

Zadanie 1

Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\text{a) } \int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{b) } \int \sqrt[4]{3^x} dx; \quad \text{c) } \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \quad \text{d) } \int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} dx.$$

Zadanie 2

Zauważmy najpierw, że funkcja $|x^2 - x|$ jest ciągła na R , zatem istnieje całka nieoznaczona tej funkcji na R . Całkę tą obliczamy osobno na każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty)$ i otrzymane funkcje odpowiednio "sklejamy". Dla $x \in (-\infty, 0]$ mamy

$$\int |x^2 - x| dx = \int (x^2 - x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1,$$

Zadanie 3

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dla } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Zadanie 4

Dodawanie macierzy A i B określamy następująco

$$(2.1) \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Mnożenie przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem

$$(2.2) \quad tA = t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{pmatrix}$$

Zadanie 5

1. Równanie transportu

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

2. Równania Laplace'a i Poissona

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f(x) \quad \text{gdzie} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

3. Równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$