

# Mreže

Kralj Samo, Koprivec Filip

FMF

19. april 2016

## 1 Osnovne definicije

- Urejenost
- Supremum in infimum
- Definicija mreže
- Osnovni primeri mrež

## 2 Modulske mreže

# Urejenost

## Definition

Naj bo  $\mathcal{L}$  množica, relacija  $\leq$  je (**šibka**) **delna urejenost**, če je

- refleksivna ( $a \leq a$ )
- antisimetrična ( $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$ )
- tranzitivna ( $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$ )

**Opomba:** Občasno smo nekoliko "šlampasti" in za lažjo predstavljivost uporabimo tudi relacijo  $\geq$ , ki jo definiramo kot  $a \geq b \iff b \leq a$

## Dogovor

Naj bo  $\mathcal{L}$  množica urejena z relacijo delne urejenosti  $\leq$  in  $x, y \in \mathcal{L}$

# Supremum in infimum

## Definition

$S$  je **supremum**  $x$  in  $y$ , če velja:

- $S \geq x \wedge S \geq y$  (Zgornja meja)
- $\forall S' \in \mathcal{L} \implies (S' \geq x \wedge S' \geq y \implies S \leq S')$  (Je najmanjša zgornja meja)

označimo:  $S = x \vee y$

## Definition

$s$  je **infimum**  $x$  in  $y$ , če velja:

- $s \leq x \wedge s \leq y$  (Spodnja meja)
- $\forall s' \in \mathcal{L} \implies (s' \leq x \wedge s' \leq y \implies s' \leq s)$  (Je največja spodnja meja)

označimo:  $s = x \wedge y$

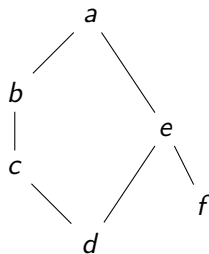
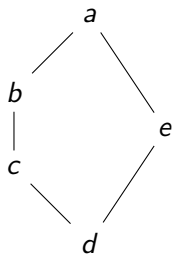
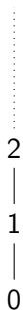
### Definition

Množica  $\mathcal{L}$  je **linearno urejena**, če za poljubna  $x, y$  velja  $x \leq y$  ali  $y \leq x$

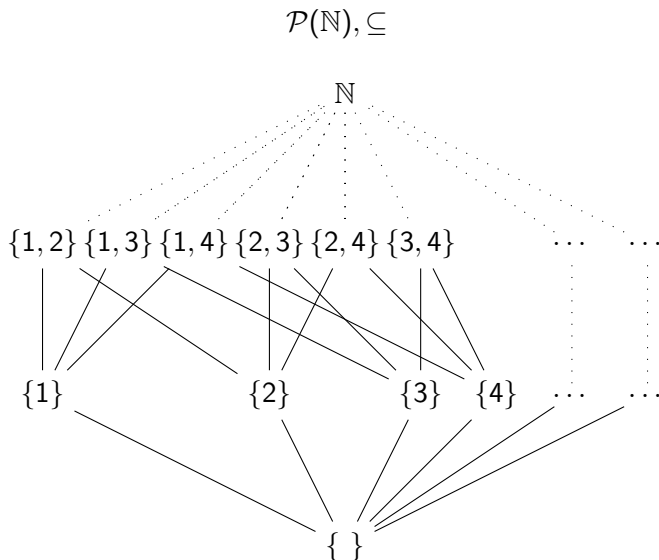
### Definition

Množica  $\mathcal{L}$  je **mreža**, če ima poljuben par  $x, y$  infimum in supremum.

