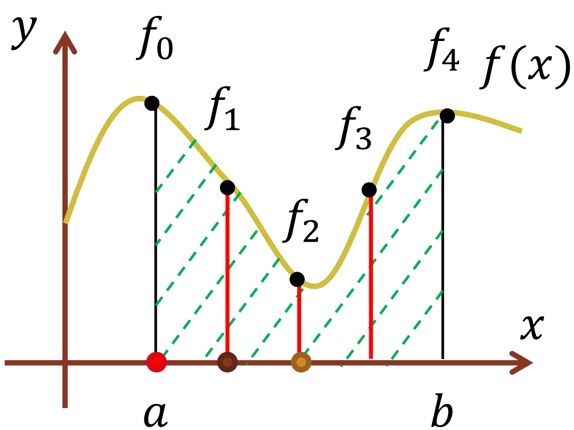
# 数値解析

第11回 重積分・ロンバーグ法

# 復習: シンプソン公式

$$\boxed{\int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$



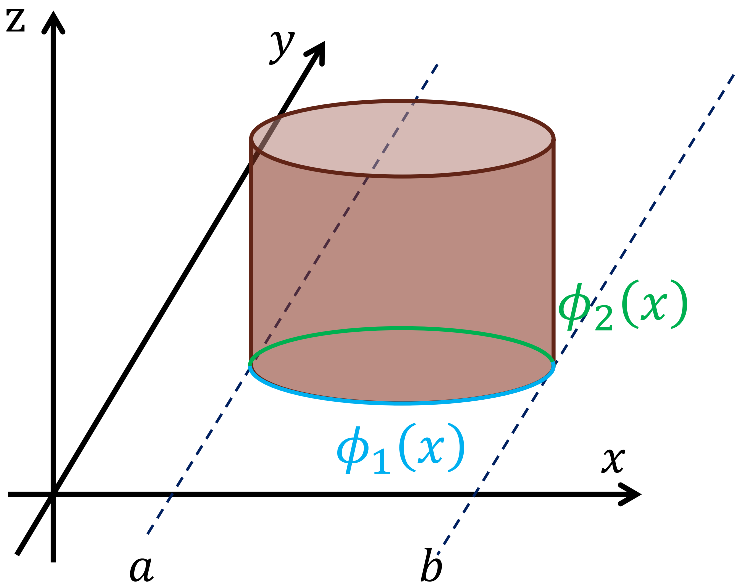

積分領域を2n分割

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})$$

# 重積分 (2重積分)

- 2重(定)積分の図形的意味




$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dxdy$$

$z = f(x,y), z = 0, y = \phi_1(x), y = \phi_2(x)$で

囲まれた領域の**体積**

解き方

$f(x,y)$を$y$について積分

$\rightarrow F(x)$という1変数関数になる.

# 重積分の数値解

解き方
$f(x,y)$を$y$について積分
$\rightarrow F(x)$という1変数関数になる.

