Skripta za algebro 2

Filip Koprivec

14. december 2015

"If I find in myself desires which nothing in this world can satisfy, the only logical explanation is that I was made for another world."

— C. S. Lewis

Kazalo

1 Osnovne algebrske strukture

1.1 Binarne operacije

Definicija 1: Binarna Operacija *(tudi dvočlena operacija)* $\circ$ *na množici* $\mathcal{S}$ *je preslikava iz* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ *v* $\mathcal{S}$.
Torej $\circ : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

Primer:
Osnovna zgleda binarnih operacij na $\mathbb{Z}$ sta:
1. Seštevanje: $(n, m) \mapsto n + m$
2. Množenje: $(n, m) \mapsto n \times m$

Skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$ **ni** binarna operacija.
Vektorski produkt v $\mathbb{R}^3$ **je** binarna operacija.

Definicija 2: *Operacija* $\circ$ *je* ***asociativna****, če ustreza enačbi*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \tag{1}$$

Enakost 1 imenujemo **Zakon o asociativnosti**
Operacije, ki jih bomo obravnavali bodo praviloma asociativne.

Definicija 3: *Elementa* $x, y \in \mathcal{S}$ ***komutirata****, če velja*

$$x, y \in \mathcal{S}.x \circ y = y \circ x \tag{2}$$

Če za poljubna dva elementa iz $\mathcal{S}$ *velja*

$$\forall x, y \in \mathcal{S}.x \circ y = y \circ x \tag{3}$$

pravimo, da je operacija $\circ$ *komutativna. Enakost 3 imenujemo* ***Zakon o komutativnosti***

Opomba: Kadar je iz konteksta razvidno, o kateri operaciji govorimo, pogosto namesto "$\circ$ je komutativna rečemo tudi $\mathcal{S}$ je komutativna"
Primer:
1. Operacija + na $\mathbb{Z}$ je tako asociativna in komutativna
2. Operacija * na $\mathbb{Z}$ je tako asociativna in komutativna
3. Operacija - na $\mathbb{Z}$ **ni** niti asociativna niti komutativna
Opomba: Na operacijo odštevanja gledamo kot na izpeljano operacijo in ne kot na samostojna operacijo, saj jo vpeljemo preko seštevanja in pojma nasprotnega elementa.
4. Naj bo $\mathcal{X}$ poljubna neprazna množica. Z $F(\mathcal{X})$ označimo množico vseh preslikav iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{X}$, potem je $(f, g) \mapsto f \circ g$ (kompozitum funkcij) binarna operacija na $F(\mathcal{X})$.
Opomba: Operacija je asociativna, in kadar $|\mathcal{X}| \geq 2$ ni komutativna

Definicija 4: *Naj bo $\circ$ binarna operacija na na $\mathcal{S}$ in $e \in \mathcal{S}$. e se imenuje **nevtralni element**, če velja*

$$\forall x \in \mathcal{S}.e \circ x = x \circ e = x \tag{4}$$

Primer:
1. 0 je nevtralni element za seštevanje na $\mathbb{Z}$.
2. 1 je nevtralni element za množenje na $\mathbb{Z}$.
3. id_x (identična preslikava) je nevtralni element za $F(\mathcal{X})$

Opomba: Nevtralni element nima zagotovljenega obstoja (recimo + na $\mathbb{N}$ ali $*$ na sodih celih številih).
Trditev 1: Če nevtralni element obstaja, je en sam.

Dokaz. Naj bosta $f, e \in \mathcal{S}$ nevtralna elementa.

$$e = e \circ f \quad // \text{ Ker je f nevtralni element}$$

$$e \circ f = f \quad // \text{ Ker je e nevtralni element}$$

$$e = f$$

□

Definicija 5: *Element e' je **levi nevtralni element**, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}.e' \circ x = x \tag{5}$$

Definicija 6: *Element e'' je **desni nevtralni element**, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}.x \circ e'' = x \tag{6}$$

Opomba: Levih in desnih nevtralnih elementov je lahko več
Primer:
1. $\circ : (x, y) \mapsto y$.
Vsak element je levi nevtralni element
2. 0 je desni nevtralni element za odštevanje v $\mathbb{Z}$

Trditev 2: Naj bo za operacijo $\circ$ e' levi nevtralni element, e'' pa desni nevtralni element. Tedaj velja $e' = e'' = e$ (Sta si levi in desni nevtralni element enaka in je(sta) nevtralni element)

Dokaz.

$$e' = e' \circ e'' = e''$$

□

Definicija 7: *Naj bo $\circ$ operacija na $\mathcal{S}$ in naj bo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Rečemo, da je $\circ$* ***notranja operacija na $\mathcal{T}$*** *ali da je množica $\mathcal{T}$* ***zaprta za $\circ$ na $\mathcal{T}$*** *, če velja*

$$\forall t, t' \in \mathcal{T}. t \circ t' \in \mathcal{T} \tag{7}$$

Primer:
Množica $\mathbb{N}$ je zaprta za operaciji $+$ in $*$, ni pa zaprta za operacijo $-$.

Definicija 8: *Preslikavi iz $\mathcal{K} \times \mathcal{S}$ v $\mathcal{S}$ kjer $\mathcal{K} \neq \mathcal{S}$ rečemo* ***Zunanja binarna operacija***

Primer:
1. Množenje vektorja s skalarjem
$(\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x}$, kjer je $(K = \mathbb{R}, S = \mathbb{R}^n)$
$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

1.2 Polgrupe in monoidi

Definicija 9: ***Algebrska struktura*** *je množica, opremljena z eno ali več operacijami (notranjimi ali zunanjimi), ki imajo določene lastnosti*

Definicija 10: ***Polgrupa*** *je par množice $\mathcal{S}$ skupaj z* ***asociativno binarno operacijo****. Pišemo: $(\mathcal{S}, \circ)$*

Opomba: Kadar je jasno o kateri operaciji govorimo, pogosto govorimo kar o polgrupi $\mathcal{S}$
Primer:
1. $(\mathbb{N}, +), \underbrace{(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), \ldots}_{Niso\ samo\ polgrupe\ ampak\ kar\ grupe}$

Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ polgrupa, po zakonu 1 o asociativnosti velja:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

zato lahko oklepaje spuščamo in vse to pišemo kot $x \circ y \circ z$. Kaj pa če imamo več kot tri elemente. Ali velja tudi:
$(x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4) = ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4 = x_1 \circ (x_2(\circ x_3 \circ x_4)) = \ldots$
Trditev 3: Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ polgrupa, $n \in \mathbb{N}$ in naj bo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$. Tedaj je za vsak n enakost izpolnjena na glede na postavitev oklepajev (izraz ima smisel, tudi kadar ne pišemo oklepajev).
$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n = (\ldots(x_1 \circ x_2) \circ \cdots \circ x_n) = x_1 \circ (x_2(\circ \cdots \circ x_n)\ldots) = \ldots$

Dokaz. Zgolj skica dokaza
Definirajmo: $x := x_1 \circ (x_2(\circ \cdots \circ x_n)\ldots)$ in
$y :=$ naj bo kombinacija elementov $x_1 \ldots x_n$, z drugače postavljenimi oklepaji

Indukcija na n:
$n \leq 3$: Očitno
Ker $n \leq 2$ velja $y = \underbrace{(u)}_{x_1,\ldots,x_k} \circ \underbrace{(v)}_{x_{k+1},\ldots,x_n}$ Iz $k < n$ sledi:
$y = (x_1 \circ w) \circ v \underbrace{=}_{Asociativnost(1)} x_1 \circ (w \circ v)$
Po I.P. ($w \circ v$ ima $n-1$ elementov): $x = x_1 \circ (x_2 \circ \cdots \circ x_n)$ □

Zato lahko oklepaje izpuščamo in pišemo kar: $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$

Definicija 11: ***Potenca elementa*** x. *Naj bo* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *in* $x \in \mathcal{S}$

$$x^n := \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n\,elementov} \tag{8}$$

Opomba: Brez asociativnosti ni definirano niti x^3
Opomba:
Očitno velja:
$\forall n, m \in \mathbb{N}. x^n \circ x^m = x^{n+m}$ in
$\forall n, m \in \mathbb{N}. (x^n)^m = x^{nm}$

Definicija 12: ***Polgrupa*** *z* ***nevtralnim elementom*** *se imenuje* ***monoid***.

Primer:
1. $(\mathbb{N}, +)$ **ni** monoid, $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ pa je.
2. $(\mathbb{N}, *)$ je monoid
3. $(F(\mathcal{X}), \circ)$ je monoid, nevtralni element je $id_{\mathcal{X}}$

Definicija 13: *Naj bo* $(\mathcal{S}, \circ)$ *monoid z nevtralnim elementom* e. *Element* y *je* ***levi inverz*** *elementa* x, *če velja:* $y \circ x = e$.

Definicija 14: *Naj bo* $(\mathcal{S}, \circ)$ *monoid z nevtralnim elementom* e. *Element* y *je* ***desni inverz*** *elementa* x, *če velja:* $x \circ y = e$.

Opomba: Levi in desni inverz nimata zagotovljenega obstoja, če pa obstajata ni nujno, da sta enolično določena.
Primer:
1. $f \in F(\mathcal{X})$ ima levi inverz $\iff$ f je injektivna
Če f ni surjektivna ima lahko več levih inverzov, ki so izven $\mathcal{Z}_f$ lahko poljubno definirani.
2. $f \in F(\mathcal{X})$ ima desni inverz $\iff$ f je surjektivna
3. $f \in F(\mathcal{X})$ ima levi in desni inverz $\iff$ f je bijektivna

Definicija 15: *Element* y *iz monoida* $\mathcal{S}$ *je inverz elementa* x *Če velja:*

$$x \circ y = y \circ x = e \tag{9}$$

Elementu, ki ima inverz rečemo da je ***obrnljiv*** *in njegov inverz označimo z* x^{-1}*(To ni čisto korektno, saj bomo šele malo naprej pokazali, da ima vsak element en sam inverz). In tako dobimo*

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e \tag{10}$$

Opomba: Če je operacija $\circ$ komutativna potem levi inverz, desni inverz in inverz za posamezen element sovpadajo

Trditev 4: Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ monoid, Če je y levi inverz elementa x in je z njegov desni inverz, potem $z = y = x^{-1}$

Dokaz. $y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z$ □

Posledica: Obrnljiv element monoida ima natanko en inverz.
Posledica: Če je x obrnljiv element monoida $\mathcal{S}$ potem iz $y \circ x = e$ sledi $x \circ y = e$.
Trditev 5: Če sta x in y obrnljiva, potem je obrnljiv tudi element $(x \circ y)$ in je njegov inverz $y^{-1} \circ x^{1}$

Dokaz. To je desni inverz:
$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e$
in tudi levi inverz:
$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e$ □

Opomba: Seveda velja za n elementov

$$(x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n)^{-1} = x_n^{-1} \circ \cdots \circ x_2^{-1} \circ x_1^{-1} \tag{11}$$

Opomba: Poseben primer, kadar je x obrnljiv je tudi: $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ za $n \in \mathbb{N}$
Primer:
1. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$: edini obrnljiv element je 0.
2. $(\mathbb{N}, *)$: edini obrnljiv element je 1
3. $(\mathbb{Z}, *)$: edina obrnljiva elementa sta 1 in -1
4. $(\mathbb{Q}, *)$: Obrnljivi so vsi element razen 0
5. $(F(\mathcal{X}), \circ)$: obrnljive so vse bijektivne preslikave

Definicija 16:

$$n \in \mathbb{N}. x^{-n} := (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n \tag{12}$$

Definicija 17:

$$x^0 := e \tag{13}$$

Tako kadar je x **obrnljiv** veljata enačbi

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}. x^n \circ x^m = x^{n+m} \tag{14}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}. (x^n)^m = x^{nm} \tag{15}$$

Trditev 6: Če je x obrnljiv element monoida $\mathcal{S}$ potem velja **pravilo krajšanja**:

$$x \circ y = x \circ z \implies y = z \tag{16}$$

In tudi

$$y \circ x = z \circ x \implies y = z \tag{17}$$

Dokaz.

$$x \circ y = x \circ z \implies x^{-1} \circ x \circ y = x^{-1} \circ x \circ z \implies y = z$$

Druga enačba podobno □

Opomba: Iz enačbe $x \circ y = z \circ x$ v splošnem **ne** sledi $y = z$

1.3 Grupe

Dogovor: V grupi bomo namesto $\circ$ uporabljali kar operacijo 'krat', torej se bo operacija imenovala kar množenje. Prav tako bomo izpuščali operator, ko bo le mogoče in pisali kar xy.
Tako xy imenujemo 'produkt' x in y, nevtralni element pa označimo z 1 in mu rečemo kar enota.

