Mreže

Kralj Samo, Koprivec Filip

FMF

20. april 2016

Urejenost

Definition

Naj bo $\mathcal{L}$ množica, relacija $\leq$ je **(šibka) delna urejenost**, če je

- refleksivna ($a \leq a$)
- antisimetrična ($a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$)
- tranzitivna ($a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$)

Opomba: Občasno smo nekoliko "šlampasti"in za lažjo predstavljivost uporabimo tudi relacijo $\geq$, ki jo definiramo kot $a \geq b \iff b \leq a$

Dogovor

Naj bo $\mathcal{L}$ množica urejena z relacijo delne urejenosti $\leq$ in $x, y \in \mathcal{L}$

Supremum in infimum

Definition

S je **supremum** x in y, če velja:

- $S \geq x \wedge S \geq y$ (Zgornja meja)
- $\forall S' \in \mathcal{L} \implies (S' \geq x \wedge S' \geq y \implies S \leq S')$ (Je najmanjša zgornja meja)

označimo: $S = x \vee y$

Definition

s je **infimum** x in y, če velja:

- $s \leq x \wedge s \leq y$ (Spodnja meja)
- $\forall s' \in \mathcal{L} \implies (s' \leq x \wedge s' \leq y \implies s' \leq s)$ (Je največja spodnja meja)

označimo: $s = x \wedge y$

Definition

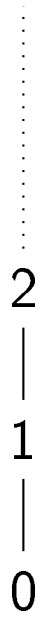
Množica $\mathcal{L}$ je **linearno urejena**, če za poljubna x, y velja $x \leq y$ ali $y \leq x$

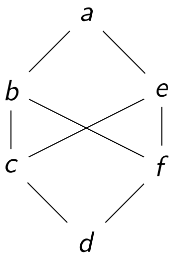
Definition

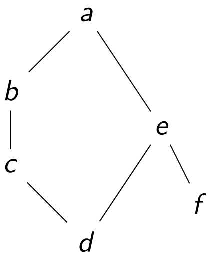
Množica $\mathcal{L}$ je **mreža**, če ima poljuben par x, y infimum in supremum.

Osnovni primeri mrež

$\mathbb{N}, \leq$

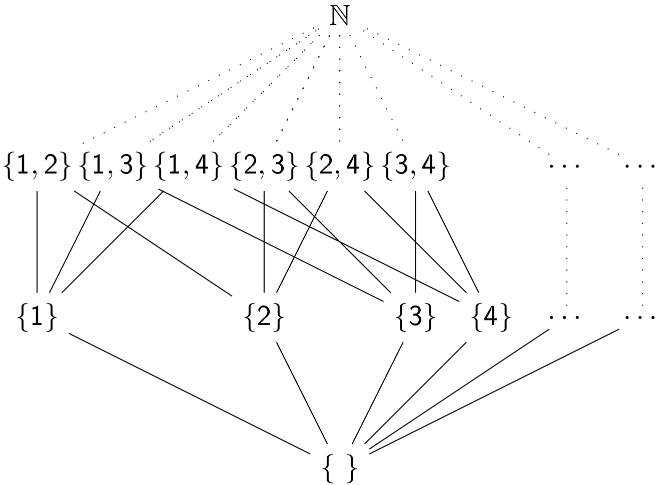






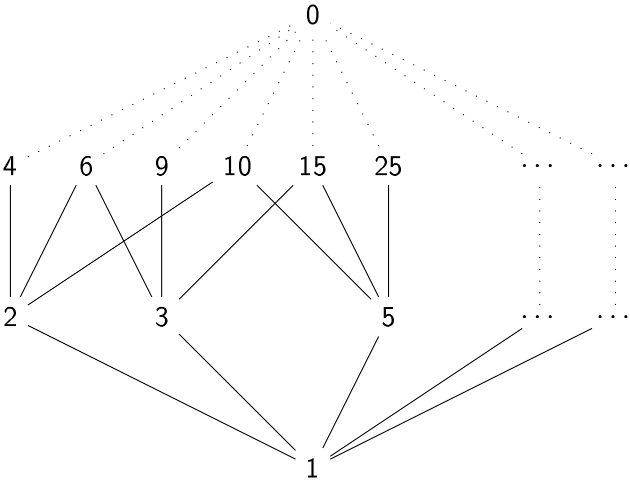
Potenčna množica naravnih števil za inkluzijo

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq$$



Naravna števila za deljivost

$\mathbb{N}, |$



Polne mreže

Definition

Mreža $\mathcal{L}$ je polna, če za poljubno $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ obstajata infimum in supremum za $\mathcal{A}$.

Example

Poljubna linearna omejena mreža je polna, na nasproten način pa dobimo mreže, ki niso polne: $\mathbb{R}, \leq$.

