

Mreže

Kralj Samo, Koprivec Filip

FMF

18. april 2016

1 Osnovne definicije

- Urejenost
- Supremum in infimum
- Definicija mreže
- Osnovni primeri mrež

2 Modulske mreže

Urejenost

Definition

Naj bo \mathcal{L} množica, relacija \leq je (**šibka**) **delna urejenost**, če je

- refleksivna ($a \leq a$)
- antisimetrična ($a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$)
- tranzitivna ($a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$)

Opomba: Občasno smo nekoliko "šlampasti" in za lažjo predstavljivost uporabimo tudi relacijo \geq , ki jo definiramo kot $a \geq b \iff b \leq a$

Dogovor

Naj bo \mathcal{L} množica urejena z relacijo delne urejenosti \leq in $x, y \in \mathcal{L}$

Supremum in infimum

Definition

S je **supremum** x in y , če velja:

- $S \geq x \wedge S \geq y$ (Zgornja meja)
- $\forall S' \in \mathcal{L} \implies (S' \geq x \wedge S' \geq y \implies S \leq S')$ (Je najmanjša zgornja meja)

označimo: $S = x \vee y$

Definition

s je **infimum** x in y , če velja:

- $s \leq x \wedge s \leq y$ (Spodnja meja)
- $\forall s' \in \mathcal{L} \implies (s' \leq x \wedge s' \leq y \implies s' \leq s)$ (Je največja spodnja meja)

označimo: $s = x \wedge y$

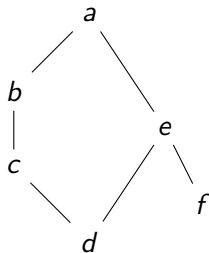
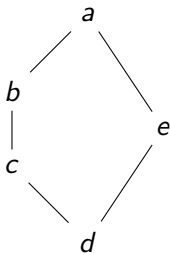
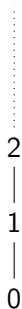
Definition

Množica \mathcal{L} je **linearno urejena**, če za poljubna x, y velja $x \leq y$ ali $y \leq x$

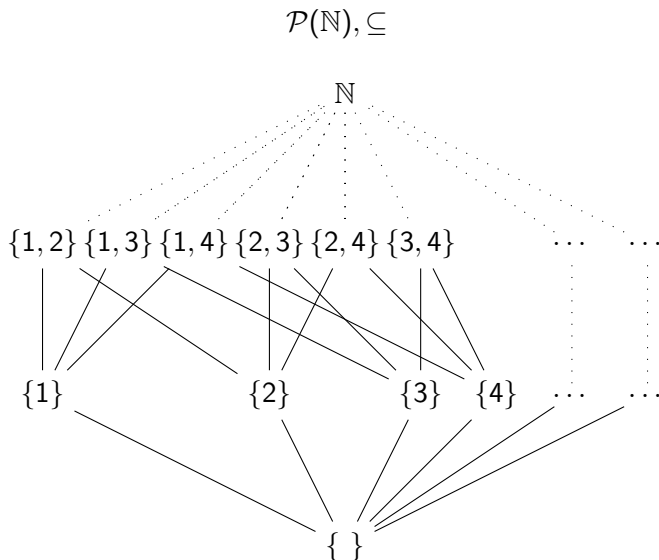
Definition

Množica \mathcal{L} je **mreža**, če ima poljuben par x, y infimum in supremum.

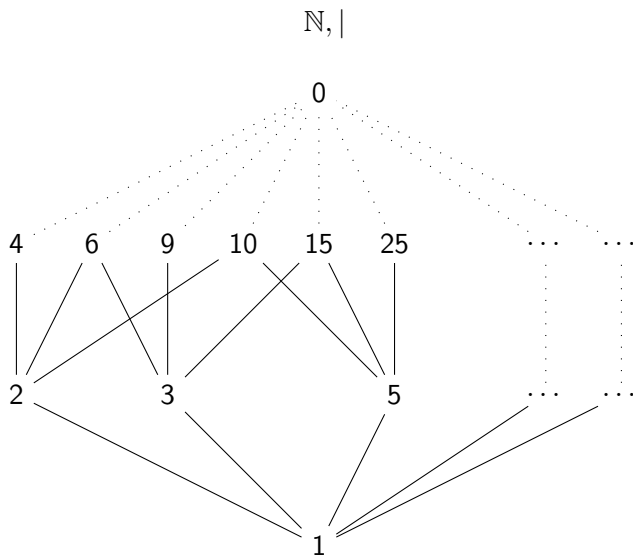
Osnovni primeri mrež

 \mathbb{N}, \leq 

Potenčna množica naravnih števil za inkluzijo



Naravna števila za deljivost



Polne mreže

Definition

Mreža \mathcal{L} je polna, če za poljubno $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ obstajata infimum in supremum za \mathcal{A} .

Example

Poljubna linearna omejena mreža je polna, na nasproten način pa dobimo mreže, ki niso polne: \mathbb{R}, \leq .

Zakoni v mrežah

Zakoni v mrežah

- $x \vee x = x, x \wedge x = x$ (Idempotentnost)
- $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (Komutativnost)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
 $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Asociativnost)
- $x \vee (x \wedge y) = x$
 $x \wedge (x \vee y) = x$ (Absorbcija)

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$

Potem velja tudi $a \geq (y \vee z)$ in $a \geq x \vee (y \vee z)$ torej $a \geq b$

Dokaz.