Definicija 18: ***Monoid*** *v katerem je* ***vsak element obrnljiv****, se imenuje* ***grupa****. Grupa, v kateri vsaka dva elementa komutirata, se imenuje* ***komutativna grupa*** *ali* ***Abelova grupa****.*

Ki je ekvivalenta bolj čisti definiciji:

Definicija 19: *Množica $\mathbb{G}$ skupaj z binarno operacijo $* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $(x, y) \mapsto xy$ je* ***grupa*** *če zanjo velja:*

G_1*:*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{G}.\ (xy)z = x(yz)$$

G_2*:*

$$\exists 1 \in \mathbb{G}.\ \forall x \in \mathbb{G}.\ 1x = x1 = x$$

G_3*:*

$$\forall x \in \mathbb{G}.\ \exists x^{-1} \in \mathbb{G}.\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

Če velja tudi:

$$\forall x, y \in \mathbb{G}.\ xy = yx$$

*Potem grupo $\mathbb{G}$ imenujemo **Abelova** grupa.*

Grupe delim na komutativne in nekomutativne(glede na lastnosti operacije) ter na končne in neskončne(glede na število elementov).
Primer:
1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$,$(\mathbb{R}, +)$,$(\mathbb{C}, +)$
2. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **ni** grupa
3. $(\mathbb{R}, *)$: **ni** grupa, ker 0 ni obrnljiv

Opomba: Vsak monoid 'skriva' grupo.

Definicija 20: *S $\mathcal{S}^*$ označujemo množico vseh obrnljivih elementov monoida $\mathcal{S}$.*

Trditev 7: Če je $\mathcal{S}$ monoid je $\mathcal{S}^*$ grupa.

Dokaz. $x, y \in \mathcal{S}^* \implies x \circ y \in \mathcal{S}^*$ // Obrnljiv je tudi njun produkt, torej je množica je zaprta za $*$
Ker je $*$ asociativen na $\mathcal{S}$ je asociativen tudi na $\mathcal{S}^*$
$e \in \mathcal{S}^*$ saj je enota inverz sami sebi
$x \in \mathcal{S}^* \implies x^{-1} \in \mathcal{S}^*$ // Inverz inverza je kar element sam □

Primer:
1. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$: $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)^* = 0$
2. $(\mathbb{Z}, +)$: $(\mathbb{Z}, +)^* = -1, 1$
3. $(\mathbb{Q}, *)$: $(\mathbb{Q}, *)^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
Opomba: Grupam z enim elementom pravimo **trivialne** grupe.
4. $(F(\mathcal{X}), \circ)$: $(F(\mathcal{X}), \circ)^* = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{X} | f$ je bijekcija$\}$

Definicija 21: *Množico $Sim(\mathcal{X})$ imenujemo **simetrična grupa** (množice $\mathcal{X}$).*

$$Sim(\mathcal{X}) := \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{X} | f \text{ je bijekcija}\} \tag{18}$$

*Njene elemente(bijektiven preslikave iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$ pa imenujemo **permutacije** (množice $\mathcal{X}$).*

Opomba: Če je množica končna jo praviloma označimo z $\{1, 2, \ldots, n\}$, njej pripadajočo grupo permutacij pa z

$$\mathcal{S}_n := Sim(\{1, 2, \ldots, n\}) \tag{19}$$

Včasih bomo operacije na grupah vendarle označevali s + ('seštevanje'). Taki grupi bomo rekli **aditivna grupa**. Nevtralni element bomo označevali z 0, inverzni element pa bomo imenovali 'nasprotni element' in ga označevali z $-x$. Namesto $x + (-y)$ bom tako pisali $x - y$ (razlika x in y). S tem smo v aditivno grupo vpeljali odštevanje. Prav tako bom namesto x^n pisali nx.
Primer takih grup so Abelove grupe. $(x + y = y + x)$

1.4 Kolobarji

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so aditivne grupe, v katerih je naravno definirano tudi množenje, za katerega so monoidi.

Definicija 22: *Množica $\mathcal{K}$ skupaj z binarnima operacijama seštevanja $+ : (x, y) \mapsto x + y$ in množenja $* : (x, y) \mapsto xy$ se imenuje* ***kolobar*** *če velja*

K_1: $(K, +)$ *je* ***Abelova grupa***

K_2: $(K, *)$ *je* ***monoid***

K_3: *Izpolnjena sta oba distributivnostna zakona*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ z(x + y) = zx + zy \tag{20}$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ (x + y)z = xz + yz \tag{21}$$

Opomba: *Oba zakona potrebujemo zaradi ne nujne komutativnosti množenja v monoidu*

Opomba: Poznamo tudi kolobarje brez enote (kjer je $(\mathcal{K}, *)$ zgolj monoid). Recimo

$$2\mathbb{Z} := \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$$

Trditev 8:V poljubnem kolobarju veljajo naslednje lastnosti:

(a)

$$\forall x \in \mathcal{K}.\ 0x = x0 = 0$$

Dokaz.

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$$
$$\Downarrow$$
$$0 = 0x$$

Podobno za $x0 = 0$ □

(b)

$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ (-x)y = x(-y) = -(xy)$$

Dokaz.

$$0 = 0y = (x + (-y))y = xy + (-x)y$$
$$\Downarrow$$
$$-(xy) = (-x)y$$

□

(c)

$$\forall x, y, z \in \mathcal{K}.\ x(y - z) = xy - xz \ \wedge\ (y - z)x = yx - zx$$

Dokaz.

$$x(y-z) = x(y+(-z)) = xy + x(-z)$$

Podobno za drugo stran □

(d)

$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ (-x)(-y) = xy$$

Dokaz.

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$$

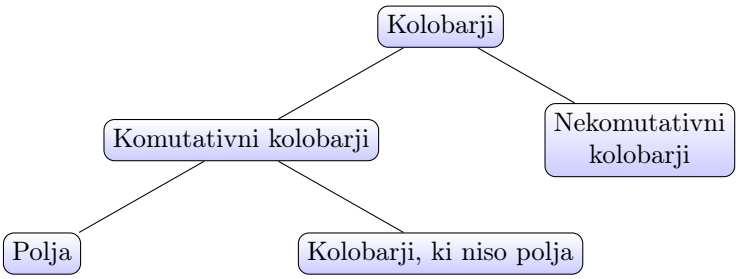
□

(e)

$$\forall x \in \mathcal{K}.\ (-1)x = x(-1) = -x$$

Sledi iz (b) če vzamemo $y = -1$

Kolobar K je **komutativen**, če za množenje velja zakon komutativnosti (3).



Primer:
1. $\mathbb{Z}$ (tipičen primer kolobarja)
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (to niso tipični primeri kolobarjev, saj so kar polja)
3. **Trivialni** ali **ničelni kolobar**:

$$\{0\}$$

Trditev 9:

$$\text{Kolobar } \mathcal{K} \text{ je ničelen} \iff 1 = 0$$

Dokaz.
$\Longrightarrow$: Očitno
$\Longleftarrow$: $\forall x \in \mathcal{K}.\ x = 1x = 0x = 0$ □

4. Matrični kolobarji ($M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$) z običajnim seštevanjem in množenjem,

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n};\ 1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n}$$

Ta kolobar je nekomutativen za $n \geq 2$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies AB = B,\ BA = 0$
A in B ne komutirata, prav tako pa smo videlo da je lahko produkt dveh neničelnih elementov 0.

Definicija 23: *Element $x \neq 0$ kolobarja $\mathcal{K}$, je **levi delitelj niča**, če obstaja tak $y \neq 0, \in \mathcal{K}$, da velja: $xy = 0$.*

Definicija 24: *Element $x \neq 0$ kolobarja $\mathcal{K}$, je **desni delitelj niča**, če obstaja tak $y \neq 0, \in \mathcal{K}$, da velja: $yx = 0$.*

Definicija 25:*Element x je **delitelj niča**, če je **hkrati levi in desni delitelj niča**.*

Opomba:

$$\mathcal{K} \text{ ima leve deljitelje niča} \iff \mathcal{K} \text{ ima deljitelje niča} \tag{22}$$

Dokaz.
$\implies$: Obstajata taka $y \neq 0, x \neq 0$, da je $xy = 0$. Imamo dve možnosti

1. $yx = 0 \implies$ Dokaz je končan.
2. $yx \neq 0$: $x(yx) = 0 = (yx)y$ in je yx desni delitelj niča .

$\impliedby$: Očitno. □

V **Kolobarju brez deliteljev niča** velja:

$$\forall x, y \in \mathcal{K}.\ xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0 \tag{23}$$

V takih kolobarjih velja pravilo krajšanja:

$$xy = xz \wedge x \neq 0 \implies y = z$$
$$yx = zx \wedge x \neq 0 \implies y = z$$
$$xy = xz \iff x(y - z) = 0$$
$$yx = zx \iff (y - z)x = 0$$

Kolobar je monoid za množenje zato lahko govorimo o obrnljivih elementih.
Primer:
1. V $\mathbb{Z}$ sta obrnljiva $1, -1$.
2. V $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so obrnljivi vsi elementi razen 0

Definicija 26: *Kolobar, v katerem $1 \neq 0$ in v katerem so **vsi neničelni elementi obrnljivi** se imenuje **obseg**.*

Definicija 27: *Komutativni obseg se imenuje* ***polje***

Primer:
1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so polja
2. Nekomutativne obsege bomo dodali kasneje

Trditev 10: Obrnljiv element kolobarja ni levi(ali desni) delitelj niča.
Obsegi so zato kolobarji brez deliteljev niča.

