Ec4 制御工学 IB　第 11 回

1　プロパーな伝達関数

ある伝達関数 $G(s)$ を s の有理式

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

で表したとき，$n > m$ であれば $G(s)$ のことを**（厳密に）プロパーな伝達関数**という。

例えばプロパーな伝達関数 $G_1(s) = (3s-1)/(2s^2+5s+1)$ について，そのゲイン特性 $|G_1(j\omega)|$ を求め，$\omega \to \infty$ としたときのゲインの収束値を求めてみよう。

周波数伝達関数 $G_1(j\omega)$	ゲイン特性 $\lvert G_1(j\omega)\rvert$	ゲインの収束値

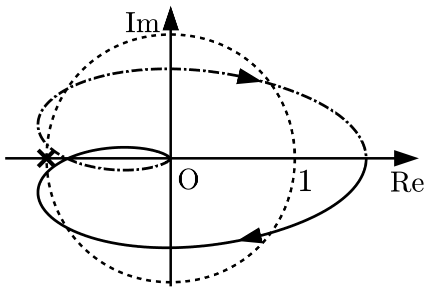
これを一般化して，プロパーな伝達関数 $G(s)$ のゲインやナイキスト線図について言えることをまとめる。

$\omega \to \pm\infty$ でのゲイン $\lvert G(j\omega)\rvert$ の収束値	$G(s)$ のナイキスト線図の始点と終点

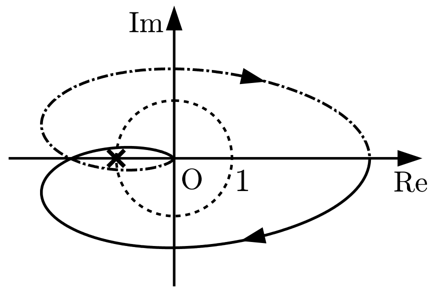
また，プロパーな伝達関数では ω を大きくするにつれて位相 $\angle G(j\omega)$ は必ず小さくなる（遅れる）。したがって，**ナイキスト線図は必ず時計回りの軌道**となる。

2　一巡伝達関数が安定な場合のナイキストの安定判別法

一巡伝達関数が安定でプロパーな場合を考える。つまり不安定極の個数は $U = 0$ である。以下の 2 つのナイキスト線図のうち，全体が安定となるのは $\boxed{\text{(a) / (b)}}$ である。なお，一点鎖線が $\omega = -\infty \to 0$，実線が $\omega = 0 \to \infty$ の軌跡を，点線が半径 1 の円を，そしてバツ印が点 $(-1, 0)$ を表す。



(a)



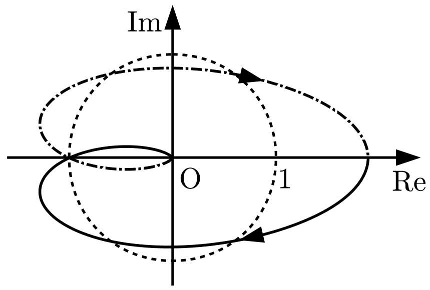
(b)

この 2 つについて，実線（ベクトル軌跡）と点 $(-1, 0)$ との関係にだけ注目すると，ナイキストの安定判別法は以下のようにまとめられる。

一巡伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ を常に $\boxed{\text{左 / 右}}$ に見るように動くならばシステムは安定

このように一巡伝達関数が安定であるときに，その一巡伝達関数のベクトル軌跡（実線）だけに注目して安定判別を行う方法を**簡単化されたナイキストの安定判別法**と呼ぶ。

3　システムの安定余裕

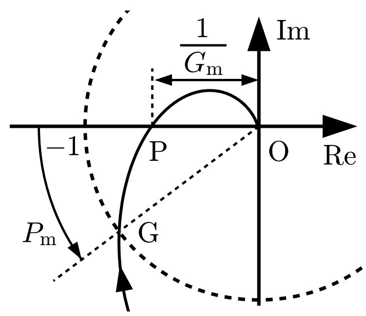


一巡伝達関数が安定であれば，ベクトル軌跡と点 $(-1,0)$ との関係で安定性を判別できる。特別な場合として右図のようにベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ を通る場合のことを**安定限界**という。安定限界では入力（目標値）が 0 になってもある振動成分が減衰せずにずっと残ることになる。理想的には安定の定義は満たすが，わずかでも外乱が入ると不安定となる。

