Zestaw 5

Analiza Matematyczna

Granice funkcji jednej zmiennej

- **Limit[f[x],x→a]**
- **Limit[f[x],x->a,Direction->1]**
  - **Direction->-1** lub **Direction->"FromAbove"** granica prawostronna
  - **Direction->1** lub **Direction->"FromBelow"** granica lewostronna

```
(* w punkcie *)
Limit[x^2 - Cos[x], x → 0]
```
granica cosinus

Out[•]=

-1

```
(*granice jednostronne *)
Limit[1 / x, x → 0, Direction → 1]
```
granica kierunek

```
Limit[1 / x, x → 0, Direction → -1]
```
granica kierunek

```
(*wykres*)
Plot[1 / x, {x, -1, 1}]
```
wykres

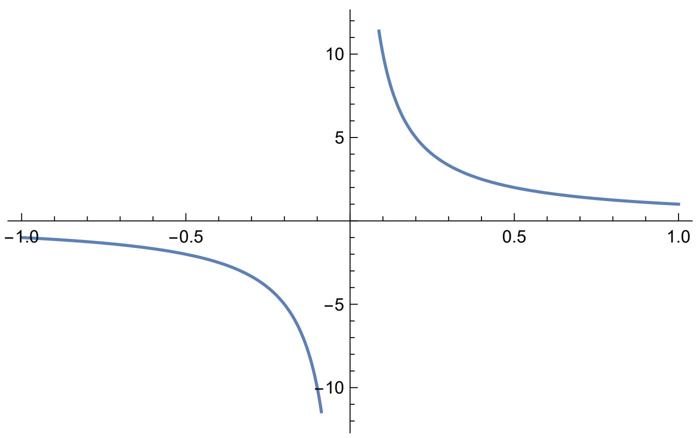
Out[•]=

$-\infty$

Out[•]=

∞

Out[•]=



```
Limit[Floor[x^2] - x, x → 4, Direction → 1]
granica podłoga                kierunek
Limit[Floor[x^2] - x, x → 4, Direction → -1]
granica podłoga                kierunek
(*wykres*)
Plot[Floor[x^2] - x, {x, 3.5, 4.5},
wyk··· podłoga
 Epilog → {PointSize[Large], Point[{{4, 11}, {4, 12}}]}]
 dopracow··· rozmiar kro··· duży  punkt
```

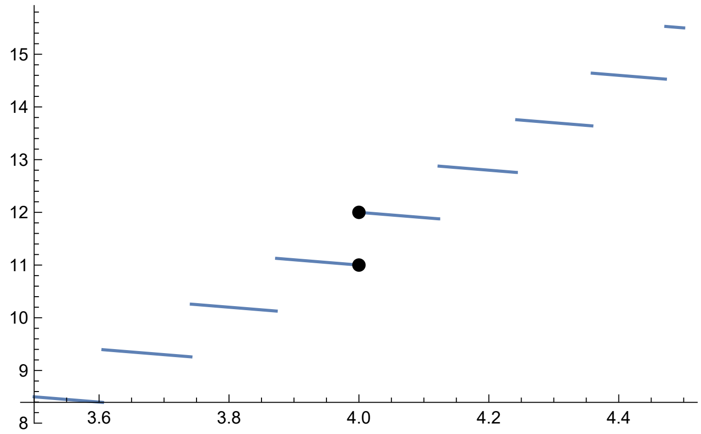
Out[*]=

11

Out[*]=

12

Out[*]=



```
(* w nieskończoności, przypomnienie:  Esc inf Esc  *)
Limit[Exp[-x], x → ∞]
granica  funkcja eksponencjalna
Limit[Exp[-x], x → -∞]
granica  funkcja eksponencjalna
(*wykres*)
Plot[Exp[-x], {x, -5, 5}]
wyk⋯  funkcja eksponencjalna
```

