Skripta za algebro 2

Filip Koprivec

4. november 2015

"If I find in myself desires which nothing in this world can satisfy, the only logical explanation is that I was made for another world."

— C. S. Lewis

Kazalo

1 Osnovne algebrske strukture

1.1 Binarne operacije

Definicija 1: Binarna Operacija *(tudi dvočlena operacija)* $\circ$ *na množici* $\mathcal{S}$ *je preslikava iz* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ *v* $\mathcal{S}$.
Torej $\circ : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \ \rightarrow \ \mathcal{S}$

Primer:
Osnovna zgleda binranih operacij na $\mathbb{Z}$ sta:
1. Seštevanje: $(n, m) \mapsto n + m$
2. Množenje: $(n, m) \mapsto n \times m$

Skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$ **ni** binarna operacija.
Vektorski produkt v $\mathbb{R}^3$ **je** binarna operacija.

Definicija 2: *Operacija* $\circ$ *je* ***asociativna****, če ustreza enačbi*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \tag{1}$$

Enakost 1 imenujemo **Zakon o asociativnosti**
Operacije, ki jih bomo obravnavali bodo praviloma asociativne.

Definicija 3: *Elementa* $x, y \in \mathcal{S}$ ***komutirata****, če velja*

$$x, y \in \mathcal{S}. x \circ y = y \circ x \tag{2}$$

Če za poljubna dva elementa iz $\mathcal{S}$ *velja*

$$\forall x, y \in \mathcal{S}. x \circ y = y \circ x \tag{3}$$

pravimo, da je operacija $\circ$ *komutativna. Enakost 3 imenujemo* ***Zakon o komutativnosti***

Opomba: Kadar je iz konteksta razvidno, o kateri operaciji govorimo, pogosto namesto "$\circ$ je komutativna rečemo tudi $\mathcal{S}$ je komutativna"
Primer:
1. Operacija + na $\mathbb{Z}$ je tako asociatitivna in komutativna
2. Operacija * na $\mathbb{Z}$ je tako asociatitivna in komutativna
3. Operacija - na $\mathbb{Z}$ **ni** niti asociativna niti komutativna
Opomba: Na opracijo odštevanja gledamo kot na izpeljano operacijo in ne kot na samostojna operacijo, saj jo vpeljemo preko seštevanja in pojma nasprotnega elementa.
4. Naj bo $\mathcal{X}$ poljubna neprazna množica. Z $F(\mathcal{X})$ označimo množico vseh preslikav iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{X}$, potem je $(f, g) \mapsto f \circ g$ (kompozitum funkcij) binarna operacija na $F(\mathcal{X})$.
Opomba: Operacija je asociativna, in kadar $|\mathcal{X}| \geq 2$ ni komutativna

Definicija 4: *Naj bo $\circ$ binarna operacija na na $\mathcal{S}$ in $e \in \mathcal{S}$. e se imenuje* ***nevtralni element****, če velja*

$$\forall x \in \mathcal{S}. e \circ x = x \circ e = x \tag{4}$$

Primer:
1. 0 je nevtralni element za seštevanje na $\mathbb{Z}$.
2. 1 je nevtralni element za množenje na $\mathbb{Z}$.
3. id_x (identična preslikava) je nevtralni element za $F(\mathcal{X})$

Opomba: Nevtralni element nima zagotovljenega obstoja (recimo $+$ na $\mathbb{N}$ ali $*$ na sodih celih številih).
Trditev 1: Če nevtralni element obstaja, je en sam.

Dokaz. Naj bosta $f, e \in \mathcal{S}$ nevtralna elementa.

$$e = e \circ f \quad // \text{ Ker je f nevtralni element}$$

$$e \circ f = f \quad // \text{ Ker je e nevtralni element}$$

$$e = f$$

□

Definicija 5: *Element e' je* ***levi nevtralni element****, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}. e' \circ x = x \tag{5}$$

Definicija 6: *Element e'' je* ***desni nevtralni element****, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}. x \circ e'' = x \tag{6}$$

Opomba: Levih in desnih nevtralnih elementov je lahko več
Primer:
1. $\circ : (x, y) \mapsto y$.
Vsak element je levi nevtralni element
2. 0 je desni nevtralni element za odštevanje v $\mathbb{Z}$

Trditev 2: Naj bo za operacijo $\circ$ e' levi nevtralni element, e'' pa desni nevtralni element. Tedaj velja $e' = e'' = e$ (Sta si levi in desni nevtralni element enaka in je(sta) nevtralni element)

Dokaz.

$$e' = e' \circ e'' = e''$$

□

Definicija 7: *Naj bo $\circ$ operacija na $\mathcal{S}$ in naj bo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Rečemo, da je $\circ$* ***notranja operacija na*** $\mathcal{T}$ *ali da je množica* $\mathcal{T}$ ***zaprta za*** $\circ$ ***na*** $\mathcal{T}$ *, če velja*

$$\forall t, t' \in \mathcal{T}. t \circ t' \in \mathcal{T} \tag{7}$$

Primer:
Množica $\mathbb{N}$ je zaprta za operaciji $+$ in $*$, ni pa zaprta za operacijo $-$.