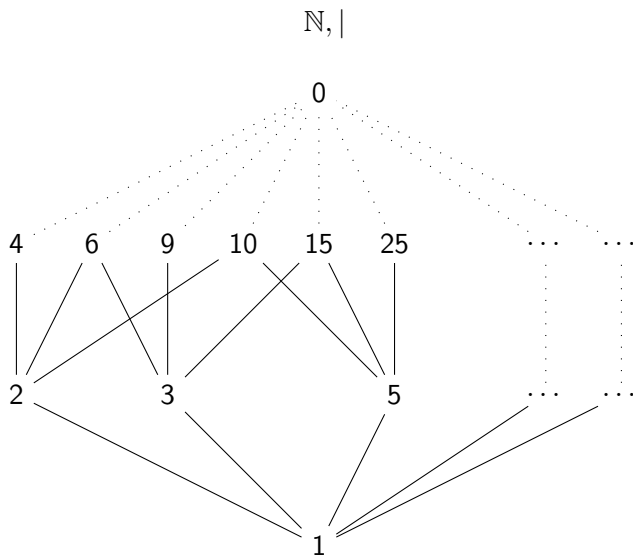
## Osnovni primeri mrež

 $\mathbb{N}, \leq$ 

## Potenčna množica naravnih števil za inkluzijo



## Naravna števila za deljivost





# Polne mreže

## Definition

Mreža  $\mathcal{L}$  je polna, če za poljubno  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$  obstajata infimum in supremum za  $\mathcal{A}$ .

## Example

Poljubna linearna omejena mreža je polna, na nasproten način pa dobimo mreže, ki niso polne:  $\mathbb{R}, \leq$ .

# Zakoni v mrežah

## Zakoni v mrežah

- $x \vee x = x, x \wedge x = x$  (Idempotentnost)
- $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$  (Komutativnost)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$   
 $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$  (Asociativnost)
- $x \vee (x \wedge y) = x$   
 $x \wedge (x \vee y) = x$  (Absorbcija)

Dokaz.

Naj bo  $a = (x \vee y) \vee z$  in  $b = x \vee (y \vee z)$

Dokaz.

Naj bo  $a = (x \vee y) \vee z$  in  $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi  $a \geq z$  in  $a \geq (x \vee y)$  in torej  $a \geq x, a \geq y$

## Dokaz.

Naj bo  $a = (x \vee y) \vee z$  in  $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi  $a \geq z$  in  $a \geq (x \vee y)$  in torej  $a \geq x, a \geq y$

Potem velja tudi  $a \geq (y \vee z)$  in  $a \geq x \vee (y \vee z)$  torej  $a \geq b$

## Dokaz.

Naj bo  $a = (x \vee y) \vee z$  in  $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi  $a \geq z$  in  $a \geq (x \vee y)$  in torej  $a \geq x, a \geq y$

Potem velja tudi  $a \geq (y \vee z)$  in  $a \geq x \vee (y \vee z)$  torej  $a \geq b$

Na skoraj enak naredimo iz druge strani in dobimo  $b \geq a$ , ker pa je zaradi antisimetričnosti relacije mogoče zgolj, kadar velja  $a = b$   $\square$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo  $x \leq (x \vee y)$  in  $x \leq x$  torej  $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo  $x \leq (x \vee y)$  in  $x \leq x$  torej  $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Iz definicije in pa sledi  $x \geq x \wedge (x \vee y)$



Dokaz.

Iz definicije ali vemo  $x \leq (x \vee y)$  in  $x \leq x$  torej  $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Iz definicije in pa sledi  $x \geq x \wedge (x \vee y)$

Torej  $x \leq x \wedge (x \vee y)$  in  $x \geq x \wedge (x \vee y)$ , dobimo  $x = x \wedge (x \vee y)$



### Theorem

*Če imamo množico  $\mathcal{L}$ , za katero sta definirani operaciji  $\vee, \wedge$  in če za te dve operaciji veljajo zgornji zakoni, potem je ta množica mreža.*

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ ,  
uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ ,  
uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:



## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ ,  
uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:  $x \leq y$  in  $y \leq z$  torej velja  $x = x \wedge y$  in  $y = y \wedge z$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ , uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:  $x \leq y$  in  $y \leq z$  torej velja  $x = x \wedge y$  in  $y = y \wedge z$

Namesto  $y$  uporabimo  $y \wedge z$  in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej}$$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ , uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:  $x \leq y$  in  $y \leq z$  torej velja  $x = x \wedge y$  in  $y = y \wedge z$