$F(x)$の積分($\int_a^b F(x)dx$): 台形公式・シンプソン公式

$$\frac{h}{2}(F_0+F_1)+\frac{h}{2}(F_1+F2)+\cdots+\frac{h}{2}(F_{n-1}+F_n)$$

$$F_i=F(x_i)=\int_{\phi_1(x_i)}^{\phi_2(x_i)} f(x_i,y)dy$$

m等分して数値計算 $\dfrac{\phi_2(x_i)-\phi_1(x_i)}{m}=k$

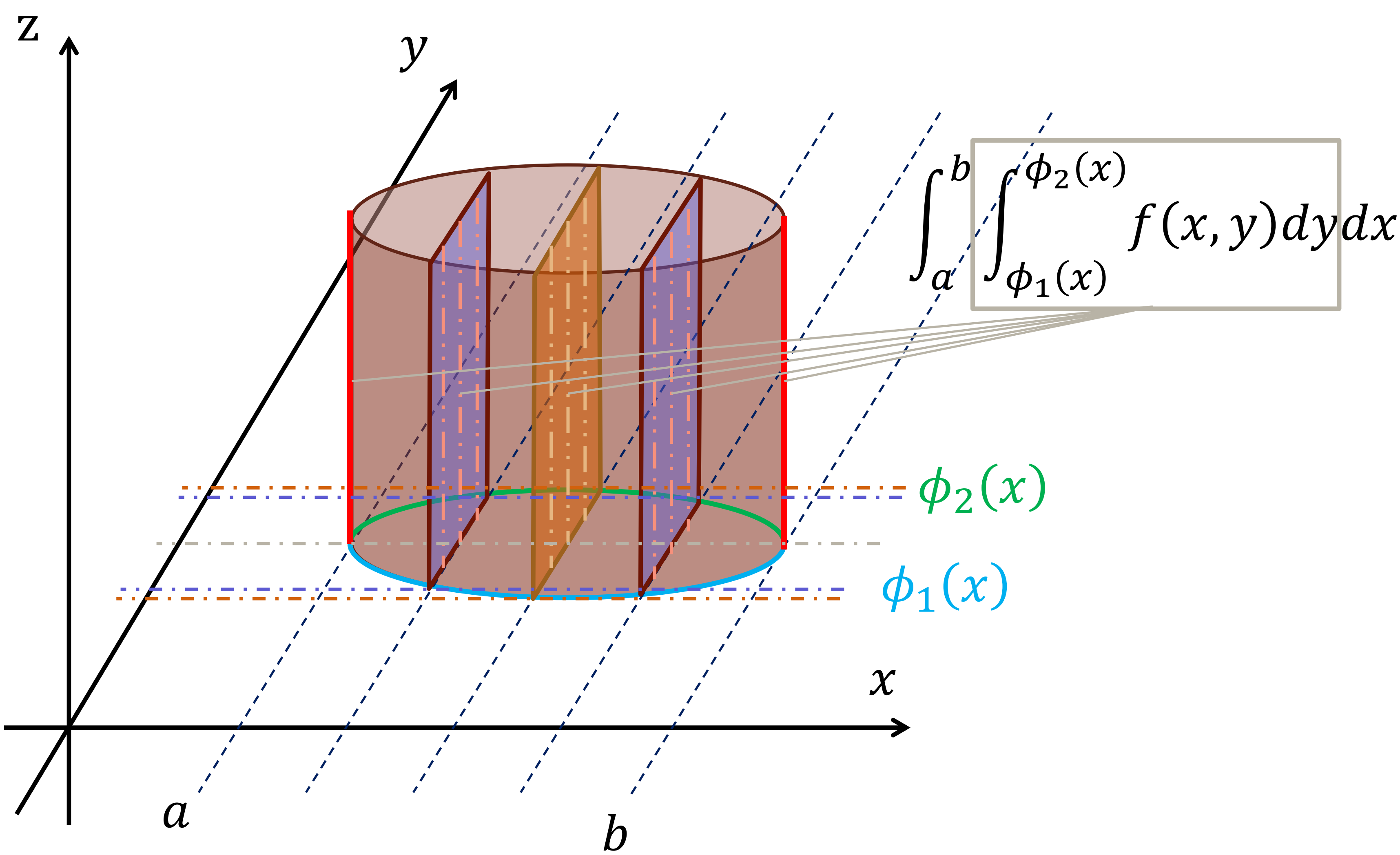
$$\frac{k}{2}(g_0+g_1)+\frac{k}{2}(g_1+g2)+\cdots+\frac{h}{2}(g_{m-1}+g_m)$$

$$g_i=f(x_i,y_i)$$

# 補足: 重積分

$$\iint f(x,y)\,dxdy = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad$$

(間は補間)