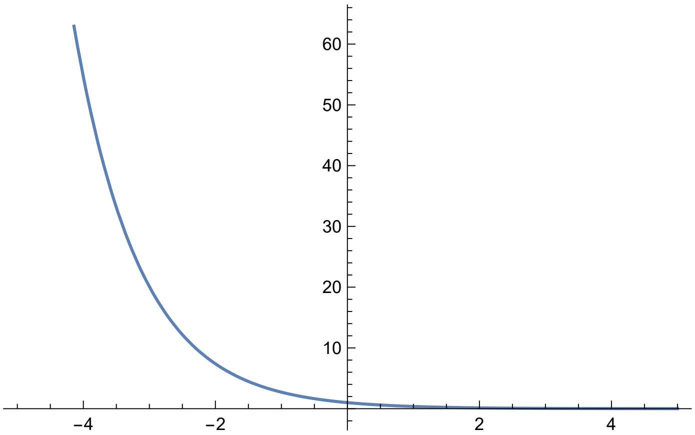
Out[∘]=

0

Out[∘]=

∞

Out[∘]=




```
(*Wyznaczamie asymptot*)
```

```
f[x_] := (x^2 + 1) / (x - 2 x^2 + 3)
sol = Solve[Denominator[f[x]] == 0, x] (*wyznaczamy zera mianownika*)
      rozwi⋯ mianownik
(*sprawdzamy, czy w tych punktach funkcja zbiega do +/-∞*)
{Limit[f[x], x → -1, Direction → "FromAbove"],
 granica              kierunek
 Limit[f[x], x → -1, Direction → "FromBelow"]}
 granica              kierunek
{Limit[f[x], x → 3 / 2, Direction → "FromAbove"],
 granica                kierunek
 Limit[f[x], x → 3 / 2, Direction → "FromBelow"]}
 granica                kierunek
(*liczymy granice w  +/-∞*)
{Limit[f[x], x → ∞], Limit[f[x], x → -∞]}
 granica              granica
(*przedstawiamy na wykresie*)
Plot[{f[x], -1 / 2}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {Automatic, Dashed},
wykres                           styl grafiki  automatyczny  linia przerywana
 ExclusionsStyle → Directive[Red, Dashed], PlotRange → 5]
 styl wyłączeń     dyrektywa  cze⋯ linia prze⋯  zakres wykresu
```

Out[∘]=

$$\left\{\{x \to -1\}, \left\{x \to \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Out[∘]=

$$\{\infty, -\infty\}$$

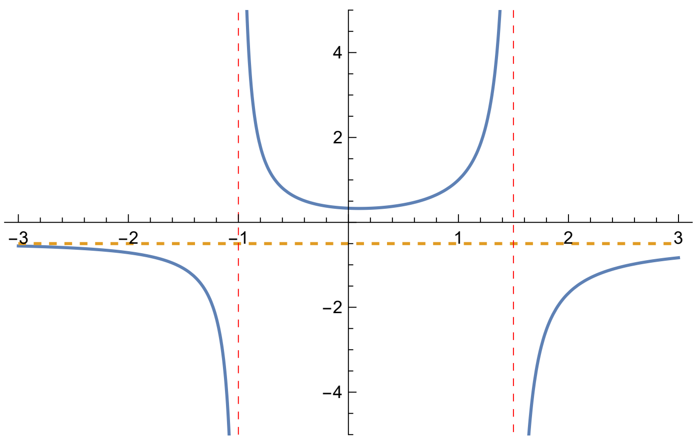
Out[∘]=

$$\{-\infty, \infty\}$$

Out[∘]=

$$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

Out[∘]=



Szeregi

Series[f[x], {x,x0, n}] rozwinięcie szeregu dla f wokół punktu x = x0 do rzędu (x-x0)^n, n∈Z

```
Series[f[x], {x, a, 3}]
```
szereg

Out[◦]=

$$f[a]+f'[a]\ (x-a)+\frac{1}{2}f''[a]\ (x-a)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}[a]\ (x-a)^3+O[x-a]^4$$

```
Series[Exp[x], {x, 0, 10}]
```
szereg　funkcja eksponencjalna

Out[◦]=

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40\,320}+\frac{x^9}{362\,880}+\frac{x^{10}}{3\,628\,800}+O[x]^{11}$$

Różniczkowanie

```
D[f[x], x] (*pierwsza pochodna*)
D[f[x], {x, 2}] (*druga pochodna*)
```
oblicz pochodną
```
D[D[f[x], x], x] (*druga pochodna inaczej*)
```
oblicz pochodną
```
D[f[x] × g[x], x] (*pochodna iloczynu*)
```
oblicz pochodną
```
D[f[x, y], x] (*pochodna cząstkowa po x*)
```
oblicz pochodną
```
D[f[x, y], x, y] (*druga pochodna cząstkowa po x i po y*)
```
oblicz pochodną
```
D[f[x, y], {x, 2}] (*druga pochodna cząstkowa po x i po
```
oblicz pochodną
```
x*)
D[f[x, y], {{x, y}}] (*gradient*)
```
oblicz pochodną
```
D[f[x, y], {{x, y}, 2}] (*hesjan*)
```
oblicz pochodną

