数値解析レポート No.2

43番 若月 耕紀

① $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，Ax=b の解 x を求めよ.

授業課題で作成した LU 分解のプログラムを使用すると，LU 分解の結果は以下のようになる.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この時，U 行列のランクが 2 となるので，解である x を求める際に 0 割りをすることになり，プログラムが強制終了する．対策方法としては，0 割りが出現しないような行列を入力すれば良い.

また解 x は行基本変形を用いて以下のように求めることができる.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\ x = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t+2 \\ t \end{pmatrix} \quad (t\text{ は任意定数})$$

今回は不定解となるため，t を任意定数として計算している.

② $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

C が LU 分解できるとき，$C^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$ と表すことができる．よって，L と U の逆行列を求めれば，C の逆行列を求めることができる.

U の逆行列

U は上三角行列であるので，U^{-1} も上三角行列である．これらを以下のように定める.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ U^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$$

$UU^{-1} = E$ であるため，

$$UU^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} & a_{11}a'_{12} + a_{12}a'_{22} & a_{11}a'_{13} + a_{12}a'_{23} + a_{13}a'_{33} \\ 0 & a_{22}a'_{22} & a_{22}a'_{23} + a_{23}a'_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これを解くと，

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & -a_{12}a'_{11}a'_{22} & -a_{12}a'_{11}a'_{23} - a_{13}a'_{11}a'_{33} \\ 0 & a'_{22} & -a_{23}a'_{22}a'_{33} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$$

となる．この時，$a'_{11} = \dfrac{1}{a_{11}}$，$a'_{22} = \dfrac{1}{a_{22}}$，$a'_{33} = \dfrac{1}{a_{33}}$ である.

L の逆行列

U と同様に以下のように定める．

$$L = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ L^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & 0 & 0 \\ b'_{21} & b'_{22} & 0 \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}$$

$LL^{-1} = E$ であるので，

$$LL^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11}b'_{11} & 0 & 0 \\ b_{21}b'_{11} + b_{22}b'_{21} & b_{22}b'_{22} & 0 \\ b_{31}b'_{11} + b_{32}b'_{21} + b_{33}b'_{31} & b_{32}b'_{22} + b_{33}b'_{32} & a_{33}a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これを解くと，

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & 0 & 0 \\ -b_{21}b'_{11}b'_{22} & b'_{22} & 0 \\ -b_{31}b'_{11}b'_{33} - b_{32}b'_{21}b'_{33} & -b_{32}b'_{22}b'_{33} & b'_{33} \end{pmatrix}$$

となる．この時，$b'_{11} = \dfrac{1}{b_{11}}$, $b'_{22} = \dfrac{1}{b_{22}}$, $b'_{33} = \dfrac{1}{b_{33}}$ である．

C の逆行列

課題 5 で作成したプログラムで C を LU 分解すると以下のようになる．

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{pmatrix}$$

上記を利用して，L と U の逆行列を求めると以下のようになる．

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix},\ U^{-1} = \begin{pmatrix} 0.125 & -0.08333 & 0.3030 \\ 0 & 0.3333 & -0.03030 \\ 0 & 0 & 0.1818 \end{pmatrix}$$

これらを利用して $C^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$ を計算すると以下のようになる．

$$C^{-1} = U^{-1}L^{-1}P = \begin{pmatrix} 0.3030 & -0.06818 & 0.08333 \\ -0.03030 & 0.3182 & 0.1667 \\ 0.1818 & 0.09090 & 0 \end{pmatrix}$$

2　2 分法とよく似た方法にはさみうち法がある．はさみうち法について調査し，2 分法との違いをまとめよ．また，同じ条件で 10 回繰り返した時の値について比較せよ．

はさみうち法とは，2 分法を少し改良したものである．2 分法では区間の中間を計算していたが，はさみうち法では区間の端点を結ぶ直線と x 軸との交点の座標を使用する．はさみうち法は，初期値が悪いと 2 分法よりも収束が遅くなるが，初期値が解に近ければ収束は早くなる．

はさみうちについて，作成したプログラムをリスト 1 に示す．

リスト 1　False_Position

```c
void False_Position(double a1, double a2, double (*f)(double x)){
        int i;
        double nex;

        for(i = 1; 10 >= i; ++i){
                nex = (a1 * f(a2) - a2 * f(a1)) / (f(a2) - f(a1));

                printf("%2d:␣x=%.9f\n", i, nex);

                if(0 > f(a1) * f(nex)){
                        a2 = nex;
                }else{
                        a1 = nex;
                }
        }
}
```

基本的なプログラムの構成は課題 3 と同じであるため，説明を省略する．変更点である nex については，x 軸を $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$ として交点の座標を求めた．

このプログラムを用いて $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 9$，区間 [1，3] の解を求める．実行した結果を以下に示す．

はさみうち法	2 分法
1: x = 1.181818182	1: x = 2.000000000
2: x = 1.330162049	2: x = 1.500000000
3: x = 1.447303924	3: x = 1.750000000
4: x = 1.536568968	4: x = 1.875000000
5: x = 1.602390729	5: x = 1.812500000
6: x = 1.649612800	6: x = 1.781250000
7: x = 1.682775076	7: x = 1.765625000
8: x = 1.705697489	8: x = 1.757812500
9: x = 1.721362780	9: x = 1.753906250
10: x = 1.731983564	10: x = 1.751953125

区間 [1，3] での解は $x \approx 1.753663501$ であるため，今回の場合では，はさみうち法の方が収束が遅かった．

3　ヤコビ法やガウス・ザイデル法が収束しない条件を，例をあげながら解説せよ．

ヤコビ法，ガウス・ザイデル法とは，n 元連立一次方程式を反復法で解く手法の 1 つである．これらが真の解に収束する条件は以下のようになる．

- 第 i 行の対角項以外の成分の絶対値の和よりも，対角項の絶対値が大きい

上記の条件を満たさなかった場合，ヤコビ法とガウス・ザイデル法が収束しない．よって収束しない条件は以下のようになる．

- 第 i 行の対角項以外の成分の絶対値の和よりも，対角項の絶対値が小さい

例として，以下のように定めた場合について各方法の解の遷移を示す．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix},\ \text{初期値} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{正しい解} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

まず，ヤコビ法での解の遷移を以下に示す．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -41 \\ -53 \\ -50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 270 \\ 234 \\ 252 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1210 \\ -1303 \\ -1231 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

次に，ガウス・ザイデル法での解の遷移を以下に示す．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ -31 \\ 76 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -152 \\ 315 \\ -630 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1274 \\ -2551 \\ 5116 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -10232 \\ -20475 \\ -40950 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

上記の結果より，収束条件を満たさない場合，どちらの方法でも，解が収束せずに発散していくことがわかる．

4　感想

今回のレポートでは，今まで習ったことを改めて学習することができた．授業課題として実装していないものもあったため，少し忘れている部分があり，苦労した．これから編入試験もすることになるため，課題として出ていなくても積極的に学習をし，理解を深めていきたいと思う．