数値解析

第3回 非線形方程式

本日の目標

1. ２つの手法で非線形方程式の数値解を求める
    1. 2分法
    2. ニュートン法

演習課題3

1. $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ について，k3-input.csvから入力された区間[a_1, a_2]に関して，2分法とニュートン法をそれぞれで10回繰り返したときの解の変化を出力せよ.

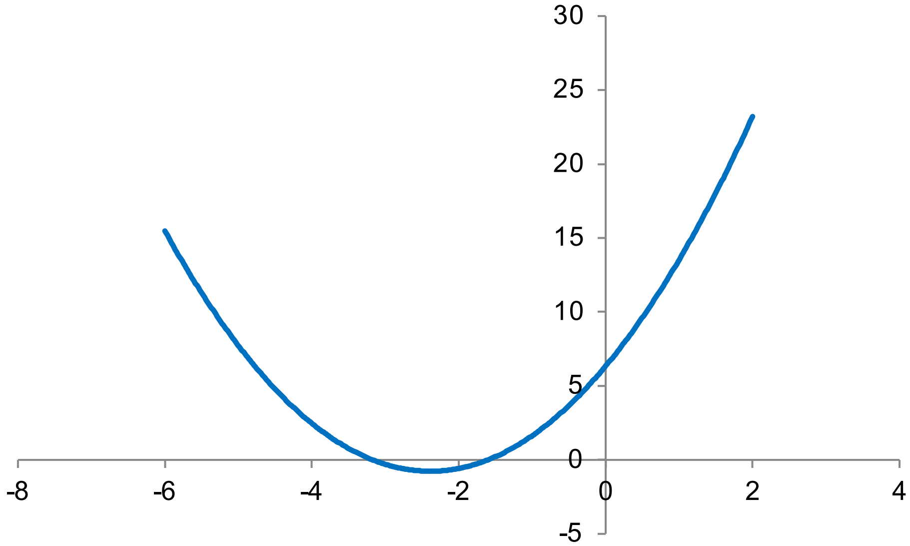
   ただし，2分法は区間両端から開始することとし，
   ニュートン法の初期値は区間の中央値とする.

   また，与式は区間の設定により複数の実数解を持つが，
   k3-input.csvは必ず1つの実数解を持つ区間となるよう
   与えることとする。

非線形とは

- 線形でないもの.
- 変数(x)に関する2次以上の多項式で表されるもの.
- 三角関数 etc.