Out[•]=
```
D[f[x], x]
```

Out[•]=
$f''[x]$

Out[•]=
$f''[x]$

Out[•]=
$(g[x]\, f'[x] + f[x]\, g'[x])$

Out[•]=
$f^{(1,0)}[x, y]$

Out[•]=
$f^{(1,1)}[x, y]$

Out[•]=
$f^{(2,0)}[x, y]$

Out[•]=
$\{f^{(1,0)}[x, y],\ f^{(0,1)}[x, y]\}$

Out[•]=
$\{\{f^{(2,0)}[x, y],\ f^{(1,1)}[x, y]\},\ \{f^{(1,1)}[x, y],\ f^{(0,2)}[x, y]\}\}$

(*Operatory różniczkowe:*)

Grad, **Div**, **Curl**, **Laplacian**

Całkowanie

Pojedyncze

```
Integrate[f[x], x]
```
całka

Out[•]=

$$\int f[x]\, dx$$

```
Integrate[f[x], {x, a, b}]
```
całka

Out[•]=

$$\int_a^b f[x]\, dx$$

```
(*∫ -  ESC int ESC
ⅆ - ESC dd ESC*)
```

```
Integrate[x^2 + Cos[x], x]
```
całka cosinus

Out[•]=

$$\frac{x^3}{3} + \text{Sin}[x]$$

```
(* UWAGA! całka nieoznaczona nie zawiera stałej całkowania*)
```

$$\int (1/(x^2+1))\, dx$$

Out[•]=

ArcTan[x]

```
(*Obliczanie pola pomiędzy krzywymą y=0, a y=Sqrt[9-x^2], dla x∈(-3,0)*)
```
pierwiastek kwadratowy

```
Integrate[Sqrt[9 - x^2], {x, -3, 0}]
```
całka pierwiastek kwadratowy

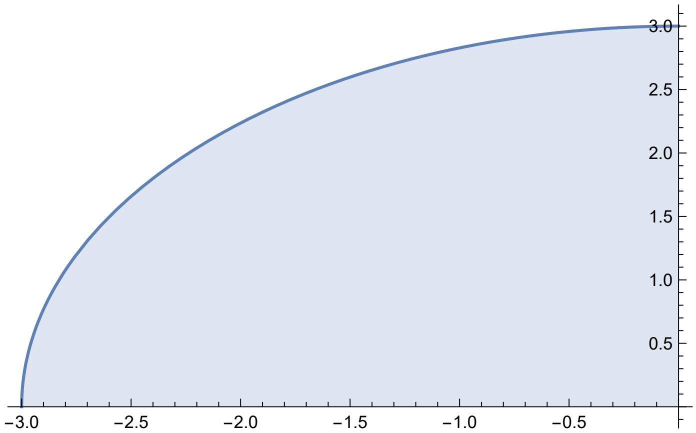
Out[•]=

$$\frac{9\pi}{4}$$

```
(**)
```

```
Plot[ Sqrt[9 - x^2], {x, -3, 0}, Filling → Axis, AxesOrigin → {0, 0}]
wykres pierwiastek kwadratowy                wypełnienie oś punkt przecięcia osi
```

Out[•]=




```
(* całka niewłaściwa *)
Integrate[Exp[-x], {x, 0, ∞}] (*zbieżna*)
całka     funkcja eksponencjalna
Integrate[Exp[-x], {x, -∞, 0}] (* rozbieżna *)
całka     funkcja eksponencjalna
(* inny typ całki niewłaściwej *)
Integrate[1 / Sqrt[x], {x, 0, 1}] (* zbieżna *)
całka          pierwiastek kwadratowy
Integrate[1 / x, {x, 0, 1}] (* rozbieżna *)
całka
```

Integrate: Integral of e^{-x} does not converge on {−∞, 0}.

Integrate: Integral of $\frac{1}{x}$ does not converge on {0, 1}.