# 例: $z = 1, z = 0, (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

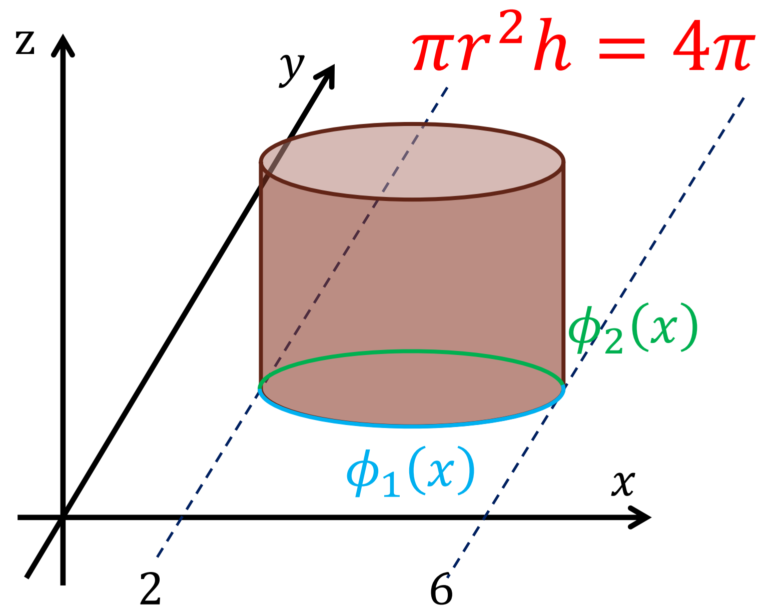
1. $y$について解く

$$(y-4)^2 = 4 - (x-4)^2$$

$$= \{2 + (x-4)\} + \{2 - (x-4)\}$$

$$= (x-2)(6-x)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{(x-2)(6-x)}$$



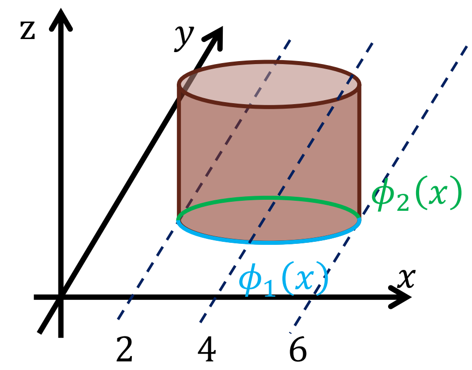

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dxdy \quad \Rightarrow \quad \int_2^6 \int_{4-\sqrt{(x-2)(6-x)}}^{4+\sqrt{(x-2)(6-x)}} 1\; dydx$$

