Ec4 制御工学 IB　第 5 回

1　システムの安定性判別

伝達関数の極の実部が負であればシステムが安定であることがわかった．しかし，システムが高次になると実際に極を求めるのが困難なので，極を求めずに安定性を判別する方法が作られている。

1.1　安定性の必要条件

伝達関数 $G(s) = N(s)/D(s)$ の分母多項式 $D(s)$ のことを**特性多項式**という。システムが安定である必要条件として以下が言えることがわかっている。

安定性の必要条件

伝達関数の特性多項式の係数が全て正である

これは必要条件なので，これを満たしているからといって安定であるとは言えないが，これを満たしていなければ必ず不安定であると言える。例を見てみよう。

極が $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$ のときの特性多項式 $D(s)$　（安定）

（ヒント： $D(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$ **を展開する）**　代入してから展開しましょう

$$
\begin{aligned}
D(s) &= (s^2 - p_1 s - p_2 s + p_1 p_2)(s - p_3) \\
&= s^3 - p_1 s^2 - p_2 s^2 - p_3 s^2 + p_1 p_2 s + p_2 p_3 s + p_1 p_3 s - p_1 p_2 p_3 \\
&= s^3 + s^2 + 2s^2 + 3s^2 + 2s + 6s + 3s + 6 \\
&= s^3 + 6s^2 + 11s + 6
\end{aligned}
$$

極が $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = 4$ のときの特性多項式 $D(s)$　（不安定）

$$
\begin{aligned}
D(s) &= s^3 + s^2 + 2s^2 - 4s^2 + 2s - 8s - 4s - 8 \\
&= s^3 - s^2 - 10s - 8
\end{aligned}
$$

極が $p_1 = 1 + j3$, $p_2 = 1 - j3$, $p_3 = -4$ のときの特性多項式 $D(s)$　（不安定）

$$
\begin{aligned}
D(s) &= s^3 - (1+j3)s^2 - (1-j3)s^2 + 4s^2 + (1+j3)(1-j3)s - 4(1-j3)s - 4(1+j3)s \\
&\quad + 4(1-j3)(1+j3) \\
&= s^3 - 2s^2 + 4s^2 + (1+9)s - 4s - 4s + 4(1+9) \\
&= s^3 + 2s^2 + 2s + 40
\end{aligned}
$$

1.2　ラウス・フルビッツの安定判別法

極を求めることなく，分母多項式の係数だけから安定性を判別する方法がラウスとフルビッツによって独立に考案された．両者が数学的には同等であったため，**ラウス・フルビッツの安定判別法**と呼ばれることもある．実際には方法が違うのでそれぞれ**ラウス法**，**フルビッツ法**と呼ばれる．

$H_2 : k < 4$

$H_3 :$

$-k^2+7k-12>0$
$k^2-7k+12<0$
$(k-3)(k-4)<0$
$3<k<4$

1 1 2 $k-2$ $4-k$

n $n-1$ $n-2$ $n-3$ $n-4$

$2(k-2)-(k-2)^2-(4-k)$
$=2k-4-(k^2-4k+4)-4+k$
$=-k^2+7k-12$

2　フルビッツの安定判別法

特性多項式が $D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ で表される n 次システムについて，n 次の正方行列であるフルビッツ行列 H を以下のように定義する。

フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \hline 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots a_0 \end{bmatrix}$$

$12+0+0-0-9-4$

$=-1$

これに対してフルビッツ小行列式 H_i $(i = 1, \ldots, n)$ を次のように定義する。

H_i を行列 H の 1～i行 ならびに 1～i列 の要素からなる行列の行列式とする。

たとえば，H_1, H_2, H_3 は以下のようになる。

$$H_1 = a_{n-1}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

これらを使って，以下のようにシステムが安定である必要十分条件が得られる。ただし，安定性の必要条件（特性多項式の係数が全て正）はすでに確かめてあるとする。

［フルビッツの安定判別法］ システムが安定である必要十分条件は

$$H_i > 0 \quad (i = 2, \ldots, n-1)$$

例題

特性多項式が

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$$

であるシステムのフルビッツ行列 H およびフルビッツ小行列式 H_2, H_3 の値を求めよ。

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

3　ラウスの安定判別法

特性多項式が $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ で表される n 次システムについて，次に示すラウス数列を使って安定判別を行う。

ラウス数列

第1行	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
第2行	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
第3行	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
第4行	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

1 行目，2 行目は特性多項式の係数を順に並べることで作成できる。3 行目以降は次に示す規則にしたがって計算する。

第 p 行	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
第 $p+1$ 行	y_1	y_2	y_3	$\cdots$
第 $p+2$ 行	z_1	z_2	z_3	$\cdots$

$$z_i = -\frac{1}{y_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_{i+1} \\ y_1 & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

この数列を使って，以下のようにシステムが安定である必要十分条件が得られる。

[ラウスの安定判別法]

「ラウス数列」の第1列(a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, …)の「符号」に変化がないとき、与えられた「特性多項式」は安定です。もし、符号変化があれば、その数だけ「実部」が正の「極」をもちます。

例題

特性多項式が

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$$

であるシステムのラウス数列を求めよ。

第1行	1	5	1
第2行	2	3	0
第3行	$\frac{7}{2}$	1	0
第4行	$\frac{17}{7}$	0	
第5行	1		

$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 1$

1　2　2　3　1

n　$n-1$　$n-2$　$n-3$　$n-4$

授業内課題

以下の特性多項式のシステムについて，フルビッツ法**および**ラウス法で安定判別せよ。Web にて回答を行う．Teams からリンクをクリック。

n　n-1　n-2　n-3　n-4

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 1$$

$$\frac{K(s-1)}{s^4+s^3+2s^2-2s+4+K(s-1)}$$

$$= \frac{K(s-1)}{s^4+s^3+2s^2+(K-2)s+(4-K)}$$

課題

ラウス＝フルビッツの安定判別法は**係数の数値が決まっていなくても使える**というメリットがある．例えば，図 1 で表されるような比例制御を考える際に，安定であるための K の範囲を求めることができる．

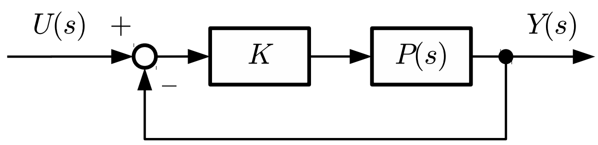

図 1　比例制御のブロック線図

$$\frac{K \cdot P(s)}{1 + K \cdot P(s)}$$

制御対象の伝達関数を

$$P(s) = \frac{s-1}{s^4 + s^3 + 2s^2 - 2s + 4}$$

とする．以下の項目についてまとめよ．

(1) $P(s)$ の安定性を判別せよ．

(2) 図 1 の比例制御を施したときのフィードバック制御系の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

(3) フルビッツ法かラウス法を使って，フィードバック制御系が安定となるための K の条件を求めよ．
（過程全てを書かなくてよいが，H_2, H_3 の式や，ラウス数列の 1 列目は書くように。）

(4) Python-control を使って K が安定条件を満たす場合と満たさない場合それぞれのステップ応答を調べ，求めた条件が正しいことを確かめよ（条件の境界ピッタリじゃない方が良い）

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_05_KazukiSakai.html`