

# Zestaw 2

## Wektory i macierze

### List

W Mathematicie wektory przedstawia się w postaci list elementów. Listy tworzymy wypisując ich elementy po przecinku w nawiasach klamrowych, tzw. wążach.

```
In[4]:= (*Przykładowy wektor*)  
v = {1, 5, 2, 5, 7, 1212, 0}  
Length[v]
```

```
Out[4]= {1, 5, 2, 5, 7, 1212, 0}
```

```
Out[5]= 7
```

Listy nie muszą składać się wyłącznie z liczb. Ich elementami mogą być dowolne obiekty.

```
In[1]:= imiona = {"Kasia", "Basia", "Cesia"}  
roznosci = {1, "pies", True, 2, "kot", False, 3, "fretka", True}
```

```
Out[1]= {Kasia, Basia, Cesia}
```

```
Out[2]= {1, pies, True, 2, kot, False, 3, fretka, True}
```

W szczególności elementami list mogą być inne listy – w ten sposób tworzymy macierze. W kodzie naszego programu macierz to po prostu lista list.

```
In[158]:= (*Przykładowa macierz - lista list*)  
MacierzKwadratowa = {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}}
```

```
Out[158]= {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}}
```

### Podstawowe operacje na macierzach:

**A+B** dodawanie

**A-B** odejmowanie

**A.B** lub **Dot[A,B]** mnożenie macierzy (nieprzemienne!)

**Transpose[A]** transpozycja

**Inverse[A]** macierz odwrotna (o ile istnieje)

**Det[A]** wyznacznik macierzy

**Eigenvalues[A]** lista wartości własnych kwadratowej macierzy A

(\*Wyświetlanie macierzy w postaci macierzowej. \*)  
**MatrixForm**[MacierzKwadratowa]

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

In[6]:= (\*Wyznacznik macierzy\*)  
**Det**[MacierzKwadratowa]

Out[6]= -90

In[159]:=

(\*Macierz odwrotna\*)  
**Inverse**[MacierzKwadratowa]  
 % // **MatrixForm**

Out[159]=

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{7}{45} \right\}, \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{1}{15} \right\}, \left\{ \frac{2}{5}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{45} \right\} \right\}$$

Out[160]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{7}{45} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{45} \end{pmatrix}$$

In[161]:=

**A = {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}};**  
 (\*macierz o 4 wierszach i trzech kolumnach\*)  
**A // MatrixForm**

Out[161]=

Out[162]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(\*Sprawdzić, co się stanie jeśli zastosujemy funkcję Det dla macierzy,  
 która nie jest kwadratowa\*)

In[163]:=

**Det**[A]

 **Det:** Argument {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}} at position 1 is not a non-empty square matrix.

Out[163]=

**Det**{{{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}}}

In[164]:=

```
(*****Jak NIE UŻYWAĆ MatrixForm:***** *)
BezuzytecznaMacierz = MatrixForm[{{1, 2}, {2, 1}}]
Det[BezuzytecznaMacierz](*nie da się policzyć wyznacznika *)
Inverse[BezuzytecznaMacierz](*ani macierzy odwrotnej*)
```

Out[164]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[165]=

$$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[166]=

$$\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

In[167]:=

```
UzytecznaMacierz = {{1, 2}, {2, 1}}
% // MatrixForm
```

Out[167]=

```
{{1, 2}, {2, 1}}
```

Out[168]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Odwołania do elementów listy (macierzy)

Aby odwołać się do konkretnego elementu listy/macierzy używamy polecenia **Part[A,i,j]**, gdzie **A** – macierz, **i** – numer wiersza, **j** – numer kolumny. Alternatywny sposób to **A[[i,j]]**. Żeby wywołać całą wiersz lub kolumnę, możemy użyć słowa **All**. Przeanalizuj poniższe przykłady.

In[21]:= **A = {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}}**

```
Part[A, 3, 2]
```

```
A[[1, 3]]
```

```
A[[4, All]]
```

```
A[[All, 2]]
```

Out[21]=

```
{{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}}
```

Out[22]=

```
0
```

Out[23]=

```
5
```

Out[24]=

```
{1, 2, 3}
```

Out[25]=

```
{4, 6, 0, 2}
```

```
In[26]:= A = {{1, 4, 5}, {2, 6, 4}, {6, 0, 3}, {1, 2, 3}};
A // MatrixForm
A[[2 ;; 3, 2]]
A[[1 ;; 4 ;; 2, 2 ;; 3]]
```

```
Out[27]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```

