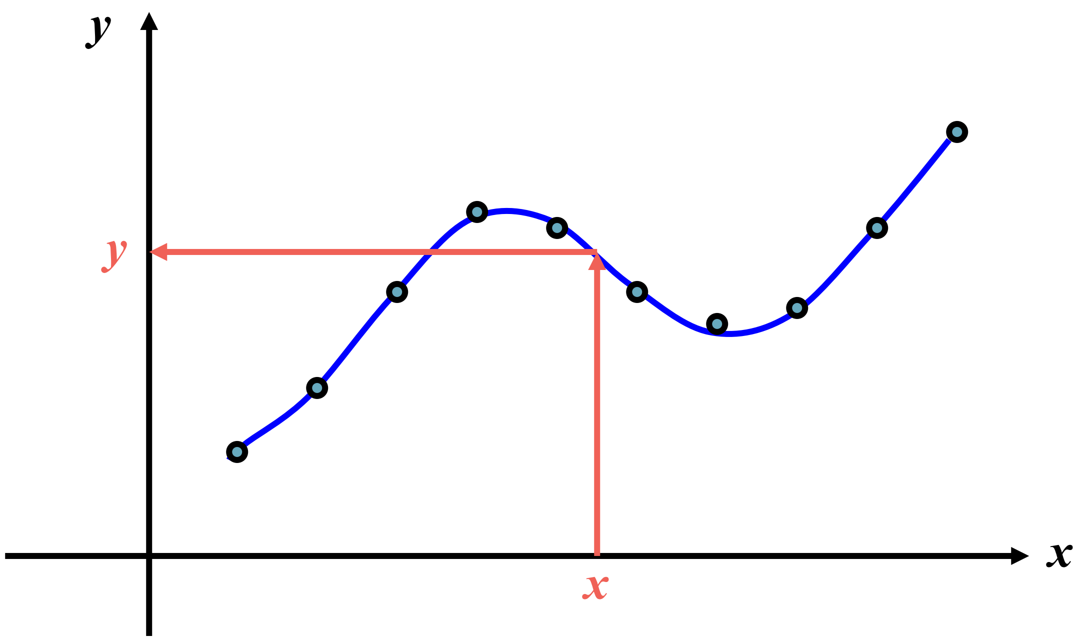
数値解析

第9回 関数近似と補間2 ～ラグランジュ補間，ニュートン補間～

補間 (interpolation)

- 複数の(x_i, y_i)のペアが与えられたとき,
  - 与えられたすべての点を通る関数を求め,
  - 任意のxに対し，対応するyを求める手法.



関数近似と補間

- 関数近似 (fitting)

  データ群を関数で表現することで，おおまかな傾向を知る.
  関数がデータ点を通らないことが多い.
  誤差がある測定データにおいて，誤差の影響を軽減できる.
  あてはめ関数が不適切だとデータ点ですら正しく表現できない.

- 補間 (interpolation)

  データ群をすべて通る関数を求め，任意の点で値を推定する.
  誤差が含まれるデータでは誤差の影響を受けやすい
  少なくともデータ点においては正確に表現される.

ラグランジュ補間

- n+1組のデータ$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$を n次の多項式で表すことで補間する. (一意)

- 必ずデータ点を通ることから補間n次多項式は

n次多項式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \boxed{l_i(x)}$$

例えばデータ(x_0, y_0)に関して

$$P_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad l_i(x_0) = \begin{cases} 1 \ (i = 0) \\ 0 \ (i \neq 0) \end{cases}$$

ラグランジュ補間

- 一般的なデータ(x_k, y_k)に関して

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x_k) \qquad l_i(x_k) = \begin{cases} 1 \ (k = i) \\ 0 \ (k \neq i) \end{cases}$$

$k \neq i$のとき$l_i(x) = 0$の条件より,

$$l_i(x) = A(x - x_0)\underbrace{(x - x_1)}_{x = x_1\text{のとき}0} \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots \underbrace{(x - x_n)}_{x = x_n\text{のとき}0}$$

$k = i$のとき$l_i(x) = 1$の条件より,

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_{k+1}) \ldots (x_i - x_n)$$

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_{k+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

ラグランジュ補間

- (x_i, y_i)に関して

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{k-1})(x_i-x_{k+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x) \;\Rightarrow\; \boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}}$$

ラグランジュ補間多項式

ラグランジュ補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$の3点から，$(5, y)$の値を求める.