Definicija 8: *Preslikavi iz $\mathcal{K} \times \mathcal{S}$ v $\mathcal{S}$ kjer $\mathcal{K}! = \mathcal{S}$ rečemo* ***Zunanja binarna operacija***

Primer:
1. Množenje vektorja s skalarjem
$(\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x}$, kjer je $(K = \mathbb{R}, S = \mathbb{R}^n)$
$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

1.2 Polgrupe in monoidi

Definicija 9: ***Algebrska struktura*** *je množica, opremljena z eno ali več operacijami (notranjimi ali zunanjimi), ki imajo določene lastnosti*

Definicija 10: ***Polgrupa*** *je par množice $\mathcal{S}$ skupaj z* ***asociativno binarno operacijo****. Pišemo: $(\mathcal{S}, \circ)$*

Opomba: Kadar je jasno o kateri operaciji govorimo, pogosto govorimo kar o polgrupi $\mathcal{S}$
Primer:
1. $(\mathbb{N}, +)$, $\underbrace{(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), \dots}_{Niso\ samo\ polgrupe\ ampak\ kar\ grupe}$

Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ polgrupa, po zakonu 1 o asociativnosti velja:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

zato lahko okepaje spuščamo in vse to pišemo kot $x \circ y \circ z$. Kaj pa če imamo več kot tri elemente. Ali velja tudi:
$(x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4) = ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4 = x_1 \circ (x_2(\circ x_3 \circ x_4)) = \dots$
Trditev 3: Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ polgrupa, $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}$. Tedaj je za vsak n enakost izpolnjena na glede na postavitev oklepajev (izraz ima smisel, tudi kadar ne pišemo oklepajev).
$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (\dots(x_1 \circ x_2) \circ \dots \circ x_n) = x_1 \circ (x_2(\circ \dots \circ x_n) \dots) = \dots$

Dokaz. Zgolj skica dokaza
Definirajmo: $x := x_1 \circ (x_2(\circ \dots \circ x_n) \dots)$ in
$y :=$ naj bo kombinacija elementov $x_1 \dots x_n$, z drugače postavljenimi oklepaji

Indukcija na n:
$n \leq 3$: Očitno
Ker $n \leq 2$ velja $y = \underbrace{(u)}_{x_1,\ldots,x_k} \circ \underbrace{(v)}_{x_{k+1},\ldots,x_n}$ Iz $k < n$ sledi:
$y = (x_1 \circ w) \circ v \underbrace{=}_{Asociativnost(1)} x_1 \circ (w \circ v)$
Po I.P. ($w \circ v$ ima $n-1$ elementov): $x = x_1 \circ (x_2 \circ \cdots \circ x_n)$ □

Zato lahko oklepaje izpuščamo in pišemo kar: $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$

Definicija 11: ***Potenca elementa*** $\boldsymbol{x}$***.*** *Naj bo* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *in* $x \in \mathcal{S}$

$$x^n := \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{nelementov} \tag{8}$$

Opomba: Brez asociativnosti ni definirano niti x^3
Opomba:
Očitno velja:
$\forall n, m \in \mathbb{N}. x^n \circ x^m = x^{n+m}$ in
$\forall n, m \in \mathbb{N}. (x^n)^m = x^{nm}$

Definicija 12: ***Polgrupa*** *z* ***nevtralnim elementom*** *se imenuje* ***monoid****.*

Primer:
1. $(\mathbb{N}, +)$ **ni** monoid, $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ pa je.
2. $(\mathbb{N}, *)$ je monoid
3. $(F(\mathcal{X}), \circ)$ je monoid, nevtralni element je $id_{\mathcal{X}}$

Definicija 13: *Naj bo* $(\mathcal{S}, \circ)$ *monoid z nevtralnim elementom* e*. Element* y *je* ***levi inverz*** *elementa* x*, če velja:* $y \circ x = e$*.*

Definicija 14: *Naj bo* $(\mathcal{S}, \circ)$ *monoid z nevtralnim elementom* e*. Element* y *je* ***desni inverz*** *elementa* x*, če velja:* $x \circ y = e$*.*

Opomba: Levi in desni inverz nimata zagotovljenega obstoja, če pa obstajata ni nujno, da sta enolično določena.
Primer:
1. $f \in F(\mathcal{X})$ ima levi inverz $\iff$ f je injektivna
Če f ni surjektivna ima lahko več levih inverzov, ki so izven $\mathcal{Z}_f$ lahko poljubno definirani.
2. $f \in F(\mathcal{X})$ ima desni inverz $\iff$ f je surjektivna
3. $f \in F(\mathcal{X})$ ima levi in desni inverz $\iff$ f je bijektivna

Definicija 15: *Element* y *iz monida* $\mathcal{S}$ *je inverz elementa* x *Če velja:*

$$x \circ y = y \circ x = e \tag{9}$$

Elementu, ki ima inverz rečemo da je ***obrnljiv*** *in njegov inverz označimo z* x^{-1}*(To ni čisto korektno, saj bomo šele malo naprej pokazali, da ima vsak element en sam inverz). In tako dobimo*

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e \tag{10}$$

Opomba: Če je operacija $\circ$ komutativna potem levi inverz, desni inverz in inverz za posamezen element sovpadajo

Trditev 4: Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ monoid, Če je y levi inverz elementa x in je z njegov desni inverz, potem $z = y = x^{-1}$

Dokaz. $y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z$ □

<u>**Posledica:**</u> Obrnljiv element monoida ima natanko en inverz.
<u>**Posledica:**</u> Če je x obrnljiv element monoida $\mathcal{S}$ potem iz $y \circ x = e$ sledi $x \circ y = e$.
Trditev 5: Če sta x in y obrnljiva, potem je obrnljiv tudi element $(x \circ y)$ in je njegov inverz $y^{-1} \circ x^{1}$

