WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Sprawozdanie z laboratorium nr 4

Laboratorium z Metod Numerycznych

Obliczanie funkcji sklejanych trzeciego stopnia

Skład grupy laboratoryjnej:
- [198872] Iga Kobryń
- [193648] Zachariasz Jażdżewski

Prowadzący:
dr inż. Paweł Wojda

9 listopada 2025 r.

1. Cel laboratorium

Celem zadania laboratoryjnego było stworzenie programu obliczającego funkcje sklejane trzeciego stopnia dla zadanego zestawu $n + 1$ punktów na płaszczyźnie (t_i, y_i). Funkcja sklejana $S(x)$ składa się z wielomianów trzeciego stopnia na każdym podprzedziale $[t_i, t_{i+1}]$, zapewniając ciągłość samej funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w węzłach interpolacji.

W zadaniu przyjęto naturalne warunki brzegowe, co oznacza, że druga pochodna na krańcach przedziału jest równa zeru:

$$z_0 = z_n = 0$$

2. Metodologia

Program został napisany w języku Python z wykorzystaniem biblioteki `numpy` do obliczeń numerycznych oraz `matplotlib` do wizualizacji wyników.

Algorytm składa się z trzech głównych etapów:

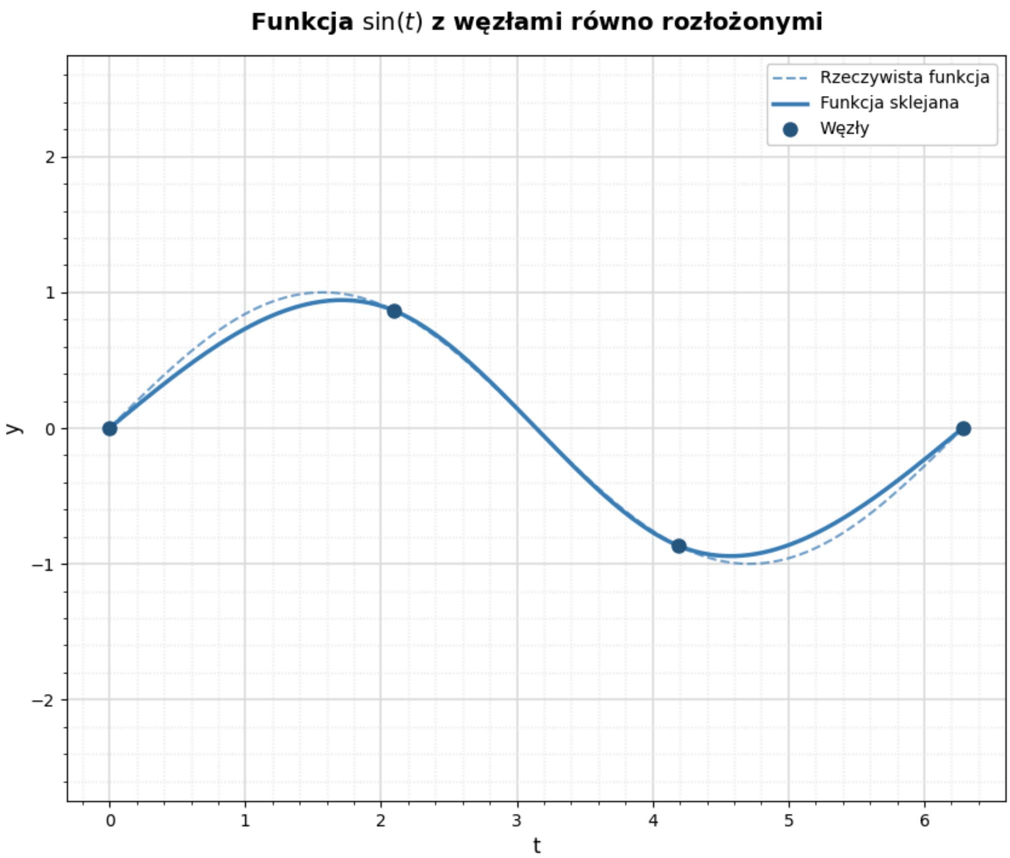
1. Obliczenie kroków i różnic dzielonych: Wyznaczenie odległości między węzłami $h_i = t_{i+1} - t_i$ oraz wartości pomocniczych opartych na wartościach funkcji.
2. Wyznaczenie drugich pochodnych (z_i): Rozwiązanie układu równań liniowych trójprzekątniowego za pomocą wzoru z instrukcji. Zastosowano algorytm Thomasa, obliczając współczynniki pomocnicze u_i i v_i, a następnie wykonując podstawienie wstecz dla wyznaczenia wektora z.
3. Konstrukcja wielomianu: Dla zadanego punktu x program identyfikuje odpowiedni przedział interpolacji i oblicza wartość funkcji sklejaną ze wzoru interpolacyjnego.

