Skripta za algebro2

Filip Koprivec

7. oktober 2015

"If I find in myself desires which nothing in this world can satisfy, the only logical explanation is that I was made for another world."

— C. S. Lewis

Kazalo

1 Osnovne algebrske strukture

1.1 Binarne operacije

Definicija 1: Binarna Operacija *(tudi dvočlena operacija)* $\circ$ *na množici* $\mathcal{S}$ *je preslikava iz* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ *v* $\mathcal{S}$.
Torej $\circ : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \ \rightarrow \ \mathcal{S}$

Primer:
Osnovna zgleda binranih operacij na $\mathbb{Z}$ sta:
1. Seštevanje: $(n, m) \mapsto n + m$
2. Množenje: $(n, m) \mapsto n \times m$

Skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$ **ni** binarna operacija.
Vektorski produkt v $\mathbb{R}^3$ **je** binarna operacija.

Definicija 2: *Operacija* $\circ$ *je* ***asociativna****, če ustreza enačbi*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \tag{1}$$

Enakost 1 imenujemo **Zakon o asociativnosti**
Operacije, ki jih bomo obravnavali bodo praviloma asociativne.

Definicija 3: *Elementa* $x, y \in \mathcal{S}$ ***komutirata****, če velja*

$$\forall x, y \in \mathcal{S}. x \circ y = y \circ x \tag{2}$$

Enakost 2 imenujemo ***Zakon o komutativnosti***

Opomba: Kadar je iz konteksta razvidno, o kateri operaciji govorimo, pogosto namesto "$\circ$ je komutativna rečemo tudi $\mathcal{S}$ je komutativna"
Primer:
1. Operacija $+$ na $\mathbb{Z}$ je tako asociatitivna in komutativna
2. Operacija * na $\mathbb{Z}$ je tako asociatitivna in komutativna
3. Operacija - na $\mathbb{Z}$ **ni** niti asociativna niti komutativna
Opomba: Na opracijo odštevanja gledamo kot na izpeljano operacijo in ne kot na samostojna operacijo, saj jo vpeljemo preko seštevanja in pojma nasprotnega elementa.
4. Naj bo $\mathcal{X}$ poljubna neprazna množica. Z $F(\mathcal{X})$ označimo množico vseh preslikav iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{X}$, potem je $(f, g) \mapsto f \circ g$ (kompozitum funkcij) binarna operacija na $F(\mathcal{X})$.
Opomba: Operacija je asociativna, in kadar $|\mathcal{X}| \geq 2$ ni komutativna

Definicija 4: *Naj bo* $\circ$ *binarna operacija na na* $\mathcal{S}$ *in* $e \in \mathcal{S}$. e *se imenuje* ***nevtralni element****, če velja*

$$\forall x \in \mathcal{S}. e \circ x = x \circ e = x \tag{3}$$

Primer:
1. 0 je nevtralni element za seštevanje na $\mathbb{Z}$.
2. 1 je nevtralni element za množenje na $\mathbb{Z}$.
3. id_x (identična preslikava) je nevtralni element za $F(\mathcal{X})$

Opomba: Nevtralni element nima zagotovljenega obstoja (recimo + na $\mathbb{N}$ ali $*$ na sodih celih številih).

Trditev 1: Če nevtralni element obstaja je en sam

Dokaz. Naj bosta $f, e \in \mathcal{S}$ nevtralna elementa.

$$e = e \circ f \quad // \text{ Ker je f nevtralni element}$$

$$e \circ f = f \quad // \text{ Ker je e nevtralni element}$$

$$e = f$$

□

Definicija 5: *Element e' je **levi nevtralni element**, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}. e' \circ x = x \tag{4}$$

Definicija 6: *Element e'' je **desni nevtralni element**, če velja:*

$$\forall x \in \mathcal{S}. x \circ e'' = x \tag{5}$$

Opomba: Levih in desnih nevtralnih elementov je lahko več

Primer:
1. $\circ : (x, y) \mapsto y$.
Vsak element je levi nevtralni element
2. 0 je desni nevtralni element za odštevanje v $\mathbb{Z}$

Trditev 2: Naj bo za operacijo $\circ$ e' levi nevtralni element, e'' pa desni nevtralni element. Tedaj velja $e' = e'' = e$(Sta si levi in desni nevtralni element enaka in je(sta) nevtralni element)

Dokaz.

$$e' = e' \circ e'' = e''$$

□

Definicija 7: *Naj bo $\circ$ operacija na $\mathcal{S}$ in naj bo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Rečemo, da je $\circ$ **notranja operacija na** $\mathcal{T}$ ali da je množica $\mathcal{T}$ **zaprta za** $\circ$ **na** $\mathcal{T}$, če velja*

$$\forall t, t' \in \mathcal{T}. t \circ t' \in \mathcal{T} \tag{6}$$

Primer:
Množica $\mathbb{N}$ je zaprta za operaciji $+$ in $*$, ni pa zaprta za operacijo $-$.

Definicija 8: *Preslikavi iz $\mathcal{K} \times \mathcal{S}$ v $\mathcal{S}$ kjer $\mathcal{K}! = \mathcal{S}$ rečemo **Zunanja binarna operacija***

Primer:
1. Množenje vektorja s skalarjem
$(\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x}$, kjer je $(K = \mathbb{R}, S = \mathbb{R}^n)$
$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

1.2 Polgrupe in monoidi

Definicija 9: ***Algebrska struktura** je množica, opremljena z eno ali več operacijami (notranjimi ali zunanjimi), ki im ajo določene lastnosti*

Definicija 10: ***Polgrupa** je par množice $\mathcal{S}$ skupaj z **asociativno binarno operacijo**. Pišemo: $(\mathcal{S}, \circ)$*

Opomba: Kadar je jasno o kateri operaciji govorimo, pogosto govorimo kar o polgrupi $\mathcal{S}$
Primer:
1. $(\mathbb{N}, +), \underbrace{(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{N}, *), \ldots}_{Niso\ samo\ polgrupe\ ampak\ kar\ grupe}$

Naj bo $(\mathcal{S}, \circ)$ polgrupa, po zakonu 1 o asociativnosti velja:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

zato lahko okepaje spuščamo in vse to pišemo kot $x \circ y \circ z$. Kaj pa če imamo več kot tri elemente. Ali velja tudi:
$(x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4) = ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4 = x_1 \circ (x_2(\circ x_3 \circ x_4)) = \ldots$