Namesto  $y$  uporabimo  $y \wedge z$  in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ , uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:  $x \leq y$  in  $y \leq z$  torej velja  $x = x \wedge y$  in  $y = y \wedge z$

Namesto  $y$  uporabimo  $y \wedge z$  in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

Preverimo še, da velja  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

## Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za  $x, y \in \mathcal{L}$  velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:  $x \wedge x = x$  torej  $x \leq x$

Antisimetričnost:  $x \leq y$  in  $y \leq x$ , torej  $x \wedge y = x$  in  $y \wedge x = y$ , uporabimo komutativnost in dobimo  $x = y$

Tranzitivnost:  $x \leq y$  in  $y \leq z$  torej velja  $x = x \wedge y$  in  $y = y \wedge z$

Namesto  $y$  uporabimo  $y \wedge z$  in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

Preverimo še, da velja  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

Uporabimo zadnji zakon in  $x \vee b = (x \vee y) \wedge y = b$  in identično v drugo smer.

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume

**Dokaz.**

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

**Dokaz.**

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja  $x$  in  $y$  ponuja  $x \vee y$ , ki je očitno zgornja meja



**Dokaz.**

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja  $x$  in  $y$  ponuja  $x \vee y$ , ki je očitno zgornja meja

Naj bo  $z$  neka zgornja meja  $x, y$ ,  $x \vee z = y \vee z = z$

**Dokaz.**

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja  $x$  in  $y$  ponuja  $x \vee y$ , ki je očitno zgornja meja

Naj bo  $z$  neka zgornja meja  $x, y$ ,  $x \vee z = y \vee z = z$

Dobimo  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$ , kar pomeni, da  $x \vee y \leq z$ , torej je  $x \vee y$  natančna zgornja meja. □

Naravno se pojavi vprašanje, ali za operaciji v mrežah obstaja kakšne vrste enota ali celo inverz.

### Definition

Če v mreži obstaja največji element, potem ta element označimo z 1 ( $\forall x \in \mathcal{L}. x \leq 1$ )

### Definition

Če v mreži obstaja najmanjši element, potem ta element označimo z 0 ( $\forall x \in \mathcal{L}. x \geq 0$ )

Če v mreži obstajata 0 in 1 potem velja:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

Če v mreži obstajata 0 in 1 potem velja:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

### Example

1, 0 za  $\mathbb{N}, |$   
 $\{\}, \mathbb{N}$  za  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

### Definition

V mreži z elementoma 0 in 1 elementa  $x$  in  $x'$  imenujemo **komplementarna**, če velja:

- $x \vee x' = 1$
- $x \wedge x' = 0$

### Definition

Mrežo, v kateri poljubnemu  $x$  pripada **vsaj** en komplement imenujemo **komplementarna mreža**.

### Example

Tipičen primer so vektorski podprostor nekega prostora  $\mathcal{V}$ ,  $1$  je celoten podprostor,  $0$  je ničelni podprostor, komplementi poasmeznih elementov pa so kar pravokotni komplementi.

### Example

Ravnina, premice na njej in točke  
Komplementi premic so točke ki na njej ne ležijo, komplementi točk pa premice, ki ne vsebujejo teh točk.  
Imamo lahko več komplementov.

### Definition

Neprazna množica  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$  je **podmreža**, če je tudi sama mreža za isti operaciji in se na njih ujema. Povedano drugače  $x \vee y \in \mathcal{M}$  in  $x \wedge y \in \mathcal{M}$



Zanima nas lep način, kako bi iz obstoječih mrež lepo dobili podmreže

Zanima nas lep način, kako bi iz obstoječih mrež lepo dobili podmreže

Uporabimo stvar, ki jo v mrežah imamo in za podmrežo vzamemo kar vse, ki so med dvema elementoma.

## Theorem

Če v mreži  $\mathcal{L}$  vzamemo poljubna  $x \leq y$ , potem je množica  $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} \mid x \leq z \leq y\}$  podmreža mreže  $\mathcal{L}$ .

