

Mreže

Filip Koprivec, Samo Kralj

28. april 2016

*“If I find in myself desires which nothing in this world
can satisfy, the only logical explanation is that I was
made for another world.”*

— C. S. Lewis

Kazalo

1	Uvod	3
1.1	Osnovne definicije	3
1.2	Supremum in infimum	4
1.3	Definicja mreže	5
2	Osnovni primeri mrež	5
3	Zakoni v mrežah	7
4	Podmreže, enote in komplementarne mreže	9
4.1	Podmreže	9
4.2	Enote in komplementi	10
5	Homomorfizmi mrež	12

1 Uvod

Mreža je množica z dodatno strukturo (delno urejenostjo), ki zadošča pogaju, da ima poljuben par elementov infimum in supremum. Najprej si bomo pogledali mreže s stališča matematične logike in urejenosti, kasneje pa si jih bomo ogledali še s stališča algebraičnih operacij nad njimi, ter pokazali, zakaj sta ta dva pogleda ekvivalentna.

1.1 Osnovne definicije

Definicija 1: Naj bo \mathcal{L} množica, relacija \leq je (*šibka*) **delna urejenost**, če je

- *refleksivna* ($a \leq a$)
- *antisimetrična* ($a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$)
- *tranzitivna* ($a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$)

Pišemo a je manjši ali enak b , občasno tudi a je pod b .

Opomba: Zgolj iz preprostosti definiramo še drugo relacijo $a \geq b \iff b \leq a$, ki je očitno tudi delna urejenost.

Opomba: Poznamo tudi **strogo delno urejenost**, ki jo definiramo kot $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$

Primer:

Tipičen primer delne urejenosti je kar sama motivacija za vpeljavo relacije. Vzemimo množico realnih števil \mathbb{R} in na njej relacijo \leq , za katero preprosto preverimo da je delna urejenost.

Trditev 1: Relacija deljivosti ($|$) na množici \mathbb{N} je delna urejenost.

Dokaz. Preverili bomo da ta relacija zadošča vsem zahtevam. Spomnimo se, da a deli b natanko tedaj, kadar obstaja tako celo število k , da zadosti enakosti $b = ka$, oziroma $a | b \iff \exists k \in \mathbb{Z}. b = ka$.

- Refleksivnost: $a = 1 * a$, torej $a | a$
- Antisimetričnost: $a | b \implies b = k_1 a$, $b | a \implies a = k_2 b$, vstavimo a v prvo enakost in dobimo $b = k_1 k_2 b$, torej $k_1 = k_2^{-1}$, torej $k_1 = k_2 = 1$ in dobimo $b = a$
- Tranzitivnost: $a | b \wedge b | c \implies a | c$, vemo torej $b = k_1 a$ in $c = k_2 b$, vstavimo prvo enakost v drugo in dobimo $c = \underbrace{k_2 k_1}_{\in \mathbb{Z}} a$ torej $a | c$.

□

Opomba: Preprosto preverimo, da je za poljubno množico \mathcal{A} , relacija \subseteq delna urejenost na potenčni množici množice \mathcal{A} ($P(\mathcal{A})$).

Definicija 2: Množica \mathcal{L} je **linearno urejena**, če za poljubna x, y velja $x \leq y$ ali $y \leq x$

Primer:

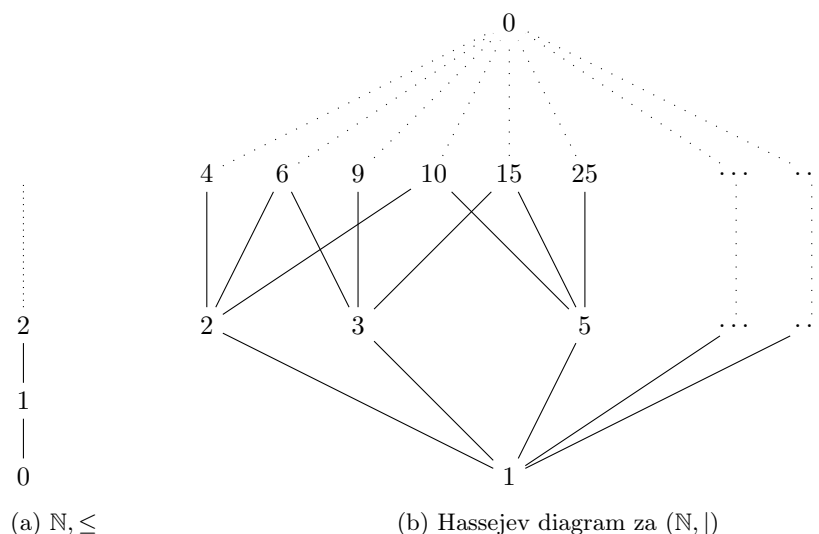
Množica \mathbb{N} z urejenostjo \leq je linearno urejena, saj za poljubna x in y velja $x \leq y \vee y \leq x$, če pa velja $x = y$, potem pa sta pravilna celo oba dela izjave. Množica \mathbb{N} urejena glede na relacijo deljivosti pa **ni** linearno urejena, saj za recimo dve poljubni praštevilo velja $p_1 \nmid p_2 \wedge p_2 \nmid p_1$.

Opomba: Pridstavitev linearno urejenih množic s Hassejevim diagramom nas spominja na premico, od torej tudi izraz. To je lepo vidno na sliki (1a).

Za lepšo predstavo splošnih linearnih urejenih diagramov si pomagamo s Hassejevim diagramom, ki s pomočjo povezav med točkami prikaže relacije med njimi.

Definicija 3: Naj bo \mathcal{L} delno urejena množica glede na neko relacijo, ki o označimo $z \leq$. Hassejev diagram je graf, katerega točke so elementi \mathcal{L} , med točkama x in y pa je povezava natanko tedaj, kadar velja:

$$x \leq y \wedge \nexists z \in \mathcal{L}. x \leq z \leq y$$



(a) \mathbb{N}, \leq

(b) Hassejev diagram za $(\mathbb{N}, |)$

Slika 1: Primer Hassejevih diagramov

1.2 Supremum in infimum

Definicija 4: S je **supremum** x in y , če velja:

- $S \geq x \wedge S \geq y$ (Zgornja meja)
- $\forall S' \in \mathcal{L} \implies (S' \geq x \wedge S' \geq y \implies S \leq S')$ (Je najmanjša zgornja meja)

Torej je S natančna zgornja meja x in y , če je njuna zgornja meja, hkrati pa je vsaka od S različna zgornja meja večja ali enaka S . Označimo: $S = x \vee y$.

Definicija 5: s je *infimum* x in y , če velja:

- $s \leq x \wedge s \leq y$ (Spodnja meja)
- $\forall s' \in \mathcal{L} \implies (s' \leq x \wedge s' \leq y \implies s' \leq s)$ (Je največja spodnja meja)

Torej je s natančna spodnja meja x in y , če je njuna spodnja meja, hkrati pa je vsaka od s različna zgornja meja manjša ali enaka s . Označimo: $s = x \wedge y$.

Opomba: V literaturi se za supremum občasno uporablja tudi oznaka \cup , za infimum pa \cap .

Primer:

1. Za množico \mathbb{R} , ki je urejena glede na \leq in poljubni števili x, y velja: $x \vee y = \max\{x, y\}$ in $x \wedge y = \min\{x, y\}$.
2. Za množico \mathbb{N} , ki je urejena glede na relacijo deljivosti in poljubni števili x, y velja: $x \vee y = \text{lcm}\{x, y\}$ (najmanjši skupni večkratnik) in $x \wedge y = \text{gcd}\{x, y\}$ (največji skupni delitelj).