$i = 0$

$$y_0 \times \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = 1 \times \frac{x-3}{-2} \times \frac{x-7}{-6}$$

$i = 1$

$$9 \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-7}{-4}$$

$i = 2$

$$49 \times \frac{x-1}{6} \times \frac{x-3}{4}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}}$$

ラグランジュ補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$の3点から，$(5, y)$の値を求める.

$i = 0$

$$1 \times \frac{x-3}{-2} \times \frac{x-7}{-6}$$

$i = 1$

$$9 \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-7}{-4}$$

$i = 2$

$$49 \times \frac{x-1}{6} \times \frac{x-3}{4}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}}$$

$x = 5$

$$1 \times \frac{5-3}{-2} \times \frac{5-7}{-6} = -\frac{1}{3}$$

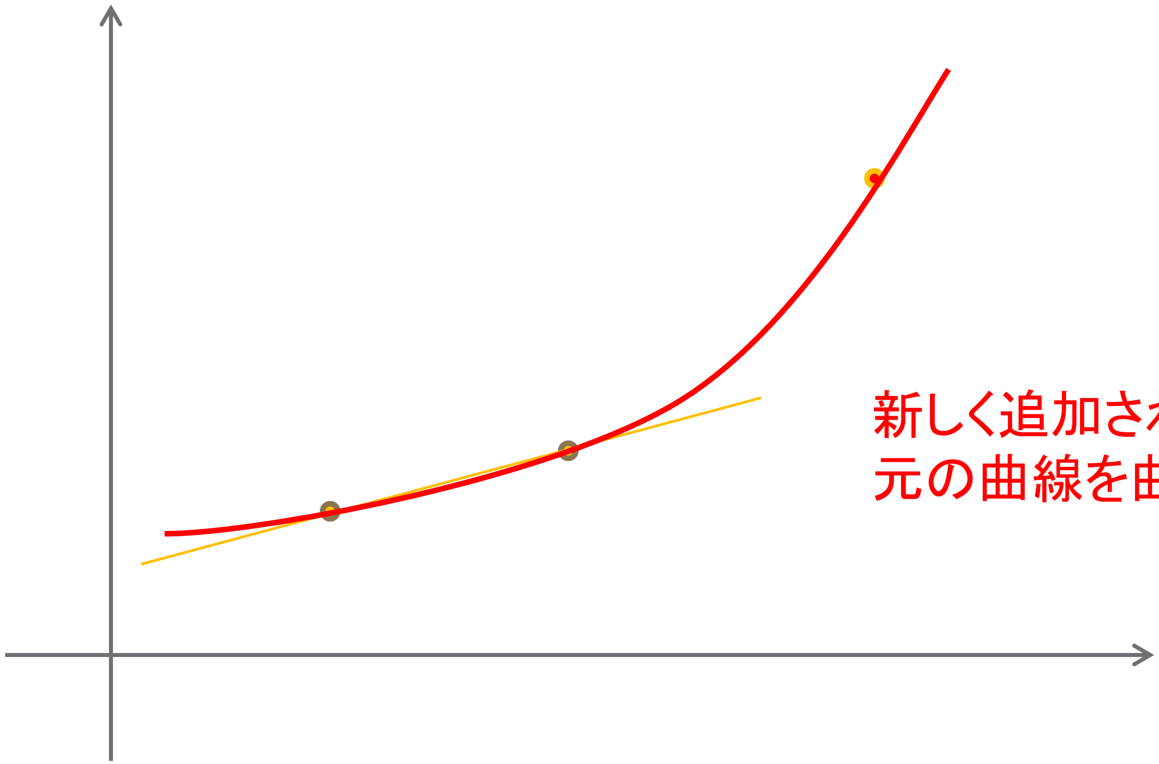
$$9 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-7}{-4} = \frac{72}{8} = 9$$

