Sprawozdanie z laboratorium nr 3: Rozwiazywanie układów równań liniowych

Zachariasz Jażdżewski 193648,
Iga Kobryń 198872

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zaimplementowanie metody eliminacji Gaussa w wersji naiwnej oraz w wersji ze skalowanym wyborem wierszy głównych, a nastepnie porównanie ich działania na kilku przykładowych układach równań liniowych. Zadanie obejmowało także wyznaczenie rozkładu LU oraz analize przypadków, w których metoda naiwna zawodzi: gdy element główny na przekatnej jest równy zero lub gdy jego wartość jest bardzo mała, co powoduje niestabilność numeryczna.

2. Opis programu

Program został napisany w jezyku Python i wykonuje:

- naiwna eliminacje Gaussa,
- eliminacje Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych,
- wyznaczanie macierzy L, U oraz macierzy permutacji P,
- podstawianie wstecz,
- porównanie wyników obu metod.

3. Opis metod

3.1. Naiwna eliminacja Gaussa

Metoda naiwna polega na wykonywaniu eliminacji bez żadnych zamian wierszy. W każdym kroku elementem głównym na przekatnej jest element a_{kk}, zakładajac, że nie jest równy zero. Procedura składa sie z dwóch etapów:

1. eliminacji kolejnych wierszy,
2. podstawiania wstecz.

Metoda jest szybka, ale niestabilna numerycznie. Działa poprawnie pod warunkiem, że na przekatnej nie pojawiaja sie wartości zerowe lub bardzo małe.

3.2. Eliminacja Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych

W celu poprawy stabilności zastosowano skalowany wybór wiersza głównego. Dla każdego wiersza:

$$s_i = \max_j |a_{ij}|.$$

Nastepnie element główny na przekatnej w kolumnie k wybierany jest według kryterium:

$$\frac{|a_{ik}|}{s_i}.$$

Wiersze nie sa fizycznie zamieniane - stosowana jest permutacja indeksów p. Po zakończeniu obliczeń macierze L, U oraz P można odzyskać wprost z odpowiednich fragmentów zmodyfikowanej macierzy.
Metoda ta jest odporna na błedy zaokragleń i stabilna nawet dla słabo uwarunkowanych układów.

3. Przykłady testowe

Program został przetestowany na pieciu układach równań:

1. układ dobrze uwarunkowany,
2. układ z zerem na przekatnej,
3. układ z bardzo małym elementem głównym na przekatnej (10^{-12}),
4. poprawny układ 3×3,
5. układ słabo uwarunkowany (prawie osobliwy).

W każdym przypadku przedstawiono rozwiazanie skalowanej eliminacji Gaussa, rozkład LU, macierz permutacji P, wektor skal s oraz permutacje indeksów p. Nastepnie sprawdzono działanie metody naiwnej.

4. Wyniki

Przykład 1: Układ dobrze uwarunkowany
Metoda eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych:
Dla danych macierzy A i b:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiazanie x, macierze L i U z rozkładu LU, macierz permutacji P, oraz wektor skal s i powstała w pierwszym kroku permutacje p:

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 1 & 0 \\ 0.333333 & -1.23077 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4.33333 & -6.66667 \\ 0 & 0 & -0.538462 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Próba rozwiazania metoda naiwna:
Rozwiazanie naiwne:

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Obie metody podały identyczne poprawne rozwiazanie.

Metoda naiwna zadziałała poprawnie, ponieważ elementy głównej na przekatnej były duże i nie zachodziła potrzeba zamiany wierszy.

Przykład 2: Zero na przekatnej
Metoda eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych:
Dla danych macierzy A i b:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiazanie x, macierze L i U z rozkładu LU, macierz permutacji P, oraz wektor skal s i powstała w pierwszym kroku permutacje p:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Próba rozwiazania metoda naiwna:
Metoda naiwna zawiodła: Zerowy element a[0,0] $\rightarrow$ metoda naiwna zawodzi.

Przykład 3: Bardzo mały element główny na przekatnej (10^{-12})
Metoda eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych:
Dla danych macierzy A i b:

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiazanie x, macierze L i U z rozkładu LU, macierz permutacji P, oraz wektor skal s i powstała w pierwszym kroku permutacje p:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-12} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Próba rozwiazania metoda naiwna:
Rozwiazanie naiwne:

$$X = \begin{bmatrix} 0.999978 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda skalowana:

- dokonała zamiany wierszy,
- wyznaczyła poprawne rozwiazanie

Metoda naiwna:

- nie zatrzymała sie (element główny na przekatnej nie był równy zero),
- wygenerowała bład: $x_0 \approx 0.000022$.

Przykład 4: Poprawny układ 3×3
Metoda eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych:
Dla danych macierzy A i b:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiazanie x, macierze L i U z rozkładu LU, macierz permutacji P, oraz wektor skal s i powstała w pierwszym kroku permutacje p:

$$X = \begin{bmatrix} 0.360902 \\ 0.37594 \\ 0.308271 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0.384615 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 6.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 5.11538 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Próba rozwiazania metoda naiwna:
Rozwiazanie naiwne:

$$X = \begin{bmatrix} 0.360902 \\ 0.37594 \\ 0.308271 \end{bmatrix}$$

Obie metody wyliczyły identyczne, poprawne rozwiazanie.

Przykład 5: Układ słabo uwarunkowany
Metoda eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych:
Dla danych macierzy A i b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 & 1.0002 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \\ 3.0002 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiazanie x, macierze L i U z rozkładu LU, macierz permutacji P, oraz wektor skal s i powstała w pierwszym kroku permutacje p:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 1.0001 & 1.0002 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Próba rozwiazania metoda naiwna:
Rozwiazanie naiwne:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układ niemal osobliwy. Metoda skalowana:

- poprawnie zidentyfikowała właściwe elementy główne na przekatnej,
- podała rozwiazanie

Metoda naiwna również podała poprawny wynik, jednak ze wzgledu na słabe uwarunkowanie układu mogłaby zawieść przy niewielkiej zmianie danych.

5. Analiza przypadków, w których metoda naiwna zawodzi

5.1. Element główny na przekatnej równy zero

Jeśli w trakcie eliminacji pojawia sie $a_{kk} = 0$, metoda naiwna nie może kontynuować obliczeń. Jedynym rozwiazaniem jest zamiana wierszy, czego metoda ta nie przewiduje. Sytuacje te zaobserwowano w przykładzie nr 2.

5.2. Element główny na przekatnej bardzo mały

Dzielenie przez bardzo małe wartości prowadzi do:

- dużych mnożników eliminacji,
- gwałtownego wzmacniania błedów zaokragleń,
- znaczaco zniekształconych wyników.

Taka sytuacja wystapiła w przykładzie nr 3.

6. Wnioski końcowe

1. Metoda eliminacji Gaussa bez skalowanego wyboru wierszy głównych działa poprawnie tylko, gdy elementy główne na przekatnej nie sa równe zero i nie sa bardzo małe.
2. Przypadki powodujace jej awarie zostały doświadczalnie potwierdzone:
   - zerowy element główny na przekatnej,
   - bardzo mały element główny na przekatnej prowadzacy do niestabilności numerycznej.
3. Eliminacja Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych jest stabilna numerycznie i działa poprawnie nawet dla słabo uwarunkowanych układów.
4. Dla wszystkich testów metoda skalowana dała poprawne i stabilne wyniki.