# 例: 台形公式, n=m=2で解く

$f(x,y)=1$

$\phi_1(x)=4-\sqrt{(x-2)(6-x)}$

$\phi_2(x)=4+\sqrt{(x-2)(6-x)}$




$x_0=2, x_1=4, x_2=6$

$\phi_1(x_0)=4,\ \phi_1(x_1)=2,\ \phi_1(x_2)=4$

$\phi_2(x_0)=4,\ \phi_2(x_1)=6,\ \phi_2(x_2)=4$

$$h=\frac{6-2}{2}=2$$

$$\boxed{g=1}$$

$F(x_0)$: $k=0$ ⇒ $F(x_0)=0$

$F(x_1)$: $k=\frac{6-2}{2}=2$ ⇒ $F(x_1)=\frac{2}{2}(1+1)+\frac{2}{2}(1+1)=4$

$F(x_2)$: 0

$$Ans=\frac{2}{2}(F_0+F_1)+\frac{2}{2}(F_1+F_2)=4+4=8$$

# プログラムで確認

- 台形公式
  20分割 : 12.418

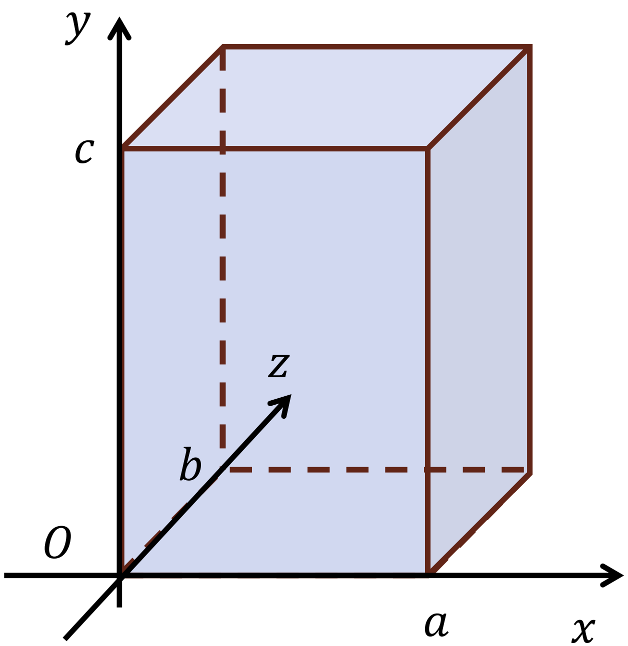
- シンプソン公式
  2分割: 10.667
  20分割: 12.508

$$F(x_1) = \frac{2}{3}(1+4+1) = 4$$

$$Ans = \frac{2}{3}(4\times F_1) = +\frac{32}{3} = 10.667$$

- 解析解
  12.566

# 補足: 重積分




体積は？

$a \times b \times c$ (底面積×高さ)

(縦×横)

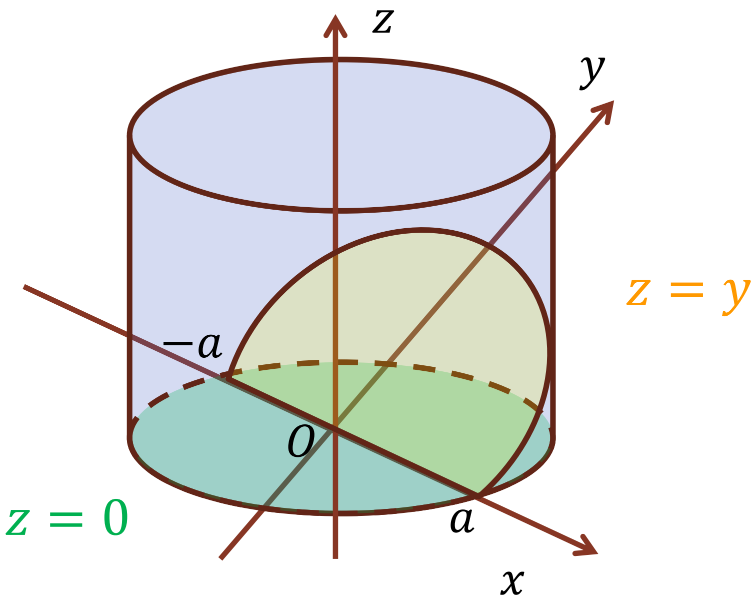
$$a \times b = \int_0^a b\,dx$$

$$a \times b \times c = \int_0^c \left( \int_0^a b\,dx \right) dy$$

$x = a$ $\quad$ $y = b$ $\quad$ $z = c$

どの2変数をとってもかまわない.

# 補足: 重積分例題




底面$x^2+y^2=a^2$の円柱を

$z=y$と$z=0$で切り出す

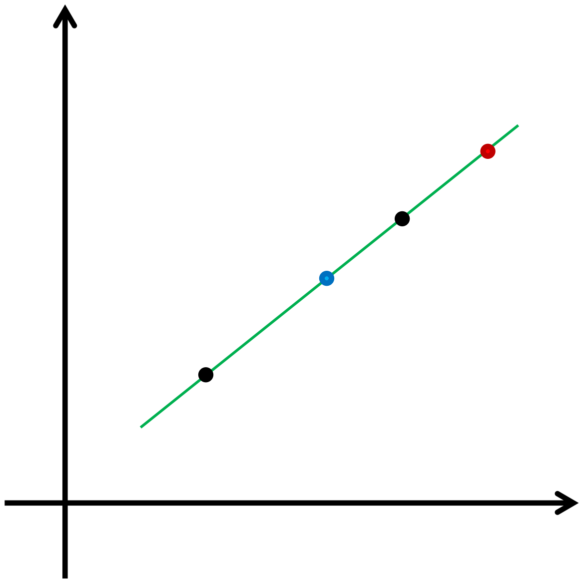
$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dydx$$

