Wstęp do teorii mocy zbiorów

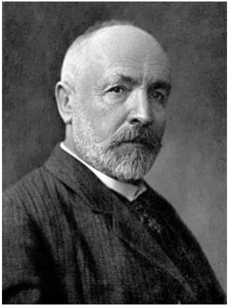
Zachariasz Jażdżewski

21.01.2024

Wstęp

Teoria mocy zajmuje się ilością elementów w zbiorze i porównywaniem zbiorów ze względu na ilości ich elementów.

Za twórcę teorii mocy, jak i całej teorii mnogości uważa się Georga Cantora.



Równoliczność zbiorów

Definicja

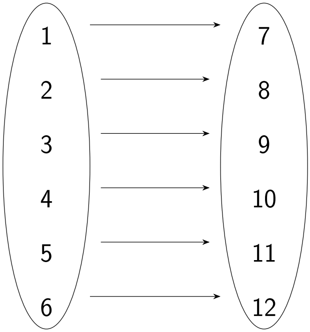
Mówimy, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B, gdy istnieje bijekcja f przekształcająca zbiór A na zbiór B. Zapisujemy jako $A \sim B$.

Przykład

Zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ są równolicznem, a przykładem funkcji ustalającej równoliczność tych zbiorów może być funkcja

$$f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{7, 8, 9, 10, 11\}$$

taka, że $f(1) = 7, f(2) = 8, f(3) = 9,$ $f(4) = 10, f(5) = 11$



Podstawowe własności

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \implies B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \implies A \sim C$

Równoliczność liczb naturalnych z całkowitymi

Twierdzenie

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Uzasadnienie

Równoliczność zbiorów $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ ustala funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ określona wzorem:

$$f(m) = \begin{cases} 2m & \text{gdy } m \geq 0 \\ -2m - 1 & \text{gdy } m < 0 \end{cases}$$

- Łatwo możemy zauważyć, że dla liczb całkowitych nieujemnych funkcja ta zwraca nam zbiór liczb naturalnych parzystych.
- Dla liczb całkowitych ujemnych zaś funkcja zwraca zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- Zatem dla zbioru wszystkich liczb całkowitych funkcja ustala równoliczność ze zbiorem $\mathbb{N}$.
- Jako, że funkcja jest bijekcją, to istnieje również funkcja odwrotna do niej ustalająca równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Dowód, że funkcja f jest bijekcją pomijamy)

Moce zbiorów i porównywanie mocy zbiorów

Definicja

Niech A będzie ustalonym zbiorem. Mówimy, że zbiór A jest:

1. Skończony, gdy jest on zbiorem pustym lub jest równoliczny ze zbiorem $\{1, 2, 3, ..., n\}$ dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Nieskończony, gdy nie jest on skończony.
3. Przeliczalny, gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.
4. Co najwyżej przeliczalny, gdy jest on skończony lub przeliczalny.
5. Nieprzeliczalny, gdy nie jest on co najwyżej przeliczalny.

Moc zbioru

Definicja

Mocą zbioru A nazywamy cechę przypisaną zbiorowi A, oznaczaną przez $|A|$ taką, że:

1. Mocą zbioru pustego jest 0
$$|\varnothing| = 0$$
2. Mocą zbioru skończonego jest liczba jego elementów
$$|A| = n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$
3. Zbiory mają tą samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne
$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

Porównywanie mocy zbiorów

Ponieważ moce zbiorów skończonych są liczbami naturalnymi, to można je porównywać.
Zdefiniujmy zatem relację do porównywania mocy zbiorów.

Definicja $|A| \leq |B|$

Mówimy, że zbiór A ma moc nie większą od zbioru B, jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B.

Definicja $|A| < |B|$

Mówimy, że zbiór A ma moc mniejszą od zbioru B, gdy

$$|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$$

Poznajmy parę elementarnych twierdzeń dotyczących porównywania mocy zbiorów.

Twierdzenie

Dla niepustych zbiorów A i B następujące stwierdznia są równoważne

1. $|A| \leq |B|$
2. Istnieje iniekcja $f\colon A \xrightarrow{1-1} B$
3. Istnieje suriekcja $g\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$

Własności

Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:

1. $|A| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
3. $|A| \leq |B| \ \wedge \ |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$
4. $|A| \leq |B| \ \vee \ |B| \leq |A|$

Nieprzeliczalność liczb rzeczywistych na odcinku $(0, 1)$

Twierdzenie

Odcinek otwarty $(0, 1)$ nie jest przeliczalny

Udowodnimy to twierdzenie używając metody przekątniowej Cantora. Zauważmy, że każda liczba rzeczywista $x \in (0, 1)$ ma swoje rozwinięcie dziesiętne. Jeśli jest ono skończone, to uzupełniamy rozwinięcie o nieskończoną ilość zer.

Ponumerujmy wszystkie liczby rzeczywiste $x \in (0,1)$ liczbami naturalnymi ustawiając je w nieskończony ciąg indeksowany po $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$	$x \in (0,1)$
1	0. 1 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 5 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
3	0. 2 4 2 3 8 1 2 0 4 5 ...
4	0. 8 2 3 0 4 2 6 5 8 4 ...
5	0. 3 7 9 8 5 0 0 1 2 8 ...
6	0. 9 3 2 7 8 9 4 7 8 9 ...
7	0. 5 8 9 6 7 8 9 1 2 0 ...
8	0. 7 2 3 6 2 4 9 1 9 2 ...
9	...

Skonstruujmy teraz liczbę rzeczywistą $a \in (0, 1)$.
Stworzymy ją w taki sposób:

1. Weźmiemy pierwszą cyfrę po przecinku o indeksie 1 i dodamy 1
2. Weźmiemy drugą cyfrę po przecinku o indeksie 2 i dodamy 1
3. Weźmiemy trzecią cyfrę po przecinku o indeksie 3 i dodamy 1

i tak dalej...
Jeżeli cyfra po przecinku to 9, to zamieniamy ją na 0.

$\mathbb{N}$	$x \in (0, 1)$
1	0. **1** 2 6 8 7 4 1 5 2 7 ...
2	0. 6 **5** 8 7 9 2 1 7 8 6 ...
3	0. 2 4 **2** 3 8 1 2 0 4 5 ...
4	0. 8 2 3 **0** 4 2 6 5 8 4 ...
5	0. 3 7 9 8 **5** 0 0 1 2 8 ...
6	0. 9 3 2 7 8 **9** 4 7 8 9 ...
7	0. 5 8 9 6 7 8 **9** 1 2 0 ...
8	0. 7 2 3 6 2 4 9 **1** 9 2 ...
9	...
a	0. 2 6 3 1 6 0 0 2...

Wniosek

W efekcie otrzymaliśmy liczbę $a \in (0, 1)$, która różni się od każdej liczby w naszym ciągu o conajmniej jedną cyfrę, zatem liczba a nie występuje w ciągu, wbrew temu, że ciąg zawierał wszystkie liczby rzeczywiste.

Wniosek

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że zbiory liczb naturalnych i rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$ nie są równoliczne.

Przykłady innych zbiorów przeliczalnych, co najwyżej przeliczalnych i nieprzeliczalnych

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. ($\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$)
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny. ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$)
- Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$)
- Żaden zbiór nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów. ($A \nsim \mathcal{P}(A)$)
- Każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$.

Źródła

1. Jerzy Topp, *Wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015
2. Joanna Cyman, *Wykłady z przedmiotu "Wstęp do logiki i teorii mnogości"*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2023/2024