```
Out[28]=
{6, 0}
```

```
Out[29]=
{{4, 5}, {0, 3}}
```

Kilka przydatnych funkcji operujących na listach:

**Append , AppendTo**

**Prepend**

**Insert**

**Delete**

**Drop**

**Length**

**MemberQ**

**Reverse**

Zapoznaj się ze składnią i sposobem użycia powyższych funkcji posługując się Helpem (F1).

## Tworzenie list i tabel według wzoru

**Table**

**Range**

pozwalają na automatyczne tworzenie macierzy i list, najczęściej dużych rozmiarów, dla których kolejne elementy spełniają pewien wzór. Używając ich unikamy żmudnego wypełniania macierzy danymi.

```
In[27]:= Range[10]
```

```
Out[27]=
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
In[26]:= Range[3, 100, 5] (* otrzymujemy listę liczb naturalnych od 3 do 100 co 5 *)
```

```
Out[26]=
{3 , 8 , 13 , 18 , 23 , 28 , 33 , 38 , 43 ,
 48 , 53 , 58 , 63 , 68 , 73 , 78 , 83 , 88 , 93 , 98 }
```

```
In[67]:= A = Table[3*i + Sqrt[j^2 + 1], {i, 1, 3}, {j, 1, 4}];
A // MatrixForm
(* utworzyliśmy macierz wymiaru 3x4,
gdzie element o współrzędnych (i,j) ma wartość zgodną ze wzorem 3*i+
Sqrt[j^2+1]. Zakres wierszy i kolumn określiliśmy używając zapisu {i,1,3},
{j,1,4} - patrz. Help *)
```

Out[68]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 + \sqrt{5} & 3 + \sqrt{10} & 3 + \sqrt{17} \\ 6 + \sqrt{2} & 6 + \sqrt{5} & 6 + \sqrt{10} & 6 + \sqrt{17} \\ 9 + \sqrt{2} & 9 + \sqrt{5} & 9 + \sqrt{10} & 9 + \sqrt{17} \end{pmatrix}$$

## Zadania

**Zadanie 1.** Utwórz macierze używając poznanych sposobów:

- a) **Ma1** – macierz jednostkową wymiaru 3x3
- b) **Ma2** – macierz wymiaru 3x2
- c) **Ma3** – dowolną macierz 2x4 zawierającą pierwiastki z kolejnych liczb naturalnych

**Zadanie domowe**

- d) **Ma4** – macierz górnortrójkątna wymiaru 3x3

**Zadanie 2.**

Wykonaj wszystkie możliwe działania dodawania/odejmowania i mnożenia na macierzach **Ma1** i **Ma2**.

Zwróć uwagę na to jakie komunikaty pojawiają się, jeśli wykonanie jakiegoś działania nie jest możliwe. Czy jest to zgodne z Twoją wiedzą matematyczną?

**Zadanie domowe**

Wykonaj wszystkie możliwe działania dodawania/odejmowania i mnożenia par macierzy z zadania 1.

**Zadanie 3.** Oblicz:

- wyznacznik macierzy **Ma1**
- ślad macierzy **Ma1**
- macierze odwrotne do **Ma1** i **Ma2** (o ile to możliwe)
- transpozycję iloczynu **Ma2** i **Ma3** (wynik przypisz do zmiennej **Ma5**)

Z macierzy **Ma5** wybierz kolejno:

- element z drugiego wiersza i trzeciej kolumny
- wiersz trzeci
- kolumnę pierwszą

**Zadanie 4.** Utwórz macierz **Ma6**, w której **j**-ta kolumna jest **(4-j)**-ym wierszem macierzy **Ma1** z zadania 1 powiększonym o  $\text{Sqrt}[j^2+1]$ . Następnie dodaj wiersz samych zer. Następnie dodaj kolumnę samych zer.

### Zadanie domowe

Utwórz macierz **Ma7** o 5 kolumnach wg następującego schematu:

- pierwszy wiersz składa się z kolejnych liczb naturalnych
- drugi wiersz składa się z kolejnych naturalnych potęg dwójki
- trzeci wiersz składa się z kwadratów kolejnych liczb nieparzystych
- czwarty wiersz składa się z silni kolejnych liczb parzystych
- piąty wiersz składa się z jedynek

Zapoznaj się z dokumentacją funkcji **Binomial**. Utwórz trójkąt Pascala o **n** poziomach (**n** - liczba naturalna – przetestuj dla wybranych przez siebie wartości).