数値解析

第4回 連立一次方程式の直接解法 1

連立一次方程式

一個30円のチョコレートと，一個20円の飴がある.

地域の子供30人にほしい方を1つ選ばせ，支払いをしたところ合計770円になった.

チョコレートと飴はそれぞれいくつ買ったか？

$$x + y = 30$$

$$30x + 20y = 770$$

両辺20倍

$$-\quad 20x + 20y = 600$$

$$10x + 0y = 170$$

$$x = 17$$

$$y = 13$$

ガウスの消去法

ピボット

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

消去する

k行目に

$$-\left(\frac{a_{k1}}{a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{k1}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \cdots + \frac{a_{k1}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{k1}}{a_{11}}b_1\right)$$

を加える.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad 0 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad 0 + a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

ガウスの消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
0 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\vdots \\
0 + a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n
\end{cases}
$$

消去する

繰り返す

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
0 + a'_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
0 + a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a_{nn}^{(\beta)}x_n &= b_n^{(\beta)}
\end{aligned}
$$

前進消去

ガウスの消去法

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
0 + a'_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
0 + a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a_{nn}^{(\beta)}x_n &= b_n^{(\beta)}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{b_n^{(\beta)}}{a_{nn}^{(\beta)}}
$$

後退代入

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\
0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\
0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n
\end{pmatrix}
$$

消去例

後退代入

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & -29 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -56 \\ -181 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 9.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -56 \\ -18.6 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -2$$

前進消去

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 9.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -56 \\ -18.6 \end{pmatrix}$$

$$-10x_2 - 7(-2) = -56$$
$$-10x_2 = -70$$
$$x_2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 9.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -56 \\ -18.6 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + 8\times 7 + 4(-2) = 54$$
$$2x_1 = 6$$
$$x_1 = 3$$

前進消去失敗

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 12 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & -29 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -56 \\ -181 \end{pmatrix}$$

前進消去で対角要素が0になるとうまく計算できない.

部分ピボット選択付ガウスの消去法

- k回目の消去において，k行目以下の行をみたとき，k列の最大絶対値(ピボット)がk行目に来るように行を入れ替える.

1回目の消去作業

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 12 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1列目の最大絶対値は7→1行目と3行目を交換

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 3 & 12 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 54 \end{pmatrix}$$

ピボット選択付前進消去

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 3 & 12 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & 12+\frac{3}{7} & -1-\frac{9}{7} \\ 0 & 8+\frac{2}{7} & 4-\frac{6}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25-\frac{24}{7} \\ 54-\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{87}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & \frac{58}{7} & \frac{22}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{151}{7} \\ \frac{362}{7} \end{pmatrix}$$

部分ピボット

2回目の消去作業

すでに終わった行は見ない
→ 部分ピボット選択

$$\begin{pmatrix} \boxed{7 \quad -1 \quad 3} \\ 0 & \frac{87}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & \frac{58}{7} & \frac{22}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{151}{7} \\ \frac{362}{7} \end{pmatrix}$$

2行以下で2列目の最大絶対値は$\frac{87}{7}$ → 交換不要

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{87}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7}-\frac{58}{87}(-\frac{16}{7}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{151}{7} \\ \frac{362}{7} - \frac{58}{87}\times\frac{151}{7} \end{pmatrix}$$

$$(22\times 87 + 58\times 16)x_3 = 362\times 87 - 58\times 151$$

$$x_3 = 8.0$$
$$x_2 = 3.2069$$
$$x_1 = -1.8276$$

演習課題4

k4-input1.csvから入力される係数行列Aと，k4-input2.csvから入力されるベクトルyに関して，以下の連立一次方程式を部分ピボット選択付ガウスの消去法によって解け。

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{y}$$

例:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix}$$