Podwójne

```
Integrate[1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
całka
```

Out[•]=

4

Całki wielu zmiennych mogą by liczone po zbiorze określonym za pomocą instrukcji warunkowej **If** bądź instrukcji **Boole**

```
Integrate[If[x^2 + y^2 < 1 / 4, 1, 0], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
całka     operator warunkowy
Integrate[Boole[x^2 + y^2 ≤ 1 / 4], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
całka     funkcja charakterystyczna Boole'a
```

Out[•]=

$\frac{\pi}{4}$

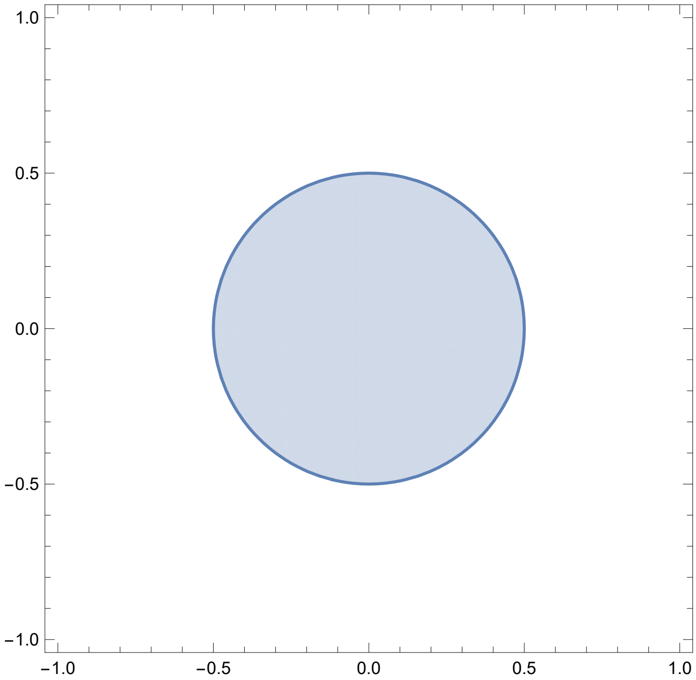
Out[•]=

$\frac{\pi}{4}$

```
(* aby zobaczyć jak wygląda wygląda obszar całkowania
z powyższej instrukcji można użyć  RegionPlot *)

RegionPlot[x^2 + y^2 ≤ 1 / 4, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```
wykres regionu na płaszczyźnie

Out[*]=




```
(*bardziej skomplikowany warunek*)
```

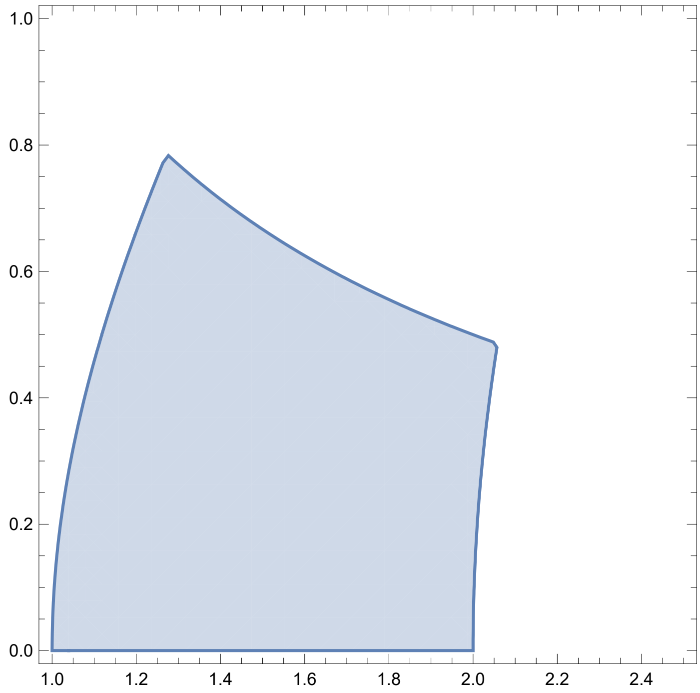
```
Integrate[Boole[1 < x^2 - y^2 < 4 && x y < 1 && x > 0 && y > 0], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}]
```
całka funkcja charakterystyczna Boole'a

```
RegionPlot[1 < x^2 - y^2 < 4 && x y < 1 && x > 0 && y > 0, {x, 1, 5 / 2}, {y, 0, 1}]
```
wykres regionu na płaszczyźnie

Out[◦]=

$$\frac{1}{4}\left(4\,\mathrm{ArcCsch}[2]+\mathrm{ArcSinh}[2]+4\,\mathrm{Log}[2]-2\,\mathrm{Log}[4]-2\,\mathrm{Log}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]\right)$$

Out[◦]=



Całkowanie po zbiorze

```
(* całka po prostokącie *)
Integrate[x y, {x, 0, 1}, {y, 0, 3}]
```
całka

Out[◦]=

$$\frac{9}{4}$$