$$49 \times \frac{5-1}{6} \times \frac{5-3}{4} = \frac{49 \times 8}{24} = \frac{49}{3}$$

$$y = P_2(5) = -\frac{1}{3} + 9 + \frac{49}{3} = 9 + \frac{48}{3} = 25$$

ニュートン補間

- ラグランジュ補間は次数(点数)が変わると全部再計算→面倒
- 増えた分だけ計算することはできないか？



新しく追加された点を通るように
元の曲線を曲げてやる.

ニュートン補間

新しく追加された点を通るように元の曲線を曲げてやる.

- $P_k(x) = P_{k-1}(x) + p_k$

k次の多項式

k-1次の補間多項式

k次の補間多項式

k-1次の補間多項式はk-1個の点すべてを通過していたはずなので

$$\boxed{p_k(x_i) = 0, \qquad i = 0,1,\dots,k-1}$$

となるように構成すれば, k次補間式$P_k(x)$も必ずこれらの点を通る.

$$\boxed{p_k(x) = b_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)}$$

ニュートン補間

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + p_k$$

$$p_k(x) = b_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

$$P_{k-1}(x) = P_{k-2}(x) + p_{k-1}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)}$$

$k = 0$のときは1

1点(0次式) $P_0(x_0) = b_0 = y_0$

2点(1次式) $P_1(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ニュートン補間

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

1点(0次式) $P_0(x_0) = b_0 = y_0$

2点(1次式) $P_1(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

3点(2次式) $P_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \quad b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\underbrace{\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}_{f[x_1, x_2]} - \underbrace{\boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}}_{f[x_0, x_1]}\right)$$

差分

n点(n-1次式)

$$\boxed{b_n = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}}$$

n階差(分)商

補足資料: 3次の式変形

$$P_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = y_2 - y_0$$

$$b_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}\left\{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)\right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0)\right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}\right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}\right\}$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right\}$$

ニュートン補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$の3点から，$(5, y)$の値を求める.

$$
\begin{array}{ccc}
y & \text{1階差分商} & \text{2階差分商}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} y_0 & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] \\ y_1 & f[x_1, x_2] & NA \\ y_2 & NA & NA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{9-1}{3-1} & f[x_0, x_1, x_2] \\ 9 & \dfrac{49-9}{7-3} & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 & \dfrac{10-4}{7-1} \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}
$$

ニュートン補間例: 2次式

$(x, y) = (1, 1), (3, 9), (7, 49)$の3点から，$(5, y)$の値を求める.

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)}$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & NA \\ 49 & NA & NA \end{pmatrix}$$

$(5, y)$では,

$$p_2(x) = 1 + 4(5 - 1) + 1(5 - 3)(5 - 1) = 25$$

ラグランジュ補間と同じ結果(3点を通る2次式は一意)

補足: 1点追加したら

$$\begin{pmatrix} y_0 & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ y_1 & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & NA \\ y_2 & f[x_2,x_3] & NA & NA \\ y_3 & NA & NA & NA \end{pmatrix}$$

$$p_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_0)$$

$$+b_3(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)$$

増えたところだけ計算

課題

1. k9-input.csvから計測データを読み込み，その中から以下に示す最初の3点を利用した補間により，$x = 2.0$のときの値を求めよ.

   (x, y):　　$(-1.0, -1.0)$　　$(1.5, 7.125)$　　$(3.0, 63.0)$

2. k9-input.csvに記録された4つ目の計測データ$(4.0, 159.0)$も利用した補間により$x = 2.0$のときの値を求めよ.