Dokaz. To je desni inverz:
$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e$
in tudi levi inverz:
$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e$ □

Opomba: Seveda velja za n elementov

$$(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n)^{-1} = x_n^{-1} \circ \cdots \circ x_2^{-1} \circ x_1^{-1} \tag{11}$$

Primer:
1. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$: edini obrnljiv element je 0.
2. $(\mathbb{N}, *)$: edini obrnljiv element je 1
3. $(\mathbb{Z}, *)$: edina obrnljiva elementa sta 1 in -1
4. $(\mathbb{Q}, *)$: Obrnljivi so vsi element razen 0
5. $(F(\mathcal{X}), \circ)$: obrnljive so vse bijektivne preslikave

Opomba: Poseben primer zadnje formule kadar je x obrnljiv je tudi:$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ za $n \in \mathbb{N}$

Definicija 16:

$$n \in \mathbb{N}.x^{-n} := (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n \tag{12}$$

Definicija 17:

$$x^0 := e \tag{13}$$

Tako kadar je x **obrnljiv** veljata enačbi

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}. x^n \circ x^m = x^{n+m} \tag{14}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}. (x^n)^m = x^{nm} \tag{15}$$

Trditev 6: Če je x obrnljiv element monida $\mathcal{S}$ potem velja **pravilo krajšanja**:

$$x \circ y = x \circ z \implies y = z \tag{16}$$

In tudi

$$y \circ x = z \circ x \implies y = z \tag{17}$$

Dokaz.

$$x \circ y = x \circ z \implies x^{-1} \circ x \circ y = x^{-1} \circ x \circ z \implies y = z$$

Druga enačba podobno □

Opomba: Iz enačbe $x \circ y = z \circ x$ v splošnem **ne** sledi $y = z$

1.3 Grupe

Dogovor: V grupi bomo namesto $\circ$ uporabljali kar operacijo 'krat', torej se bo operacija imanovala kar množenje. Prav tako bomo izpuščali operator, ko bo le mogoče in pisali kar xy.
Tako xy imenujemo 'produkt' x in y, nevtralni element pa označimo z 1 in mu rečemo kar enota.

Definicija 18: ***Monoid*** *v katerem je* ***vsak element obrnljiv****, se imenuje* ***grupa****. Grupa, v kateri vsaka dva elementa komutirata, se imenuje* ***komutativna grupa*** *ali* ***Abelova grupa****.*

Ki je ekvivalenta bolj čisti definiciji:

Definicija 19: *Množica $\mathbb{G}$ skupaj z binarno operacijo $* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $(x, y) \mapsto xy$ je* ***grupa*** *če zanjo velja:*

G_1:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{G}.\ (xy)z = x(yz)$$

G_2:
$$\exists 1 \in \mathbb{G}.\ \forall x \in \mathbb{G}.\ 1x = x1 = x$$

G_3:
$$\forall x \in \mathbb{G}.\ \exists x^{-1} \in \mathbb{G}.\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

Če velja tudi:
$$\forall x, y \in \mathbb{G}.\ xy = yx$$

Potem grupo $\mathbb{G}$ imanujemo ***Abelova*** *grupa.*

Grupe delim na komutativne in nekomutativne(glede na lastnosti operacije) ter na končne in neskončne(glede na število elementov).
Primer:
1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$,$(\mathbb{R}, +)$,$(\mathbb{C}, +)$
2. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **ni** grupa
3. $(\mathbb{R}, *)$: **ni** grupa, ker 0 ni obrnljiv

Opomba: Vsak monoid 'skriva' grupo.

Definicija 20: *S $\mathcal{S}^*$ označujemo množico vseh obrnljivih elementov monoida $\mathcal{S}$.*

Trditev 7: Če je $\mathcal{S}$ monoid je $\mathcal{S}^*$ grupa.

Dokaz. $x, y \in \mathcal{S}^* \implies x \circ y \in \mathcal{S}^*$ // Obrnljiv je tudi njun produkt, torej je množica je zaprta za $*$
Ker je $*$ asociativen na $\mathcal{S}$ je asociativen tudi na $\mathcal{S}^*$
$e \in \mathcal{S}^*$ saj je enota inverz sami sebi
$x \in \mathcal{S}^* \implies x^{-1} \in \mathcal{S}^*$ // Inverz inverza je kar element sam □

Primer:
1. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$: $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)^* = 0$
2. $(\mathbb{Z}, +)$: $(\mathbb{Z}, +)^* = -1, 1$
3. $(\mathbb{Q}, *)$: $(\mathbb{Q}, *)^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
Opomba: Grupam z enim elementom pravimo **trivialne** grupe.
4. $(F(\mathcal{X}), \circ)$: $(F(\mathcal{X}), \circ)^* = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{X} | f \text{ je bijekcija}\}$

Definicija 21: *Množico $Sim(\mathcal{X})$ imenujemo **simetrična grupa** (množice $\mathcal{X}$).*

$$Sim(\mathcal{X}) := \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{X} | f \text{ je bijekcija}\} \tag{18}$$

*Njene emelente(bijektiven preslikave iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$ pa imenujemo **permutacaije** (množice $\mathcal{X}$).*

Opomba: Če je množica končna jo praviloma označimo z $\{1, 2, \ldots, n\}$, njej pripadajočo grupo permutacij pa z

$$\mathcal{S}_n := Sim(\{1, 2, \ldots, n\}) \tag{19}$$

Včasih bomo operacije na grupah vendarle označevali s + ('seštevanje'). Taki grupi bomo rekli **aditivna grupa**. Nevtralni element bomo označevali z 0, inverzni elment pa bomo imenovali 'nasprotni element' in ga označevali z $-x$. Namesto $x + (-y)$ bom tako pisali $x - y$ (razlika x in y). S tem smo v aditivno grupo vpeljeli odštevanje. Prav tako bom namesto x^n pisali nx.
Primer takih grup so Abelove grupe. $(x + y = y + x)$

(c)

1.4 Kolobarji

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so aditivne grupe, v katerih je naravno definirano tudi množenje, za katerega so monoidi.

