

# Zestaw 5

## Część I: Analiza Matematyczna

**Zadanie. 1 Obliczyć granice :**

- a)  $x^2 - x$  przy  $x \rightarrow 1$
- b)  $\sin[x]/x$ ,  $x \rightarrow 0$
- c)  $(1 + x/n)^n$ ,  $n \rightarrow \infty$

**Zadanie domowe**

- d)  $x/(x - 1)$ ,  $x \rightarrow 1^+$  oraz  $x \rightarrow 1^-$
- e)  $\text{ArcTan}[x]$ ,  $x \rightarrow \infty$
- f)  $\sin[x]$ ,  $x \rightarrow \infty$

**Zadanie 2.** Obliczyć pochodne do rzędu 3., w miarę możliwości uprościć otrzymane wyrażenia (skorzystać z funkcji **Simplify**)

- a)  $x\sin[x] + \cos[x]$

**Zadanie domowe**

- b)  $x/(x + 2)$
- c)  $(x^2 - x)/(x + 2)$

**Zadanie 3. (domowe)** Obliczyć pochodne cząstkowe do rzędu 3., gradient i hesjan w miarę możliwości uprościć otrzymane wyrażenia (skorzystać z funkcji **Simplify**)

- a)  $(x^2 - y - x)/(x^2 + y^2)$
- b)  $\sin[x + y]$

**Zadanie 4.** Niech  $f(x) = \frac{(x^2 + 3)}{2x + 1}$

- a) Wyznaczyć (i naszkicować) styczną do wykresu funkcji  $f$  w punkcie (0,3).

**Zadanie domowe**

- b) Wyznaczyć asymptoty funkcji  $f$ . Naszkicować wykres funkcji i jej asymptot.
- c) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji  $f$

```

In[19]:= (*Przykład: Wyznaczanie ekstremów *)
f[x_] := x^4 - x^2

(*zapis f'[x] jest równoważny zapisowi D[f[x],x]*)
(*oblicz pochodną*)
f''[x] /. Solve[f'[x] == 0] (*test drugiej pochodnej pokazuje,
(*rozwiąż r^wnanie*)
że funkcja ma trzy ekstrema*)
{x, f[x]} /. Solve[f'[x] == 0];
(*rozwiąż r^wnanie*)
Grid[Prepend[%, {"x", "f(x)"}], Dividers -> {2 -> True, 2 -> True}]
(*krata   |dołącz do początku   |linie dzielące   |prawda   |prawda*)
(*ekstrema i wartości funkcji w tych punktach*)

```

```

Out[20]=
{-2, 4, 4}

```

```

Out[22]=


| x                     | f(x)           |
|-----------------------|----------------|
| 0                     | 0              |
| $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | $-\frac{1}{4}$ |


```

**Zadanie 5.** Obliczyć całki nieoznaczone z funkcji, sprawdzić poprawność wyniku poprzez  $r^{\wedge}$  żniczkowanie

- $(x^4 - x^2 + 3x + 1)^4$
- Piecewise[{ {x, x < 1}, {x^2 - 1, 1 < x} }, 2]
- Sin[x]/x (\* funkcja specjalna, nie da się jej scałkować symbolicznie \*)

**Zadanie domowe**

- $(r(r - 3)^{(1/2)})^{(1/2)}$
- Log[Log[x]]
- Sin[x]/Log[x] (\*nie da się jej scałkować symbolicznie\*)

**Zadanie 6.** Obliczyć całki z funkcji wielu zmiennych po następujących obszarach

- $x + y$  po zbiorze  $\{0 < x < 3, 1 < y < x - 1\}$
- $x + y$  po tr^jkącie o wierzchołkach A (0, 0), B (-2, 0), C (0, 2)

**Zadanie domowe**

- $x^2 + 3y$  po prostokącie  $[0, 1] \times [c, d]$
- $x^2 + y^2$  po kole  $x^2 + y^2 \leq 1$
- $(x - 1)^2 + y^2$  po kole  $x^2 + y^2 \leq 1$

## Część 2: Równania różniczkowe

**DSolve** - to polecenie służące do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych i układów tych równań

Przykład (rozwiązywanie  $r^{\wedge}$ wnań  $r^{\wedge}$ żniczkowych zwyczajnych):

In[2]:= (\*równanie bez warunku początkowego\*)