簡単化されたナイキストの安定判別法をベースに，システムがどの程度余裕をもって安定なのか，つまり**安定余裕**という概念を導入していく。安定余裕は**ゲイン余裕** G_{m} と**位相余裕** P_{m} の 2 つを使って定量的に表される。ゲイン余裕と位相余裕はベクトル軌跡において下右図のように定義される。

P：ベクトル軌跡と実軸の交点，　G：ベクトル軌跡と単位円の交点，　$\dfrac{1}{G_{\mathrm{m}}} = \overline{\mathrm{OP}}$,　$P_{\mathrm{m}} = \angle\mathrm{GOP}$

ゲイン余裕 G_{m} とは
位相余裕 P_{m} とは



ゲイン余裕は dB 単位で表すことが多いので，ゲイン余裕 G_{m} を $G_{\mathrm{m}} = 20\log(1/\overline{\mathrm{OP}}) = -20\log\overline{\mathrm{OP}}$ と定義し直すことにする。

4　ボード線図における安定判別と安定余裕

ベクトル軌跡の各点はある周波数 ω における一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega) = |L(j\omega)|\mathrm{e}^{j\angle L(j\omega)}$ の値を表している。ベクトル軌跡が点 P になる周波数のことを**位相交差周波数**といい ω_{p} と表す。また，ベクトル軌跡が点 G になる周波数のことを**ゲイン交差周波数**といい ω_{g} と表す。上右図における $\overline{\mathrm{OP}}$ や $\angle\mathrm{GOP}$ を使ってこれらの周波数におけるゲインや位相の値を以下にまとめる。

$\lvert L(j\omega_{\mathrm{p}})\rvert$	$\angle L(j\omega_{\mathrm{p}})$	$\lvert L(j\omega_{\mathrm{g}})\rvert$	$\angle L(j\omega_{\mathrm{g}})$

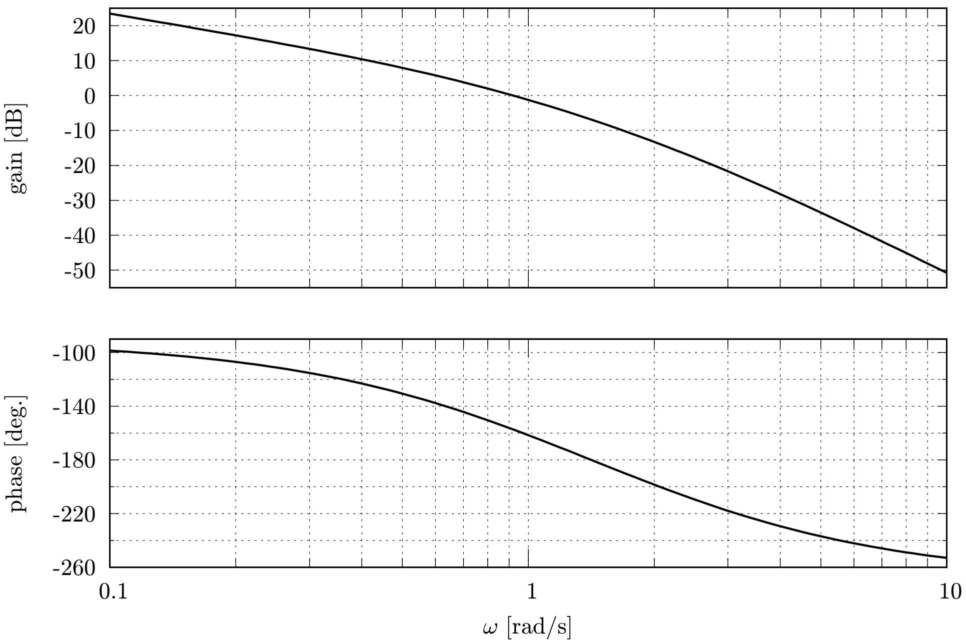
すなわち，ゲイン余裕 G_{m} と位相余裕 P_{m} は一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ と位相交差周波数 ω_{p}，ゲイン交差周波数 ω_{g} を使って以下のように書ける。