Definicija 22: *Množica $\mathcal{K}$ skupaj z binarnima operacijama seštevanja $+ : (x, y) \mapsto x + y$ in množenja $* : (x, y) \mapsto xy$ se imenuje* ***kolobar*** *če velja*

K_1: $(K, +)$ *je* ***Abelova grupa***

K_2: $(K, *)$ *je* ***monoid***

K_3: *Izpolnjena sta oba distributivnostna zakona*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ z(x + y) = zx + zy \tag{20}$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ (x + y)z = xz + yz \tag{21}$$

Opomba: *Oba zakona potrebujemo zaradi ne nujne komutativnosti množenja v monoidu*

Opomba: Poznamo tudi kolobarje brez enote (kjer je $(\mathcal{K}, *)$ zgolj monoid). Recimo

$$2\mathbb{Z} := \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$$

Trditev 8: V poljubnem kolobarju veljajo naslednje lastnosti:

(a)

$$\forall x \in \mathcal{K}.\ 0x = x0 = 0$$

Dokaz.

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 0x$$

Podobno za $x0 = 0$ □

(b)

$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ (-x)y = x(-y) = -(xy)$$

Dokaz.

$$0 = 0y = (x + (-y))y = xy + (-x)y$$

$$\Downarrow$$

$$-(xy) = (-x)y$$

□

(c)

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ x(y - z) = xy - xz \ \wedge\ (y - z)x = yx - zx$$

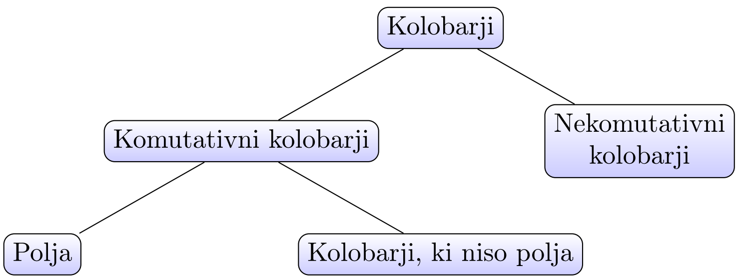
Dokaz.
$$x(y-z) = x(y+(-z)) = xy + x(-z)$$
Podobno za drugo stran □

(d)
$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ (-x)(-y) = xy$$

Dokaz.
$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$$
□

(e)
$$\forall x \in \mathcal{K}.\ (-1)x = x(-1) = -x$$
Sledi iz (b) če vzamemo $y = -1$

Kolobar K je **komutativen**, če za množenje velja zakon komutativnosti (3).



Primer:
1. $\mathbb{Z}$ (tipičen primer kolobarja)
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (to niso tipični primeri kolobarjev, saj so kar polja)
3. **Trivialni** ali **ničelni kolobar**:
$$\{0\}$$

Trditev 9:
$$\text{Kolobar } \mathcal{K} \text{ je ničelen} \iff 1 = 0$$

Dokaz.
$\Longrightarrow$: Očitno
$\Longleftarrow$: $\forall x \in \mathcal{K}.\ x = 1x = 0x = 0$ □

4. Matrični kolobarji ($M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$) z običajnim seštevanjem in množenjem,
$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n};\ 1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n}$$

Ta kolobar je nekomutativen za $n \geq 2$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies AB = B,\ BA = 0$
A in B ne komutirata, prav tako pa smo videlo da je lahko produkt dveh neničelnih elementov 0.

Definicija 23: *Element $x \neq 0$ kolobarja $\mathcal{K}$, je* ***levi deljitelj niča****, če obstaja tak $y \neq 0, \in \mathcal{K}$, da velja: $xy = 0$.*

Definicija 24: *Element $x \neq 0$ kolobarja $\mathcal{K}$, je* ***desni deljitelj niča****, če obstaja tak $y \neq 0, \in \mathcal{K}$, da velja: $yx = 0$.*

Definicija 25:*Element x je* ***delitelj niča****, če je* ***hkrati levi in desni delitelj niča****.*

Opomba:

$$\mathcal{K} \text{ ima leve deljitelje niča} \iff \mathcal{K} \text{ ima deljitelje niča} \tag{22}$$

Dokaz.
$\implies$: Obstajata taka $y \neq 0, x \neq 0$, da je $xy = 0$. Imamo dve možnosti

1. $yx = 0 \implies$ Dokaz je končan.
2. $yx \neq 0$: $x(yx) = 0 = (yx)y$ in je yx desni deljitelj niča .