例) $y = x^2 + 5x + 6$



$\mathrm{y} = 3x^3 + 1$
$y = \sin x + 1.0$

非線形方程式の解

- $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ の解は？

  解析的に解くことができない ⇨ 数値解析

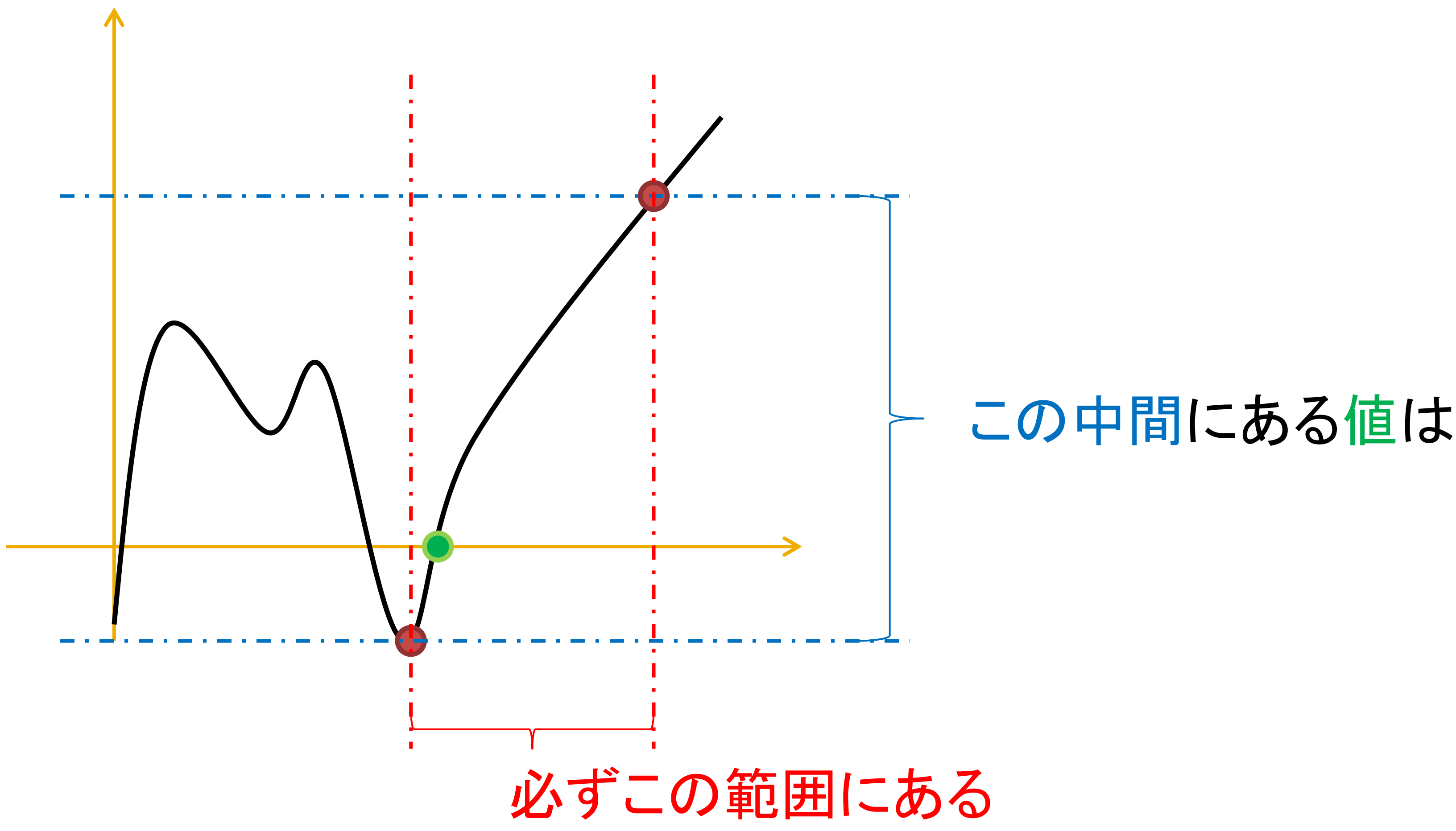
  Ans(近似) : 1.7537

- ２分法

- ニュートン法

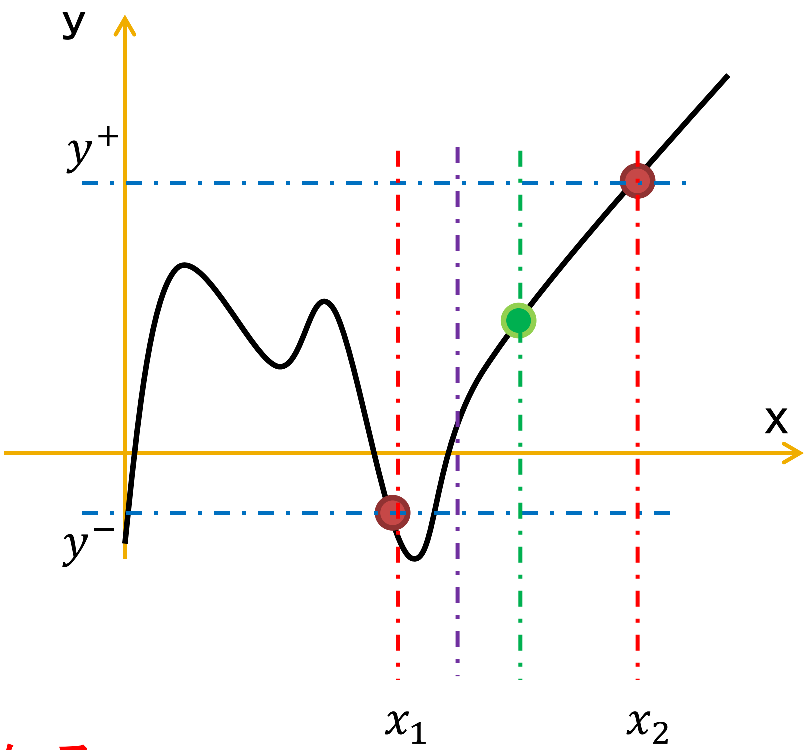
2分法

- 中間値の定理



2分法

1. 何らかの方法でy^+とy^-をみつける.
2. 対応する$[x1, x2]$の中間を計算する.
3. 符号が異なるペアの区間を選ぶ.
4. 3の区間の中間を計算する.
5. 以下繰り返し

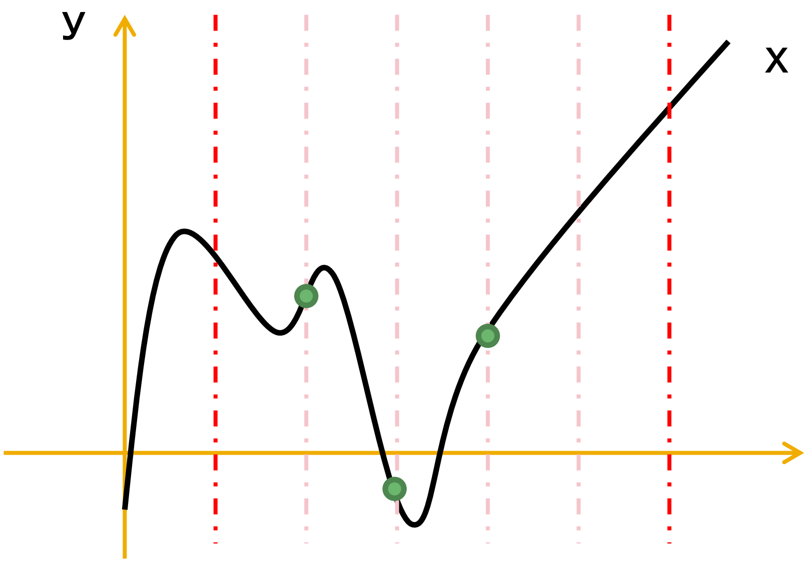


区間の幅は1ステップで半分になる.
→最大誤差は$1/2^n$(nはステップ数)

2分法

- 対象区間の見つけ方
  1. 全区間と刻み幅を決める.
  2. 符号が変わるペアを対象区間とする.

符号反転の判別: $y_1 \times y_2 < 0$



解が2つある

- 求めたい問題は$f(x) = 0$の形にする.
- $f(x) \geq 0$が常に成り立つ問題は解けない.

例:

- $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$の[-3, 3]における解

1. [-3, 3]を1刻みで計算してみる.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	30	−15	−16	−9	−6	5	60

ここに解が存在する

2. [1, 2]を選択し，中間値1.5のときのf(x)を計算する.

x	1	1.5	2
f(x)	−6	−3.2	5

解はこちらに存在→ [1.5, 2]を選択し，f(1.75)を計算

例:

- $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$の[-3, 3]における解

3. [1.5, 2]の中間値1.75におけるf(x)の計算

x	1.5	1.75	2
f(x)	−3.2	−0.1	5

解はこちらに存在

4. 以下繰り返し

- f(x)が一定値以下になる(0に近づく)
- 指定回数の繰り返しが完了する

とき終了する.