**DSolve[f'[x] - 3\*x\*f[x] == 1, f[x], x]**

[rozwiązanie r^n wnań r^n żniczkowych](#)

$$\text{Out[2]} = \left\{ \left\{ f[x] \rightarrow e^{\frac{3x^2}{2}} C_1 + e^{\frac{3x^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \operatorname{Erf}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} x\right] \right\} \right\}$$

In[3]:= (\*równanie z warunkiem początkowym\*)

**DSolve[f'[x] - 3\*x\*f[x] == 1 && f[0] == 2, f[x], x]**

[rozwiązanie r^n wnań r^n żniczkowych](#)

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ f[x] \rightarrow \frac{1}{6} e^{\frac{3x^2}{2}} \left( 12 + \sqrt{6\pi} \operatorname{Erf}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} x\right] \right) \right\} \right\}$$

In[5]:= **mySolution = DSolve[f'[x] - 3\*x\*f[x] == 1 && f[0] == a, f[x], x]**

[rozwiązanie r^n wnań r^n żniczkowych](#)

$$\text{Out[5]} = \left\{ \left\{ f[x] \rightarrow \frac{1}{6} e^{\frac{3x^2}{2}} \left( 6a + \sqrt{6\pi} \operatorname{Erf}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} x\right] \right) \right\} \right\}$$

In[7]:= (\*wizualizacja rozwiązania dla wybranych warunków początkowych\*)

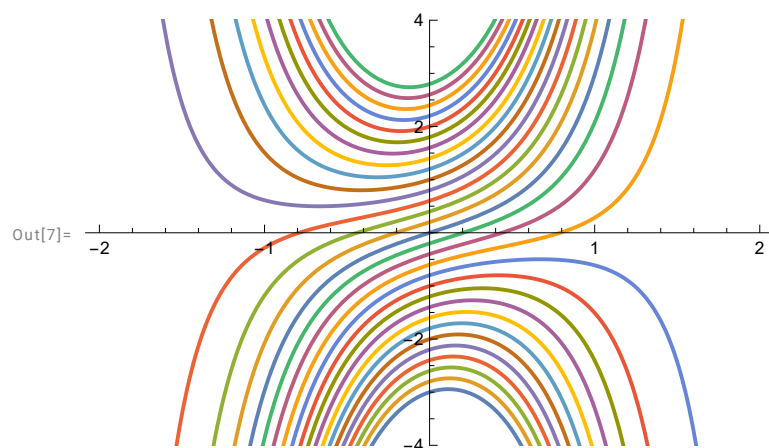
**Plot[Evaluate[f[x] /. mySolution /. {a → -3.2 + 0.2 Range[30]}],**

[wyk...](#) [oblicz](#)

[zakres](#)

**{x, -2, 2}, PlotRange → {-4, 4}]**

[zakres wykresu](#)



In[8]:= (\*z warunkami brzegowymi\*)

mySolution2 =

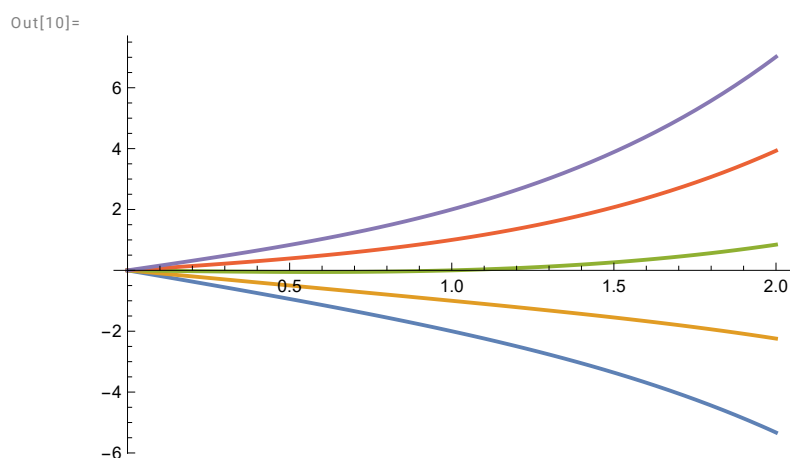
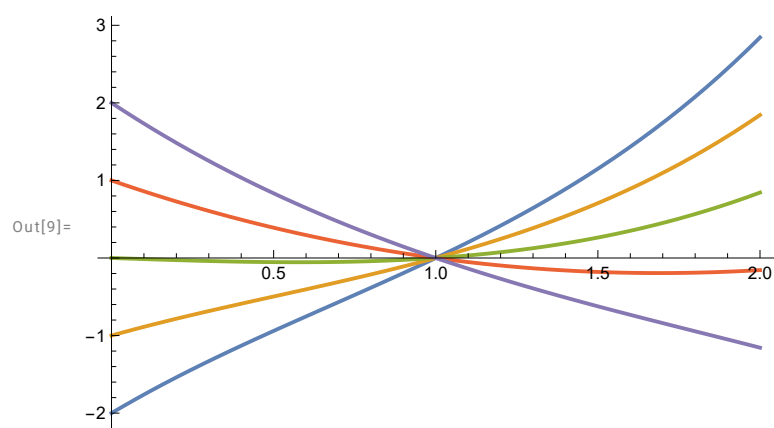
DSolve[x''[t] == x[t] + Sin[t] && x[0] == a && x[1] == b, x[t], t] // FullSimplify  
[rozwiązanie r^nwnań r^nicznych...](#) [sinus](#) [uproszcz pełniej](#)

