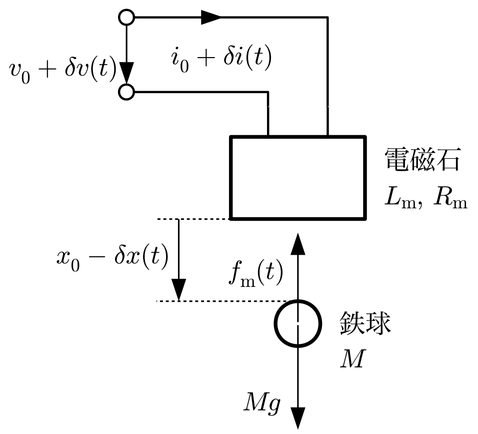
Ec4 制御工学 IB　第 12 回

1　磁気浮上系

電磁石による引力を制御することにより，鉄球を空中に非接触で浮上させる磁気浮上系を考える。



電磁石に加える電圧を $v(t)$ ，流れる電流を $i(t)$ とし，電磁石が磁力によって鉄球を引く力を $f_\mathrm{m}(t)$，鉄球の位置を $x(t)$ とする。電磁石のインダクタンス L_m と抵抗 R_m，鉄球の質量 M，そして電磁吸引力係数 k がパラメータであり，全て正の実数である。

初期位置 x_0 に鉄球を静かに置き，電圧 v_0 をかけたところ，鉄球は重力と磁力がつり合って静止したとする。また，そのときに電磁石に流れる電流を i_0 とする。この状態から加える電圧の増減 $\delta v(t)$ を操作量として，鉄球の位置の増減 $\delta x(t)$ を制御することを考える。つまり，

$$x(t) = x_0 - \delta x(t), \quad i(t) = i_0 + \delta i(t), \quad v(t) = v_0 + \delta v(t)$$

とする。$\delta x(t)$, $\delta i(t)$, $\delta v(t)$ を微小とすると，運動方程式と回路方程式を

$$M\frac{\mathrm{d}^2\delta x(t)}{\mathrm{d}t^2} = K_x\delta x(t) + K_i\delta i(t), \quad L_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\delta i(t)}{\mathrm{d}t} + R_\mathrm{m}\delta i(t) = \delta v(t) \tag{1}$$

という線形微分方程式で書くことができる。ここで，$K_x = 2ki_0^2/x_0^3$, $K_i = 2ki_0/x_0^2$ である。このように微分方程式が線形になるようにつり合いの位置を基準として変数を変換することを**線形化**という。制御量のラプラス変換を $X(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$，操作量のラプラス変換を $V(s) = \mathcal{L}[\delta v(t)]$ とすれば，磁気浮上系の伝達関数 $P(s) = X(s)/V(s)$ であり，微分方程式より，

$$P(s) = \frac{K_i}{(Ms^2 - K_x)(L_\mathrm{m}s + R_\mathrm{m})} \tag{2}$$

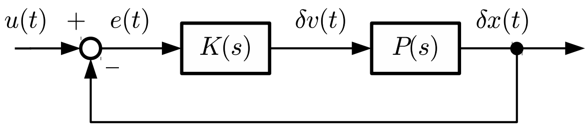
が得られる。

演習 1

磁気浮上系 $P(s)$ は安定なシステムか，それとも不安定なシステムか。理由も併せて判別せよ。

2　磁気浮上系のフィードバック制御

磁気浮上系のフィードバック制御系を構築することを考える。



$u(t)$ は目標値であり，ここではつり合いの位置からどれだけ移動させるかを指定する。$e(t) = u(t) - \delta x(t)$ は目標値と現在の位置との偏差を表す誤差信号である。誤差信号 $e(t)$ の値をもとに磁気浮上系に加える電圧量 $\delta v(t)$ を決定するための制御器が $K(s)$ である。まず制御器 $K(s)$ として

$$K(s) = K_{\mathrm{P}} + K_{\mathrm{D}} s$$

というものを考える。

演習 2

フィードバック制御系の一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ と閉ループ伝達関数 $G(s)$ を求めよ。分母は展開した形にすること。

3　磁気浮上系の安定化

各パラメータを測定したところそれぞれ次の値であったとする（簡単のため，有効数字は考慮しない）。

$$R_{\mathrm{m}} = 1\,[\Omega], \quad L_{\mathrm{m}} = 1/30\,[\mathrm{H}], \quad M = 0.3\,[\mathrm{kg}], \quad K_x = 1500\,[\mathrm{N/m}], \quad K_i = 3\,[\mathrm{N/A}]$$

演習 3

これらのパラメータを代入した一巡伝達関数 $L(s)$ と閉ループ伝達関数 $G(s)$ の式を書き下せ。

演習 4

ラウス＝フルビッツの安定判別法のどちらかを用いて，フィードバック制御系 $G(s)$ が安定となるための K_{P} と K_{D} の範囲を求め，横軸を K_{P}，縦軸を K_{D} としたグラフ上でその範囲を図示せよ。

演習 5

演習 4 で求めた範囲を参照し，安定なはずの $K_{\mathrm{P}}, K_{\mathrm{D}}$ について，ナイキストの安定判別法で安定性を確認せよ。手順としては Jupyter Notebook で以下のようにすればよい（??には各自値や式を入れる）。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: from control.matlab import *
In[3]: K_P, K_D = ??, ??
In[5]: n = [??, ??]
In[6]: d = [??, ??, ??, ??]
In[7]: L = tf(n, d)
In[8]: pole(L)
In[9]: real, imag, w = nyquist(L)
```

`pole` 関数で一巡伝達関数 $L(s)$ の極を求めて，実部が正の極の個数 U を調べ，`nyquist` 関数で $L(s)$ のナイキスト線図が描き，そこから点 $(-1, 0)$ を反時計回りに回る回数 N を調べる。

演習 6

演習 4 で求めた範囲を参照し，安定な場合と安定じゃない場合の $K_{\mathrm{P}}, K_{\mathrm{D}}$ を選び，それぞれについてステップ応答を確認せよ（下の例は 1 つについてステップ応答を確認するもの)。

```
In[10]: import matplotlib.pyplot as plt
In[11]: K_P_1, K_D_1 = ??, ??
In[12]: n_G_1 = [??, ??]
In[13]: d_G_1 = [??, ??, ??, ??]
In[14]: G_1 = tf(n_G_1, d_G_1)
In[15]: t = np.linspace(0, 1, 100)
In[16]: y_1 = step(G_1, t)
In[17]: plt.plot(t, y_1)
```

4 磁気浮上系の最終値

安定化に成功すれば，十分に時間が経過した後にある位置に収束する。それを調べるにはラプラス変換における**最終値の定理**が有効である。最終値の定理とは，ある時間の関数 $y(t)$ の $t \to \infty$ での値 y_∞ が，そのラプラス変換 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ を使って

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

とすれば計算できるというものである。

演習 7

演習 3 で求めた閉ループ伝達関数 $G(s)$ を元に，目標値を 1 とした場合，つまり $u(t) = 1$ （ステップ入力）とした場合の $\delta x(t)$ の最終値 x_∞ を $K_{\mathrm{P}}, K_{\mathrm{D}}$ の式で求めよ。($\mathcal{L}[\delta x(t)] = X(s) = G(s)U(s)$ である）

課題

以下の項目についてまとめよ。

(1). 今回の演習 1〜7 の内容をまとめよ。(演習 4 のグラフについては任意）

(2). **［自由課題］**式 (1) の微分方程式から式 (2) の伝達関数を導出せよ。

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_12_KazukiSakai.html`