Naj bo $a = (x \vee y) \vee z$ in $b = x \vee (y \vee z)$

Iz definicije ali sledi $a \geq z$ in $a \geq (x \vee y)$ in torej $a \geq x, a \geq y$

Potem velja tudi $a \geq (y \vee z)$ in $a \geq x \vee (y \vee z)$ torej $a \geq b$

Na skoraj enak naredimo iz druge strani in dobimo $b \geq a$, ker pa je zaradi antisimetričnosti relacije mogoče zgolj, kadar velja $a = b$ \square

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Iz definicije in pa sledi $x \geq x \wedge (x \vee y)$

Dokaz.

Iz definicije ali vemo $x \leq (x \vee y)$ in $x \leq x$ torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$

Iz definicije in pa sledi $x \geq x \wedge (x \vee y)$

Torej $x \leq x \wedge (x \vee y)$ in $x \geq x \wedge (x \vee y)$, dobimo $x = x \wedge (x \vee y)$



Theorem

Če imamo množico \mathcal{L} , za katero sta definirani operaciji \vee, \wedge in če za te dve operaciji veljajo zgornji zakoni, potem je ta množica mreža.

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$,
uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$,
uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost:

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$,
uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$,
uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej}$$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

Preverimo še, da velja $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

Dokaz

Najprej definiramo relacijo, naj za $x, y \in \mathcal{L}$ velja

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

in preverimo, da je to delna urejenost

Refleksivnost: $x \wedge x = x$ torej $x \leq x$

Antisimetričnost: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x \wedge y = x$ in $y \wedge x = y$, uporabimo komutativnost in dobimo $x = y$

Tranzitivnost: $x \leq y$ in $y \leq z$ torej velja $x = x \wedge y$ in $y = y \wedge z$

Namesto y uporabimo $y \wedge z$ in dobimo

$$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \text{ torej } x \leq z$$

Preverimo še, da velja $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$

Uporabimo zadnji zakon in $x \vee b = (x \vee y) \wedge y = b$ in identično v drugo smer.

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Naj bo z neka zgornja meja x, y , $x \vee z = y \vee z = z$

Dokaz.

Preveriti moramo še infimume in supremume, pogledjmo si samo supremum

Sama od sebe se nam kot zgornja meja x in y ponuja $x \vee y$, ki je očitno zgornja meja

Naj bo z neka zgornja meja x, y , $x \vee z = y \vee z = z$

Dobimo $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$, kar pomeni, da $x \vee y \leq z$, torej je $x \vee y$ natančna zgornja meja. □

Naravno se pojavi vprašanje, ali za operaciji v mrežah obstaja kakšne vrste enota ali celo inverz.

Definition

Če v mreži obstaja največji element, potem ta element označimo z 1 ($\forall x \in \mathcal{L}. x \leq 1$)

Definition

Če v mreži obstaja najmanjši element, potem ta element označimo z 0 ($\forall x \in \mathcal{L}. x \geq 0$)

Če v mreži obstajata 0 in 1 potem velja:

- $x \vee 1 = 1$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \wedge 1 = x$

Primeri

Definition

V mreži z elementoma 0 in 1 elementa x in x' imenujemo **komplementarna**, če velja:

- $x \vee x' = 1$
- $x \wedge x' = 0$

Definition

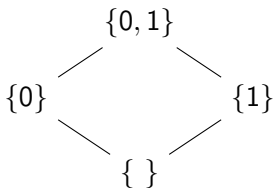
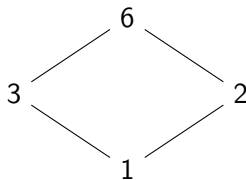
Mrežo, v kateri poljubnemu x pripada **vsaj** en komplement imenujemo **komplementarna mreža**.

Primeri(vektorski prostor na vsebovanost), komplementi

Definition

Neprazna množica $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ je **podmreža**, če je tudi sama mreža za isti operaciji in se na njih ujema. Povedano drugače $x \vee y \in \mathcal{M}$ in $x \wedge y \in \mathcal{M}$

Med dvema je spet podmreža

$\{0, 1\}, \subseteq$

 $\{1, 2, 3, 6\}, |$


Mreži se zdita sumljivo podobni, ali lahko to kako posplošimo?

Definition

Preslikava $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ je **homomorfizem**, ča za poljubna $x, y \in \mathcal{L}$ velja:

- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

funkcija za prej

Funkcija za prej

Theorem

Za nek homomorfizem f velja $f(\mathcal{L})$ je podmreža \mathcal{L} .

Opomba: Homomorfizem ohranja urejenost

Theorem

Bijektivni homomorfizem $f, f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ je izomorfizem, če ohranja red v obeh smereh

Dokaz.



Red se mora ohranjati v obeh smereh

Protiprimer

Definition

Mreža je **distributivna**, če za \vee in \wedge veljata zakona:

- $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
- $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

Example

linarana je distributivna

Theorem

Če ima distributivna mreža \mathcal{L} elementa $0, 1$, potem ima vsak elementa največ en komplement (ni pa še zagotovljen obstoj komplementa)

Dokaz.

Dokaz



Primerji (če ima vsak element komplement, potem samo slikaš samo obrnjeno)

Definition

Kolobar, v katerem je vsak element idempotenten imenujemo **Boolov kolobar**.

Theorem

Boolov klobar je komutativen s karakteristiko 2

Dokaz.

Dokaza



Definiramo operaciji \vee, \wedge in pokažimo, da je to mreža

Definition

Komplementarno in distributivno mrežo imenujemo **Boolova algebra**.

To ni algebra?????

Definition

Mreža \mathcal{L} je **modulska** mreža, če za $a \leq c$ velja:

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

test