Dokaz. x je obrnljiv: $xy = 0$
$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$ Torej x ni delitelj niča. □

1.5 Vektorski prostori

Definicija 28: *Naj bo $\mathcal{F}$ polje. Množica $\mathcal{V}$ skupaj z (notranjo) binarno operacijo seštevanje $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ in zunanjo binarno operacijo $\mathcal{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ imenovano* ***množenje s skalarji*** *in označeno z $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, se imenuje* ***vektorski prostor nad poljem*** *$\mathcal{F}$, če zanj velja:*

V_1: Za seštevanje je $\mathcal{V}$ Abelova grupa

V_2: Velja distributivnost v vektorskem faktorju

$$\forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \forall u, v \in \mathcal{V}.\ \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \tag{24}$$

V_3: Velja distributivnost v skalarnem faktorju

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \forall v \in \mathcal{V}.\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \tag{25}$$

V_4: Velja zakon homogenosti

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \forall v \in \mathcal{V}.\ (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \tag{26}$$

V_5: Enota

$$\forall v \in \mathcal{V}.\ 1v = v \tag{27}$$

Za vsak vektorski prostor očitno veljajo naslednje trditve

- $$\forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \lambda 0 = 0$$
- $$\forall u, v \in \mathcal{V}.\ 0x = 0$$
- $$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \lambda\mu = 0 \implies \lambda = 0 \vee \mu = 0$$
- $$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ (-\lambda)\mu = \lambda(-\mu) = -(\lambda\mu)$$

Opomba: Elementom polja $\mathcal{F}$ pravimo **skalarji**, elementom $\mathcal{V}$ pa vektorji

- $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Realni vektorski prostor
- $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Kompleksni vektorski prostor

Primer:
1. Splošni prostor $\mathcal{F}^n$, kjer vpeljemo operaciji:
Seštevanje

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \tag{28}$$

Množenje s skalarjem

$$\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \tag{29}$$

2. Trivialni vektorski prostor: $\{0\}$
3. Vektorski prostor polinomov stopnje največ n, kjer seštevanje in množenje definiramo na običajen način
4. $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (za $+$ je Abelova grupa, množenje pa definiramo po komponentah, tako je nad $\mathbb{R}$ to 2-dimenzionalen, nad $\mathbb{C}$ pa 1-dimenzionalen)

1.6 Algebre

Mnogi pomembni primeri kolobarjev so hkrati tudi vektorski prostori, dejansko so algebre.

Definicija 29: *Naj bo $\mathcal{F}$ polje (komutativen obseg). Množica $\mathcal{A}$ skupaj z (notranjima) binarnima operacijama $+$ (seštevanje) in $*$ (množenje) ter zunanjo binarno operacijo $\mathcal{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (množenje s skalarji) je **Algebra na poljem $\mathcal{F}$ ali $\mathcal{F}$-algebra**, če velja:*

V_1: Za seštevanje in množenje s skalarji je $\mathcal{A}$ vektorski prostor

V_2: Za množenje je $\mathcal{A}$ monoid

V_3: Veljata neke vrste levi in desni distributivnostni zakon

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ (\lambda x + \mu y)z = \lambda(xz) + \mu(yz)$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ z(\lambda x + \mu y) = \lambda(zx) + \mu(zy)$$

***Opomba:** Za $\lambda = \mu = 1$ je to navadna distributivnost. Torej je algebra kolobar, ki je hkrati vektorski prostor, v katerem velja še:*

$$\lambda(xz) = (\lambda x)z = x(\lambda z)$$

Primer:
1. Vektorski prostor $\mathcal{F}^n$ postane algebra, če definiramo množenje, najlažje kar po komponentah:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto (x_1y_1, , x_2y_2, \ldots, x_ny_n) \tag{30}$$

2. Kolobar $M_n(\mathbb{R})$ postane algebra, če definiramo množenje s skalarji

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \tag{31}$$

3. Vektorski prostor polinomov postane algebra, če vpeljemo množenje polinomov na standardni način

Opomba: 'Teorija kolobarjev' in 'teorija kolobarjev in algeber' se razlikujeta zgolj v poudarku.

1.7 Podgrupe, podkolobarji in druge podstrukture

$(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{C}, +)$ sta različni strukturi, a očitno povezani Abelovi grupi. Operacija je seštevanje in $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Rečemo: $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa $(\mathbb{C}, +)$.
Podobno rečemo $(\mathbb{R}, +, *)$ je podkolobar $(\mathbb{C}, +, *)$
In ker sta to tudi polji rečemo kar kar $(\mathbb{R}, +, *)$ je podpolje $(\mathbb{C}, +, *)$

1.7.1 Podgrupe

Definicija 30: ***Neprazna*** *podmnožica $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$ je* ***podgrupa*** *grupe $\mathcal{G}$, če je za isto operacijo (zožitev na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) tudi sama grupa.*

Primer:
1. Vsaka grupa $\mathcal{G}$ ima vsaj dve podgrupi: $\mathcal{G}$ in $\{1\}$
Opomba: $\{1\}$ se imenuje **trivialna podgrupa**
Opomba: Vsaka od $\mathcal{G}$ različna podgrupa se imenuje **prava podgrupa**

Trditev 11: Za neprazno podmnožico $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$ so naslednje trditve ekvivalentne:

(i)
$$\mathcal{H} \text{ je podgrupa } \mathcal{G}$$

(ii)
$$\forall x, y \in \mathcal{H}.\ xy^{-1} \in \mathcal{H}$$

(iii)
$$\forall x, y \in \mathcal{H}.\ xy \in \mathcal{H} \wedge x^{-1} \in \mathcal{H}$$

Dokaz.
(i) $\implies$ (ii) : Očitno iz definicije da je $\mathcal{H}$ grupa
(ii) $\implies$ (iii) :

$$x \in \mathcal{H} \implies 1 = xx^{-1} \in \mathcal{H} \implies x^{-1} = 1x^{-1} \in \mathcal{H} \ // \text{ Zaprta za inverz}$$

$$x, y \in \mathcal{H} \implies xy = x(y^{-1})^{-1} \in \mathcal{H} \text{ Zaprta za poljubna dva}$$

(iii) $\implies$ (i):
Očitno zaprta za množenje, asociativna, ker velja na večji množici ($\mathcal{G}$)

$$1 = xx^{-1} \in \mathcal{H}$$

$$x \in \mathcal{H} \implies x^{-1} \in \mathcal{H}$$

□

Govorimo 'grupa $\mathcal{H}$' ali 'podgrupa $\mathcal{H}$' označimo:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$$

Primer:
1. $\mathbb{R} - \{0\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
2. $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
3. $\{1, -1, i, -i\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
4. $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
5. $\{x \in \mathbb{R} |\ |x| > 1\}$ **ni** podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$
6. $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} |\ |z| \leq 1\}$ **ni** podgrupa $(\mathbb{C} - \{0\})$

Opomba:
V aditivni grupi velja
(ii) : $\forall x, y \in \mathcal{H}.\ x - y \in \mathcal{H}$ in
(iii): $\forall x, y \in \mathcal{H}.\ x + y \in \mathcal{H} \wedge -x \in \mathcal{H}$

Primer:
Podgrupe $(\mathbb{Z}, +)$
1. Trivialna primera podgrup sta $\mathbb{Z}$ in $\{0\}$
2. $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$
3. $k\mathbb{Z} = \{kn | n \in \mathbb{Z}\}$ // $k \in \mathbb{Z}$

Definicija 31: *Elementa a, b iz grupe $\mathcal{G}$ sta si **konjugirana**, če velja:*

$$\exists c \in \mathcal{G}.\ b = cac^{-1} \tag{32}$$

Opomba: *Relacija 'elementa sta si konjugirana' je ekvivalenčna.*

Trditev 12: Če je $c \in \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$, je

$$c\mathcal{H}c^{-1} := \{chc^{-1} |\ h \in \mathcal{H}\} \tag{33}$$

konjugirana podgrupa podgrupe $\mathcal{H}$.

Dokaz.

$$chc^{-1}ch'c^{-1} = c\underbrace{hh'}_{\in\mathcal{H}}c^{-1} \in \mathcal{H}$$

$$(chc^{-1})^{-1} = (c^{-1})^{-1}h^{-1}c^{-1} = c\underbrace{h^{-1}}_{\in\mathcal{H}}c^{-1} \in \mathcal{H}$$

□

Opomba: Pojem konjugiranih podgrup ima smisel v nekomutativnih grupah

1.7.2 Podkolobarji

Definicija 32: *Podmnožica $\mathcal{L}$ kolobarja $\mathcal{K}$ je **podkolobar** kolobarja $\mathcal{K}$, če vsebuje enoto {1} kolobarja $\mathcal{K}$ in če je kolobar za isti operaciji.*

Primer:
1. $\mathcal{L} = \{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$
Sicer je kolobar za isti operaciji, a ne podeduje enote (ima svojo), torej **ni** podkolobar.

Trditev 13: Podmnožica $\mathcal{L}$ kolobarja $\mathcal{K}$ je podkolobar natanko tedaj, ko velja

$$1 \in \mathcal{L} \wedge \forall x, y \in \mathcal{L}.\ x - y \in \mathcal{L} \tag{34}$$

Dokaz.
$\implies$: Sledi iz definicije
$\impliedby$ Iz predpostavke sledi, da je $\mathcal{L}$ podgrupa za $+$.
Prav tako je $(\mathcal{L}, *)$ monoid
Izpolnjevanje distributivnih zakonov pa sledi iz tega da so izpolnjeni tudi na $\mathcal{K}$
Opomba: Uporabili smo trditev (11) in (ii) pogoj zamenjali z (iii) □

Primer:
1. Kolobar $\mathbb{Z}$ je podkolobar $\mathbb{Q}$.
2. Kolobar $\mathbb{Q}$ je podkolobar $\mathbb{R}$.

1.7.3 Podprostori

Definicija 33: *Podmnožica $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je **podprostor** $\mathcal{V}$, če je za isti operaciji tudi sama vektorski prostor.*

Trditev 14: Za neprazno podmnožico $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ so naslednje trditve ekvivalentne

(i)

$\mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{V}$

(ii)
$$\forall x, y \in \mathcal{U}.\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}.\ \lambda x + \mu y \in \mathcal{U}$$

(iii)
$$\forall x, y, \in \mathcal{U}.\ x + y \in \mathcal{U} \wedge \forall x \in \mathcal{U}.\ \forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \lambda x \in \mathcal{U}$$

Dokaz. Očitno □

Primer:
Edini podprostori vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$ so:

- $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$
- premice skozi izhodišče
- ravnine skozi izhodišče

1.7.4 Podalgebre

Definicija 34: *Podmnožica $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ je **podalgebra** $\mathcal{A}$, če je za iste operacije tudi sama algebra in vsebuje enoto {1} iz algebre $\mathcal{A}$.*

Trditev 15: Neprazna podmnožica $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ je **podalgebra** algebre $\mathcal{A}$ natanko tedaj ko zanjo velja:

$$1 \in \mathcal{B} \wedge \forall x, y \in \mathcal{B}.\ \forall \lambda \in \mathcal{F}.\ \underbrace{x + y, \lambda x}_{podprostor}, xy \in \mathcal{B} \tag{35}$$

Torej je zaprta za seštevanje, množenje in množenje s skalarji

Dokaz. Enako kot za podkolobarje □

Primer:
1. $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

1.7.5 Podpolje

Definicija 35: *Podmnožica $\mathcal{F}$ polja $\mathcal{E}$ je **podpolje** polja $\mathcal{E}$, če je za isti operaciji tudi sama polje*

Opomba: Podpolje nujno vsebuje isto enoto 1 kot polje $\mathcal{E}$, naj bo $e \in \mathcal{F}$ enota. $e^2 = e \implies e(\underbrace{1}_{enota\ \mathcal{E}} - e) = 0$ Ker v poljih ni deliteljev niča, velja $e = 1$.