Zakoni v mrežah

Zakoni v mrežah

- $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (Idempotentnost)
- $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ (Komutativnost)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Asociativnost)
- $x \vee (x \wedge y) = x$
  $x \wedge (x \vee y) = x$ (Absorbcija)

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$
Iz definicje ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$
Iz definicje ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$
Potem velja tudi $a \geq (y \vee z)$ in $a \geq x \vee (y \vee z)$ torej $a \geq b$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$
Iz definicje ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$
Potem velja tudi $a \geq (y \vee z)$ in $a \geq x \vee (y \vee z)$ torej $a \geq b$
Na skoraj enak naredimo iz druge strani in dobimo $b \geq a$, ker pa je zaradi antisimetričnosti relacije mogoče zgolj, kadar velja $a = b$ $\square$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$
Iz definicije in pa sledi $x \geq x \wedge (x \vee y)$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$
Iz definicije in pa sledi $x \geq x \wedge (x \vee y)$
Torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$ in $x \geq x \wedge (x \vee y)$, dobimo $x = x \wedge (x \vee y)$ $\square$

Theorem

Če imamo množico $\mathcal{L}$, za katero sta definirani operaciji $\vee, \wedge$ in če za te dve operacji veljajo zgornji zakoni, potem je ta množica mreža.

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$x \leq y \iff x \wedge y = x$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$x \leq y \iff x \wedge y = x$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
Tranzitivnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$x \leq y \iff x \wedge y = x$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$
Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo
$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ torej

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$
Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo
$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ torej $x \leq z$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$
Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo
$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ torej $x \leq z$
Preverimo še, da velja $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja
$x \leq y \iff x \wedge y = x$
in preverimo, da je to delna urejenost
Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$
Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$
Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo
$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ torej $x \leq z$
Preverimo še, da velja $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$
Uporabimo zadnji zakon in $x \vee b = (x \vee y) \wedge y = b$ in identično v drugo smer.

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, poglejmo si samo supremum

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, poglejmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, poglejmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Naj bo z neka zgornja meja x, y, $x \vee z = y \vee z = z$

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, poglejmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Naj bo z neka zgornja meja x, y, $x \vee z = y \vee z = z$

Dobimo $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$, kar pomeni, da $x \vee y \leq z$, torej je $x \vee y$ natančna zgornja meja. □

Naravno se pojavi vprašanje, ali za operaciji v mrežah obstaja kakšne vrste enota ali celo inverz.

Definition

Če v mreži obstaja največji element, potem ta element označimo z 1 ($\forall x \in \mathcal{L}.\ x \leq 1$)

Definition

Če v mreži obstaja najmanjši element, potem ta element označimo z 0 ($\forall x \in \mathcal{L}.\ x \geq 0$)

Če v mreži obstajata 0 in 1 potem velja:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

Če v mreži obstajata 0 in 1 potem velja:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

Example

0 za $\mathbb{N}, |$
$\{\}, \mathbb{N}$ za $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Definition

V mreži z elementoma 0 in 1 elementa x in x' imenujemo **komplementarna**, če velja:

- $x \vee x' = 1$
- $x \wedge x' = 0$

Definition

Mrežo, v katri poljubnemu x pripada **vsaj** en komplement imenujemo **komplementarna mreža**.

Example

Tipičen primer so vektorski podprostori nekega prostora $\mathcal{V}$, 1 je celoten podprostor, 0 je ničelni podprostor, komplementi poasmeznih elementov pa so kar ortogonalni komplementi.

Example

Ravnina, premice na njej in točke
Komplementi premic so točke ki na njej ne ležijo, komplementi točk pa premice, ki ne vsebujejo teh točk.
Imamo lahko več komplementov.

Definition

Neprazna množica $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ je **podmreža**, če je tudi sama mreža za isti operaciji in se na njih ujema. Povedano drugače $x \vee y \in \mathcal{M}$ in $x \wedge y \in \mathcal{M}$

Theorem

Če v mreži $\mathcal{L}$ vzamemo poljubna $x \leq y$, potem je množica $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} | \ x \leq z \leq y\}$ podmreža mreže $\mathcal{L}$.

Dokaz.

Preprosto preverimo obstoj imfimuma in supremuma

Theorem

Če v mreži $\mathcal{L}$ vzamemo poljubna $x \leq y$, potem je množica $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} |\ x \leq z \leq y\}$ podmreža mreže $\mathcal{L}$.

Dokaz.