# ロンバーグ法

その前に・・・言葉の定義の復習

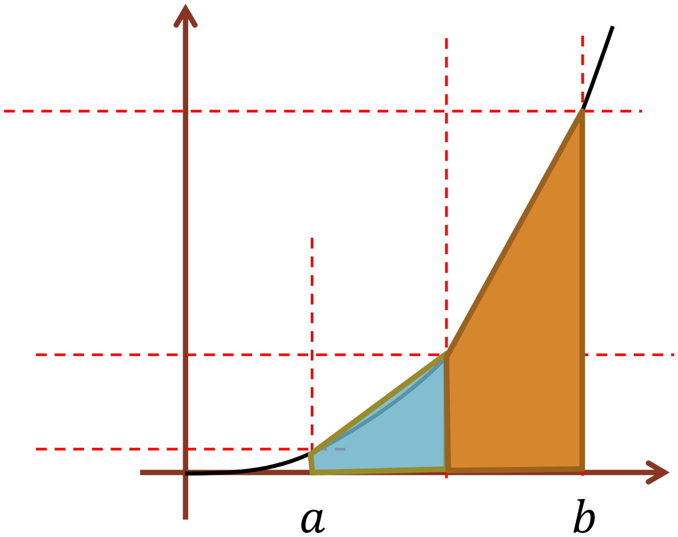
- 補間, 内挿, interpolation
  既知の値(データ)から, その間の値を求めること.

- 補外, 外挿, extrapolation
  既知の値(データ)から, その外側の値を求めること.



# 台形公式とシンプソン公式の関係

同じ計測点を使う→関係があるのでは?




$n = 1$のとき

$$T_0 = \frac{h_0}{2}(f_a + f_b)$$

$n = 2$のとき　　$h_1 = \frac{h_0}{2}$

$$T_1 = \frac{h_1}{2}(f_a + f_1) + \frac{h_1}{2}(f_1 + f_b) = \frac{T_0}{2} + h_1 f_1$$

$T$: 台形公式

$S$: シンプソン公式

$$S_1 = \frac{h_1}{3}(f_a + 4f_1 + f_b) = \frac{4}{3}h_1 f_1 + \frac{2}{3}T_0 - \frac{2}{3}T_0 + \frac{2}{3}h_1(f_a + f_b)$$

$$= \frac{4}{3}T_1 - \frac{2}{3}T_0 + \frac{1}{3}T_0 = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{3}$$

# 台形公式とシンプソン公式の関係

$n = 4$のとき ($n = 3$はシンプソン公式が使えないので省く)　$h_2 = \dfrac{h_1}{2}$　$f_2{}' = f_1$

$$T_2 = \frac{h_2}{2}\left(f_a + 2(f_1' + f_2' + f_3') + f_b\right) = \frac{T_1}{2} + h_2(f_1' + f_3')$$

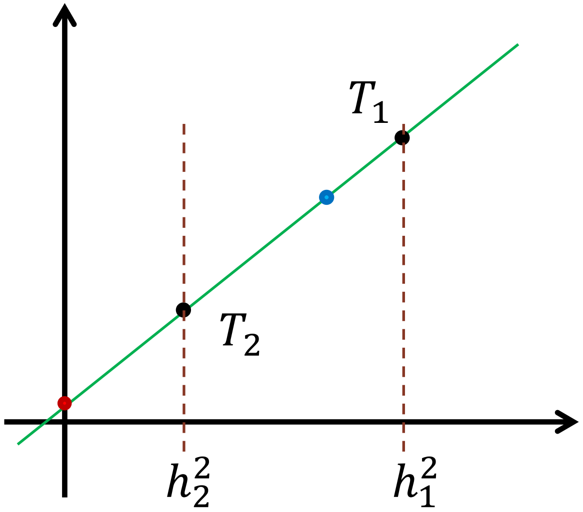
$$S_2 = \frac{h_2}{3}\left(f_a + 4f_1{}' + f_2{}'\right) + \frac{h_2}{3}\left(f_2{}' + 4f_3{}' + f_b\right) = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{3}$$