1.3 Definicija mreže

Definicija 6: Množica \mathcal{L} je *mreža*, če za poljuben par x, y v \mathcal{L} obstajata infimum in supremum.

Primer:

Naravna števila so mreža tako za urejenost glede na relacijo \leq , kot tudi za urejenost glede na relacijo deljivosti. To lahko lepo vidimo na sliki (1).

Definicija 7: Mreža \mathcal{L} je *polna*, če za poljubno $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ obstajata infimum in supremum za \mathcal{A} .

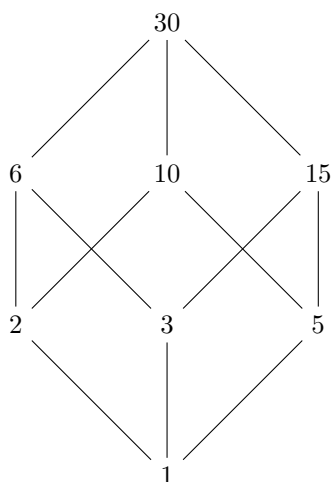
Primer:

Poljubna končna mreža je tudi polna mreža. Preprosto za infimum in supremum vzamemo infimum in supremum elementov po parih. Na podoben način pa dobimo mreže, ki niso polne. \mathbb{R}, \leq ni polna, saj množica \mathbb{N} nima niti infimuma niti supremuma.

2 Osnovni primeri mrež

Od prej se spomnimo, je poljubna podmnožica \mathbb{R} , urejena glede na relacijo \leq mreža. Za poljubni števili x, y velja: $x \vee y = \max\{x, y\}$ in $x \wedge y = \min\{x, y\}$, seveda pa sta tako infimum kot supremum v mreži. Opazimo, da so te množice vedno lierno urejene.

Množica naravnih števil pa nam poleg urejenosti $z \leq$ omogoča tudi ureditev



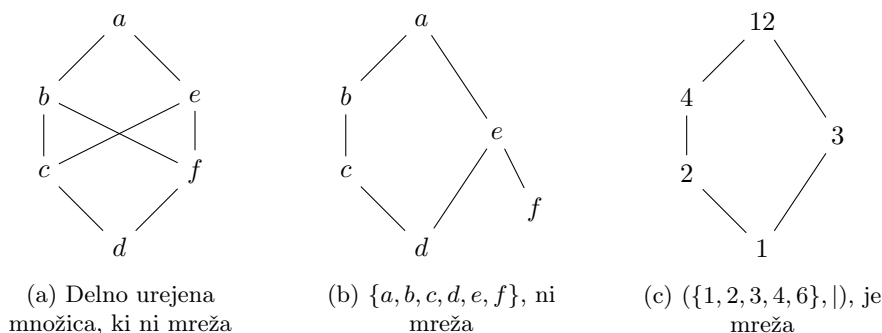
Slika 2: Mreža deliteljev števila 30 urejena glede na relacijo deljivosti

$z \mid$. V tem primeru dobimo Hassejev diagram iz slike (1b). Ta množica nima linearne ureditve, opazimo, pa da elementa 0 in 1 na nek način zaključujeta mrežo, saj so vsa naravna števila pod 0 (delijo 0), hkrati pa 1 deli vsa ostala naravna števila. S slike tudi lepo opazimo, da s v prvem nivoju urejenosti samo preštevila, v drugem nivoju urejenosti števila z natančno dvema deliteljema in v n -tem, nivoju ptevila z n delitelji.

Opomba: Če v naravna števila vključimo tudi 0, potem formula za supremum in infimum glede na najmanjše skupne večkratnike in največje skupne delitelje ne deluje več kadar je eden izmed argumentov 0.

