Mreže

Filip Koprivec, Samo Kralj

28. april 2016

"If I find in myself desires which nothing in this world can satisfy, the only logical explanation is that I was made for another world."

— C. S. Lewis

Kazalo

1 Uvod

Mreža je množica z dodatno strukturo (delno urejenostjo), ki zadošča poguju, da ima poljuben par elementov infimum in supremum. Najprej si bomo pogledali mreže s stališča matematične logike in urejenosti, kasneje pa si jih bomo ogledali še s stališča algebraičnih operacij nad njimi, ter pokazali, zakaj sta ta dva pogleda ekvivalentna.

1.1 Osnovne definicje

Definicija 1:*Naj bo $\mathcal{L}$ množica, relacija $\leq$ je* ***(šibka) delna urejenost****, če je*

- *refleksivna ($a \leq a$)*
- *antisimetrična ($a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$)*
- *tranzitivna ($a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$)*

Pišemo a je manjši ali enak b, občasno tudi a je pod b.

Opomba: Zgolj iz preprostosti definiramo še drugo relacijo $a \geq b \iff b \leq a$, ki je očitno tudi delna urejenost.

Opomba: Poznamo tudi **strogo delno urejenost**, ki jo definiramo kot $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$
Primer:
Tipičen primer delne urejenosti je kar sama motivacija za vpeljavo relacije. Vzemimo množico realnih števil $\mathbb{R}$ in na njej relacijo $\leq$, za katero preprosto preverimo da je delna urejenost.

Trditev 1: Relacija deljivosti ($|$) na množici $\mathbb{N}$ je delna urejenost.

Dokaz. Preverili bomo da ta relacija zadošča vsem zahtevam. Spomnimo se, da a deli b natanko tedaj, kadar obstaja tako celo število k, da zadosti enakosti $b = ka$, oziroma $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}.\ b = ka$.

- Refleksivnost: $a = 1 * a$, torej $a \mid a$
- Antisimetričnost: $a \mid b \implies b = k_1 a$, $b \mid a \implies a = k_2 b$, vstavimo a v prvo enakost in dobimo $b = k_1 k_2 b$, torej $k_1 = k_2^{-1}$, torej $k_1 = k_2 = 1$ in dobimo $b = a$
- Tranzitivnost: $a \mid b \wedge b \mid c \implies a \mid c$, vemo torej $b = k_1 a$ in $c = k_2 b$, vstavimo prvo enakost v drugo in dobimo $c = \underbrace{k_2 k_1}_{\in \mathbb{Z}} a$ torej $a \mid c$.

□

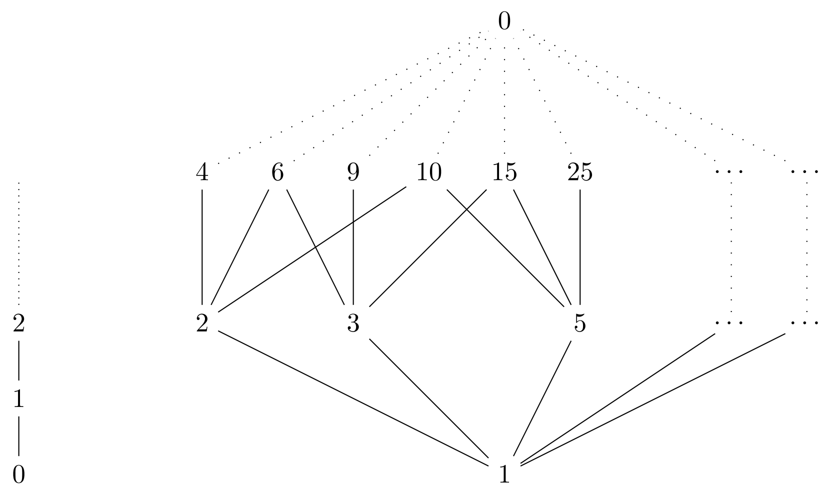
Opomba: Preprosto preverimo, da je za poljubno množico $\mathcal{A}$, relacija $\subseteq$ delna urejenost na potenčni množici množice $\mathcal{A}$ ($P(\mathcal{A})$).