台形公式の積分誤差: ステップ幅$h$の2乗に比例

2つの異なるステップから補外でステップ0を推定

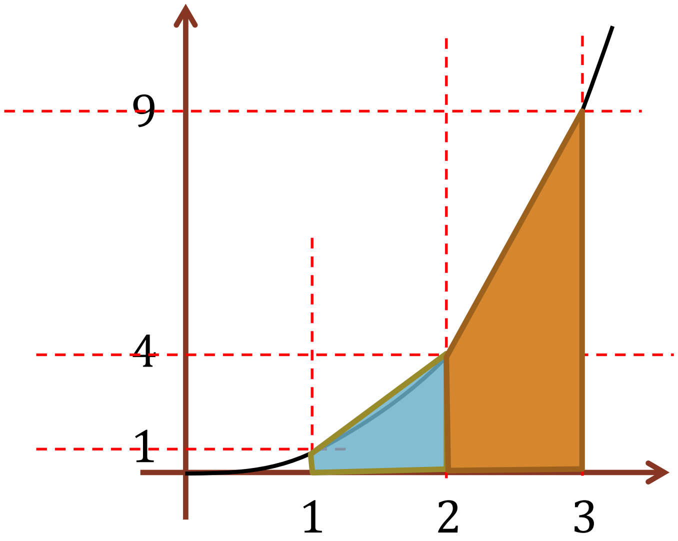
$$T_2 - \frac{T_2 - T_1}{h_2^2 - h_1^2} h_2^2 = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{4}h_1^2 - h_1^2}\frac{1}{4}h_1^2$$

$$= T_2 + \frac{T_2 - T_1}{3}$$



# 例: $\int_1^3 x^2 dx \approx 8.667$

$$S_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{3} \qquad T_1 = \frac{T_0}{2} + h_1 f_1$$




$$T_0 = \frac{2}{2}(1+9) = 10$$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + h_1 f_1 = 5 + 4 = 9$$

$$S_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_0}{3} = 9 + \frac{9-10}{3}$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.667$$

# ロンバーグ法 (ロンバーグ積分)

- 補外を用いて漸化的に精度向上する手法

台形→シンプソンの変換をより高次に拡張する.

分割数 $n = 2^k$, 補間次数$p = 2^m$ を導入

$T_m^k$: $T_1^1$ → 2分割のシンプソン公式による数値積分

奇数だけ

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2} T_0^k + h_{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

分割数増加

$$T_{m+1}^{k+1} = T_m^{k+1} + \frac{T_m^{k+1} - T_m^k}{4^{m+1} - 1}$$

補間次数増加

$m \le k$

この2式による繰り返し更新

# ロンバーグ表

補間次数

$$T_{m+1}^{k+1} = T_m^{k+1} + \frac{T_m^{k+1} - T_m^k}{4^{m+1} - 1}$$

| | m=0 | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 | m-5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k=0 | $T_0^0$ | | | | | |
| k=1 | $T_0^1$ | $T_1^1$ | | | | |
| k=2 | $T_0^2$ | $T_1^2$ | $T_2^2$ | | | |
| k=3 | $T_0^3$ | $T_1^3$ | $T_2^3$ | $T_3^3$ | | |
| k=4 | $T_0^4$ | $T_1^4$ | $T_2^4$ | $T_3^4$ | $T_4^4$ | |
| k=5 | $T_0^5$ | $T_1^5$ | $T_2^5$ | $T_3^5$ | $T_4^5$ | $T_5^5$ |