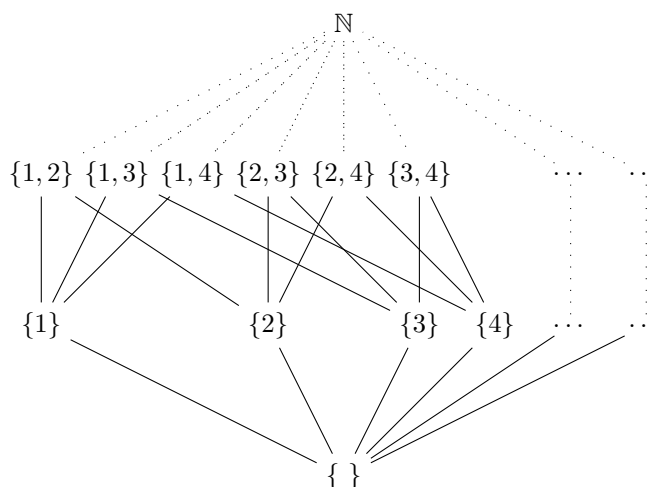
Pomembne mreže pa predstavljajo tudi mreže deliteljev posameznega naravnega števila. To lepo vidmo na sliki (2).

Delno urejene množice lahko predstavimo zgolj s Hassejevim diagramom. Poglejmo si nekaj množic, ki niso mreže in razložimo zakaj ne.



Slika 3: Primer delno urejenih množic, ki niso mreže

Če si pogledamo sliko (3) lahko hitro vidimo, zakaj te množici nista mreži. Množica na sliki (3a) ni mreža, saj elementa c in f nimata natančno določenega supremuma. Vidimo, da bi to lahko bila tako element e kot tudi element b ,

Slika 4: Hassejev diagram za $\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq$

vendar pa ju med samo ne moremo primerjati. Množica na sliki (3a) zato ni mreža. Bi pa postala mreža, če bi odstranili povezavo med c in e .

Če pa pogledamo sliko (3b) vidimo, da je problematičen element f . Tako recimo elementa $c \vee f = a$, medtem, ko je $c \wedge f$ nedoločen in zato množica ni mreža, bi pa to postala, če bi iz nje odstranili element f in tako dobili mrežo vseh deliteljev števila 12.

Pomemben primer mreže je tudi potenčna množica poljubne množice urejena glede na relacijo inkluzije (\subseteq), to lepo vidimo na sliki (4). Da se prepričamo, da je ta množica mreža, preprosto preverimo supremume in infimume.

Vidimo, da velja $x \vee y = x \cup y$ in $x \wedge y = x \cap y$, kar nam pojasni, zakaj se občasno za označevanje supremuma in infimuma uporablja oznaki \cap, \cup , saj naravno sledita iz potenčne množice kot mreže.

Takoj opazimo, da je tako kot mreža $(\mathbb{N}, |)$ tudi ta mreža omejena, saj je $\{\}$ pod vsemi ostalimi, \mathbb{N} pa nad vsemi. Prav tako pa vidimo da v n tem nivoju nastopajo vse možne n -elementne podmnožice začetne množice.

Opomba: Če bi za mrežo vzeli potenčno množico kakšne končne množice bi lahko s pomočjo kombinatorike lepo prešteli število množic v posameznem nivoju. Tako je za množico moči n v k -tem nivoju $\binom{n}{k}$ elementov. Seštevek množic po vseh nivojih pa ravno 2^n , torej ravno moč potenčne množice.

3 Zakoni v mrežah

Mreže smo si do sedaj pogledali s stališča linearne urejenosti, kmalu pa bomo videli tudi, da lahko zgolj iz nekaterih zakonov, ki veljajo za infimume in supremume na poljubni množici za to množico dobimo delno urejenost in tako iz množice skupaj s temi zakoni tudi mrežo.

Izrek 1:

Za poljubno mrežo \mathcal{L} in poljubne $x, y, z \in \mathcal{L}$ veljajo naslednji zakoni:

- $x \vee x = x, x \wedge x = x$ (Idempotentnost)
- $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (Komutativnost)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
 $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Asociativnost)
- $x \vee (x \wedge y) = x$
 $x \wedge (x \vee y) = x$ (Absorbicija)

Dokaz.

