy, że zbiór A ma moc nie większą od zbioru B, jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B.

Porównywanie mocy zbiorów

Ponieważ moce zbiorów skończonych są liczbami naturalnymi, to można je porównywać.
Zdefiniujmy zatem relację do porównywania mocy zbiorów.

Definicja $|A| \leq |B|$

Mówimy, że zbiór A ma moc nie większą od zbioru B, jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B.

Definicja $|A| < |B|$

Mówimy, że zbiór A ma moc mniejszą od zbioru B, gdy

$$|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych na odcinku $(0, 1)$

Twierdzenie

Odcinek otwarty $(0, 1)$ nie jest przeliczalny

Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych na odcinku $(0, 1)$

Twierdzenie

Odcinek otwarty $(0, 1)$ nie jest przeliczalny

Udowodnimy to twierdzenie używając metody przekątniowej Cantora.

Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych na odcinku $(0, 1)$

Twierdzenie

Odcinek otwarty $(0, 1)$ nie jest przeliczalny

Udowodnimy to twierdzenie używając metody przekątniowej Cantora. Zauważmy, że każda liczba rzeczywista $x \in (0, 1)$ ma swoje rozwinięcie dziesiętne.

Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych na odcinku $(0, 1)$

Twierdzenie

Odcinek otwarty $(0, 1)$ nie jest przeliczalny

Udowodnimy to twierdzenie używając metody przekątniowej Cantora. Zauważmy, że każda liczba rzeczywista $x \in (0, 1)$ ma swoje rozwinięcie dziesiętne. Jeśli jest ono skończone, to uzupełniamy rozwinięcie o nieskończoną ilość zer.

Ponumerujmy wszystkie liczby rzeczywiste $x \in (0, 1)$ liczbami naturalnymi ustawiając je w nieskończony ciąg indeksowany po $\mathbb{N}$:

Ponumerujmy wszystkie liczby rzeczywiste $x \in (0,1)$ liczbami naturalnymi ustawiając je w nieskończony ciąg indeksowany po $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$	$x \in (0,1)$
1	0. 1 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 5 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
3	0. 2 4 2 3 8 1 2 0 4 5 ...
4	0. 8 2 3 0 4 2 6 5 8 4 ...
5	0. 3 7 9 8 5 0 0 1 2 8 ...
6	0. 9 3 2 7 8 9 4 7 8 9 ...
7	0. 5 8 9 6 7 8 9 1 2 0 ...
8	0. 7 2 3 6 2 4 9 1 9 2 ...
9	...

Skonstruujmy teraz liczbę rzeczywistą $a \in (0, 1)$.
Stworzymy ją w taki sposób:

1. Weźmiemy pierwszą cyfrę po przecinku o indeksie 1 i dodamy 1
2. Weźmiemy drugą cyfrę po przecinku o indeksie 2 i dodamy 1
3. Weźmiemy trzecią cyfrę po przecinku o indeksie 3 i dodamy 1

$\mathbb{N}$	$x \in (0, 1)$
1	0. **1** 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
a	0. 2 ...

Skonstruujmy teraz liczbę rzeczywistą $a \in (0, 1)$.
Stworzymy ją w taki sposób:

1. Weźmiemy pierwszą cyfrę po przecinku o indeksie 1 i dodamy 1
2. Weźmiemy drugą cyfrę po przecinku o indeksie 2 i dodamy 1
3. Weźmiemy trzecią cyfrę po przecinku o indeksie 3 i dodamy 1

$\mathbb{N}$	$x \in (0, 1)$
1	0. **1** 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 **5** 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
a	0. 2 6 ...

Skonstruujmy teraz liczbę rzeczywistą $a \in (0,1)$.
Stworzymy ją w taki sposób:

1. Weźmiemy pierwszą cyfrę po przecinku o indeksie 1 i dodamy 1
2. Weźmiemy drugą cyfrę po przecinku o indeksie 2 i dodamy 1
3. Weźmiemy trzecią cyfrę po przecinku o indeksie 3 i dodamy 1

$\mathbb{N}$	$x \in (0,1)$
1	0. **1** 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 **5** 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
3	0. 2 4 **2** 3 8 1 2 0 4 5 ...
a	0. 2 6 3 ...

Skonstruujmy teraz liczbę rzeczywistą $a \in (0,1)$.
Stworzymy ją w taki sposób:

1. Weźmiemy pierwszą cyfrę po przecinku o indeksie 1 i dodamy 1
2. Weźmiemy drugą cyfrę po przecinku o indeksie 2 i dodamy 1
3. Weźmiemy trzecią cyfrę po przecinku o indeksie 3 i dodamy 1

i tak dalej...
Jeżeli cyfra po przecinku to 9, to zamieniamy ją na 0.

$\mathbb{N}$	$x \in (0,1)$
1	0. **1** 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 **5** 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
3	0. 2 4 **2** 3 8 1 2 0 4 5 ...
4	0. 8 2 3 **0** 4 2 6 5 8 4 ...
5	0. 3 7 9 8 **5** 0 0 1 2 8 ...
6	0. 9 3 2 7 8 **9** 4 7 8 9 ...
7	0. 5 8 9 6 7 8 **9** 1 2 0 ...
8	0. 7 2 3 6 2 4 9 **1** 9 2 ...
9	...
a	0. 2 6 3 1 6 0 0 2...

Wniosek

W efekcie otrzymaliśmy liczbę $a \in (0, 1)$, która różni się od każdej liczby w naszym ciągu o conajmniej jedną cyfrę, zatem liczba a nie występuje w ciągu, wbrew temu, że ciąg zawierał wszystkie liczby rzeczywiste.

Wniosek

W efekcie otrzymaliśmy liczbę $a \in (0, 1)$, która różni się od każdej liczby w naszym ciągu o conajmniej jedną cyfrę, zatem liczba a nie występuje w ciągu, wbrew temu, że ciąg zawierał wszystkie liczby rzeczywiste.

Wniosek

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że zbiory liczb naturalnych i rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$ nie są równoliczne.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. $(\mathbb{R} \nsim \mathbb{N})$
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N})$
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. $(\mathbb{Q} \sim \mathbb{N})$
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N})$
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. $(A \nsim \mathcal{P}(A))$
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Źródła

1. Jerzy Topp, *Wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015
2. Joanna Cyman, *Wykłady z przedmiotu "Wstęp do logiki i teorii mnogości"*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2023/2024