Definicija 2: *Množica $\mathcal{L}$ je* ***linearno urejena****, če za poljubna x, y velja $x \leq y$ ali $y \leq x$*

Primer:
Množica $\mathbb{N}$ z urejenostjo $\leq$ je linearno urejena, saj za poljubna x in y velja $x \leq y \vee y \leq x$, če pa velja $x = y$, potem pa sta pravilna celo oba dela izjave. Množica $\mathbb{N}$ urejena glede na relacijo deljivosti pa **ni** linearno urejena, saj za recimo dve poljubni praštevilo velja $p_1 \nmid p_2 \wedge p_2 \nmid p_1$.
Opomba: Pridstavitem linearno urejenih množic s Hassejevim diagramom nas spominja na premico, od torej tudi izraz. To je lepo vidno na sliki (1a).
Za lepšo predstavo splošnih linearnih urejenih diagramov si pomagamo s Hassejevim diagramom, ki s pomočjo povezav med točkami prikaže relacije med njimi.

Definicija 3: *Naj bo $\mathcal{L}$ delno urejena množica glede na neko relacijo, ki o označimo z $\leq$. Hassejev diagram je graf, katerega točke so elementi $\mathcal{L}$, med točkama x in y pa je povazava natnko tedaj, kadar velja:*

$$x \leq y \wedge \nexists z \in \mathcal{L}.\ x \leq z \leq y$$



(a) $\mathbb{N}, \leq$ (b) Hassejev diagram za $(\mathbb{N}, |)$

Slika 1: Primer Hassejevih diagramov

1.2 Supremum in infimum

Definicija 4: *S je* ***supremum*** *x in y, če velja:*

- $S \geq x \wedge S \geq y$ *(Zgornja meja)*
- $\forall S' \in \mathcal{L} \implies (S' \geq x \wedge S' \geq y \implies S \leq S')$ *(Je najmanjša zgornja meja)*

Torej je S natačna zgornja meja x in y, če je njuna zgornja meja, hkrati pa je vsaka od S različna zgornja meja večja ali enaka S. Označimo: $S = x \vee y$.

Definicija 5:*s je **infimum** x in y, če velja:*

- $s \leq x \wedge s \leq y$ *(Spodnja meja)*
- $\forall s' \in \mathcal{L} \implies (s' \leq x \wedge s' \leq y \implies s' \leq s)$ *(Je največja spodnja meja)*

Torej je s natačna spodnja meja x in y, če je njuna spodnja meja, hkrati pa je vsaka od s različna zgornja meja manjša ali enaka s. Označimo: $s = x \wedge y$.

Opomba: V literaturi se za supremum občasno uporablja tudi oznaka $\cup$, za infimum pa $\cap$.
Primer:
1. Za množico $\mathbb{R}$, ki je urejena glede na $\leq$ in poljubni števili x, y velja: $x \vee y = max\{x, y\}$ in $x \wedge y = min\{x, y\}$.
2. Za množico $\mathbb{N}$, ki je urejena glede na relacijo deljivosti in poljubni števili x, y velja: $x \vee y = lcm\{x, y\}$ (najmanjši skupni večkratnik) in $x \wedge y = gcd\{x, y\}$ (največji skupni delitelj).

1.3 Definicija mreže

Definicija 6:*Množica $\mathcal{L}$ je **mreža**, če za poljuben par x, y v $\mathcal{L}$ obstajata infimum in supremum.*

Primer:
Naravna števila so mreža tako za urejenost glede na relacijo $\leq$, kot tudi za urejenost glede na relacijo deljivosti. To lahko lepo vidimo na sliki (1).

2 Osnovni primeri mrež