- Idempotentnost: Zaradi refleksivnosti velja $x \leq x$ in je torej tako zgornja kot spodnja meja x, x , prav tako pa so vse ostale spodnje ali zgornje meje manjše ali večje od x .
- Komutativnost: Preprosto sledi iz definicije, saj je meja neodvisna od vrstnega reda elementov
- Asociativnost: Preverimo za \vee :
 Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$
 Iz definicije ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$
 Potem velja tudi $a \geq (y \vee z)$ in $a \geq x \vee (y \vee z)$ torej $a \geq b$
 Podobno postopamo za nasprotno stran in tako dobimo $b \geq a$, ker pa je zaradi antisimetričnosti relacije mogoče zgolj, kadar velja $a = b$
 Na analogen način preverimo tudi za \wedge , samo da a in b omejimo navzgor.
- Absorbicija: Preverimo za $x \wedge (x \vee y) = x$:
 Iz definicije \vee vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$
 Iz definicije \wedge pa sledi $x \geq x \wedge (x \vee y)$
 Torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$ in $x \geq x \wedge (x \vee y)$, dobimo $x = x \wedge (x \vee y)$
 Drugo enakost preverimo analogno.

□

Pomembno ugotovitev pa nam prinaša naslednji izrek, ki nam pove, da sta si ta dva pogoja za mrežo ekvivalentna.

Izrek 2:

Če imamo množico \mathcal{L} , za katero sta definirani operaciji \vee, \wedge in če za te dve operaciji veljajo zgornji zakoni (idempotentnost, komutativost, asociativnost, absorbicija), potem je ta množica mreža.

Dokaz. Najprej si s pomočjo supremuma in infimuma definirajo relacijo delne urejenosti.

Definiramo: $x \leq y \iff x \wedge y = x$ in preverimo, da to ustreza zahtevam delne urejenosti:

- Refleksivnost: $x \wedge x = x \implies x \leq x$
- Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$
- Transitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$
Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo $x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ torej $x \leq z$
Da ustreza relaciji na mreži moramo preveriti še da velja: $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$:
Uporabimo zadnji zakon in dobimo $x \vee y = (x \vee y) \wedge y = y$, v drugo smer pa postopamo identično.

Da pa bo množica skupaj s to operacijo mreža, moramo še preveriti obstoj supremuma in infimuma za poljubna dva elementa.

Za supremum se ponuja $x \vee y$. Vemo, da je $x \vee y \geq x$, $x \vee y \geq y$ po definiciji relacije \leq . Preverimo, še da je to natančna zgornja meja. Naj bo z neka druga zgornja meja, velja torej $z \vee x = z \vee y = z$. Potem velja $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = z$, kar pomeni da $x \vee y \leq z$ in je torej natančna zgornja meja.

Analogno dokažemo, da je infimum $x \wedge y$.

□

4 Podmreže, enote in komplementarne mreže

4.1 Podmreže

Prej smo že podali primer, da je množica \mathbb{N} z relacijo $|$ mreža, prav tako pa je mreža tudi množica vseh deliteljev števila 30 urejena glede na enako relacijo. Naravno nas zanima, ali lahko podobno kot pri drugih algebrskih strukturah tudi pri mrežah najdemo podstrukture, ki bi ustrezale našim pričakovanjem.