$\impliedby$: Očitno. □

V **Kolobarju brez deliteljev niča** velja:

$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ xy = 0 \implies x = 0 \lor y = 0 \tag{23}$$

V takih kolobarjih velja pravilo krajšanja:

$$xy = xz \land x \neq 0 \implies y = z$$

$$yx = zx \land x \neq 0 \implies y = z$$

$$xy = xz \iff x(y - z) = 0$$

$$yx = zx \iff (y - z)x = 0$$

Kolobar je monoid za množenje zato lahko goviromo o obrnljivih elementih.
Primer:
1. V $\mathbb{Z}$ sta obrnljiva $1, -1$.
2. V $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so obrnljivi vsi elementi razen 0

Definicija 26: *Kolobar, v katerem $1 \neq 0$ in v katerem so* ***vsi neničelni elementi obrnljivi*** *se imenuje* ***obseg****.*

Definicija 27: *Komutativni obseg se imenuje* ***polje***

Primer:
1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so polja
2. Nekomutativne obsege bomo dodali kasneje

Trditev 10: Obrnljiv element kolobarja ni levi(ali desni) delitelj niča.
Obsegi so zato kolobarji brez deliteljev niča.

Dokaz. x je obrnljiv: $xy = 0$
$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$ Torej x ni deljitelj niča. □

1.5 Vektorski prostori

Definicija 28: *Naj bo $\mathcal{F}$ polje. Množica $\mathcal{V}$ skupaj z (notranjo) binarno operacijo seštevanje $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ in zunanjo binarno operacijo $\mathcal{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ imenovano* ***množenje s skalarji*** *in označeno z $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, se imenuje* ***vektorski prostor nad poljem*** *$\mathcal{F}$, če zanj velja:*

V_1: *Za seštevanje je $\mathcal{V}$ Abelova grupa*

V_2: *Velja distributivnost v vektorskem faktorju*

$$\forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \forall u, v \in \mathcal{V}.\ \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \tag{24}$$

V_3: *Velja distributivnost v skalarnem faktorju*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \forall v \in \mathcal{V}.\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \tag{25}$$

V_4: *Velja zakon homogenosti*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \forall v \in \mathcal{V}.\ (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \tag{26}$$

V_5: *Enota*

$$\forall v \in \mathcal{V}.\ 1v = v \tag{27}$$

Za vsak vektorski prostor očitno veljajo naslednje trditve

- $$\forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \lambda 0 = 0$$
- $$\forall u, v \in \mathcal{V}.\ 0x = 0$$
- $$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \lambda\mu = 0 \implies \lambda = 0 \vee \mu = 0$$
- $$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ (-\lambda)\mu = \lambda(-\mu) = -(\lambda\mu)$$

Opomba: Elementom polja $\mathcal{F}$ pravimo **skalarji**, elementom $\mathcal{V}$ pa vektorji

- $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Realni vektorski prostor
- $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Kompleksni vektorski prostor

Primer:
1. Splošni prostor $\mathcal{F}^n$, kjer vpeljemo operacji:
Sešetavnje

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \tag{28}$$

Množenje s skalarjem

$$\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \tag{29}$$

2. Trivialni vektorski prostor: $\{0\}$
3. Vektorski prostor polniomov stopnje največ n, kjer seštevanje in množenje definiramo na običajen način
4. $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (za $+$ je Abelova grupa, množenje pa definiramo po komponentah, tako je nad $\mathbb{R}$ to 2-dimenzionalen, nad $\mathbb{C}$ pa 1-dimenzionalen)

1.6 Algebre

Mnogi pomembni primeri kolobarjev so hkrati tudi vektorski prostori, dejansko so algebre.

Definicija 29: *Naj bo $\mathcal{F}$ polje (komutativen obseg). Množica $\mathcal{A}$ skupaj z (notranjima) binarnima operacijama $+$ (seštevanje) in $*$ (množenje) ter zunanjo binarno operacijo $\mathcal{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (množenje s skalarji) je* ***Algebra na poljem $\mathcal{F}$ ali $\mathcal{F}$-algebra****, če velja:*

V_1: *Za seštevanje in množenje s skalarji je $\mathcal{A}$ vektorski prostor*

V_2: *Za množenje je $\mathcal{A}$ monid*

V_3: *Veljata neke vrste levi in desni distributivnostni zakon*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ (\lambda x + \mu y)z = \lambda(xz) + \mu(yz)$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ z(\lambda x + \mu y) = \lambda(zx) + \mu(zy)$$

Opomba: *Za $\lambda = \mu = 1$ je to navadna distributivnost. Torej je algebra kolobar, ki je hkrati vekroski prostor, v katerem velja še:*

$$\lambda(xz) = (\lambda x)z = x(\lambda z)$$

Primer:
1. Vektorski prostor $\mathcal{F}^n$ postane algebra, če definiramo množenje, najlažje kar po komponentah:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto (x_1y_1, , x_2y_2, \ldots, x_ny_n) \tag{30}$$

2. Kolobar $M_n(\mathbb{R})$ postane algebra, če definiramo množenje s skalarji

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \tag{31}$$

3. Vektorski prostor polinomov postane algebra, če vpeljemo množenje polinomov na standardni način

Opomba: 'Teorija kolobarjev' in 'teorija kolobarjev in algeber' se razlikujeta zgolj v povdarku.

