

Funkcje trygonometryczne

Zachariasz Jażdżewski

12 grudnia 2023

Spis treści

1	Opis	1
2	Wykresy funkcji	2
3	Wartości dla typowych kątów	3
3.1	Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$. . .	3
3.2	Znak wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych	3
4	Własności funkcji trygonometrycznych	4
5	Spis rysunków i tabel	5

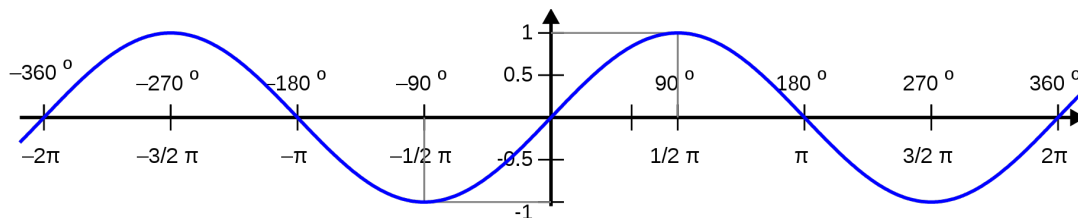
1 Opis

Funkcje trygonometryczne – zbiór kilku funkcji matematycznych wyrażających między innymi stosunki między długościami boków trójkąta prostokątnego zależnie od miar jego kątów wewnętrznych. Funkcje te wywodzą się z geometrii, jednak są rozpatrywane także w oderwaniu od niej, dla różnych argumentów rzeczywistych i innych zespolonych. Umożliwia to analiza matematyczna, w której opisano te funkcje szeregami potęgowymi, co prowadzi do uogólnień na inne dziedziny. Powstały też inne definicje, oparte np. na równaniach różniczkowych.

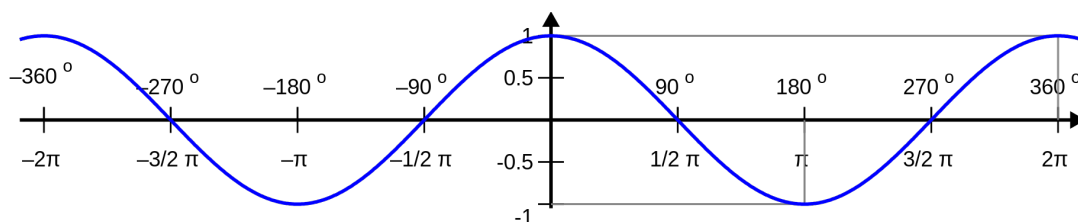
Do funkcji trygonometrycznych zalicza się przede wszystkim sinus, kosinus i tangens, a także kotangens, sekans, kosekans i kilka innych, wspominanych rzadziej. Funkcje trygonometryczne stosuje się w różnych działach matematyki, innych naukach ścisłych i technice. Funkcje te bada trygonometria, a konkretniej goniometria.

2 Wykresy funkcji

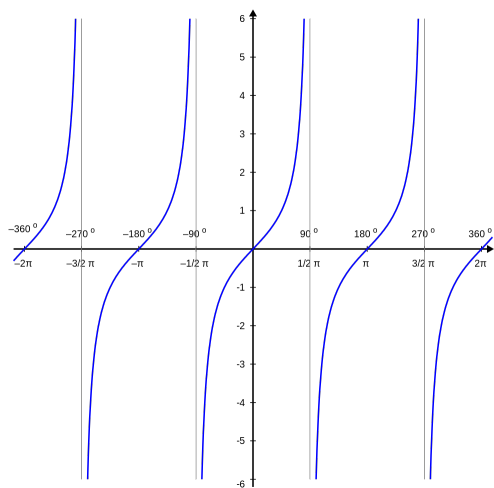
Krzywe, będące wykresami funkcji sinus, cosinus, tangens, cotangens nazywa się odpowiednio: sinusoidą, cosinusoidą, tangensoidą i cotangensoidą.



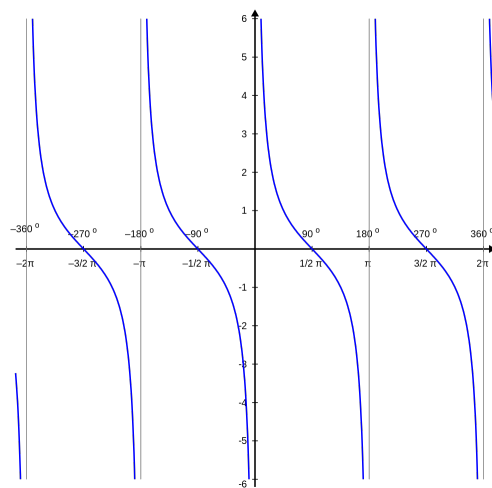
Rysunek 1: Sinusoida: wykres funkcji $y = \sin x$



Rysunek 2: Sinusoida: wykres funkcji $y = \cos x$



Rysunek 3: Tangensoida: wykres funkcji $y = \tan x$



Rysunek 4: Cotangensoida: wykres funkcji $y = \cot x$

3 Wartości dla typowych kątów

3.1 Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$

radiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Tabela 1: Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

3.2 Znak wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych

	I ćwiartka	II ćwiartka	III ćwiartka	IV ćwiartka
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

Tabela 2: Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w zależności od ćwiartki

4 Własności funkcji trygonometrycznych

1. Dziedzina

- Funkcje sinus i cosinus określone są dla każdej liczby rzeczywistej.
- Tangens jest określony w zbiorze powstałym ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przez usunięcie liczb mających postać $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Cotangens jest określony w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych poza liczbami postaci $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2. Przeciwdziedzina

- Sinus i cosinus są ograniczone: przyjmują wartości z przedziału $[-1, 1]$. Tangens i cotangens przyjmują dowolne wartości rzeczywiste.

3. Ekstrema

- Maksymalną wartość, dla obu funkcji 1, sinus przyjmuje w punktach $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a cosinus w punktach $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Maksymalną wartość, dla obu funkcji -1 , sinus przyjmuje w punktach $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a cosinus w punktach $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

4. Miejsca zerowe

- Miejscami zerowymi sinusa i tangensa są punkty postaci $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Miejscami zerowymi cosinusa i cotangensa są punkty postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

5. Parzystość i nieparzystość

- Funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste.
- Funkcja cosinus jest parzysta.

6. Okresowość

- Funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi.
sin, cos: Okresem podstawowym sinusa i cosinusa jest liczba 2π . Zobacz wykres 1 i 2.
tg, ctg: Okresem podstawowym tangensa i cotangensa jest liczba π . Zobacz wykres 3 i 4.

7. Ciągłość i różniczkowalność

- Funkcje sinus i cosinus są ciągłe i różniczkowalne w każdym punkcie prostej rzeczywistej. Tangens i cotangens także są ciągłe i różniczkowalne w swoich dziedzinach.

8. Odwracalność

- Żadna z nich nie jest funkcją różnowartościową, a zatem nie istnieją funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych w całej dziedzinie. W pewnych przedziałach funkcje te są jednak różnowartościowe i można tam określić funkcje do nich odwrotne.

5 Spis rysunków i tabel

Spis rysunków

1	Sinusoida: wykres funkcji $y = \sin x$	2
2	Sinusoida: wykres funkcji $y = \cos x$	2
3	Tangensoida: wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$	2
4	Cotangensoida: wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$	2

Spis tabel

1	Tabela wartości funkcji trygonometrycznych	3
2	Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w zależności od ćwiartki	3