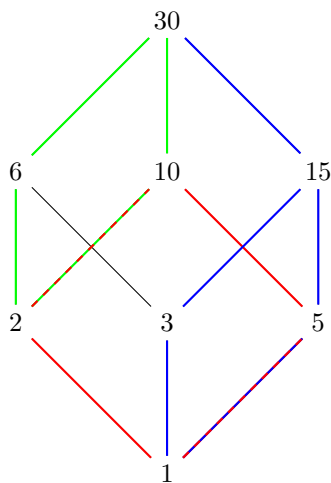
Definicija 8: *Neprazna množica $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ je **podmreža**, če je tudi sama mreža za isti operaciji in se na njih ujema. Povedano drugače $\forall x, y \in \mathcal{M}. x \vee y \in \mathcal{M}$ in $x \wedge y \in \mathcal{M}$.*

Primer:

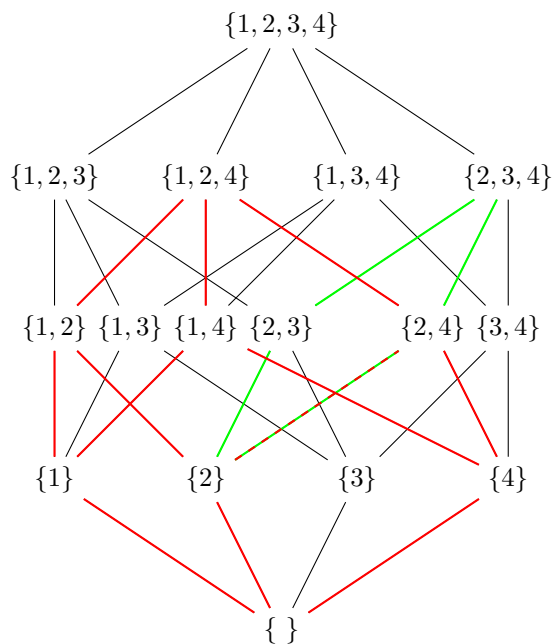
1. Če vzamemo \mathbb{R} z relacijo \leq , potem je poljubna podmnožica tudi podmreža.
2. Slik (5 in 6) prikazujeta dva primera podmrež na že znanih mrežah. Tako sta na primer množica deliteljev števila 10, kot tudi množica $\{2, 6, 10, 30\}$ podmreža mreže deliteljev števila 30 (slika 5). Prav tako pa je $P(\{1, 2, 4\})$ podmreža mreže $P(\{1, 2, 3, 4\})$ (slika 6).

Naravno nas zanima, ali lahko iz že obstoječih mrež na preprost način dobimo podmreže, če si pogledamo prejšnje primere lahko iz vseh razen modrega na sliki (5) ugotovimo da so to podmreže sestavljene iz elementov, ki so med dvema elementoma v mreži. Zanima nas, ali lahko to posplošimo.

Trditev 2: Če v mreži \mathcal{L} vzamemo poljubna $x \leq y$, potem je množica $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} \mid x \leq z \leq y\}$ podmreža mreže \mathcal{L} .



Slika 5: Mreža deljiteljev števila 30 s tremi podmrežami



Slika 6: Mreža $(\{1, 2, 3, 4\}, \subseteq)$ z dvema podmrežama

Dokaz. Preprosto preverimo obstoj imfimuma in supremuma. Vzemimo poljubna $x', y' \in \mathcal{L}(x, y)$ in preverimo zaprtost $x \geq x' \vee y' \geq x' \wedge y' \geq y$ □

4.2 Enote in komplementi

Ob preučevanju do sedaj predstavljenih mrež smo opazili, da so nekateri njihovi elementi posebni, tako smo recimo za prazno množico pri urejenosti glede na

inkluzijo, da je vedno pod vsem ostalimi podmnožicami, seveda bi sedaj radi to ugotovitev splošili še na ostale mreže, kadar to lahko storimo.

Definicija 9: Če v mreži \mathcal{L} obstaja tak x , da za poljuben $y \in \mathcal{L}$ velja $x \geq y$, potem takemu elementu rečemo **največji element** in ga označimo z 1 ($\forall x \in \mathcal{L}. x \leq 1$).

Definicija 10: Če v mreži \mathcal{L} obstaja tak x , da za poljuben $y \in \mathcal{L}$ velja $x \leq y$, potem takemu elementu rečemo **najmanjši element** in ga označimo z 0. ($\forall x \in \mathcal{L}. x \geq 0$).