## Dokaz.

Preprosto preverimo obstoj infimuma in supremuma

## Theorem

Če v mreži  $\mathcal{L}$  vzamemo poljubna  $x \leq y$ , potem je množica  $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} \mid x \leq z \leq y\}$  podmreža mreže  $\mathcal{L}$ .

## Dokaz.

Preprosto preverimo obstoj infimuma in supremuma  
Vzemimo poljubna  $x', y' \in \mathcal{L}(x, y)$  in preverimo zaprtost

## Theorem

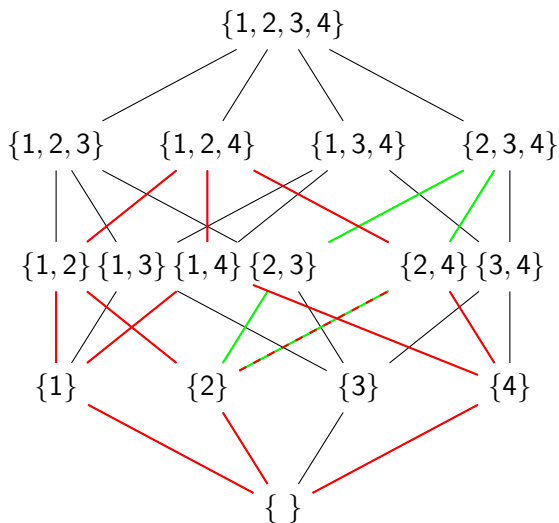
Če v mreži  $\mathcal{L}$  vzamemo poljubna  $x \leq y$ , potem je množica  $\mathcal{L}(x, y) := \{z \in \mathcal{L} \mid x \leq z \leq y\}$  podmreža mreže  $\mathcal{L}$ .

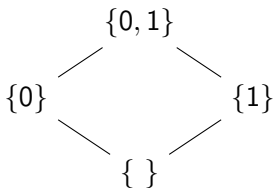
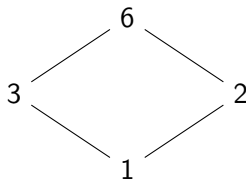
## Dokaz.

Preprosto preverimo obstoj infimuma in supremuma  
Vzemimo poljubna  $x', y' \in \mathcal{L}(x, y)$  in preverimo zaprtost  
 $x \geq x' \vee y' \geq x' \wedge y' \geq y$



$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq$$



$\{0, 1\}, \subseteq$ 

 $\{1, 2, 3, 6\}, |$ 


Mreži se zdita sumljivo podobni, ali lahko to kako posplošimo?

### Definition

Preslikava  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  je **homomorfizem**, ča za poljubna  $x, y \in \mathcal{L}$  velja:

- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

funkcija za prej

Funkcija za prej



### Theorem

*Za nek homomorfizem  $f$  velja  $f(\mathcal{L})$  je podmreža  $\mathcal{L}$ .*

**Opomba:** Homomorfizem ohranja urejenost

### Theorem

*Bijektivni homomorfizem  $f, f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  je izomorfizem, če ohranja red v obeh smereh*

### Dokaz.



Red se mora ohranjati v obeh smereh

Protiprimer

### Definition

Mreža je **distributivna**, če za  $\vee$  in  $\wedge$  veljata zakona:

- $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
- $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

### Example

linarana je distributivna

## Theorem

*Če ima distributivna mreža  $\mathcal{L}$  elementa  $0, 1$ , potem ima vsak elementa največ en komplement (ni pa še zagotovljen obstoj komplementa)*

## Dokaz.

Dokaz



Primerji (če ima vsak element komplement, potem samo slikaš samo obrnjeno)

### Definition

Kolobar, v katerem je vsak element idempotenten imenujemo **Boolov kolobar**.

## Theorem

*Boolov klobar je komutativen s karakteristiko 2*

## Dokaz.

Dokaza





Definiramo operaciji  $\vee, \wedge$  in pokažimo, da je to mreža

### Definition

Komplementarno in distributivno mrežo imenujemo **Boolova algebra**.

To ni algebra?????

## Definition

Mreža  $\mathcal{L}$  je **modulska** mreža, če za  $a \leq c$  velja:

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

test