Trditev 16: Podmnožica $\mathcal{F} \neq \{0\}$ polja $\mathcal{E}$ je podpolje natanko tedaj ko velja

$$\forall x, y \in \mathcal{F}.\ xy, x - y \in \mathcal{F} \wedge 0 \neq x \in \mathcal{F}.\ x^{-1} \in \mathcal{F} \tag{36}$$

Dokaz. Podobno kot prej

□

Trditev 17: $\mathcal{F} = \{0\} \iff 1 = 0$

Dokaz.
$\Longrightarrow$
$\forall x \in \mathcal{F}.\ 0x = x$ torej je 0 nevtralni element
$\Longleftarrow$
$\forall x \in \mathcal{F}.\ x = 1x = 0x = 0$ vsi elementi so ničelni □

Definicija 36: *Polje $\mathcal{E}$ je **razširitev** polja $\mathcal{F}$ če je $\mathcal{F}$ podpolje $\mathcal{E}$.*

Primer:
1. $\mathbb{R}$ je podpolje $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{C}$ je razširitev $\mathbb{R}$, ki je razširitev $\mathbb{Q}$

1.7.6 Logične operacije nad (pod)strukturami

Če so $\mathcal{H}_i$ podgrupe grupe $\mathcal{G}$ je tudi njihov presek $\cap\mathcal{H}_i$ podgrupa.
Opomba: Družina $\mathcal{H}_i$ je **lahko končna ali neskončna** torej poljubna

Presek algebrskih struktur (podgrup, podkolobarjev, podprostorov, podalgeber, podpolji) **ohrani lastnosti** te algebrske strukture.

Unija algebrskih struktur praviloma **ne ohrani** lastnosti te algebrske strukture.
Primer:
1. $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$ in $3\mathbb{Z} = \{3n | n \in \mathbb{Z}\}$ sta podgrupi $\mathbb{Z}$, njuna unija pa ni podgrupa (saj ni grupa), ker $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

1.8 Generatorji

$\mathbb{R}^3$ je generiran z vektorji: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Edini podprostor, ki te vektorje vsebuje je namreč $\mathbb{R}^3$ sam. Seveda je generiran tudi z drugimi vektorji: $(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)$.
Vektorja $(1,0,0), (0,1,0)$ pa generirata ravnino: $z = 0$.

1.8.1 Generatorji grup

Naj bo $\mathcal{X}$ neprazna podmnožica grupe $\mathcal{G}$, Vzemimo množico vseh elementov oblike $x_1 x_2 \dots x_n$, kjer velja $x, x^{-1} \in \mathcal{X}$ in jo označimo z $< \mathcal{X} >$.
Če je $\mathcal{X} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ pišemo tudi $\mathcal{X} =< y_1, y_2, \dots, y_n >$.
Tako $< x, y >$ sestoji iz elementov kot so: $1, x, y, x^2, x^3, x^{-1}, x^{-2}, x^{-1}y, y^{-1}, x^5y^{-1}x^3y^{-3}xy^2, \dots$
Opazimo, da je $< \mathcal{X} >$ podgrupa

$$u, v \in < x > \implies uv \in < \mathcal{X} > \wedge u^{-1} \in < x >$$

$(x_1, \dots, x_n)^{-1} = x_1^{-1} \dots x_n^{-1}$, ki vsebuje množico $\mathcal{X}$.

Velja pa tudi obratno: vsaka podgrupa grupe $\mathcal{G}$, ki vsebuje $\mathcal{X}$ vsebuje tudi to podgrupo($< \mathcal{X} >$).
Torej je $< \mathcal{X} >$ najmanjša podgrupa, ki vsebuje $\mathcal{X}$. Pravimo ji **podgrupa, generirana z** $\mathcal{X}$.
Če velja $< \mathcal{X} >= \mathcal{G}$, rečemo, da je $\mathcal{G}$ generirana z množico $\mathcal{X}$, elemente iz $\mathcal{X}$ pa imenujemo **generatorji** grupe $\mathcal{G}$, množici $\mathcal{X}$ pa **množica generatorjev**.

Primer:
1. $\mathbb{Q}^+$ je grupa za množenje. Velja: $< \mathbb{N} >= \mathbb{Q}^+$
2. $< 2, 3 >= \{2^i 3^j | i, j \in \mathbb{Z}\}$

Opomba: V aditivni grupi $< \mathcal{X} >$ za komponiranje elementov uporabljamo drugo operacijo, vse ostalo ostane isto.

Primer:
1. Grupa $(\mathbb{Z}, +)$ je generirana z $< 1 >$ in prav tako tudi z $< -1 >$. Velja $\mathbb{Z} =< 1 >=< -1 >$.

Opomba: Grupe generirane z enim samim elementom imenujemo **ciklične**.($< 2 >=< 4, 6 >= 2\mathbb{Z}$)
Cilj je poiskati najmanjše množice generatorjev(očitno $< \mathcal{G} >= \mathcal{G}$).

Definicija 37: *Grupa je* ***končno generirana*** *če je generirana s kako končno množico.*

1.8.2 Generatorji kolobarja

Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar, $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$.
Označimo z $\overline{\mathcal{X}}$ podgrupo za seštevanje $\mathcal{K}$, ki vsebuje vse produkte elementov iz $\mathcal{X} \cup \{1\}$.
Opazimo: $\overline{\mathcal{X}}$ je podkolobar, ki vsebuje $\mathcal{X}$ in je vsebovan v vsakem podkolobarju, ki $\mathcal{X}$ vsebuje. Zato mu rečemo **podkolobar generiran z množico** $\mathcal{X}$.
Primer:
1. $\mathcal{K} = \mathbb{C}$

- $\overline{\{1\}} = \mathbb{Z}$
- $\overline{\{i\}} = \{n + mi | n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[i]$ (Kolobar **Gaussovih celih števil**)

Opomba: Pojme, kot so **generator kolobarja, končno generiran kolobar,...** definiramo enako kot za grupo.

1.8.3 Generatorji vektorskih prostorov

Definicija 38: *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor nad $\mathcal{F}$. Vsakemu vektorju v oblike*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathcal{F} \wedge v_i \in \mathcal{V} \tag{37}$$

pravimo ***linearna kombinacija*** *vektorjev* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definicija 39: *Naj bo* $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. *Podprostor generiran z* $\mathcal{X}$, *torej podprostor, ki* $\mathcal{X}$ *vsebuje in je vsebovan v vsakem podprostoru, ki vsebuje* $\mathcal{X}$, *je množica* $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, *vseh linearnih kombinacij vektorjev iz* $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ *imenujemo* ***linearna lupina množice*** $\mathcal{X}$.

Definicija 40: *Naj bo* $\mathcal{X}$ *množica generatorjev za* $\mathcal{V}$, *tedaj* $\mathcal{X}$ *imenujemo* ***ogrodje*** $\mathcal{V}$. *Velja še* $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \mathcal{V}$.

Opomba: Posebnost vektorskega prostora je v tem, da imamo pojem **linearne neodvisnosti**, preko katerega vpeljemo pojem **baze** vektorskega prostora.

1.8.4 Generatorji algeber

Definicija 41: *Naj bo* $\mathcal{A}$ *algebra na* $\mathcal{F}$, *naj bo* $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. ***Podalgebra generirana z*** $\mathcal{X}$ *je množica, ki sestoji iz elementov* x *oblike*

$$x = \lambda_1 x_{11} x_{12} \ldots x_{1n_1} + \cdots + \lambda_r x_{r1} x_{rn_r}; \lambda_i \in \mathcal{F} \wedge x_i \in \mathcal{X} \cup \{1\} \qquad (38)$$

Primer:
1. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Podalgebra generirana z:
  $e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  je algebra diagonalnih matrik:
  $$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- Podalgebra generirana z:
  $e_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  pa je celotna algebra $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (torej je generirana samo z dvema elementoma).

  Ker velja:

  $e_{12}e_{21} = e_{11}$ in $e_{21}e_{12} = e_{22}$, vidimo, da e_{12}, e_{21} generirata algebro $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\{e_{12}, e_{21}, e_{11}, e_{22}\}$ je baza algebre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

  Opomba:

  Za primerjavo: podkolobar $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generiran z e_{12} in e_{21} pa je

  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}; u_{ij} \in \mathbb{Z}$

1.8.5 Generatorji podpolji

Definicija 42: *Naj bo $\mathcal{X} \neq \emptyset$ podmnožica polja $\mathcal{F}$.* ***Podpolje generirano z $\mathcal{X}$*** *je množica*

$$\{uv^{-1} | u, v \in \mathcal{X} \wedge v \neq 0\} \tag{39}$$

Opomba: Podkolobar $\overline{\mathcal{X}}$ generiran z $\mathcal{X}$ ni nujno polje.
Očitno vsako podpolje, ki $\mathcal{X}$ vsebuje, vsebuje tudi podpolje generirano z $\mathcal{X}$, toda zakaj ta množica je podpolje?.
Pomembno je dokazati, da je podgrupa za seštevaje(zaprtost za množenje, inverz, in 1 so očitne) **Trditev 18:**

$$uv^{-1} - wz^{-1} = \underbrace{(uz - vw)}_{\in\overline{\mathcal{X}}}\underbrace{(vz)^{-1}}_{\in\overline{\mathcal{X}}}$$

Primer:
$\mathcal{F} = \mathbb{C}$
1. $\mathcal{X} = \{1\}$ Podpolje generirano z $\mathcal{X}$ je $\mathbb{Q}$, medtem, ko $\overline{\mathcal{X}} = \mathbb{Z}$ Vsako podpolje $\mathbb{C}$ vsebuje 1 in zato vsako podpolje vsebuje tudi $\mathbb{Q}$
2. $\mathcal{X} = i$: $\overline{\mathcal{X}} = \mathbb{Z}[i]$(Gaussova cela števila), podpolje generirano z $\mathcal{X}$ je

$$\mathbb{Q}[i] := \{p + qi | p, q \in \mathbb{Q}\} \tag{40}$$

Opomba: Med drugim smo pokazali, da najmanjša podgrupa(podkolobar ...), ki vsebuje dano množico res obstaja. Zadevo pa lahko dokažemo tudi hitreje, tako da vzamemo presek vseh podstruktur, ki to strukturo vsebujejo.

1.9 Direktni produkti in vsote

Iz danih struktur lahko konstruiramo nove na različne načine.

1.9.1 Direktni produkti grup

Definicija 43: *Naj bodo $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ grupe. Grupi*

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_n$$

ki jo dobimo kot kartezični produkt teh grup, pravimo ***(zunanji) direktni produkt****.*

Opomba: Da je ta struktura res grupa, operacijo definiramo po komponentah. Brez težav se prepričamo, da je to res grupa.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) * (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$$

Očitno:

$$1 = (1, 1, \ldots, 1)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$$

Opomba: Če so vse grupe v produktu aditivne, potem namesto $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_n$ pišemo $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_n$ in govorimo o **(zunanji) direktni vsoti grup**.

1.9.2 Direktni produkti kolobarjev

Definicija 44: *Naj bodo $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ kolobarji. Kolobarju*

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_n$$

*ki ga dobimo kot kartezični produkt teh kolobarjev pravimo **(zunanji) direktni produkt**.*

Opomba: Da je ta struktura res kolobar operacijo definiramo po komponentah. Brez težav se prepričamo da je to res kolobar.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) * (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$$

Opomba: Temu rečemo tudi **direktna (zunanja) vsota kolobarjev**.