ゲイン余裕 G_{m}	位相余裕 P_{m}

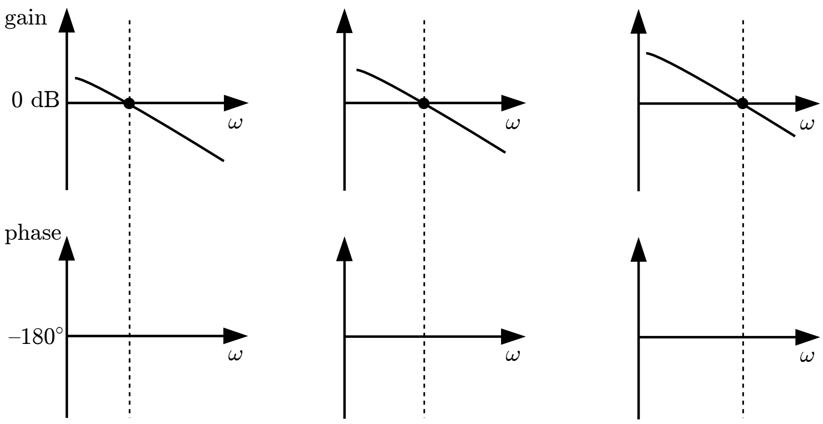
例として一巡伝達関数 $L_1(s)$ が

$$L_1(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

と表されるシステムにおいて $K=3$ とした場合のボード線図を下図に示す。この図において位相交差周波数 ω_{p} とゲイン交差周波数 ω_{g}，そしてゲイン余裕 G_{m} と位相余裕 P_{m} を図示する。



ここまでを踏まえて，簡単化されたナイキストの安定判別法はベクトル軌跡ではなくボード線図を用いても行うことができる。



(a) 安定　(b) 安定限界　(c) 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{g} において		位相交差周波数 ω_{p} において	
位相が -180° より進んでいる		ゲインが 0 dB より低い	
位相が -180° ちょうど		ゲインが 0 dB ちょうど	
位相が -180° より遅れている		ゲインが 0 dB より高い	

5 Python-control で安定余裕を調べる

Python-control で安定余裕 (stability margin) を調べるには `margin` 関数を使う。`tf` 関数で定義した一巡伝達関数 `L` について，`Gm,Pm,wp,wg = margin(L)` とすれば戻り値として受け取って変数に格納することが可能である[*1]。なお，戻り値として受け取るゲイン余裕 `Gm` は dB 単位ではないので，dB 単位に変換するには `Gm_dB = 20*np.log10(Gm)` とする必要がある。`Pm` の単位は deg，`wp` と `wg` の単位は rad/s である。

課題

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{k}{s^3+6s^2+11s+6}$$

で表されるフィードバック制御系について，$k = 30$ でのゲイン余裕を G_m として，ゲインをあらためて

$$k_1 = 0.5G_\mathrm{m} \times k, \qquad k_2 = 0.7G_\mathrm{m} \times k, \qquad k_3 = G_\mathrm{m} \times k$$

とした 3 通りのフィードバック制御系を考える。k_1 が最もゲイン余裕があり，k_3 ではゲイン余裕がなくなっているはずである。

(1). $L(s)$ の $k = 30$ でのゲイン余裕（単位：dB)，位相余裕（単位：deg)，位相交差周波数（単位：rad/s および Hz)，ゲイン交差周波数（単位：rad/s および Hz）を求めよ。

(2). 上記の k_1, k_2, k_3 のそれぞれについてフィードバック制御系全体でのステップ応答を描画し，ゲイン余裕の大きさがステップ応答に及ぼす影響を考察せよ。

(3). 安定限界におけるステップ応答（ k_3 の場合）は減衰せずに振動する形になる。描画したステップ応答のグラフからこの振動の周波数を読み取り，(1) の結果も踏まえてその値が何に対応するか考察せよ。

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_11_KazukiSakai.html`

[*1] `margin` 関数のマニュアルでは位相交差周波数 ω_p が `wg` という変数名，ゲイン交差周波数 ω_g が `wp` という変数名で書かれている。それぞれ「GM での ω」,「PM での ω」という意味のようで，教科書やプリントでの名付け方と逆なので注意