Posledica: Če v mreži \mathcal{L} obstajata 0 in 1, potem za poljuben $x \in \mathcal{L}$ veljijo naslednje trditve:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

Dokaz. Te trditve so zgolj prevod relacije \leq v njihovo formulacijo glede na operaciji \vee in \wedge . \square

Opomba: Vidimo, da je 1 enota za operacijo \wedge in 0 enota za operacijo \vee .

Primer:

1. Za interval $[0, 1]$ oznake za mrežo kar sovpadajo z števili. Tako je element 0 kar število 0, element 1 pa število 1.
2. Za potenčno množico neke množice \mathcal{A} urejeno glede na relacijo inkluzije je element 0 prazna množica ($\{\}$), element 1 pa kar celotna množica \mathcal{A} .
3. Za mrežo $(\mathbb{N}, |)$ je 0 število 1, saj deli vsa druga naravna števila, element 1 pa število 0, saj jo delijo vsa naravna števila.

Sedaj ko imamo enoto za operacije se nam zdi naravno, da bi definirali tudi neke vrste inverz

Definicija 11: Naj bo \mathcal{L} mreža z elementoma 0 in 1 in $x \in x' \in \mathcal{L}$. Elementa x in x' imenujemo **komplementarna elementa**, če veljata naslednji enakosti:

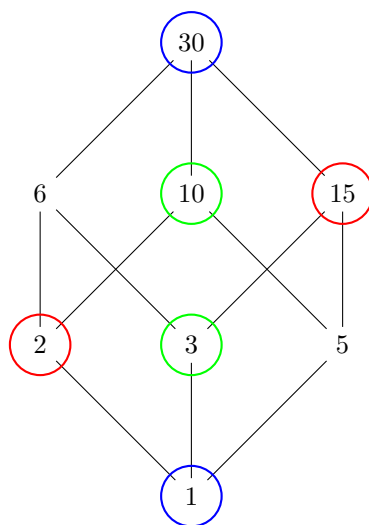
- $x \vee x' = 1$
- $x \wedge x' = 0$

Definicija 12: Mrežo, v kateri poljubnemu x pripada **vsaj** en komplementarni element imenujemo **komplementarna mreža**.

Opomba: Obstoj komplementarnega elementa v mreži z 0 in 1 ni zagotovljen, prav tako pa ima lahko poljuben element več komplementov.

Primer:

1. Lep primer komplementarnih prostorov so vektorski podprostor vektorskega prostora V , ki je opremljen s skalarnim produktom. Tu je infimum dveh podprostorov kar njun presek, medtem ko je supremum njuna direktna vsota. 1 je kar celoten prostor V , medtem ko je 0 njegov ničelni podprostor. Tako je komplement poljubnega podprostora kar njegov ortogonalni komplement, tako je presek dveh komplementarnih elementov ničelni prostor, direktna vsota pa kar celoten prostor V .
2. Drug primer komplementarne mreže je mreža sestavljena iz ravnine ter na njej ležečih premic in točk. Tako je komplement premice poljubna točka, ki na njej ne leži, komplement točke pa je poljubna premica, ki ne vsebuje te točke. Vidimo, da ima lahko element več komplementov (celo neskončno).
3. V mreži $(\{1, 2, 3, 4\}, \subseteq)$ so komplementi posameznih elementov kar njihovi komplementi v smislu teorije množic, prav tako vidimo, da ima vsak element natančno en komplement
4. V mreži deliteljev števila 30 urejeni glede na deljivost velja da je komplement elementa x kar $\frac{30}{x}$, ta lastnost pa nam nakazuje neko zelo pomembno značilnost takih mrež, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju, komplementi so lepo vidni na sliki (7).



Slika 7: Mreža deliteljev števila 30 z označenimi nekaterimi komplementi

5 Homomorfizmi mrež