1.9.3 Direktna vsota vektorskih prostorov

Definicija 45: *Naj bodo $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ vektorski prostori nad $\mathcal{F}$. Vektorskemu prostoru*

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$$

*ki ga dobimo kot kartezični produkt teh vektorskih prostorov pravimo **direktna vsota** prostorov $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ in ga označujemo kot $\mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$.*

Opomba: Da je ta struktura res vektorski prostor, operacijo definiramo po komponentah. Brez težav se prepričamo, da je to res vektorski prostor.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Opomba: $\mathcal{F}^n$ je direktna vsota n-kopij enorazsežnega prostora $\mathcal{F}$

1.9.4 Direktni produkt algebr

Definicija 46: *Naj bodo $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ algebre nad $\mathcal{F}$. Algebri*

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$$

ki jo dobimo kot kartezični produkt teh algebr, pravimo ***direktni produkt****.*

Opomba: Da je ta struktura res algebra, operacijo definiramo po komponentah. Brez težav se prepričamo, da je to res algebra.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) * (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Opomba: Lahko govorimo tudi o direktnem produktu(direktni vsoti) neskončne družine struktur
Primer:
1. $\mathbb{R}$ glejmo kot algebro nad $\mathbb{R}$. Direktni produkt števno kopij z operacijami po komponentah je algebra $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$.
Operacije po komponentah točno sovpadajo z operacijami po komponentah za zaporedja. To je torej algebra realnih zaporedij.
2. Naj bodo $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ polja nad ne nujno istimi kolobarji. Definiramo operacije po komponentah in opazimo, da za $n \geq 2$ ima direktni produkt(polj ali kolobarjev) delitelje niča.

$$(x_1, 0, \ldots, 0) * (0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

2 Primeri grup in kolobarjev

2.1 Cela števila

Ker so $\mathbb{N}$ zgolj polgrupa za $+$, imamo v algebri raje $\mathbb{Z}$.

Definicija 47: *Množica $\mathcal{A}$ zadostuje* ***načelu dobre urejenosti****, če vsaka neprazna podmnožica množice $\mathcal{A}$, vsebuje najmanjši element.*

Opomba: Je ekvivalentno:
Če v množici $\mathcal{A}$, ki ustreza načelu dobre urejenosti, množica $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ nima najmanjšega elementa, potem velja $\mathcal{B} = \emptyset$
Trditev 19:$\mathbb{N}$ ustreza načelu dobre urejenosti.

Dokaz.
Z indukcijo na n: $n = 1$: $1 \notin \mathbb{N}$
$n \implies n+1$: $1 \notin \mathbb{N}, 2 \notin \mathbb{N}, \ldots, n \notin \mathbb{N}$ $\underbrace{\implies}_{\text{Ker nima najmanjšega elementa}}$ $n+1 \notin \mathbb{N}$ $\square$

Po indukciji isto velja tudi za $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N} \cup \{0, -1\}$, $\mathbb{N} \cup \{0, -1, -2\}$ ...
Torej: Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica $\mathbb{Z}$ vsebuje najmanjše število.
Analogno: Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica $\mathbb{Z}$ vsebuje največje število.

Izrek 1: ***Osnovni izrek o deljenju***
Za poljubna $m, n \in \mathbb{Z}$ obstajata taki števili $p, q \in \mathbb{Z}$, da velja:

$$m = qn + r \wedge 0 \leq r < n$$

Dokaz. Vpeljimo

$$\mathcal{S}_{(n,m)} := \{k \in \mathbb{Z} | kn \leq m\}$$

Če $\mathcal{S} = \emptyset$ ✓ $\mathcal{S}$ je navzgor omejena, ker lahko najdemo tako število k, tako da je $kn > m$ in to velja tudi za vsako od k večje število, zato $\mathcal{S}$ vsebuje največje število q. Tako velja

$$qn \leq m \quad // \text{ saj } q \in \mathcal{S}$$

$$(q+1)n > m \quad // \text{ saj } (q+1) \notin \mathcal{S}$$

$$r := m - qn \leq 0$$

$$qn + n > m \quad // \text{ torej } n > r$$

□

Opomba: r imenujemo **ostanek** pri deljenju m z n.

$(\mathbb{Z}, +)$ Primeri podgrup
Primer:
1. Trivialni primeri: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$
2. $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$ // $n \in \mathbb{Z}$ je podgrupa za seštevanje
Opomba: Ker $n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$, praviloma izberemo $n \in \mathbb{N}$

Izrek 2:
Podmnožica $\mathcal{H}$ množice $\mathbb{Z}$ je podgrupa za seštevanje natanko tedaj, ko obstaja tak $n \geq 0$, da je $\mathcal{H} = n\mathbb{Z}$.

Dokaz.
$\Longrightarrow$
$\mathcal{H}$ je podgrupa $\mathbb{Z}$
$\mathcal{H} = \{0\} \implies n = 0$
$\mathcal{H} \neq \{0\}$, $k \in \mathcal{H} \iff -k \in \mathcal{H} \implies \mathcal{H} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ Po načelu dobre urejenosti obstaja najmanjše število v $\mathcal{H}$, recimo mu n.
$n \in \mathcal{H} \implies n\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{H}$ //ker je podgrupa
Vzemimo sedaj: $m \in \mathcal{H} \implies \underbrace{r}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{m}_{\in \mathcal{H}} - \underbrace{qn}_{\in \mathcal{H}}$
In dobimo $r = 0$, ker iz $1 \leq r \leq n - 1$ sledi, da $\mathcal{H}$ vsebuje od n manjše število, kar je protislovje.

Torej $m = qn \in \mathcal{H}$
$\Longleftarrow$
$n\mathbb{Z}$ je podgrupa $\implies (nk - nl) = n(k - l) \in n\mathbb{Z}$

□

Definicija 48: *Naj bosta $m, k \in \mathbb{Z}$. Rečemo, da k **deli** m (pišemo tudi $k|m$), če obstaja tak $q \in \mathbb{Z}$, da velja $m = qk$.*

Opomba: Rečemo tudi m **je deljiv** s k ali k je **delitelj** m. Prav tako uporabljamo $k \nmid m$, da povemo, da k **ne deli** m.

Definicija 49: *Naj bosta $m, n \in \mathbb{Z}$, naravno število d je **največji skupni delitelj** m in n, če velja:*

1. $d|m \wedge d|n$
2. $\forall d' \in \mathbb{N}.\ d'|m \wedge d'|n \implies d'|d$ // *Vsak drugi skupni delitelj deli največji skupni delitelj*

Opomba: Če sta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ podgrupi aditivne grupe $\mathcal{G}$, je podgrupa tudi

$$\mathcal{H} + \mathcal{K} := \{h + k | h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\}$$

Očitno $\mathcal{H}, \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H} + \mathcal{K}$, to je tudi najmanjša podgrupa, ki vsebuje obe podgrupi.

Dokaz.
$$(h + k) - (h' + k') = (h - h') + (k - k') \in \mathcal{H} + \mathcal{K}$$

□

Izrek 3:
Za vsak par celih števil m, n, od katerih vsaj eno ni enako 0, obstaja največji skupni delitelj d, ki ga označimo z $gcd(m, n)$, in je oblike $d = mx + ny$ za neka $x, y \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. $m\mathbb{Z}$ in $n\mathbb{Z}$ sta podgrupi $\mathbb{Z}$, zato je tudi njuna vsota podgrupa. Po opombi zgoraj obstaja tak $d \in \mathbb{N}$, da velja $d\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ in ker eno izmed m, n ni 0 velja $d \neq 0$. Torej velja
$d = mx + ny$ za neka $x, y \in \mathbb{Z}$ Torej velja:
$d\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \implies m \in m\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z} \implies d|m$ in podobno za n. Dokazali smo, da je d skupni delitelj števil m in n. Potrebno je še dokazati, da je največji.
Naj velja $c|m$ in $c|n$, potem $m = cz$ in $n = cw$.
Vemo da $d = mx + ny = c(zx + wy) \implies c|d$ □

Opomba: Dokaz za to se pojavi že v Evklidovi knjigi Elementi, približno 300 let pr. Kr.

Definicija 50: *Števili $m, n \in \mathbb{Z}$, ne obe enaki 0, sta si **tuji**, če je njun največji skupni delitelj enak 1.*

Posledica: Celi števili m, n sta si tuji natanko tedaj, ko obstajata taki celi števili x, y, ki zadostita enačbi:

$$1 = mx + ny$$

Dokaz.
$\Longrightarrow$
Sledi iz izreka o obstoju največjega skupnega delitelja (3)
$\Longleftarrow$
$c|m \wedge c|n \implies c|1$ Torej je njun največji skupni delitelj 1 in sta si tuji. □

Opomba: Splošneje lahko definiramo največji skupni delitelj števil $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ na enak način ter njegovo eksistenco dokažemo na enak način ($d = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots n_kx_k$). To seveda ne pomeni, da so si števila paroma tuja ($2, 3, 6$ so si tuja, ne pa tudi paroma tuja).

Definicija 51: *Naravno število p je **praštevilo**, če sta 1 in p edini praštevili, ki ga delita in velja $p \neq 1$.*

Lema 1. *Naj bo p praštevilo in $mn \in \mathbb{Z}$, tedaj velja:*

$$p|mn \implies p|m \vee p|n$$

Dokaz. Predpostavimo, da $p \nmid m$.
$gcd(p, m) = 1 \implies 1 = px + my \implies n = pxn + \underbrace{mn}_{pz} y = p(xn + zy)$
Podobno za drugo možnost. □

Opomba: Tudi ta dokaz je bil poznan že Evklidu.
Izrek 4:*Osnovni izrek aritmetike*
Vsako naravno število $n \geq 2$ lahko napišemo kot produkt praštevil. Ta zapis je do vrstnega reda faktorjev natančno enoličen.

Dokaz. Indukcija na n:
$n = 2$ ✓
$n - 1 \implies n$
Če je n praštevilo je dokaz zaključen. Če ni, ima vsaj dva delitelja ki nista 1 ali p (lahko sta enaka).
$n = kl;\ l, k < n$
Po indukcijski predpostavki sta l in k produkta praštevil, torej je tudi p produkt praštevil.
In še edinost zapisa:
$n = p_1 * p_2 * \cdots * p_r = q_1 * q_2 * \cdots * q_s$, produkt samih praštevil
$p_1|q_1 * q_2 * \cdots * q_s$ torej po lemi (1) deli natančno enega izmed faktorjev q_i. Brez škode za splošnost: $p_1|q_1 \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{ker sta praštevili}} p_1 = q_1$ Krajšamo s p_1 in nadaljujemo dokler ne pridemo do $1 = 1$.
Če pa imamo $s > r \implies q_{r+1} \ldots q_s = 1$, kar pa je protislovje. □

Izrek 5:
Množica praštevil je neskončna.

Dokaz. Predpostavimo, da jih je končno, torej da so $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vsa praštevila. Tedaj $p_1 * p_2 * \cdots * p_n + 1$ ni praštevilo in je zato gotovo deljivo z nekim praštevilom p_i.
$p_1 * p_2 * \cdots * p_n + 1 = k * p_1 \implies p_i(k - p_1 * p_2 * \cdots * p_{i-1} * p_{i+1} * \cdots * p_n) = 1$,
protislovje. □

2.2 Grupa in kolobar ostankov

Definicija 52: *Celi števili a in b sta **kongruenti modulo** n, če*

$$n|(a-b)$$

Primer:
1. $13 \equiv 1 \pmod{12}$, $21 \equiv -3 \pmod{12}$
2. $a \equiv b \pmod{1}$

Lema 2.