分割数

高精度

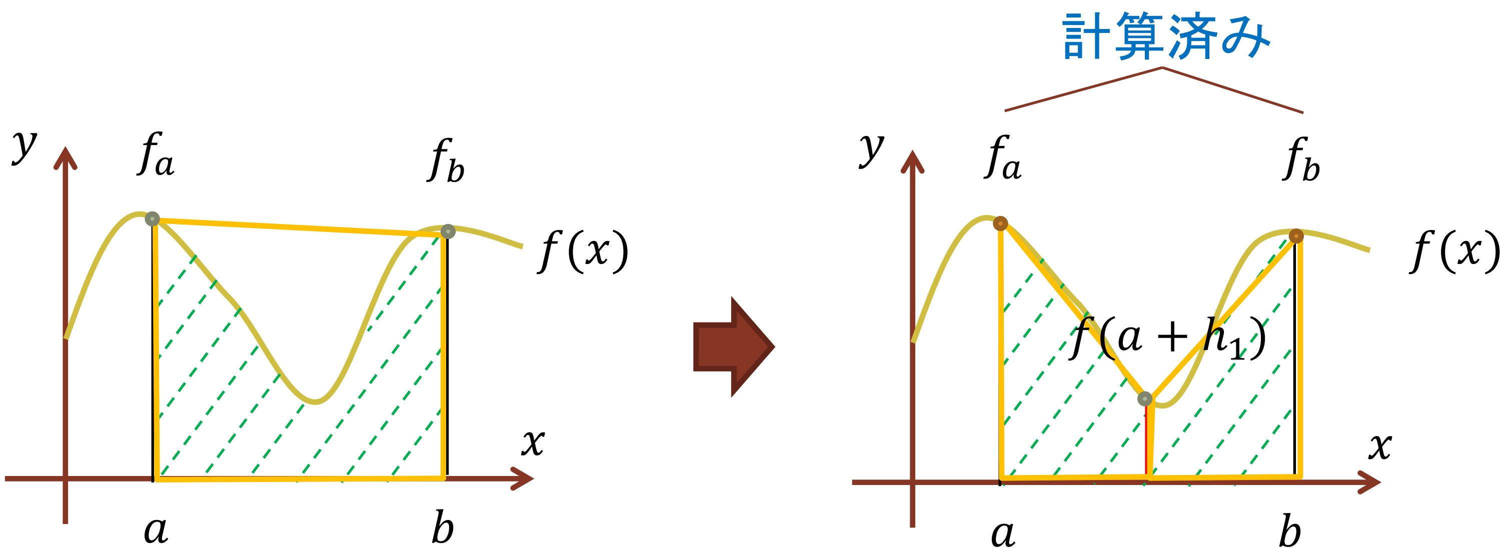
$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2} T_0^k + h_{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

# 補足: Romberg積分

- 分割数の増加

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2} T_0^k + h_{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