1.7 Podgrupe, podkolobarji in druge podstrukture

$(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{C}, +)$ sta različni strukturi, a očitno povezani Abelovi grupi. Operacija je seštevanje in $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Rečemo: $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa $(\mathbb{C}, +)$.
Podobno rečemo $(\mathbb{R}, +, *)$ je podkolobar $(\mathbb{C}, +, *)$
In ker sta to tudi polji rečemo kar kar $(\mathbb{R}, +, *)$ je podpolje $(\mathbb{C}, +, *)$

1.7.1 Podgrupe

Definicija 30: ***Neprazna*** *podmnožica $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$ je* ***podgrupa*** *grupe $\mathcal{G}$, če je za isto operacijo (zožitev na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) tudi sama grupa.*

Primer:
1. Vsaka grupa $\mathcal{G}$ ima vsaj dve podgrupi: $\mathcal{G}$ in $\{1\}$
Opomba: $\{1\}$ se imenuje **trivialna podgrupa**
Opomba: Vsaka od $\mathcal{G}$ različna podgrupa se imenuja **prava podgrupa**

Trditev 11: Za naprazno podmnožico $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$ so naslednje trditve ekvivalentene:

(i)
$$\mathcal{H} \text{ je podgrupa } \mathcal{G}$$

(ii)
$$\forall x, y \in \mathcal{H}.\ xy^{-1} \in \mathcal{H}$$

(iii)
$$\forall x, y \in \mathcal{H}.\ xy \in \mathcal{H} \land x^{-1} \in \mathcal{H}$$

Dokaz.
(i) $\implies$ (ii) : Očitno iz definicije da je $\mathcal{H}$ grupa
(ii) $\implies$ (iii) :

$$x \in \mathcal{H} \Longrightarrow 1 = xx^{-1} \in \mathcal{H} \Longrightarrow x^{-1} = 1x^{-1} \in \mathcal{H} \text{ // Zaprta za inverz}$$
$$x, y \in \mathcal{H} \Longrightarrow xy = x(y^{-1})^{-1} \in \mathcal{H} \text{ Zaprta za poljubna dva}$$

(iii) $\implies$ (i):
Očitno zaprata za množenje, asociativna, ker velja na večji množici ($\mathcal{G}$)

$$1 = xx^{-1} \in \mathcal{H}$$

$$x \in \mathcal{H} \implies x^{-1} \in \mathcal{H}$$

□

Govorimo 'grupa $\mathcal{H}$' ali 'podgrupa $\mathcal{H}$' označimo:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$$

Primer:
1. $\mathbb{R} - \{0\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
2. $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
3. $\{1, -1, i, -i\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
4. $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
5. $\{x \in \mathbb{R} |\ |x| > 1\}$ **ni** podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
6. $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} |\ |z| \leq 1\}$ **ni** podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$

Opomba:
V aditivni grupi velja
(ii) : $\forall x, y \in \mathcal{H}.\ x - y \in \mathcal{H}$ in
(iii): $\forall x, y \in \mathcal{H}.\ x + y \in \mathcal{H} \wedge -x \in \mathcal{H}$

Primer:
Pogdgrupe $(\mathbb{Z}, +)$
1. Trivialna primera podgrup sta $\mathbb{Z}$ in $\{0\}$
2. $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$
3. $k\mathbb{Z} = \{kn | n \in \mathbb{Z}\}$ // $k \in \mathbb{Z}$

Definicija 31: *Elementa a, b iz grupe $\mathcal{G}$ sta si **konjugirana**, če velja:*

$$\exists c \in \mathcal{G}.\ b = cac^{-1} \tag{32}$$

Opomba: *Relacija 'elementa sta si konjugirana' je ekvivalenčna.*

Trditev 12: Če je $c \in \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$, je

$$c\mathcal{H}c^{-1} := \{chc^{-1} |\ h \in \mathcal{H}\} \tag{33}$$

konjugirana podgrupa podgrupe $\mathcal{H}$.

Dokaz.

$$chc^{-1}ch'c^{-1} = c\underbrace{hh'}_{\in\mathcal{H}}c^{-1} \in \mathcal{H}$$

$$(chc^{-1})^{-1} = (c^{-1})^{-1}h^{-1}c^{-1} = c\underbrace{h^{-1}}_{\in\mathcal{H}}c^{-1} \in \mathcal{H}$$

$\square$

Opomba: Pojem konjugiranih podgrup ima smisel v nekomutativnih grupah

1.7.2 Podkolobarji

Definicija 32: *Podmonžica $\mathcal{L}$ kolobarja $\mathcal{K}$ je **podkolobar** kolobarja $\mathcal{K}$, če vsebuje enoto {1} kolobarja $\mathcal{K}$ in če je kolobar za isti operaciji.*

Primer:
1. $\mathcal{L} = \{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$
Sicer je kolobar za isti operaciji, a ne podeduje enote (ima svojo), torej **ni** podkolobar.

Trditev 13: Podmnožica $\mathcal{L}$ kolobarja $\mathcal{K}$ je podkolobar natanko tedaj, ko velja

$$1 \in \mathcal{L} \wedge \forall x, y \in \mathcal{L}.\ x - y \in \mathcal{L} \tag{34}$$

Dokaz.
$\Longrightarrow$: Sledi iz definicije
$\Longleftarrow$ Iz predpostavke sledi, da je $\mathcal{L}$ podgrupa za $+$.
Prav tako je $(\mathcal{L}, *)$ monoid
Izpolnjevanje distributivnih zakonov pa sledi iz tega da so izpolnjeni tudi na $\mathcal{K}$
Opomba: Uporabili smo tridtev (11) in (ii) pogoj zamenjali z (iii) $\square$

Primer:
1. Kolobar $\mathbb{Z}$ je podkolobar $\mathbb{Q}$.
2. Kolobar $\mathbb{Q}$ je podkolobar $\mathbb{R}$.