$a \equiv a' \ (mod\, n) \wedge b \equiv b' \ (mod\, n) \implies a+b \equiv a'+b' \ (mod\, n) \wedge ab \equiv a'b' \ (mod\, n)$

Dokaz.

$$(a+b) - (a'+b') = \underbrace{(a-a') + (b-b')}_{\text{sta si kongruentna}}$$

$$(ab) - (a'b') = \underbrace{b(a-a') + a(b-b')}_{\text{sta si kongruentna}}$$

□

Trditev 20: Relacija $a \equiv b \pmod{n}$ je ekvivalenčna:

Dokaz.
Refleksivna: ✓
Simetrična: ✓
Tranzitivna:
$a \equiv b \pmod{n}$ in $b \equiv c \pmod{n} \implies c - a = \underbrace{(c-b) + (b-a)}_{\text{sta si kongruentna}}$ □

Ker je relacija ekvivalenčna, lahko vpeljemo ekvivalenčne razrede. Z $[a]$ označimo ekvivalenčni razred, ki mu pripada a.

Definicija 53: *Ekvivalenčni razredi kongurgento z n so:*

$$\underbrace{[0]}_{\text{števila deljiva z } n} \quad , \quad \underbrace{[1]}_{\text{ostanek pri deljenji z } n \text{ je } 1} \quad , \ldots, [n-1]$$

in jih označimo z $\mathbb{Z}_n$.

Potrebno je preveriti še dobro definiranost operacij.
Trditev 21:Če v množici $\mathbb{Z}_n$ vpeljemo seštevanje:

$$[a] + [b] := [a + b] \tag{41}$$

Postane $\mathbb{Z}_n$ Abelova grupa.

Dokaz. Dobra definiranost seštevanja:

$$\underbrace{[a] = [a']}_{a \equiv a' \pmod n} \wedge \underbrace{[b] = [b']}_{b \equiv b' \pmod n} \implies [a + b] = [a' + b']$$

Drugi del izjave pa je ekvivalenten: $a + b \equiv a' + b' \pmod n$, kar sledi iz leme (2).

Preverimo še asociativnost:

$$([a]+[b])+[c] = [a+b]+[c] \underbrace{=}_{\text{po definiciji}} \underbrace{[(a + b) + c] = [a + (b + c)] =}_{\text{asociativnost celih števil}} \cdots = [a]+([b]+[c])$$

Nevtralni element:

$$0 = [0]$$

Nasprotni element:

$$-[a] = [-a]$$

Komutativnost:

$$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$$

□

Trditev 22: Aditivna grupa $\mathbb{Z}_n$ postane $\mathbb{Z}_n$ **komutativen kolobar** če vpeljemo moženje s predpisom:

$$[a] * [b] := [a * b] \tag{42}$$

Dokaz.
Dobra definiranost sledi iz leme(2), asociativnost in distributivnost pokažemo kot pri sešetevanju(se sklicujemo na te lastnosti v celih številih).
Enota: [1] □

Opomba: Da oznake poenostavimo namesto $[a], 0 \leq a \leq n-1$ pišemo kar a, in tako $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, pri čemero moramo obdržati v mislih, da to niso 'prava' cela števila.
Vsoto $a+b$ izračunamo tako, da pogledamo ostanek pri deljenju običajne vsote, podobno s produktom.
Primer:
1. V $\mathbb{Z}_{12}$: $3 + 4 = 7$ in $3 + 11 = 2 + 1 * 12 = 2$ ter $3 * 7 = 9$ in $3 * 8 = 0$.
$\mathbb{Z}_n$ ima torej lahko delitelje niča. Očitno je to res vedno kadar je n sestavljeno

število. Če pa je n praštevilo pa to ni res, še več, $\mathbb{Z}_p$ je polje.

Definicija 54: *Komutativen kolobar brez deliteljev niča se imenuje* ***cel kolobar****.*

Primer:
$\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{cel kolobar, ki ni polje}}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Trditev 23: Končen cel kolobar je polje.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{K}$ končen cel kolobar. $0 \neq a \in \mathcal{K} \implies a$ je obrnljiv, naj bo $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}, f(x) = ax$, očitno $1 \in \mathcal{Z}_f$
Pokazati pa je potrebno surjektivnost f, kar je v končnem polju ekvivalentno njeni injektivnosti.
$ax = ax \underbrace{\implies}_{\text{cel kolobar}} x = y$ torej $a(x-y) = 0 \wedge a \neq 0 \implies x = y$
Komutativnost(eksistenca levenga inverza $\implies$ eksistenca desnega inverza $\implies$ eksistenca inverza) □

Opomba: Izkaže se, da končnih nekomutativnih obsegov ni(dokaz je netrivialen).
Posledica: Za vsako praštevilo p je $\mathbb{Z}_p$ polje.

Dokaz. Zadošča pokazati, da $\mathbb{Z}_p$ ni deliteljev niča.
$a, b \in \mathbb{Z}_p, ab = 0$ Torej je v običanjem produktu ab večkratnik p, zato po lemi(1) p deli vsaj eno, ker pa $a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ velja $a = 0 \vee b = 0$ □

2.3 Obseg kvaternionov

Pojavi se naravno vprašanje, kako nadeljevati zaporedje:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset ?$$

Definicija 55:
Vzemimo 4*-razsežen vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*, označimo ga z* $\mathbb{H}$*, njegovo bazo pa z* $\{1, i, j, k\}$*, tako dobimo značilni element*

$$h := \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{43}$$

Seštevanje in množenje s skalarji uvedemo enako kot pri normalnem 4 *razsežnem vektorskem prostoru. Elemente* $\mathbb{H}$ *imenujemo kvaternioni.*

Opomba: $\mathbb{H}$ izhaja iz njihovega odkritelja Sir Williama Rowana Hamiltona.

Definicija 56: *Množenje vpelejemo po kosih in sicer:* 1 *je enota za množenje, za druge pa velja:*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{44}$$

Iz teh sledi:

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

Ko poznamo množenje baznih elementov lahko množimo tudi vse ostale.

Trditev 24:S tako definiranim množenjem postane prostor $\mathbb{H}$ ne samo kolobar ampak tudi algebra nad $\mathbb{R}$.

Opomba: Preverimo po definiciji.

Definicija 57:

$$\overline{h} := \lambda_0 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k \tag{45}$$

Trditev 25: vsak neničelen kvaternion je obrnljiv in zanj velja

$$h^{-1} = \frac{\overline{h}}{h\overline{h}} \tag{46}$$

Dokaz. Izračunamo:
$h\overline{h} = \lambda_0 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$
$h \neq 0 \implies h\overline{h} \in \mathbb{R} - \{0\}$, zato je vsak neničelen kvaternion obrnljiv. in velja

$$h^{-1} = \frac{\overline{h}}{h\overline{h}}$$

□

Opomba: $\mathbb{H}$ je tako nekomutativen obseg.
Lahkopa uporabljamo tudi drugačen zapis: $\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ pišemo

$$(\lambda_0, \vec{u}), \vec{u} = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$$

Množenje se tako glasi:

$$(\lambda_0, \vec{u}) * (\mu_0, \vec{v}) = (\lambda_0\mu_0 - \vec{u}\vec{v}, \lambda_0\vec{v} + \mu_0\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) \tag{47}$$

Opomba: Množica $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ je antikomutativna grupa za množenje z osmimi elementi, ki ji rečemo tudi **kvaternionska grupa**.

2.4 Kolobar matrik

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sta kolobarja(celo algebri).

Trditev 26: Za vsak kolobar $\mathcal{K}$ je množica $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ kolobar nad $\mathcal{K}$ za običajno seštevanje in množenje matrik.

Dokaz. Preverimo po definiciji. $\mathcal{K}$ je lahko celo nekomutativen. Enota in ničelen element sta enaka kot pri $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

$\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ je nekomutativen za $n \geq 2$ (za $n = 1$ je kolobar matrik kar $\mathcal{K}$)

Definicija 58: *Element e kolobarja $\mathcal{K}$ je **idempotent** če zanj velja:*

$$e^2 = e \tag{48}$$

Definicija 59: *Element a kolobarja $\mathcal{K}$ je **nilpotent** če zanj velja:*

$$\exists n \in \mathbb{N}.\ a^n = 0 \tag{49}$$

Primer:
1. Vsaka diagonalna matrika, z 0 in 1 na diagonali je idempotent.
2. Vsaka strogo zgoraj(ali spodaj) trikotna matrika je nilpotentna.

Trditev 27: Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar brez deliteljev niča, in naj bo $e \in \mathcal{K}$ idempotent. Velja: $e = 1 \vee e = 0$.

Dokaz. $e^2 = e \implies e(1-e) = 0 \underbrace{\implies}_{\text{ker nima deliteljev niča}} e = 1 \vee e = 0$ □

Trditev 28:e je idempotent $\iff$ $1 - e$ je idempotent

Dokaz. Račun. □

Če je $\mathcal{K}$ algebra na poljem $\mathcal{F}$, tudi kolobar $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ potem postane algebra, če definiramo:

$$\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$

Poseben primer: $\mathcal{M}_n(\mathcal{F})$ je algebra na $\mathcal{F}$, $dim(\mathcal{M}_n(\mathcal{K}) = n^2$

2.5 Kolobar funkcij

Naj bo $\mathcal{X}$ množica in naj bo $\mathcal{K} = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\}$

$\mathcal{K}$ postane kolbar, če definiramo običajno seštevanje in množenje funkcij:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x)$$

Skupaj z enoto: $e(x) = 1$ in nasprotnim elementom: $(-f)(x) = -f(x)$
Če vpeljemo še množenje s skalarji:

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Če je $\mathcal{X} = [a, b]$ ali $\mathbb{R}$, ipd., lahko govorimo o kolobarju.

Primer:
1. $\mathcal{C}(x) = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{R} |\ f \text{ zvezna}\}$ je kolobar, saj so vsote, in produkti zveznih funkcij spet zvezni. Ne samo to, je tudi algebra.

Poznamo več primerov kolobarjev funkcij:

- Odvedljivih funkcij
- omejenih funkcij
- integrabilnih funkcij
- polinomov (nima deliteljev niča).
- ...

Če v te kolobarje vpeljemo še množenje s skalarji:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \tag{50}$$

postanejo vsi ti kolobarji tudi algebre.

Na podoben način vpeljemo tudi kolobar (algebro) zaporedij $\mathcal{X} = \mathbb{N} \to \mathcal{A}$, kjer so vse operacije definirane po komponentah (seštevanje, množenje, množenje s skalarjem). Ter različne podalgebre (konvergentna zaporedja, omejena zaporedja...).
Primer:
1. V algebri zveznih funkcij ($\mathcal{C}(\mathbb{R})$) je podalgebra generirana z $id(x) = x$ ravno algebra polinomov.

2.6 Kolobar polinomov ene spremenljivke

Vajeni smo, da je polinom funkcija, v algebri polinomov pa polinom obravnavamo kot formalen izraz.