奇数だけ



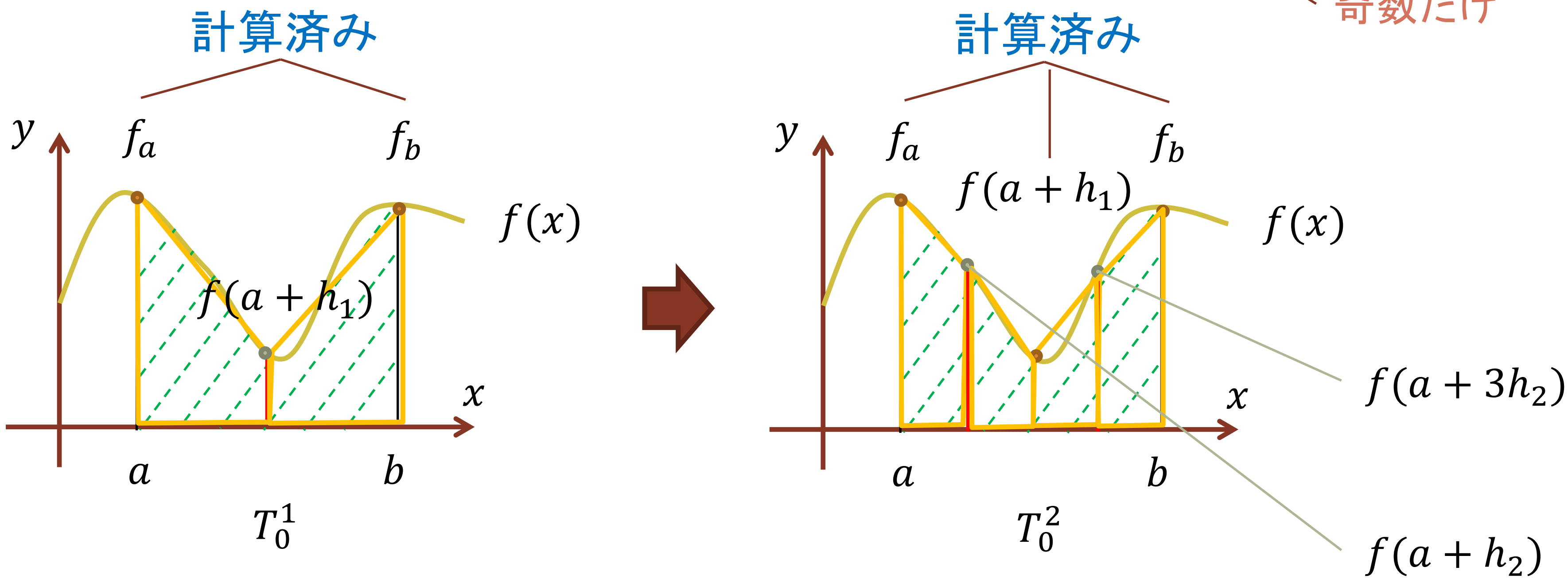

$T_0^0$ $T_0^1$

# 補足: Romberg積分

- 分割数の増加

$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2} T_0^k + h_{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i - 1)h_{k+1})$$

奇数だけ



# 補足: Romberg積分

- 数式

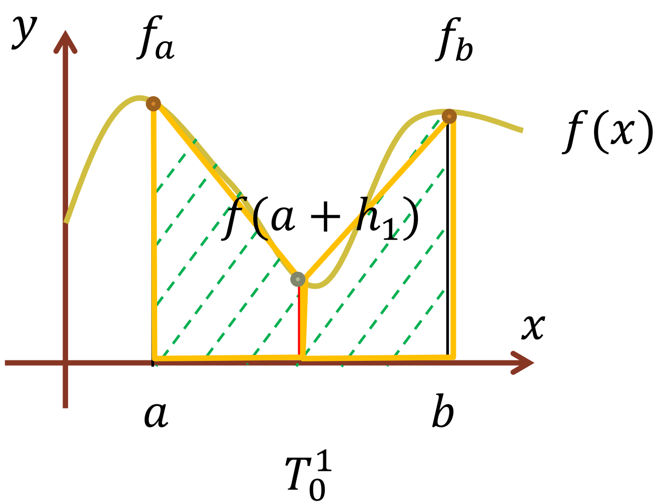
$$T_0^{k+1} = \frac{1}{2}T_0^k + h_{k+1}\sum_{i=1}^{2^k} f(a + (2i-1)h_{k+1})$$

$$T_0^0 = h_0 \times \frac{f_a + f_b}{2}$$

$$T_0^1 = h_1 \times \frac{f_a + f(a+h_1)}{2} + h_1 \times \frac{f(a+h_1) + f_b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}h_0 \times \frac{f_a + f_b}{2} + h_1 \times \frac{f(a+h_1)}{2} \times 2$$

$$= \frac{1}{2}T_0^0 + h_1 f(a+h_1)$$




※ 台形公式では両端は1回，残りは2回ずつ利用される.

# ロンバーグ積分の終了判定

- ロンバーク積分は漸化式

終了(収束)判定条件

1. 最大分割数に達する.
2. 次数や分割数増加による値の変化が規定値以下.

# 課題

1. ロンバーグ法により$\int_1^{2.5} e^x\,dx$を求めよ．解とともに分割数と次数も示すこと.
   ただし積分範囲[$a_1$, $a_2$]はinput.csvにより1行2列のベクトルで与えることとする。