Ec4 制御工学 IB　第 3 回

1　二次システムの時間応答

　二次システムは伝達関数の分母が 2 次式のシステムであり，その標準形は以下の形である。

$$P_{\rm 2nd}(s) = \frac{K\omega_{\rm n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_{\rm n}s + \omega_{\rm n}^2}, \qquad (\zeta：粘性減衰係数比，\omega_{\rm n}：固有角周波数).$$

$\zeta > 0, \omega_{\rm n} > 0$ である。二次システムは ζ の値の範囲によって振る舞いが変わるのでそれぞれ見ていこう。

1.1　$\zeta > 1$ の場合のステップ応答

　まずは $P_{\rm 2nd}(s)$ の分母が $s^2 + 2\zeta\omega_{\rm n}s + \omega_{\rm n}^2 = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$ と因数分解できるとする。これを前提として，$Y(s) = P_{\rm 2nd}(s)U(s)$ を以下のように部分分数分解する。

$$Y(s) = P_{\rm 2nd}(s)U(s) = \frac{K\omega_{\rm n}^2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s-\lambda_1)} + \frac{c}{(s-\lambda_2)}$$

すると，これを逆ラプラス変換して $y(t)$ を $t, a, b, c, \lambda_1, \lambda_2$ の式で表すと，

$$y(t) = a + be^{\lambda_1 t} + ce^{\lambda_2 t}$$

この a, b, c をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, K, \omega_{\rm n}$ の式で求める。ヘビサイドの方法より，それぞれ

$$a = \lim_{s\to 0} Y(s)s, \qquad b = \lim_{s\to\lambda_1} Y(s)(s-\lambda_1), \qquad c = \lim_{s\to\lambda_2} Y(s)(s-\lambda_2)$$

として計算できるから，式を求めると以下のようになる。

$a = \dfrac{K\omega_n^2}{\lambda_1\lambda_2}$	$b = \dfrac{K\omega_n^2}{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1}$	$c = \dfrac{K\omega_n^2}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2}$

すなわち，$y(t)$ を $t, \lambda_1, \lambda_2, K, \omega_{\rm n}$ の式で求めると次の形になる。

$$y(t) = \frac{K\omega_n^2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{K\omega_n^2}{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \frac{K\omega_n^2}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2}e^{\lambda_2 t}$$

　続いて，λ_1, λ_2 を $K, \zeta, \omega_{\rm n}$ の式で求める。これらは二次方程式 $s^2 + 2\zeta\omega_{\rm n}s + \omega_{\rm n}^2 = 0$ の解なので，

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$y(t)$ を ζ, ω_n の式で表すために，まず $\lambda_1\lambda_2$ と $\lambda_1 - \lambda_2$ を計算しておくとそれぞれ次のようになる。

$\lambda_1\lambda_2$	$\lambda_1 - \lambda_2$
$\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2(\zeta^2 - 1)$ $= \omega_n^2$	$-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ $- (-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})$ $= 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

以上より，$y(t)$ を ζ, ω_n の式で表すと以下のようになる。

$$y(t) = \frac{K\omega_n^2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{K\omega_n^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{K\omega_n^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2} e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = K + \frac{K\omega_n e^{\lambda_1 t}}{2\lambda_1\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{K\omega_n e^{\lambda_2 t}}{2\lambda_2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$y(t) = K + \frac{K(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t})}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

1.2　$\zeta = 1$ の場合のステップ応答

$\zeta = 1$ の場合について $Y(s) = P_{\mathrm{2nd}}(s)U(s)$ を

$-K\omega_n^2 s^{-2}$

$$Y(s) = \frac{K\omega_\mathrm{n}^2}{(s+\omega_\mathrm{n})^2 s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+\omega_\mathrm{n})} + \frac{c}{(s+\omega_\mathrm{n})^2}$$

$-\frac{K\omega_n^2}{s^2}$

とおいて a, b, c を求める。ヘビサイドの方法より，

$$a = \lim_{s\to 0} Y(s)s, \qquad c = \lim_{s\to -\omega_\mathrm{n}} Y(s)(s+\omega_\mathrm{n})^2, \qquad b = \frac{1}{1!}\lim_{s\to -\omega_\mathrm{n}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[Y(s)(s+\omega_\mathrm{n})^2\right]$$

であるから，それぞれ式を求めると

$a = K$	$b = -K$	$c = -K\omega_n$

したがって，この $Y(s)$ を逆ラプラス変換して $y(t)$ を t, K, ω_n の式で求めると次のようになる。

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{(s+\omega_n)} - \frac{K\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$= K - Ke^{-\omega_n t} - tKe^{-\omega_n t}$$