ニュートン法

- $f(x)=0$の$x=x_0$に関するテイラー展開

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\approx 0}+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}\underbrace{(x-x_0)^n}_{\approx 0}+\cdots$$

$x-x_0$が十分に小さい(x_0は真の解αに十分近い)

$$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\approx 0$$

$$\Delta x=\alpha-x_0$$

$$\Delta x\approx-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\alpha=\Delta x+x_0$$

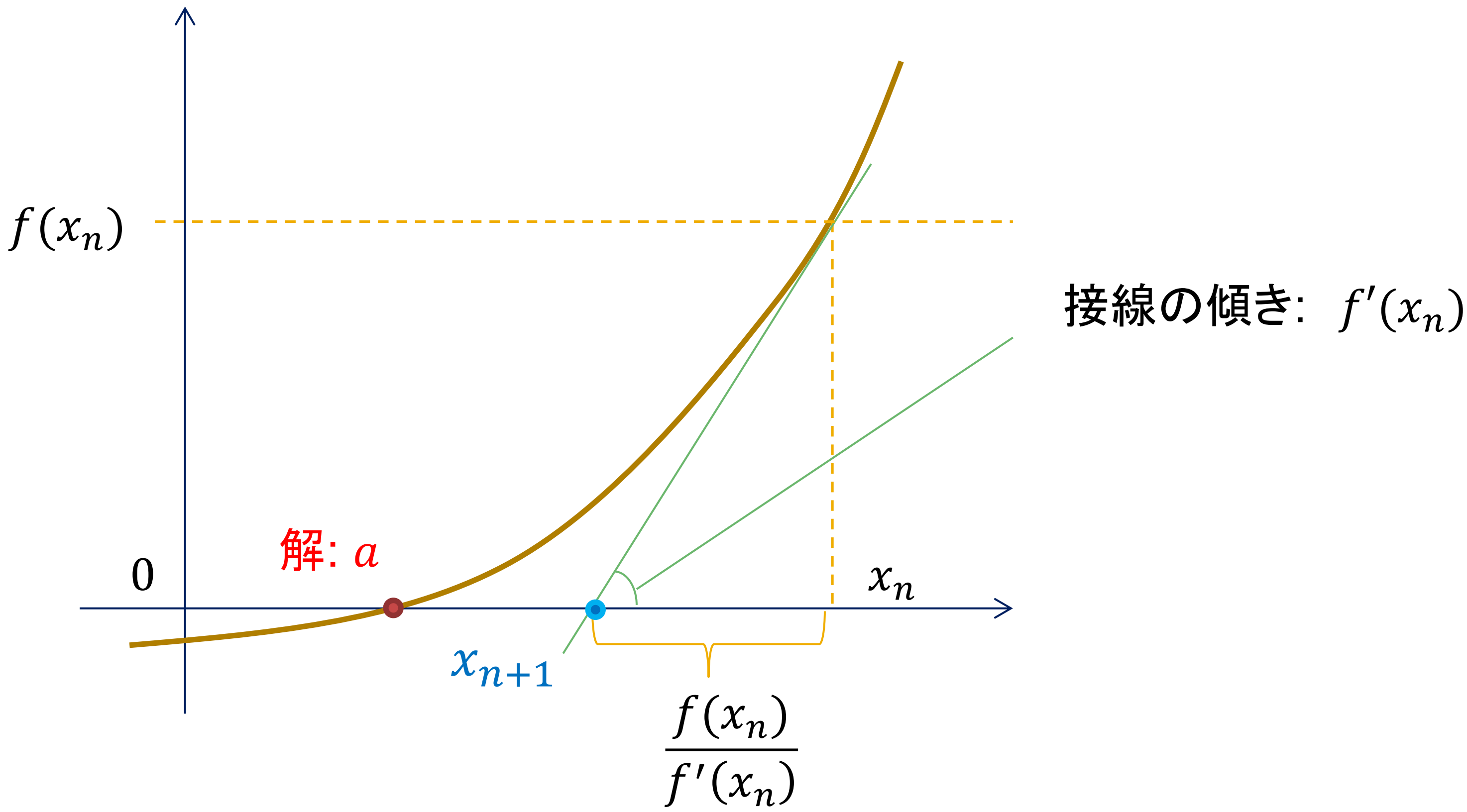
$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

n=0,1,2,…と繰り返し解く

ニュートン法の模式図

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

静止するのは$f(x) = 0$のとき



テイラー展開の仮定について

$x - x_0$が十分に小さい(x_0は真の解αに十分近い)

