Laboratorium 12

Autor Rozwiązania

Zadanie 0. (5 pkt) Stosując pakiet *geometry* ustawić marginesy: lewy 30 mm, 30 mm, górny 25 mm, dolny 25 mm.
Zadanie 1. (20 pkt) Obliczyć podane całki:

$$\text{a)} \int x^2 \arctan x \, dx; \quad \text{b)} \int \arcsin x \, dx; \quad \text{c)} \int_{-2}^{2} x^2 + x - 3 \, dx; \quad \text{d)} \int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} \, dx;$$

Zadanie 2. (15 pkt) Zapis klamrowy funkcji

$$\int |x^2 - x| \, dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C & \text{dla } x \in [0, 1], \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} + C & \text{dla } x \in [1, \infty) . \end{cases}$$

Zadanie 3. (30 pkt) Stosując środowiska do definicji, twierdzeń, dowodów sformułować:

Definicja 1. *Dodawanie macierzy A i B określamy następująco*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Definicja 2. *Mnożenie przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem*

$$tA = t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Twierdzenie 3. *Macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1} wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$.

Dowód. Pokażemy implikację w jedną stronę $\Rightarrow$, a drugą zostawimy jako ćwiczenie. Jeśli macierz jest odwracalna, to $A \cdot A^{-1} = I$, więc

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1,$$

stąd $\det A \neq 0$. □

Zadanie 4. (30 pkt)

1. Równanie transportu
$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

2. Równanie Laplace'a i Poissona
$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f(x) \quad \text{gdzie } \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

3. Równanie ciepła
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$