```
(*całka po trójkącie o bokach A(0,0), B(1,1), C(1,0)*)
```
stała

```
(*sp. 1*)
Integrate[x y, {x, 0, 1}, {y, 0, x}]
```
całka

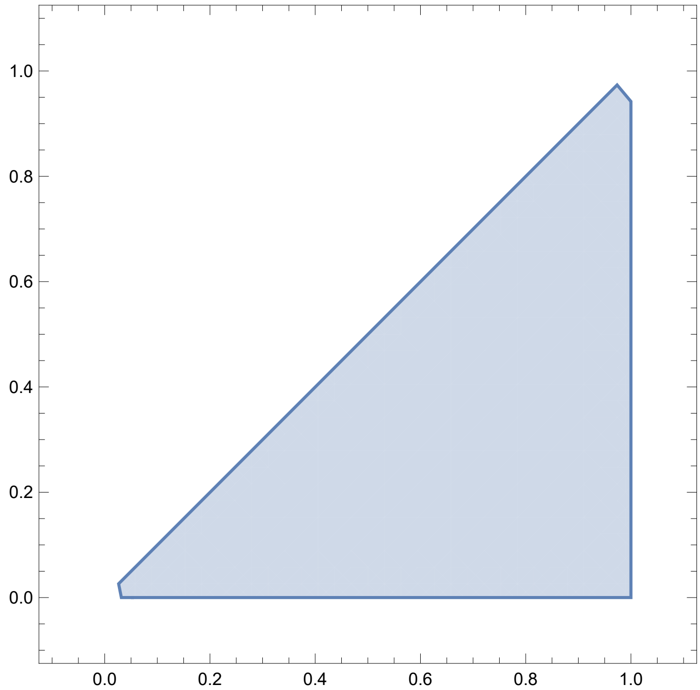
Out[◦]=

$$\frac{1}{8}$$

```
RegionPlot[0 < x < 1 && 0 < y < x, {x, -0.1, 1.1}, {y, -0.1, 1.1}]
```
wykres regionu na płaszczyźnie

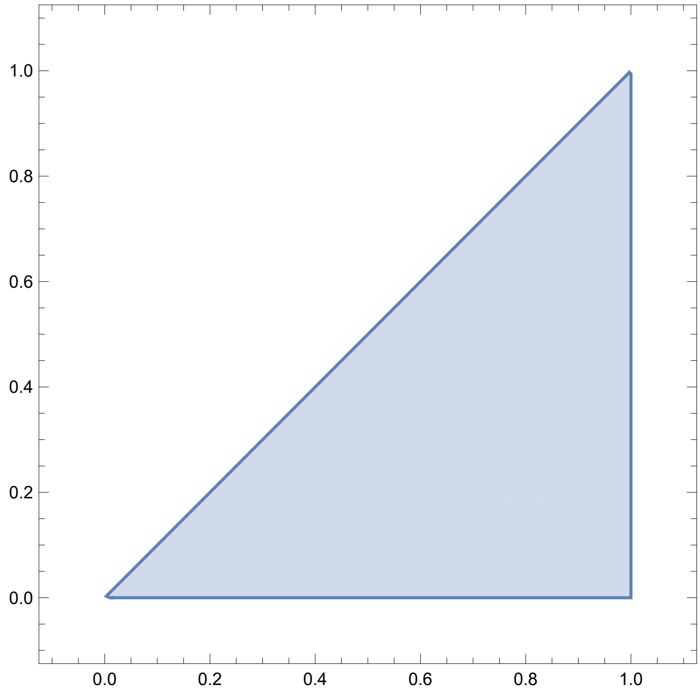
```
(*ucięte rogi to niedokładność obliczeń, aby to naprawić,
można użyć opcji PlotPoints, np. PlotPoints→100 (nie przesadzać z dokładnością)*)
```
początkowa liczba ⋯ początkowa liczba punkt̂ w na wykresie

Out[•]=