Definicija 60: *Polimon p nad kolobarjem $\mathcal{K}$ je izraz oblike:*

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,\ a_n \neq 0 \tag{51}$$

Kjer so $a_i \in \mathcal{K}$ t.i. koeficienti tega polinoma.

- a_0 *imenujemo* ***prosti (ali konstantni) člen***
- a_n *(zadnji neničelen člen) imenujemo* ***vodilni člen (koeficient)***
- X *imenujemo* ***spremenljivka****, a dejanski igra le formalno vlogo kot simbol*

Alternativno lahko polinom definiramo tudi kot

Definicija 61: *Polinom p nad kolobarjem $\mathcal{K}$ je zaporedje elementov iz $\mathcal{K}$, ki je od nekega mesta naprej ničelno*

$$p(n) : \mathbb{N} \to \mathcal{K},\ \exists n \in \mathbb{N}. \forall m \in \mathbb{N}.\ m > n \implies p(m) = 0 \tag{52}$$

Torej:

$$p = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

Vendar pa ta definicija ni udobna za množenje.

Da si prihranimo čas pri zapisu spuščamo ničelne koeficiente:

$$0 + 3X + 0x^2 - 5X = 3X - 5X^3$$

Udoben pa se nam zdi tudi zapis

$$p(X) = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$$

Kjer se zavedamo, da od nekje naprej so vsi a_k enaki 0.

Definicija 62: Seštevanje polinomov

$$\sum_{k \geq 0} a_k X^k + \sum_{k \geq 0} b_k X^k := \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) X^k \tag{53}$$

Definicija 63: Množenje polinomov

$$(\sum_{k \geq 0} a_k X^k) * (\sum_{k \geq 0} b_k X^k) := \sum_{k \geq 0} c_k X^k \tag{54}$$

Kjer velja $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_n b_0$

Opomba: V ozadju smo uporabili $(a_i X^i) * (b_j X^j) = (a_i b_j) X^{i+j}$ in distributivnost seštevanja.

Definicija 64: Stopnja polimoma

$$st(p(X)) = min\{n \in \mathbb{N} |\ \forall m \in \mathbb{N}.\ m > n \implies a_m = 0\} \tag{55}$$

Torej indeks zadnjega neničelnega koeficienta.

Opomba: Polinom 0 nima definirane stopnje, a jo občano definiramo kot -1 ali $-\infty$.
Množico polinomov skupaj s tema dvema operacijama bomo od sedaj naprej označevali z $K[x]$. Preveriti to je rutinsko.

Definicija 65: ***Konstanten polinom*** *je polinom stopnje* 0 *ali pa polinom* 0.

Hitro opezimo nekatere lastnosti:

- Če $\mathcal{K}$ nima deliteljev niča jih prav tako nima tudi $\mathcal{K}[X]$ in velja:

$$st(f(X)g(X)) = st(f(X)) + st(g(X))$$

- $\mathcal{K}$ je komutativen $\iff$ $\mathcal{K}[X]$ je komutativen.

Definicija 66:

- ***Linearni polinom*** := *polinom stopnje* 1
- ***Kvadratni polinom*** := *polinom stopnje* 2
- ***Kubični polinom*** := *polinom stopnje* 3

Definicija 67: Vrednost polinoma $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ *v elementu* $x \in \mathcal{K}$ *ima vrednost*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{K} \tag{56}$$

Tako vsak polinom $F(X)$ *porodi* ***polinomsko funkcijo***

$$x \mapsto f(x)$$

Opomba: Polimonska funkcija je seveda natanko določena s polinomom, naravno se nam porodi vprašanje ali je polinom natančno določen s polinomsko funkcijo, kar pa ni vedno res.
Primer:

$$p(X) = X + X^2 \in \mathbb{Z}_2$$

porodi funkcijo $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ za katero velja:

$$0 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 1^2 + 1^2 = 0$$

Enako funkcijo pa nam porodi tudi polinom 0. Očitno polinomska funkcija ne določa polinoma.

Opomba: V $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ pa je razlika med polinomom in polinomsko funkcijo zgolj formalna.

Če je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ ($\mathcal{K}$ je podkolobar $\mathcal{L}$) in velja $f(X) \in \mathcal{K}[X]$, lahko izračunamo $f(x)$ tudi za $x \in \mathcal{L}$.

Definicija 68: Ničla polinoma
$x \in \mathcal{K}$ *je* ***ničla (koren)*** *polinoma* $f(X)$*, če velja* $f(x) = 0$.

Opomba: Polinom nima nujno ničel, recimo $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ nima ničel v $\mathbb{R}$, jih pa ima v $\mathbb{C}$.
Če je $\mathcal{K}$ algebra nad $\mathcal{F}$ tudi $\mathcal{K}[X]$ postane algebra nad $\mathcal{F}$. če definiramo množenje s skalarjem.

Definicija 69:

$$(\lambda f)(X) := \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \lambda a_2 X^2 + \cdots + \lambda a_n X^n \tag{57}$$

Opomba: Če si še enkrat pogledamo definicijo množenja polinomov (54) in pozabimo na pogoj, da so od nekje naprej vsi členi enaki 0 potem govorimo o **kolobarju formalnih potenčnih vrst**, ki ga označimo z

$$\mathcal{K}[[X]]^k$$

2.7 Kolobar polinomov več spremenljivk

Preprost primer polinoma več spremenljivk:

$$f(X,Y) = 2X^4Y^2 - 3XY + 7X + 2Y + 3$$

Zgornji primer je sestavljenih iz 4-ih členov, ki jih imenujemo **monomi**, s stopnjami: $6, 2, 1, 1, 0$
Stopnja polinoma pa je največja stopnja monomov torej $st(f(X,Y)) = 9$

Definicija 70:*Kolobar polinomov dveh spremenljivk je*

$$(\mathcal{K}[X])[Y]$$

in ga označimo kot $\mathcal{K}[X,Y]$.

Elementi $\mathcal{K}[X,Y]$ so torej :

$$\sum_{l\geq 0}(\sum_{k\geq 0} a_k X^k)Y^l$$

Po dogovoru oklepaje kar izpuščamo in pišemo kar

$$\sum_{l\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{kl}X^kY^l,\ a_{kl} \in \mathcal{K}$$

Opomba: Ker je kolobar komutativen je vseeno v kakšnem vrstnem redu definiramo polinom ($(\mathcal{K}[X])[Y]$ je vsebinsko enak $(\mathcal{K}[Y])[X]$).

Opomba: Induktivno definiramo tudi polnom n spremenljivk

$$\mathcal{K}[X_1, X_2, \ldots X_n] := (\mathcal{K}[X_1, X_2, \ldots X_{n-1}])[X_n]$$

Polinomi z več spremenljivkami se študirajo v algebraični geometriji.
Primer:
1.

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1$$

Ničle tega polinoma so sfere.
2.

$$X_1^n + X_2^n - X_3^n$$

za $n \geq 3$ v $\mathbb{N}^3$ nima ničel (gre za zadnji Fermatov izrek, ki je bil dokazan leta 1995)

2.8 Simetrična grupa

Definicija 71:*Simetrična grupa $\mathcal{S}_n$ za $n \in \mathbb{N}$ je grupa permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. In element te grupe zapišemo kot*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Opomba: Očitno

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

Definicija 72: ***Transpozicija*** *zamenja dva elementa in jo zapišemo kot (i, j), kjer sta i in j elementa, ki se med sabo zamenjata.*

Izrek 6:
Vsako permutacijo se da zapisati kot produt transpozicij.

Dokaz. Algebra 1. □

Trditev 29:Če je permutacija enaka produktu sodega(lihega) števila transpozicij je tudi drug način zapisa te permutacije sod(lih)

$$sgn(\sigma\rho) = sgn(\sigma)sgn(\rho)$$

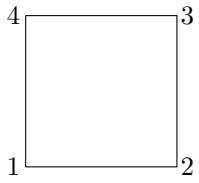
Sode permutacije tvorijo podgrupo. To podgrupo imenujemo **alternirajoča podgrupa** in jo označimo z A_n.

Definicija 73: *Permutacijo oblike: $i_{j_1} \mapsto i_{j_2}, i_{j_2} \mapsto i_{j_3}, \ldots, i_{j_{k-1}} \mapsto i_{j_k}$ imenujemo $k-$cikel in ga označimo z $(i_{j_1}, i_{j_2}, \ldots, i_{j_k})$ (Zavrti zgolj nekatere elemente, ostale pa pusti pri miru)*

Definicija 74:$2-$*cikel imenujemo transpozicija*

Opomba: Ni težko opaziti, da lahko vsako permutacijo zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov.

2.9 Diedrska grupa



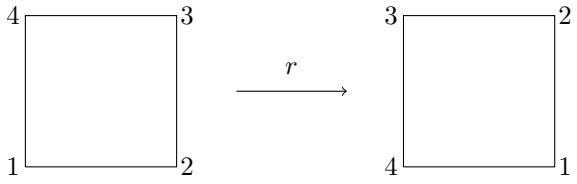
Definicija 75:*Simetrija kvadrata je ustrezna permutacija oglišč.*

Opomba: To si lahko predstavljamo kot da vzamemo kvadrat iz ravnine ga v prostoru vrtimo okoli poljubnih osi, ter ga položimo nazaj, tako da so oglišča na mestih, kjer so bila že prej(vendar ne nujno na istih mestih kot isto oglišče prej).

Opomba: Očitno je produkt(kompozitum) simetrij enak produktu ustreznih permutacij in je spet simetrije kvadrata.(To je tako, kot da bi zaporedoma izvajali te operacije)

Opomba: Opazimo, da je inverz simetrije prav tako simetrija, ki vrne kvadrat nazaj v prejšnjo lego

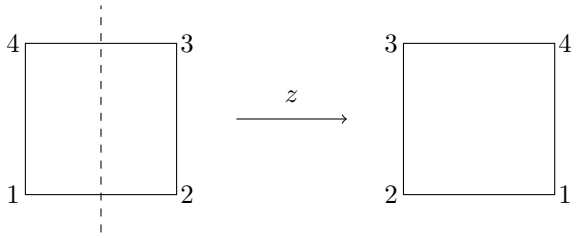
Primer:
1. Naj bo r rotacija kvadrata za $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri(v nasprotni smeri urinega kazalca), ustreza ji cikel $(1, 2, 3, 4)$.