1.3　$1 > \zeta > 0$ の場合のステップ応答

$\zeta > 1$ の場合の $y(t)$ においてルートの中身が負になるので虚数が出てくる。$\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}$ とすると

$$
\begin{aligned}
y(t) &= K\left[1 - \frac{1}{2j\gamma}\left\{(\zeta + j\gamma)\mathrm{e}^{-\omega_\mathrm{n}(\zeta - j\gamma)t} - (\zeta - j\gamma)\mathrm{e}^{-\omega_\mathrm{n}(\zeta + j\gamma)t}\right\}\right] \\
&= K\left[1 - \frac{1}{2j\gamma}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_\mathrm{n}t}\left\{(\zeta + j\gamma)\mathrm{e}^{j\gamma\omega_\mathrm{n}t} - (\zeta - j\gamma)\mathrm{e}^{-j\gamma\omega_\mathrm{n}t}\right\}\right] \\
&= K\left[1 - \frac{1}{2j\gamma}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_\mathrm{n}t}\left\{\zeta(\mathrm{e}^{j\gamma\omega_\mathrm{n}t} - \mathrm{e}^{-j\gamma\omega_\mathrm{n}t}) + j\gamma(\mathrm{e}^{j\gamma\omega_\mathrm{n}t} + \mathrm{e}^{-j\gamma\omega_\mathrm{n}t})\right\}\right]
\end{aligned}
$$

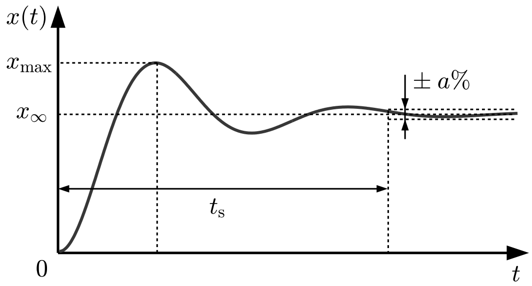
ここで，オイラーの公式を使って式変形していけば以下のように $y(t)$ の式が求まる。

三角関数の合成 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \tan^{-1}(a/b))$ を使って変形すれば次式が得られる。

2　二次システムの過渡応答評価

$\zeta \geq 1$ の場合は単調増加だが，$1 > \zeta > 0$ の場合は三角関数による振動の成分があり，下右図のように途中で最終値を超えることもあり得る。図中の記号を使って次の 2 つの過渡応答評価指標を定義する。

オーバーシュート	$\dfrac{x_{max} - x_\infty}{x_\infty}$
整定時間	t_s



3　二次システムの定常応答

最終値の定理 $y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s)$ を使うと，二次システムの定常応答は以下であることがわかる。

$y_\infty = K$

4　n 次システム

n 次システムの伝達関数は

$$P_n(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0}$$

であるが，部分分数分解すると必ず分母が 1 次あるいは 2 次の項の和で表すことができる。つまり，高次のシステムは一次システムと二次システムの重ね合わせで考えることができる。

5　Python-control を使った二次システム

基本的には新しいことは何もないが，変数を活用する例を。

```
 In[1]: import numpy as np
 In[2]: import matplotlib.pyplot as plt
 In[3]: from control.matlab import *
 In[4]: K = 2.0
 In[5]: zeta = 0.3
 In[6]: wn = 3.0
 In[7]: n = [K * wn**2]
 In[8]: d = [1, 2*zeta*wn, wn**2]
 In[9]: P = tf(n, d)
In[10]: t = np.linspace(0, 10, 100)
In[11]: y, t = step(P, t)
In[12]: plt.plot(t, y)
        plt.show()
```

課題

二次システムの $K, \omega_{\mathrm{n}}, \zeta$ の以下のそれぞれの組み合わせについて，時間応答を Python で重ねてプロットせよ。また，過渡応答評価指標の 2 つを意識して ω_{n} や ζ をどのように変えると応答がどのように変わるのか（何が変わって何が変わらないのか）を述べよ。

(1) $K = 1, \zeta = 0.3$ で, $\omega_{\mathrm{n}} = 0.1, 0.5, 1.0$ [rad/s] の 3 通り
(2) $K = 1, \omega_{\mathrm{n}} = 0.5$ [rad/s] で, $\zeta = 0.2, 0.5, 0.8$ の 3 通り
(3) $K = 1$ で, $(\omega_{\mathrm{n}}, \zeta) = (0.2, 0.8), (0.4, 0.4), (0.8, 0.2)$ の 3 通り

プロットするグラフは以下のような書式にすること

- 横軸の範囲は 0 s から 30 s で 100 点，グリッド線あり，凡例あり，軸ラベルあり
- 青実線，緑破線，赤一点鎖線の 3 本

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_03_KazukiSakai.html`