```
RegionPlot[0 < x < 1 && 0 < y < x, {x, -0.1, 1.1}, {y, -0.1, 1.1}, PlotPoints → 100]
```
wykres regionu na płaszczyźnie początkowa liczba punkt

Out[•]=



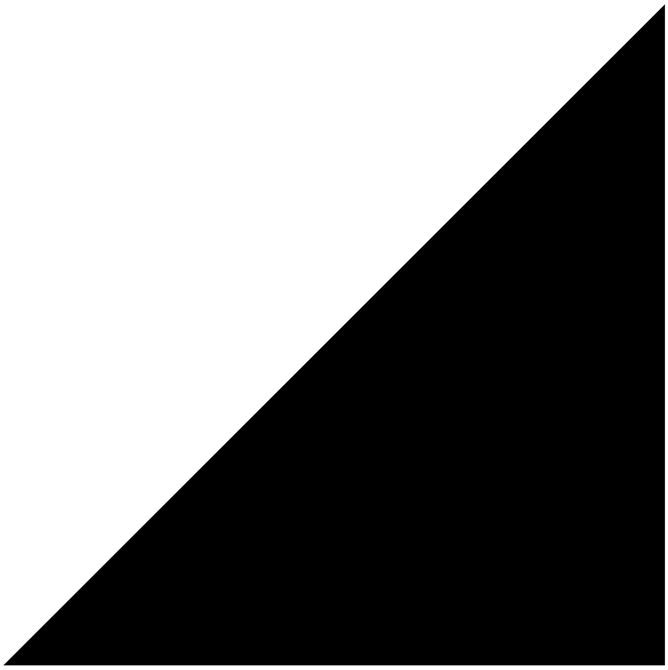
```
(*sp. 2*)
Integrate[x y, {x, y} ∈ Triangle[{{0, 0}, {1, 1}, {1, 0}}]]
całka                          trójkąt
```

Out[•]=

$$\frac{1}{8}$$

```
Graphics[Triangle[{{0, 0}, {1, 1}, {1, 0}}]]
grafika   trójkąt
```

Out[•]=



```
(*sp. 3*)

Integrate[If[0 < x < 1 && 0 < y < x, x y, 0], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
całka     operator warunkowy
```

```
(*sp. 4*)
Integrate[Boole[0 < x < 1 && 0 < y < x] x y, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
całka     funkcja charakterystyczna Boole'a
```

Out[•]=

$$\frac{1}{8}$$

Out[•]=

$$\frac{1}{8}$$

```
(*całka po kole x^2+y^2≤R^2
proszę porównać czas obliczeń!*)
f[x_, y_] := x^2 + x y
(* z opisu normalnego *)
Integrate[f[x, y], {x, -R, R},
 {y, -Sqrt[R^2 - x^2], Sqrt[R^2 - x^2]}, Assumptions → R > 0]
```

Out[•]=

$$\frac{\pi R^4}{4}$$

```
(*proszę sprawdzić co się stanie, gdy usuniemy Assumptions→R>0*)

(* z użyciem instrukcji warunkowej
zagadka: jaka jest funkcja podcałkowa i dlaczego obszar
całkowania jest kwadratem?*)
Integrate[If[x^2 + y^2 ≤ R^2, f[x, y], 0] ,
 {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, Assumptions → R > 0]
(* z użyciem instrukcji warunkowej zagadka: jaka jest
funkcja podcałkowa i dlaczego obszar całkowania jest
kwadratem?*)
Integrate[Boole[x^2 + y^2 ≤ R^2] f[x, y],
 {x, -R, R}, {y, -R, R}, Assumptions → R > 0]
(* z zamianą na współrzędne biegunowe *)
fbieg[r_, fi_] := f[r Cos[fi], r Sin[fi]]
Integrate[fbieg[r, fi] r(* JAKOBIAN !*), {r, 0, R}, {fi, 0, 2 π}]
```

Out[•]=

$$\frac{\pi R^4}{4}$$

Out[•]=

$$\frac{\pi R^4}{4}$$

Out[•]=

$$\frac{\pi R^4}{4}$$

Całkowanie numeryczne NIntegrate

Jeżeli nie interesuje nas wynik symboliczny a wyłącznie wartość liczbowa lepszym wyborem jest całkowanie numeryczne realizowane za pomocą polecenia **NIntegrate** . Porównaj czas wykonywania obu poleceń.

```
Timing[
czas użyty
  Integrate[ Boole[0 ≤ z ≤ 1 && x^2 + y^2 ≤ z^2 ], {x, -1, 1} , {y, -1, 1}, {z, 0, 1}]];
  całka         funkcja charakterystyczna Boole'a
% // N
    przybliżenie numeryczne
Timing[
czas użyty
 NIntegrate[ Boole[0 ≤ z ≤ 1 && x^2 + y^2 ≤ z^2 ], {x, -1, 1} , {y, -1, 1}, {z, 0, 1} ]]
 numeryczne ⋯   funkcja charakterystyczna Boole'a
```

```
Out[*]=
{10.573, 1.0472}
```

```
Out[*]=
{0.083, 1.0472}
```