3. Wyniki i testy

Program przetestowano na trzech przykładach, sprawdzając działanie zarówno dla węzłów równoodległych, jak i rozmieszczonych nieregularnie.

3.1. Przypadek 1: Węzły równoodległe - funkcja $\sin(t)$

- Funkcja: $f(t) = \sin(t)$
- Przedział: $[0, 2\pi]$
- Liczba węzłów: 4



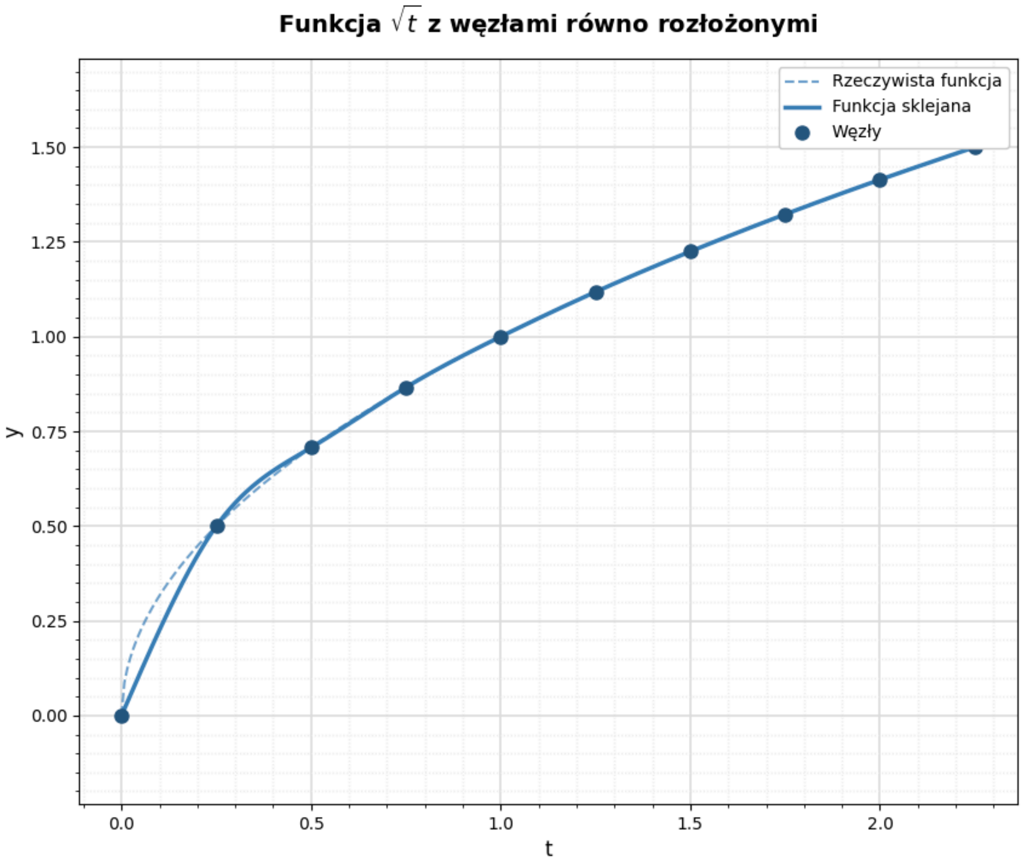
Wykres 1: Funkcja $\sin(t)$ *z węzłami równo rozłożonymi.*

3.1.1. Obserwacje

Mimo niewielkiej liczby węzłów, funkcja sklejana zachowuje gładkość i przybliża kształt sinusoidy, choć widoczne są pewne odchylenia wynikające z rzadkiego próbkowania.