1.7.3 Podprostori

Definicija 33: *Podmnožica $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je **podprostor** $\mathcal{V}$, če je za isti operaciji tudi sama vektorski prostor.*

Trditev 14: Za neprazno podmnožico $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ so naslednje trditve ekvivalentne

(i)
$$\mathcal{U} \text{ je podprostor } \mathcal{V}$$

(ii)
$$\forall x, y \in \mathcal{U}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \lambda x + \mu y \in \mathcal{U}$$

(iii)
$$\forall x, y, \in \mathcal{U}.\ x + y \in \mathcal{U} \wedge \forall x \in \mathcal{U}.\ \forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \lambda x \in \mathcal{U}$$

Dokaz. Očitno □

Primer:
Edini podprostori vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$ so:

- $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$
- premice skozi izhodišče
- ravnine skozi izhodišče

1.7.4 Podalgebre

Definicija 34: *Podmnožica $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ je* ***podalgebra*** *$\mathcal{A}$, če je za iste operacije tudi sama algebra in vsebuje enoto {1} iz algebre $\mathcal{A}$.*

Trditev 15: Neprazna podmnožica $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ je **podalgebra** algebre $\mathcal{A}$ natanko tedaj ko zanjo velja:

$$1 \in \mathcal{B} \wedge \forall x, y \in \mathcal{B}.\ \forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \underbrace{x + y, \lambda x}_{podprostor}, xy \in \mathcal{B} \tag{35}$$

Torej je zaprta za seštevanje, množenje in množenje s skalarji

Dokaz. Enako kot za podkolobarje □

Primer:
1. $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

1.7.5 Podpolje

Definicija 35: *Podmoćica $\mathcal{F}$ polja $\mathcal{E}$ je* ***podpolje*** *polja $\mathcal{E}$, če je za isti operaciji tudi sama polje*

Opomba: Podpolje nujno vsebuje isto enoto 1 kot polje $\mathcal{E}$, naj bo $e \in \mathcal{F}$ enota. $e^2 = e \implies e(\underbrace{1}_{enota\ \mathcal{E}} - e) = 0$ Ker v poljih ni deliteljev niča, velja $e = 1$.

Trditev 16: Podmnožica $\mathcal{F} \neq \{0\}$ polja $\mathcal{E}$ je podpolje natanko tedaj ko velja

$$\forall x, y \in \mathcal{F}.\ xy, x - y \in \mathcal{F} \wedge 0 \neq x \in \mathcal{F}.\ x^{-1} \in \mathcal{F} \tag{36}$$

Dokaz. Podobno kot prej

$\square$

Trditev 17:$\mathcal{F} = \{0\} \iff 1 = 0$

Dokaz.
$\Longrightarrow$
$\forall x \in \mathcal{F}.\ 0x = x$ torej je 0 nevtralni element
$\Longleftarrow$
$\forall x \in \mathcal{F}.\ x = 1x = 0x = 0$ vsi elementi so ničelni $\square$

Definicija 36: *Polje $\mathcal{E}$ je* ***razširitev*** *polja $\mathcal{F}$ če je $\mathcal{F}$ podpolje $\mathcal{E}$.*

Primer:
1. $\mathbb{R}$ je podpolje $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{C}$ je razširitev $\mathbb{R}$, ki je razširitev $\mathbb{Q}$

1.7.6 Logične operacije nad (pod)strukturami

Če so $\mathcal{H}_i$ podgrupe grupe $\mathcal{G}$ je tudi njihov presek $\cap\mathcal{H}_i$ podgrupa.
Opomba: Družina $\mathcal{H}_i$ je **lahko končna ali neskončna** torej poljubna

Presek algebrskih struktur (podgrup, podkolobarjev, podprostorov, podalgeber, podpolji) **ohrani lastnosti** te algebrseke strukture.

Unija algebrskih struktur praviloma **ne ohrani** lastnosti te lagebrske strukture.
Primer:
1. $2\mathbb{Z} = \{2n|n \in \mathbb{Z}\}$ in $3\mathbb{Z} = \{3n|n \in \mathbb{Z}\}$ sta podgrupi $\mathbb{Z}$, njuna unija pa ni podgrupa (saj ni grupa), ker $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

1.8 Generatorji

$\mathbb{R}^3$ je generiran z vektorji: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Edini podprostor, ki te vektorje vsebuje je namreč $\mathbb{R}^3$ sam. Seveda je generiran tudi z drugimi vektorji: $(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
Vekotrja $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ pa generirata ravnino: $z = 0$.

1.8.1 Generatorji grup

Naj bo $\mathcal{X}$ neprazna podmnožica grupe $\mathcal{G}$, Vzemimo množico vseh elementov oblike $x_1x_2 \ldots x_n$, kjer velja $x, x^{-1} \in \mathcal{X}$ in jo označimo z $< \mathcal{X} >$.
Če je $\mathcal{X} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ pišemo tudi $\mathcal{X} =< y_1, y_2, \ldots, y_n >$.
Tako $< x, y >$ sestoji iz elementov kot so: $1, x, y, x^2, x^3, x^{-1}, x^{-2}, x^{-1}y, y^{-1}, x^5y^{-1}x^3y^{-3}xy^2, \ldots$
Opazimo, da je $< \mathcal{X} >$ podgrupa

$$u, v \in< x > \Longrightarrow uv \in< \mathcal{X} > \wedge u^{-1} \in< x >$$

$(x_1, \ldots, x_n)^{-1} = x_1^{-1} \ldots x_n^{-1}$, ki vsebuje množico $\mathcal{X}$.

