Wstęp do matematyki

1 Indukcja matematyczna

Zasada indukcji matematycznej jest jednym z ważniejszych sposobów dowodzenia (lub definiowania) własności liczb naturalnych, znajdującym liczne zastosowania w każdym dziale matematyki. Sposoby dowodzenia własności matematycznych, w których korzysta się z zasady indukcji matematycznej, nazywa się sposobami indukcyjnymi, a same dowody – *dowodami indukcyjnymi*. W każdym takim pojedynczym dowodzie w skończonym czasie jednocześnie wykazujemy prawdziwość nieskończenie wielu zdań.

Przedstawimy teraz indukcyjny dowód wzoru na sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych.

Przykład 1. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{1}$$

Równość (1) jest prawdziwa dla $n = 1$, bo $1^3 = 1 = 1^2(1+1)^2/4$. Załóżmy teraz, że n jest pewną dodatnią liczbą naturalną i przypuśćmy, że dla tej liczby mamy

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Udowodnimy, że wtedy także mamy

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Istotnie mamy

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3 &= (1^3+2^3+\cdots+n^3)+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \text{ (z założenia 2)}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Z powyższego i z zasady indukcji matematycznej wynika prawdziwość równości (1) dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Powyższy rozdział powstał na podstawie [1].

2 Podzbiory

Definicja 2. Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B, piszemy $A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, czyli mamy

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall_x \, [x \in A \Rightarrow x \in B]. \tag{3}$$

Symbol $\subseteq$ nazywamy znakiem inkluzji lub znakiem zawierania. Fakt, że zbiór A nie jest podzbiorem zbioru B, wyrażamy zapisem $A \not\subseteq B$. Zatem wobec (3), prawa eliminacji implikacji i prawa de Morgana dla alternatywy, mamy

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists_x \, [x \in A \land x \notin B] \tag{4}$$

Przykład 3. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$ i $\{1,2,3\} \not\subseteq \{1,3,5\}$.

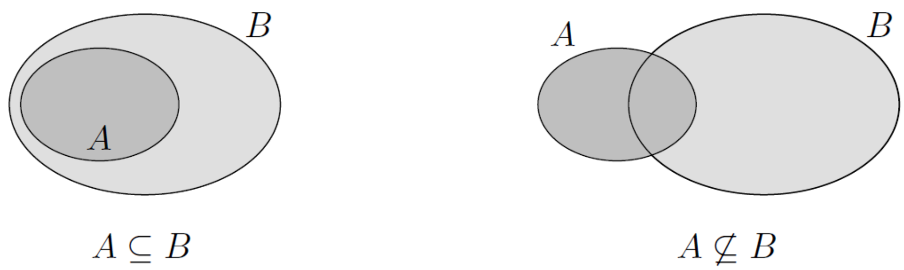
Udowodnimy teraz, że inkluzja zbiorów jest przechodnia (i dziedziczna).

Twierdzenie 1. *Jeśli A, B i C są zbiorami takimi, że $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$.*

Dowód. Załóżmy, że $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$. Weźmy dowolny element $x \in A$. Ponieważ $x \in A$ i $A \subseteq B$, więc wobec definicji 2 wnioskujemy, że $x \in B$. Teraz $x \in B$ i $B \subseteq C$, więc znowu korzystamy z definicji 2 i tym razem wnioskujemy, że $x \in C$. To kończy dowód inkluzji $A \subseteq C$. $\square$

2.1 Diagramy Venna

Zbiory warto ilustrować za pomocą rysunków nazywanych diagramami Venna. W tych ilustracjach zbiory reprezentowane są najczęściej przez koła, elipsy lub prostokąty. Ilustracje te są źródłem pierwszych obserwacji, intuicji i pierwszych własności działań na zbiorach. Umieszczając ilustrację zbioru A wewnątrz ilustracji zbioru B (tak jak to zrobiliśmy na rys. 1), graficzne wyrażamy fakt, że A jest podzbiorem zbioru B.



Rysunek 1: Diagram Venna

3 Podsumowanie

Na zajęciach z LaTeX korzystaliśmy z [2]. Można tam znaleźć na przykład następujący wzór:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right)$$

Literatura

[1] J. Topp: *Wstęp do matematyki*, wydawnictwo PG, Gdańsk 2009.

[2] Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX.