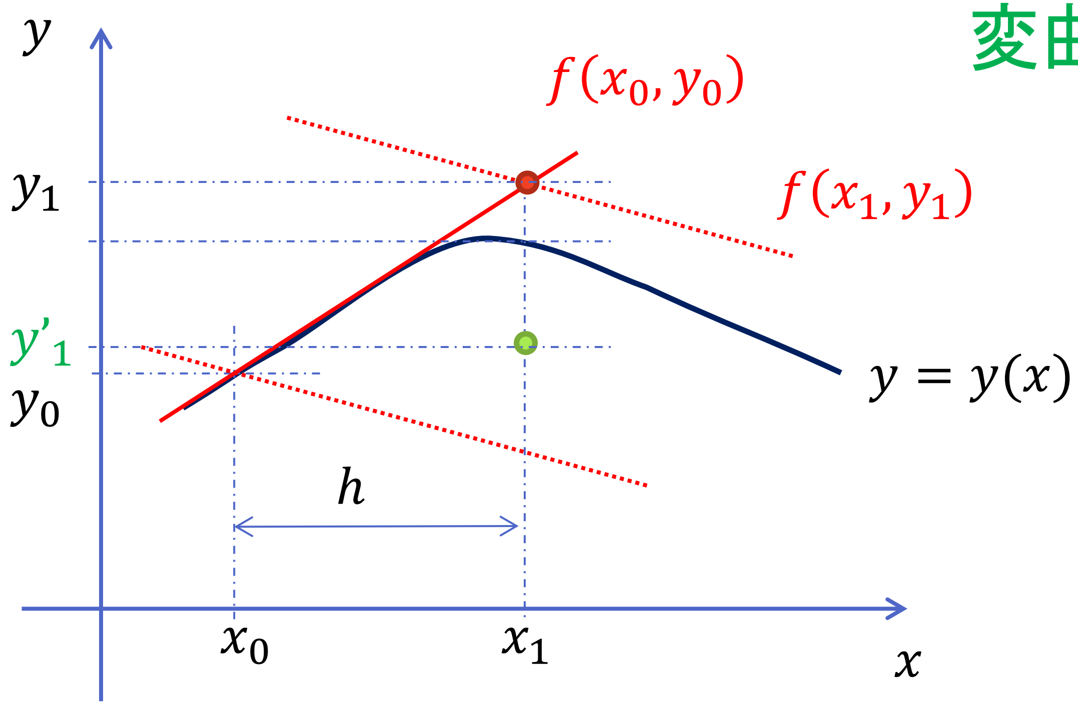
数値解析

第14回 常微分方程式(3) ～ ルンゲ･クッタ法 ～

Heun法の問題

- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big)\Big)$



変曲点で精度低下

テイラー2次展開: 傾きの変化量に線形性を仮定

Runge-Kutta法

- 両端のみでなく，区間中の点の位置と重みの取り方を一般化したもの．

Heun法を少し一般化

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \underline{f_{avg}}$$

複数の点で求めた傾きの重みつき平均値

Heun法: 両端を均等重み$\left(\frac{1}{2}\right)$で平均化

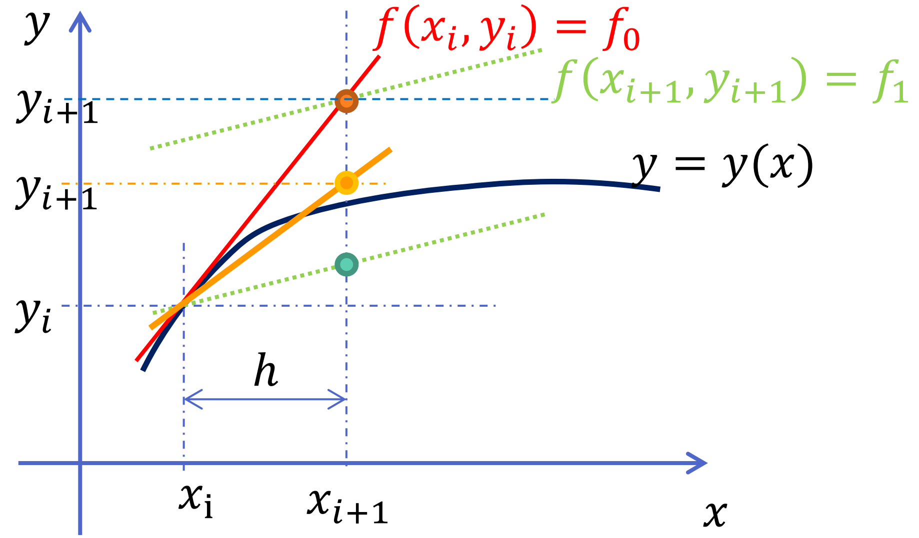
$$f_{avg} = \sum_j a_j f_j \qquad \sum_j a_j = 1$$

重み

2次(2点)のRunge-Kutta法

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{avg}$$

$$f_{avg} = \sum_{j=0}^{1} a_j f_j \qquad \sum_j a_j = 1$$



- $a_0 = 1, a_1 = 0$

  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$: Euler法

- $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$

  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(\underline{x_{i+1}, y_{i+1}})\right)$: Heun法

  計算のための一時的なステップ: 仮ステップ

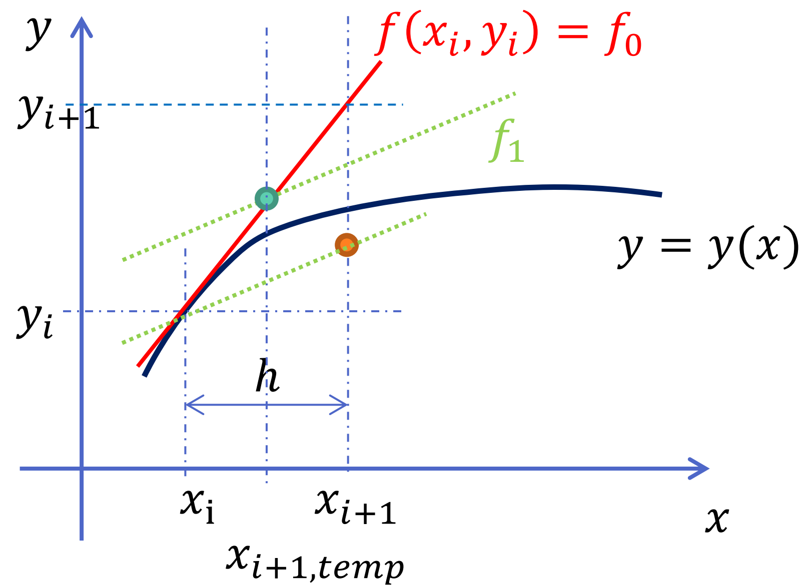
2次(2点)のRunge-Kutta法

- 仮ステップの取り方もバリエーションになる.

$$x_{i+1,temp} = x_i + \alpha h$$

例: $\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad x_{i+1,temp} = x_i + \frac{1}{2}h$

$$f_1 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + f_0\frac{h}{2}\right)$$



- $a_0 = 0, a_1 = 1$

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + f_0\frac{h}{2}\right)$$ ：中点法

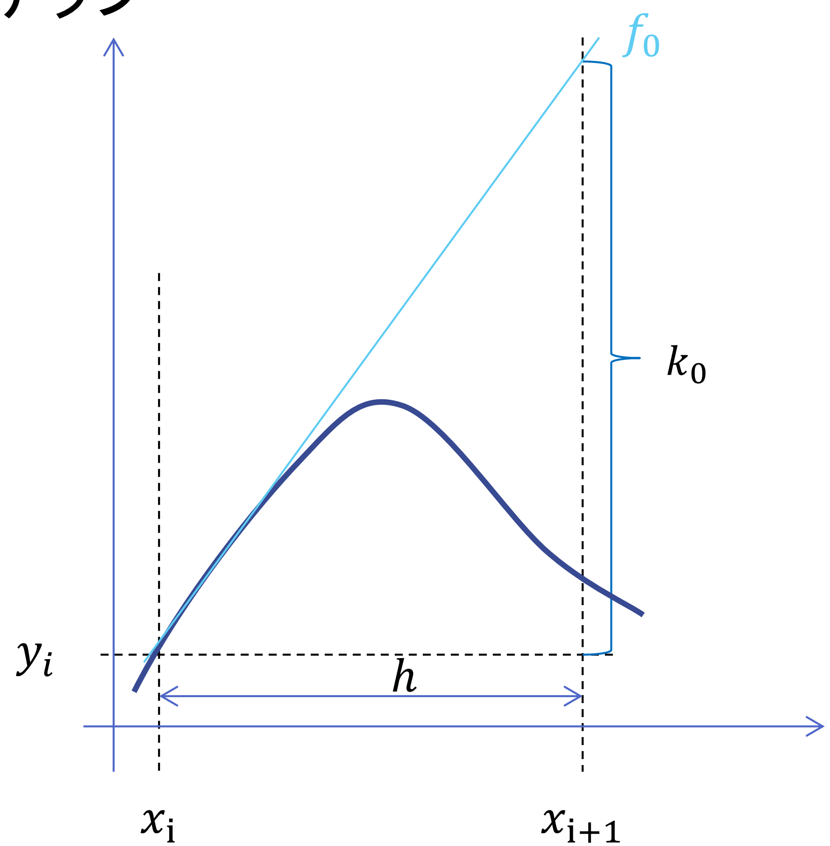
4次のRunge-Kutta法

- $y_{i+1} = y_i + h(a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)$

3回の仮ステップと，1回の本ステップ

$$f_0 = f(x_i, y_i)$$

$$k_0 = f_0 h$$

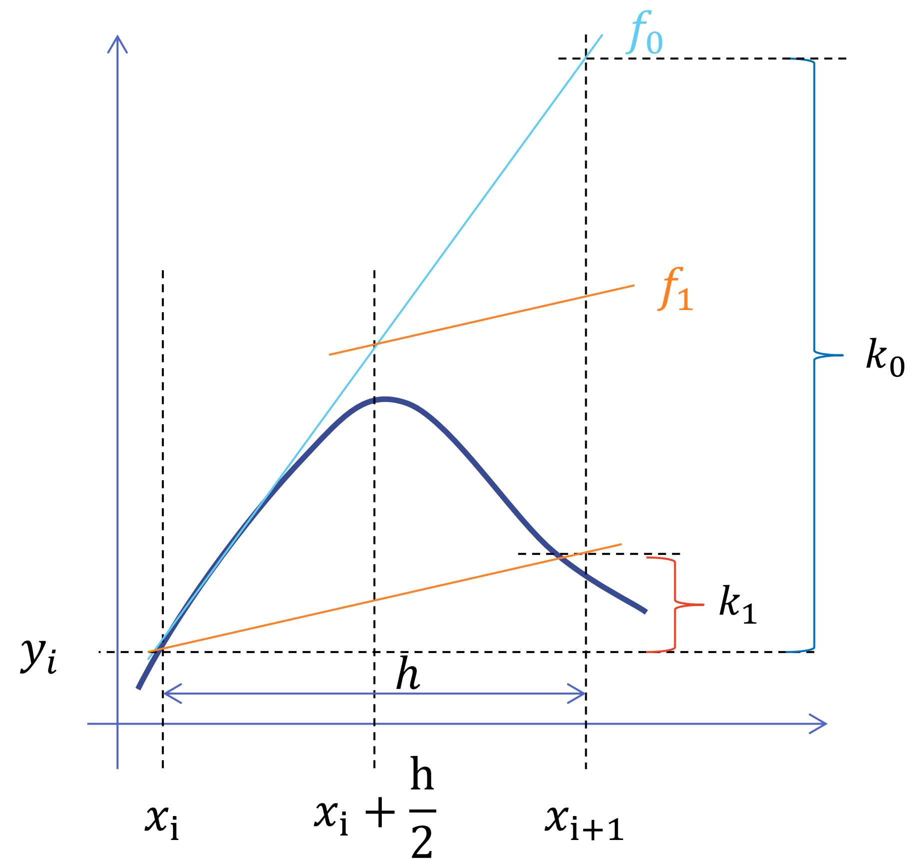


ステップ(0): 傾き算出

4次のRunge-Kutta法

$$f_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2})$$

$$k_1 = f_1 h$$

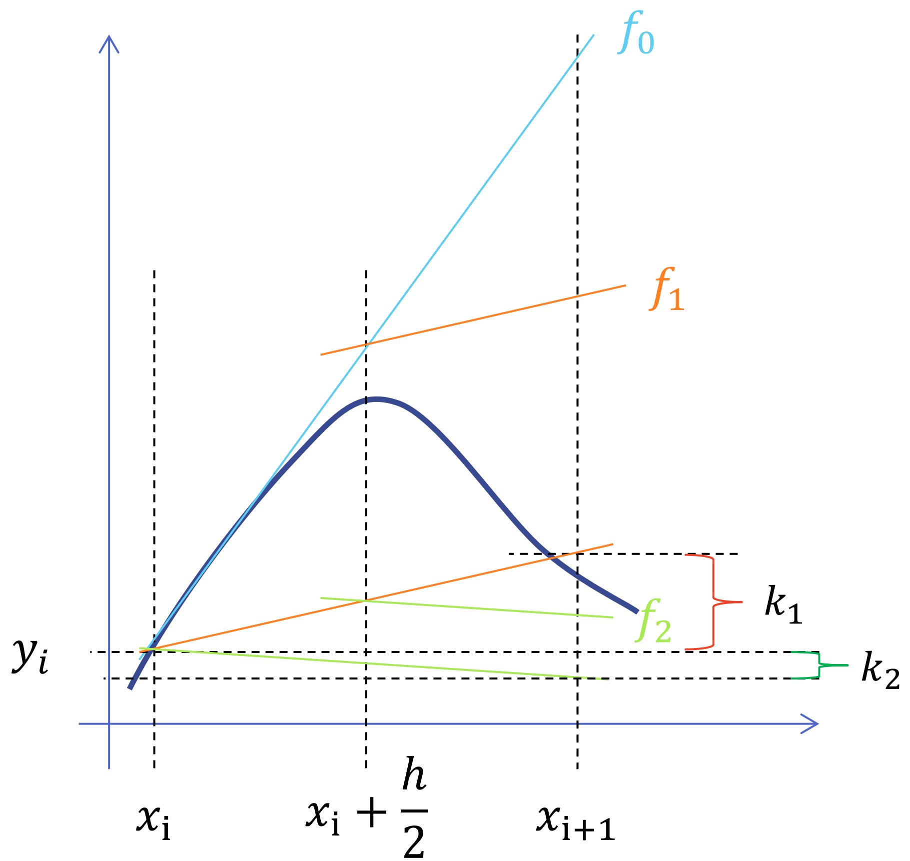


仮ステップ(1): $2/h$進む

4次のRunge-Kutta法

$$f_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_2 = f_2 h$$

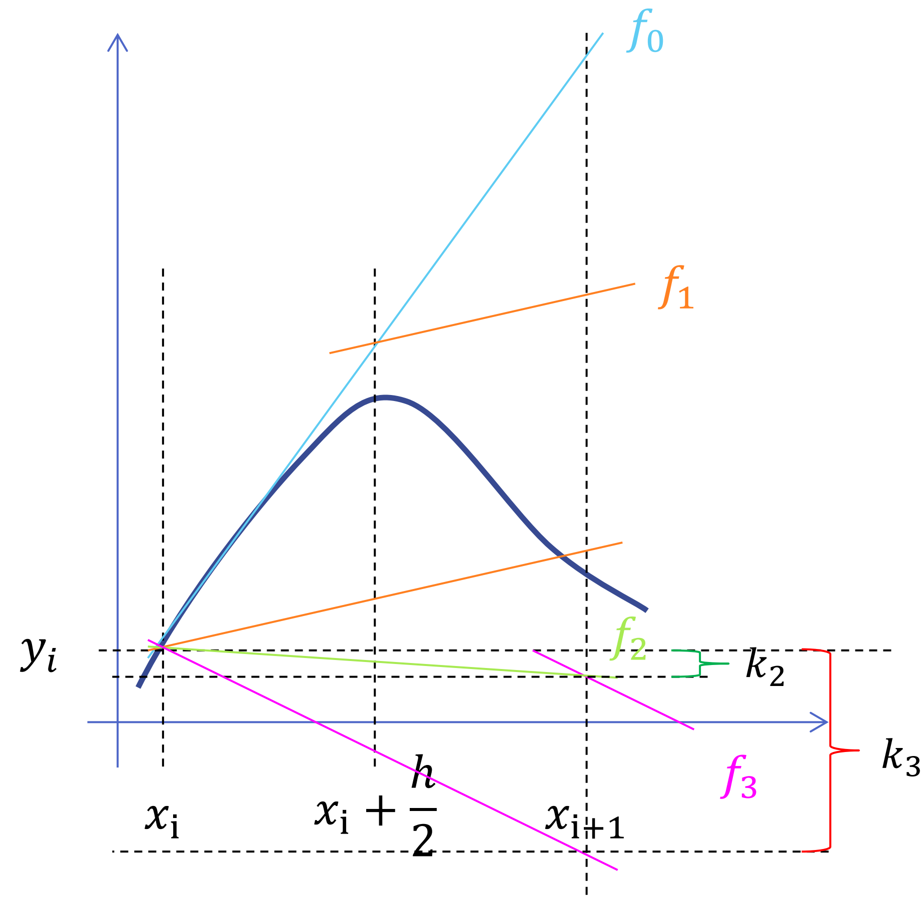


仮ステップ(2): $2/h$進む

4次のRunge-Kutta法

$$f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

$$k_3 = f_3 h$$



仮ステップ(3): h進む

4次のRunge-Kutta法

- $y_{i+1} = y_i + h(a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)$

$k_0 = f_0 h \qquad k_1 = f_1 h \qquad k_2 = f_2 h \qquad k_3 = f_3 h$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3}$$

$f_0 = f(x_i, y_i)$ $\qquad f^{(1)}$

$f_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2})$ $\qquad f^{(2)}$

$f_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$ $\qquad f^{(3)}$

$f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$ $\qquad f^{(4)}$

高次の関数になっている.

4次のテイラー展開に一致できる

4次のRunge-Kutta法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$k_0 = f_0 h \qquad f_0 = f(x_i, y_i)$$

$$k_1 = f_1 h \qquad f_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2})$$

$$k_2 = f_2 h \qquad f_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f_3 h \qquad f_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

補足

- 2次のとき同様，重みやステップの作り方はほかにもある.
興味がある人は図書館などで参考文献を調べるとよい.

課題

- $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

を4次のRunge-Kutta法で解くプログラムを作成せよ。
その際，xの初期値，ステップ幅，xの最終値，yの初期値はinput.csvにより，記載の順で与えることとする。