3.2. Przypadek 2: Węzły równoodległe - funkcja $\sqrt{t}$

- Funkcja: $f(t) = \sqrt{t}$
- Przedział: $[0, 2.25]$
- Liczba węzłów: 10



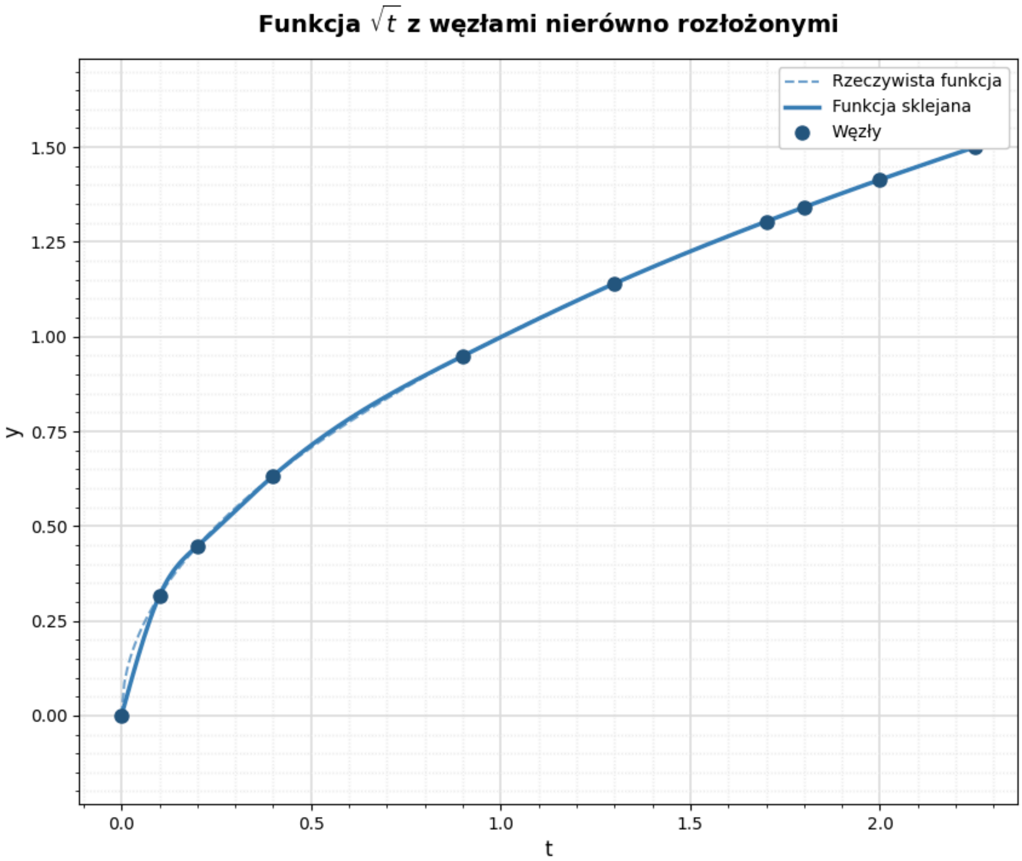
Wykres 2: Funkcja $\sqrt{t}$ z węzłami równo rozłożonymi.

3.2.1. Obserwacje

Dla argumentów $t > 1$ funkcja sklejana niemal idealnie pokrywa się z funkcją rzeczywistą. Jednak w początkowym zakresie ($t < 0.5$) widoczna jest wyraźna różnica między interpolacją a wzorcem co wynika z gwałtowanego przyrostu funkcji pierwiastkowej.

3.3. Przypadek 3: Węzły nierównomiernie rozłożone - funkcja $\sqrt{t}$

- Funkcja: $f(t) = \sqrt{t}$
- Przedział: $[0, 2.25]$
- Liczba węzłów: 10



Wykres 3: Funkcja $\sqrt{t}$ z węzłami nierówno rozłożonymi.

3.3.1. Obserwacje

Program poprawnie uwzględnił zmienne odległości między węzłami. Zagęszczenie węzłów w początkowej fazie (dla małych t) pozwoliło na dokładniejsze odwzorowanie szybkiego przyrostu funkcji pierwiastkowej w porównaniu do przypadku 2.