Preprosto preverimo obstoj imfimuma in supremuma
Vzemimo poljubna $x', y' \in \mathcal{L}(x, y)$ in preverimo zaprtost

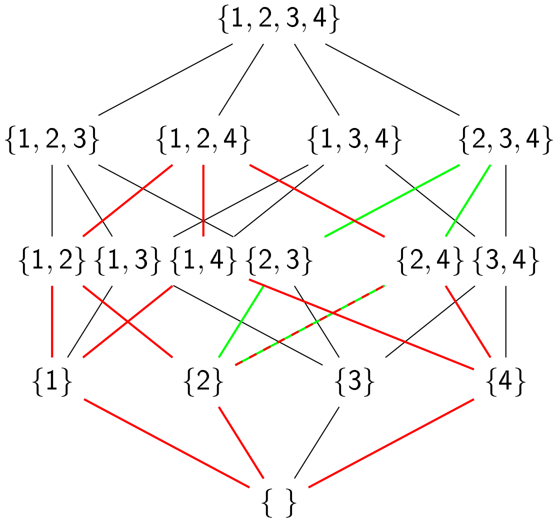
Theorem

Če v mreži $\mathcal{L}$ vzamemo poljubna $x \leq y$, potem je množica $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} |\ x \leq z \leq y\}$ podmreža mreže $\mathcal{L}$.

Dokaz.

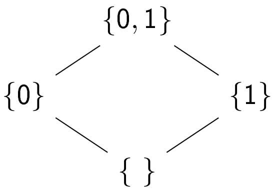
Preprosto preverimo obstoj imfimuma in supremuma
Vzemimo poljubna $x', y' \in \mathcal{L}(x, y)$ in preverimo zaprtost
$x \geq x' \vee y' \geq x' \wedge y' \geq y$ $\square$

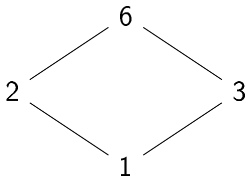
$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \subseteq$



$\{0,1\}, \subseteq$

$\{1,2,3,6\}, \mid$





Mreži se zdita sumljivo podobni, ali lahko to kako posplošimo?

Definition

Preslikava $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ je **homomorfizem**, če za poljubna $x, y \in \mathcal{L}$ velja:

- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

Funkcija za prej

x	f(x)
$\{\}$	1
$\{0\}$	2
$\{1\}$	3
$\{1, 2\}$	6

Theorem

Za nek homomorfizem f velja $f(\mathcal{L})$ je podmreža $\mathcal{L}$.

Opomba: Homomorfizem ohranja urejenost

Theorem

Bijektivna preslikava f, $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ je izomorfizem, če ohranja red v obeh smereh

Red se mora ohranjati v obeh smereh

Identiteta : $(\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$

Definition

Mreža je **distributivna**, če za $\vee$ in $\wedge$ veljata zakona:

- $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
- $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

Example

Linearno urejena množica je distributivna. Potenčna množica glede na inkluzijo je prav tako distributivna.

Theorem

Če ima distributivna mreža $\mathcal{L}$ elementa $0, 1$, potem ima vsak elementa največ en komplment (ni pa še zagotovljen obstoj komplementa)

Dokaz.

Naj bo a poljuben element mreže. Naj bosta $a' ina''$ dva njegova komplementa.

$$a'' = 1 \wedge a'' = (a \vee a') \wedge a'' = (a \wedge a'') \vee (a' \wedge a'') = a' \wedge a''.$$

Torej sledi $a'' \leq a'$. Analogno pokažemo $a' \leq a''$ in sledi $a' = a''$. □

Definition

Distributivno mrežo v kateri ima vsak element komplement imenujemo **Boolova algebra**.

Definition

Kolobar, v katerem je vsak element idempotenten imenujemo **Boolov kolobar**.

Theorem

Boolov klobar je komutativen s karakteristiko 2

Dokaz.

Dokaza □

Definiramo operaciji $\vee, \wedge$ in pokažimo, da je to mreža

Definition

Mreža $\mathcal{L}$ je **modulska** mreža, če za $a \leq c$ velja:

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

Primer: $\mathcal{G}$ grupa in označimo z $\mathcal{L}$ množico vseh njenih podgrup edink. Množico $\mathcal{L}$ uredimo glede na inkluzijo. Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ dve podgrupi edinki $\mathcal{G}$. Za infinum dveh podrup vzamemo presek, za supremum pa izberemo produkt $\mathcal{H}\mathcal{K}$.

Theorem

Mreža podgrup edink je modulska.

Dokaz:

Naj bo $\mathcal{G}$ grupa in $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ njene podgrupe edinke in naj velja $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$. Vemo, da $\mathcal{H} \vee \mathcal{K} = \mathcal{H}\mathcal{K}$.

Poglejmo si $(\mathcal{H} \vee \mathcal{K}) \wedge \mathcal{L}$.

Definition

Elementa a, b sta soseda, če velja: $a \leq b$ in če iz $a \leq c$ in $c \leq b$ sledi $c = a$ ali $c = b$. Zaporedje elementov $a, b, c, ..., x$ bomo imenovali **veriga**, če sta vsaka dva zaporedna elementa soseda in velja $a \leq b, b \leq c, ...$. Ta veriga veže elementa $ainx$.

Dva elementa mreže je možno povezati z več različnimi verigami.

Brez dokaza navedimo naslednji izrek:

Theorem

Vse verige, ki v modulski mreži vežejo isti par elementov, so enako dolge.

Ideja o definiranju dimenzije mreže.