Velja pa tudi obratno: vsaka podgrupa grupe $\mathcal{G}$, ki vsebuje $\mathcal{X}$ vsebuje tudi to podgrupo($< \mathcal{X} >$).
Torej je $< \mathcal{X} >$ najmanjša podgrupa, ki vsebuje $\mathcal{X}$. Pravimo ji **podgrupa, generirana z $\mathcal{X}$**.
Če velja $< \mathcal{X} >= \mathcal{G}$, rečemo, da je $\mathcal{G}$ generirana z množico $\mathcal{X}$, elemente iz $\mathcal{X}$ pa imenujemo **generatorji** grupe $\mathcal{G}$, množici $\mathcal{X}$ pa **množica generatorjev**.

Primer:
1. $\mathbb{Q}^+$ je grupa za množenje. Velja: $< \mathbb{N} >= \mathbb{Q}^+$
2. $< 2, 3 >= \{2^i 3^j | i, j \in \mathbb{Z}\}$

Opomba: V aditivni grupi $< \mathcal{X} >$ za komponiranje elementov uporabljamo drugo operacijo, vse ostalo ostane isto.

Primer:
1. Grupa $(\mathbb{Z}, +)$ je generirana z $< 1 >$ in prav tako zudi z $< -1 >$. Velja $\mathbb{Z} =< 1 >=< -1 >$.

Opomba: Grupe generirane z enim samim elementom imenujemo **ciklične**.($< 2 >=< 4, 6 >= 2\mathbb{Z}$)
Cilj je poiskati najmanjše množice generatorjev(očitno $< \mathcal{G} >= \mathcal{G}$).

Definicija 37: *Grupa je **končno generirana** če je generirana s kako končno množico.*

1.8.2 Generatorji kolobarja

Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar, $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$.
Označimo z $\overline{\mathcal{X}}$ podgrupo za seštevanje $\mathcal{K}$, ki vsebuje vse produkte elementov iz $\mathcal{X} \cup \{1\}$.
Opazimo: $\overline{\mathcal{X}}$ je podkolobar, ki vsebuje $\mathcal{X}$ in je vsebovan v vsakem podkolobarju, ki $\mathcal{X}$ vsebuje. Zato mu rečemo **podkolobar generiran z množico $\mathcal{X}$**.
Primer:
1. $\mathcal{K} = \mathbb{C}$

- $\overline{\{1\}} = \mathbb{Z}$
- $\overline{\{i\}} = \{n + mi | n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[i]$ (Kolobar **Gaussovih celih števil**)

Opomba: Pojme, kot so **generator kolobarja, končno generiran kolobar,...** definiramo enako kot za grupo.

1.8.3 Generatorji vektorskih prostorov

Definicija 38: *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor nad $\mathcal{F}$. Vsakemu vektorju v oblike*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathcal{F} \wedge v_i \in \mathcal{V} \tag{37}$$

pravimo ***linearna kombinacija*** *vektorjev* $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Definicija 39:*Naj bo* $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. *Podprostor generiran z* $\mathcal{X}$, *torej podprostor, ki* $\mathcal{X}$ *vsebuje in je vsebovan v vsakem podprostoru, ki vsebuje* $\mathcal{X}$, *je množica* $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, *vseh linearnih kombinacij vektorjev iz* $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ *imenujemo* ***linearna lupina množice*** $\mathcal{X}$.

Definicija 40:*Naj bo* $\mathcal{X}$ *množica generatorjev za* $\mathcal{V}$, *tedaj* $\mathcal{X}$ *imenujemo* ***ogrodje*** $\mathcal{V}$. *Velja še* $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \mathcal{V}$.

Opomba: Posebnost vektorskega prostora je v tem, da imamo pojem **linearne neodvisnosti**, preko katerega vpeljemo pojem **baze** vektorskega prostora.

1.8.4 Generatorji algeber

Definicija 41: *Naj bo* $\mathcal{A}$ *algebra na* $\mathcal{F}$, *naj bo* $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. ***Podalgebra generirana z*** $\mathcal{X}$ *je množica, ki sestoji iz elementov* x *oblike*

$$x = \lambda_1 x_{11} x_{12} \dots x_{1n_1} + \dots + \lambda_r x_{r1} x_{rn_r}; \lambda_i \in \mathcal{F} \wedge x_i \in \mathcal{X} \cup \{1\} \qquad (38)$$

Primer:
1. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Podalgebra generirana z:
  $e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  je algebra diagonalnih matrik:
  $$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Podalgebra generirana z:
  $e_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  pa je celotna algebra $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (torej je generirana samo z dvema elementoma).

  Ker velja:

  $e_{12}e_{21} = e_{11}$ in $e_{21}e_{12} = e_{22}$, vidimo, da e_{12}, e_{21} generirata algebro $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  $\{e_{12}, e_{21}, e_{11}, e_{22}\}$ je baza algebre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

  Opomba:

  Za primerjavo: podkolobar $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generiran z e_{12} in e_{21} pa je

  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}; u_{ij} \in \mathbb{Z}$