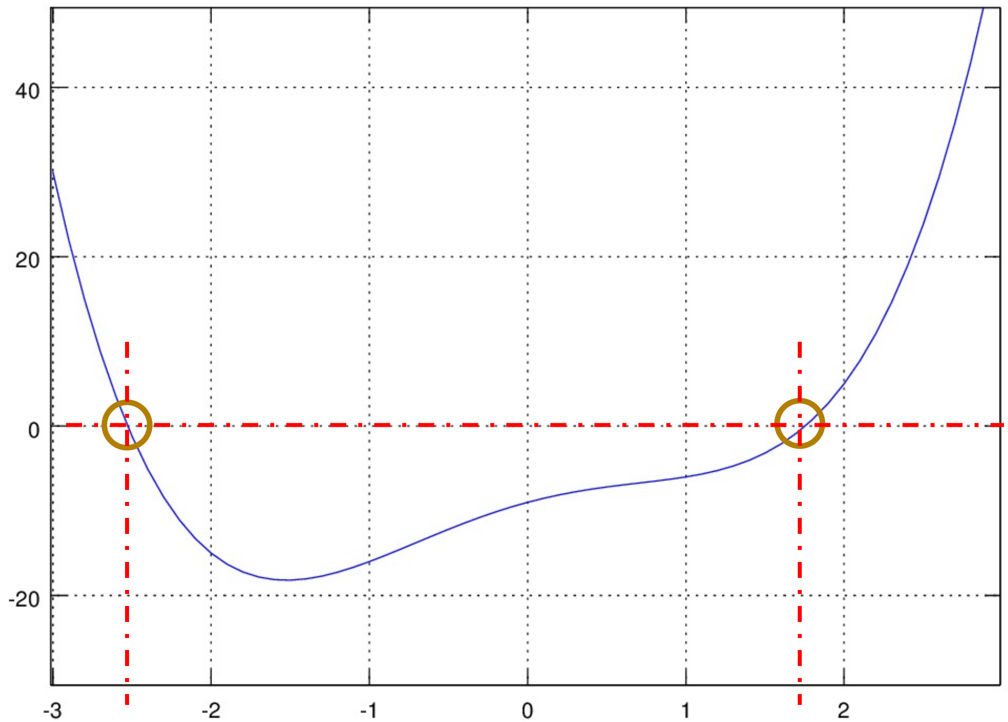
⇩

高次の項が無視できるほど小さくなければならない.
真の解から遠いx_0を選ぶと解が収束しないことがある.

初期値の決め方 (その2)

- 作図してみる方法が簡単 (gnuplotなどが便利)

$x^4 - 3x^2 + 5x - 9$



-2.6ぐらい？ 1.8ぐらい？

例:

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$
  $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$

1. [1, 3]の中央値を初期値 $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 9}{4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 5} = 2 - 0.2 = 1.8$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.8 - 0.0443 = 1.7557$$

x	2.00	1.80000	1.75564
f(x)	5.00	0.77760	0.03173
f'(x)	25.00	17.52800	16.11150
f(x)/f'(x)	0.20	0.04436	0.00197

微分の近似

- 前方差分

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

- 後方差分

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

微分が解析的に求められないときは差分を用いても良い.
ただし，初期値としてx_0, x_1の2つが必要となる.

演習課題3

1. $x^4 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ について，k3-input.csvから入力された区間[a_1, a_2]に関して，2分法とニュートン法をそれぞれで10回繰り返したときの解の変化を出力せよ.

   ただし，2分法は区間両端から開始することとし，
   ニュートン法の初期値は区間の中央値とする.

   また，与式は区間の設定により複数の実数解を持つが，
   k3-input.csvは必ず1つの実数解を持つ区間となるよう
   与えることとする。