Slika 1: Rotacija za $\frac{\pi}{2}$

Vidimo: r^2 = vrtenje za π, r^3 = vrtenje za $\frac{3}{2}\pi$, r^4 = vrtenje za $0 = id$

2. Naj bo z 'obračanje na glavo', tej simetriji ustreza permutacija: $z = (12)(34)$



Slika 2: Obračanje na glavo(zrcaljenje prek simetrijske osi)

Opomba: Očitno simetrijska grupa ni komutativna($zr \neq rz$)

Definicija 76: *Diedrska grupa reda* $2n$ *je simetrijska grupa pravilnega* $n-$*kotnika.*

$$\mathcal{D}_{2n} := \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, z, zr, zr^2, \ldots, zr^{n-1}\} \tag{58}$$

Kjer velja:

$$k \text{ je rotacija v pozitivni smeri za } \frac{\pi}{n}$$

Hitro pa opazimo: $r^n = 1, z^2 = 1, (rz)^2 = 1, |D_{2n}| = 2n$

Primer:
1. D_8 je grupa simetrij kvadrata
2. D_4 je grupa simetrij pravokotnika, ki ni kvadrat
3. $D_2 = \{1, r\}$

Opomba: Opazimo, da je splošna diedrska grupa generirana z rotacijo in zrcaljenjem (r, z)
Opomba: Diedrsko grupo reda $2n \geq 3$ si lahko predstavljamo kot podgrupo simetrične grupe $\mathcal{S}_n$

2.10 Linearne grupe

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{F}$ polje. Tedaj je $(\mathcal{M}_n(\mathcal{F}), *)$ monoid(ni pa grupa, ker niso vsi elementi obrnljivi)

Definicija 77: Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{F}$ polje, **splošna linearna grupa** je

$$\mathcal{GL}_n := M_n(\mathcal{F})^* = \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})|\ A \text{ je obrnljiva}\} \tag{59}$$

$$\mathcal{GL}n := M_n(\mathcal{F})^* = \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})|\ det(\mathcal{A}) \neq 0\}$$

Opomba: Če bi imeli matrike zgolj nad kolobarjem bi potrebovali vsaj komutativnost, da bi bila determinanta sploh smiselna($ad - bc = da - bc$)

Definicija 78:
Naj bo $n \in \mathbb{N}$ *in* $\mathcal{F}$ *polje,* ***specialna linearna grupa*** *je*

$$\mathcal{SL}_n := \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})|\ det(\mathcal{A}) = 1\} \tag{60}$$

Definicija 79:
Naj bo $n \in \mathbb{N}$ *in* $\mathcal{F}$ *polje,* ***ortogonalna (linearna) grupa*** *je*

$$\mathcal{O}_n := \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})|\ \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}\} \tag{61}$$

Kjer $\mathcal{A}^*$ označuje transponirano konjugirano matriko

Definicija 80:
*Naj bo $n \in \mathbb{N}$, **unitarna (linearna) grupa** je*

$$\mathcal{U}_n := \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})|\ \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}\} \tag{62}$$

Definicija 81: *Naj bo $n \in \mathbb{N}$, **specialna ortogonalna (linearna) grupa** je*

$$\mathcal{SO}_n := \{\mathcal{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})|\ det(\mathcal{A}) = 1\} \tag{63}$$

Definicija 82: *Naj bo $n \in \mathbb{N}$, **specialna unitarna (linearna) grupa** je*

$$\mathcal{SU}_n := \{\mathcal{A} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})|\ det(\mathcal{A}) = 1\} \tag{64}$$

Definicija 83: *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{F}$ polje, **simplektična (linearna) grupa** je*

$$\mathcal{S}p_n(\mathcal{F}) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathcal{F})|\ \mathcal{A}\mathcal{J}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{I}\} \tag{65}$$

Kjer

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_n \\ -\mathcal{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

3 Homomorfizni in kvocientne strukture

3.1 Izomorfizmi grup, ciklične grupe

Definicija 84: *Naj bosta $(\mathcal{G}_1, *)$ in $(\mathcal{G}_2, *)$ grupi. Grupi $\mathcal{G}_1$ in $\mathcal{G}_2$ sta **izomorfni**, če obstaja taka bijektivna preslikava $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ da velja:*

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}_1.\ \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2) \tag{66}$$

Pišemo:

$$\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$$

Opomba: Če je katera izmed grup (ali pa obe) aditivna primerno spremenimo operacijo.

Opomba: Če imamo končni grupi, ki sta si izomorfni, potem sta njuni tabeli 'enaki'.
$\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, izomorfizem, potem $\mathcal{G}_2 = \{\varphi(g_1), \varphi(g_2), \ldots, \varphi(g_n)\}, g_i \in \mathcal{G}_1$
Torej se g_i in $\varphi(g_i)$ v tablah pojavita na istem mestu.

Primer:

Grupna tabela za $(\mathbb{Z}_4, +)$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ s tabelo

*	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Tabeli se nam zdita sumljivo podobni $0 \sim 1, 1 \sim i, 2 \sim -1, 3 \sim -i$, saj nastopajo na istih mestih.
Če si pogledamo splošno grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ in $\mathcal{U}_n := \{z \in \mathbb{C} |\ z^n = 1\} = \underbrace{\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}}_{a = cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n})}$

Vidimo:

$$a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j} & ; i + j < n \\ a_{i+j-n} & ; i + j \geq n \end{cases}$$

V čemer prepoznamo seštevanje v $\mathbb{Z}_n$

Trditev 30:

$$\mathcal{U}_n \cong \mathbb{Z}_n$$

Dokaz.

$$\varphi : \mathcal{U}_n \to \mathbb{Z}_n$$

$$\varphi : z_i \mapsto i$$

φ je bijekcija in $\varphi(z_i * z_j) = \varphi(z_i) + \varphi(z_j)$, torej sta si grupi izomorfni. □

Trditev 31:Če je $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ izomorfizem je tudi $\varphi^{-1} : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}$ izomorfizem.

Dokaz. Ker je φ injektivna je dovolj pokazati: $\varphi(\varphi^{-1}(uv)) = uv = \varphi(\varphi^{-1}(u))\varphi(\varphi^{-1}(v)) = \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(v))}_{\text{Ker je } \varphi \text{ homeomorfizem}}$ □

Primer:
1. $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}$ Izomorfizem je kar identiteta
2. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+, *)$, kjer $\varphi : x \mapsto e^x$
3. $(\mathbb{Z}, +) \cong (n\mathbb{Z}, +)$, kjer $\varphi : x \mapsto nx$, to velja za $n \geq 1$

Definicija 85: *Grupi, ki je generirana z enim samim elementom pravimo* ***ciklična grupa****.*

Če je $\mathcal{G}$ generirana z a pišemo: $\mathcal{G} =< a >$
Primer:
1. $< a >= \{a^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ za množenje
2. $< a >= \{na |\ n \in \mathbb{Z}\}$ za seštevanje
3. $< 1 >=< -1 >= (\mathbb{Z}, +)$
4. $< 1 >= (\mathbb{Z}_n, +)$, podgrupa $(\mathbb{Z}, +)$
5. $< i >=< -1 >= \{1, i, -1, -i\} = \mathcal{U}_4$

Izrek 7:
Naj bo $\mathcal{G}$ ciklična grupa:

(a) Če je $\mathcal{G}$ neskončna je izomorfna $(\mathbb{Z}, +)$

(b) Če je $\mathcal{G}$ končna je izomorfna $(\mathbb{Z}_n, +)$ za nek $n \in \mathbb{N}$

Dokaz. Naj bo a generator grupe $\mathcal{G}$
1. $\forall n \in \mathbb{Z}. \forall m \in \mathbb{Z}.\ m \neq n \implies a^n \neq a^m$
Torej je grupa neskončna, dokazujemo: $\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$
Vzemimo: $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathcal{G}, n \mapsto a^n$, ki je zaradi predpostavke injektivna in surjektivna, ker generira a^n generira grupo. Prav tako pa velja:
$\varphi(n+m) = \underbrace{a^{n+m} = a^n + a^m}_{(14)} = \varphi(n) * \varphi(m)$ in je torej izomorfizem.
2. $\exists m \in \mathcal{N}.\ \exists n \neq m \in \mathbb{N}.\ a^n = a^m$
Torej $a^{n-m} = 1 \iff \exists s \in \mathbb{N}.\ a^s = 1$.
Če $n = 1$, potem $\mathcal{G} = \{1\}$ in je izomorfna $(\mathbb{Z}_1, +)$
Naj bo n sedaj najmanjše tako naravno število$(a^n = 1, a^k \neq 1, 0 < k < n)$
Očitno so si elementi $1, a, a^2, \ldots a^{n-1}$ različni, saj smo tako izbrali n, torej je $|\mathcal{G}| \geq n$.
Za drugo smer pa vzemimo $x = a^m \in \mathcal{G}$, $m = qn + r, 0 \leq r \leq n-1$.
Torej $x = a^m = a^{qn+r} = (a^n)^q * a^r = a^r \implies |\mathcal{G}| \leq n$
Iz zgornjih ugotovitev velja: $|\mathcal{G}| = n$ $z_i = a^i$ in $\varphi(z_i) = i$ kar pa je izomorfizem. □

Posledica: Če je $\mathcal{G}$ poljubna grupa tako vsak element generira ciklično podgrupo $(< a >= \{a^n |\ n \in \mathbb{Z}\})$.

Definicija 86: *Naj bo a element grupe $\mathcal{G}$. Če bostaja tak $s \in \mathbb{N}$, da velja $a^s = 1$ (1 je enota grupe), rečemo da ima a* ***končen red****, najmanjšemu naravnemu številu s to lastnostjo pravimo* ***red elementa*** *a. Če pa takega elementa ni, potem pravimo, da ima a* ***neskončen red****.*

Trditev 32: $red(a) = | < a > |$

Dokaz. $red(a) = n \iff a^n = 1 \wedge a^k \neq 1, 1 \leq k < n$
$< a >= \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} \implies | < a > | = n$ □

Opomba: Če je $\mathcal{G}$ grupa za seštevanje je red elementa tak najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da $na = 0$.
Primer:
1. V vsaki grupi ima enota red 1.
2. V $(\mathbb{Z}, +)$ imajo vsi elementi razem 0 neskončen red.
3. $\mathbb{Z}_4$, 1 in 3 imata red 4, 2 ima red 2.
4. $\mathcal{D}_4$(Simetrije pravokotnika, ki ni kvadrat) imajo vsi razen enote red 2

Opomba: Očitno izomorfizmi ohranjajo red elementov
Opomba: $\mathbb{Z}_4$ in $\mathcal{D}_4$ nista izomorfni. Je pa res, da velja:

$$\mathcal{D}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

3.2 Izomorfnost vektorskih prostorov

Definicija 87: *Naj bosta $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}'$ vektorska prostora nad istim poljem $\mathcal{F}$. Vektorski prostor $\mathcal{V}$ je izomorfen $\mathcal{V}'$, če obstaja bijektivna linearna preslikava $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$. To preslikavo imenujemo izomorfizem vektorskih prostorov.*

Izrek 8:
Končno razsežna vektorska prostora sta si izomorfna natanko tedaj, ko imata enako dimenzijo.

Dokaz. $\Longrightarrow$
Naj ima $\mathcal{V}$ dimezijo n in bazo: $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
Naj bo $\lambda_1\varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(b_n) = 0$ za neke $\lambda_i \in \mathcal{F}$
Ker je φ linearna in injektivna velja:
$\varphi(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n) = 0$
Ker so si bazni vektorji neodvisni so vsi skaraji ničelni: $\lambda_i = 0$.
Tako smo dobili linearno neodvisne vektorje, pokazati moramo še, da so tudi ogrodje.
Ker φ je surjektivna velja: $v' \in \mathcal{V}' = \varphi(v)$ za poljuben v'.
$v' = \lambda_1\varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(b_n)$, vidimo da ima $\mathcal{V}'$ linearno ogrodje z močjo n $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$.
Tako smo dobili linearno ogrodje neodvisnih vektorjev, ki je torej baza z močjo n. Dimenzija $\mathcal{V}'$ je torej n, enaka $\mathcal{V}$.
$\Longleftarrow$
Vzemimo $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ za bazo $\mathcal{V}$ in $\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\}$ za bazo $\mathcal{V}'$.
Definirajmo:
$\varphi(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 b'_1 + \lambda_2 b'_2 + \cdots + \lambda_n b'_n$
Potrebno je zgolj še preveriti, da je to bijektivna linearna preslikava.

□