(\*wizualizacja rozwiązania dla wybranych warunków brzegowych\*)

Plot[Evaluate[x[t] /. mySolution2 /. {a → {-2, -1, 0, 1, 2}, b → 0}], {t, 0, 2}]  
[wyk...](#) [oblicz](#)

Plot[Evaluate[x[t] /. mySolution2 /. {a → 0, b → {-2, -1, 0, 1, 2}}], {t, 0, 2}]  
[wyk...](#) [oblicz](#)

$$\text{Out[8]} = \left\{ \left\{ x[t] \rightarrow a \cosh[t] - \frac{\sin[t]}{2} + \frac{(2 b e - a (1 + e^2) + e \sin[1]) \sinh[t]}{-1 + e^2} \right\} \right\}$$



**Przykład (rozwiązanie r^nwnań r^nicznych cząstkowych) :**

```

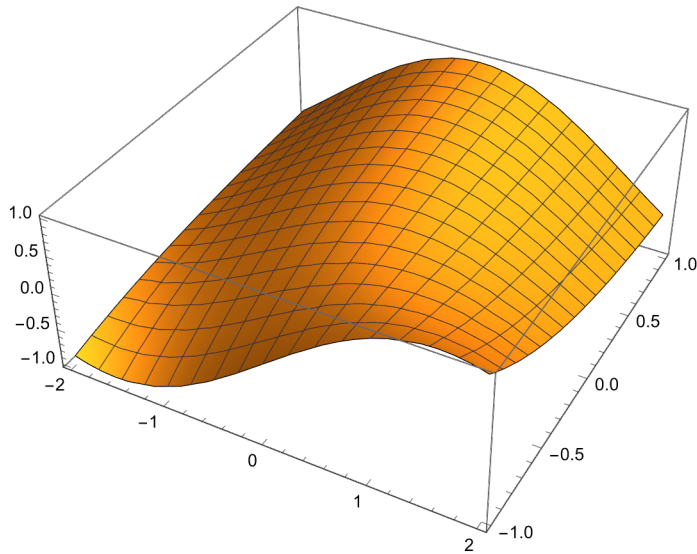
In[13]:= mySolution3 =
  DSolve[D[f[x, t], t, t] + D[f[x, t], t] == 0 && f[x, -1] == Sin[x] && f[x, 1] == Cos[x]
    |rozwią... |oblicz pochodną |oblicz pochodną |sinus |cosinus
    (*warunki początkowe*), f[x, t], {x, t}]
  (*to co widzimy na obrazku zależy od interpretacji równania-- podręczniki*)
  Plot3D[f[x, t] /. mySolution3, {x, -2, 2}, {t, -1, 1}]
  |wykres trójwymiarowy

```

Out[13]=

$$\left\{ \left\{ f[x, t] \rightarrow \frac{e^{-t} (-e \cos[x] + e^{2+t} \cos[x] + e \sin[x] - e^t \sin[x])}{-1 + e^2} \right\} \right\}$$

Out[14]=



**Zadanie 7.** Wyznaczyć całki ogólnie następujących równań. Narysować kilka przykładowych rozwiązań

a)  $y' = y$

b)  $y' + y = 2x$

**Zadanie 8.** Rozwiązać  $x'[t] = x[t]$  z warunkiem początkowym  $x[0] = 1$ . Narysować rozwiązanie