

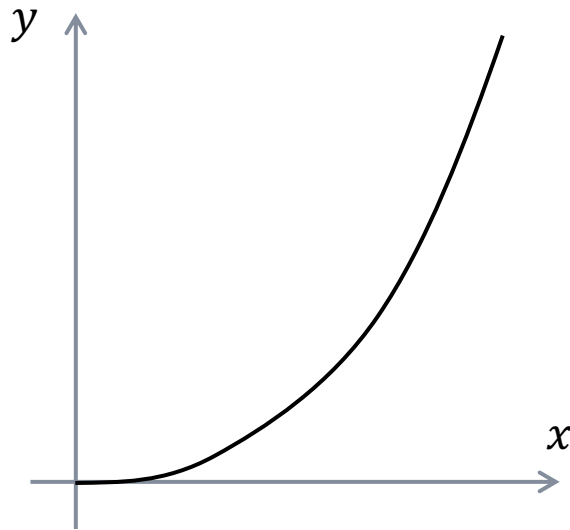
数値解析

第12回 常微分方程式(1) ～ オイラー法 ～

例: 等加速度直線運動

- $y = \frac{1}{2}x^2$

ある初期値(初期条件)が与えられたときに,
成立する微分方程式の解: 特殊解



実際に利用する際には・・・

特殊解の式から特定の値を求める.

微分方程式

- 例: 力学問題

速度 $v(x)$ で直線運動する物体の α 秒後の位置 y を求めよ(初期位置を0とする)

$$\frac{dy}{dx} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int v(x) dx$$
$$y = V(x) + C$$

$v(x) = x$ (等加速度運動)だったとすると

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

初期値 $x = 0, y = 0$ より $C = 0$ よって α 秒後の位置 y は

$$y = \frac{1}{2}\alpha^2$$

※ 後の説明と整合性のため時刻を x としています.

一般化

- $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

この解は積分方程式

$$y = \int f(x, y) dx + C$$

初期条件 $y(x_0) = y_0$ を導入する.

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0$$

$x = x_0$ のとき, この定積分は0

参考

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

とできるなら変数分離形.

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

例題は,

$$g(x) = x$$

$$h(y) = 1$$

変数分離形は簡単に解ける.

積分方程式の解

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0$$

$f(x, y) = g(x)$ であればただの数値積分

一般には

$$y = F(y) + y_0$$

反復的に解けそう

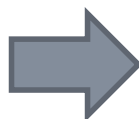
参考: 連立方程式の反復解

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

オイラー法

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0$$

積分区間 $x - x_0 = h$ を小さくとり



その間の $f(x, y)$ の変化は無視

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$



$$y = f(x_0, y_0) \int_{x_0}^{x_0+h} dx + y_0$$

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

$x = x_0$ における $y(x)$ のテイラー展開(1次)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

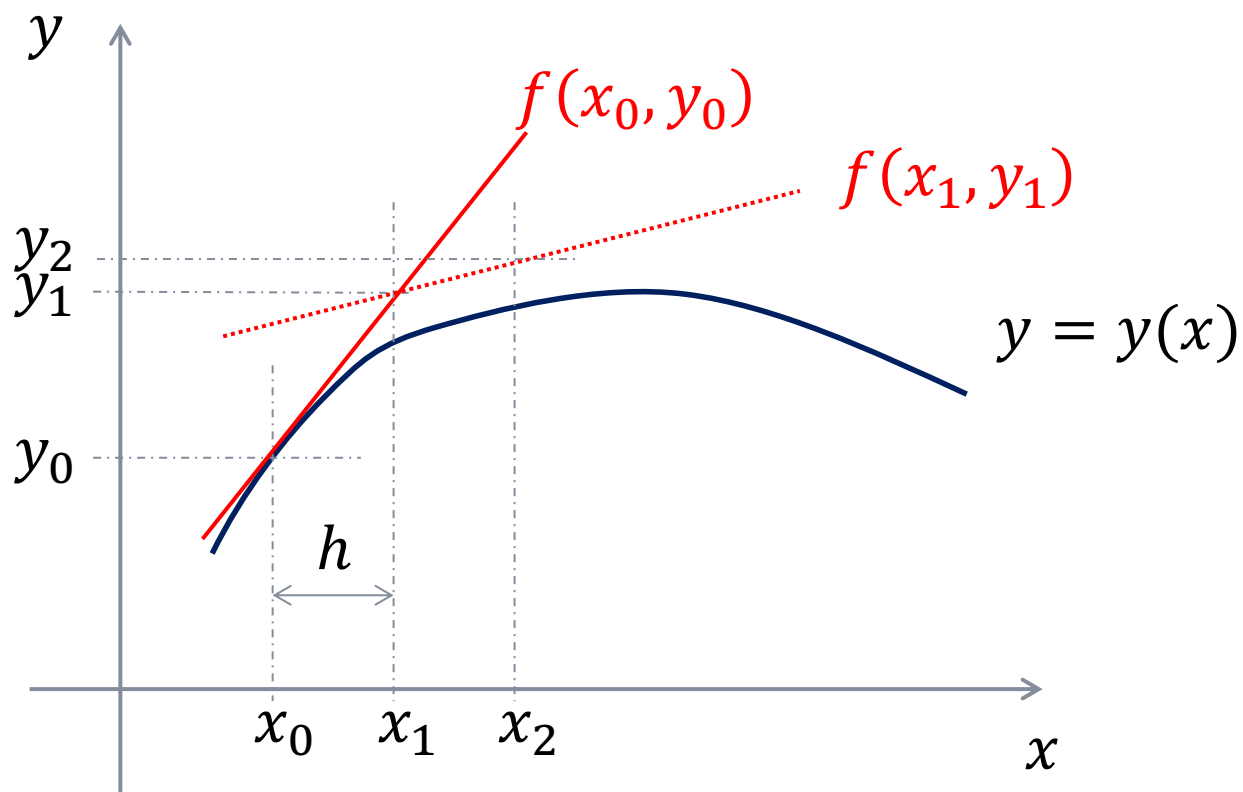
求めたい x の値まで微小変化を繰り返す

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

参考: 連立方程式の反復解

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k)$$

オイラー法概念図



例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

• 解析解

$$\frac{dy}{dx} = x(1 - y)$$

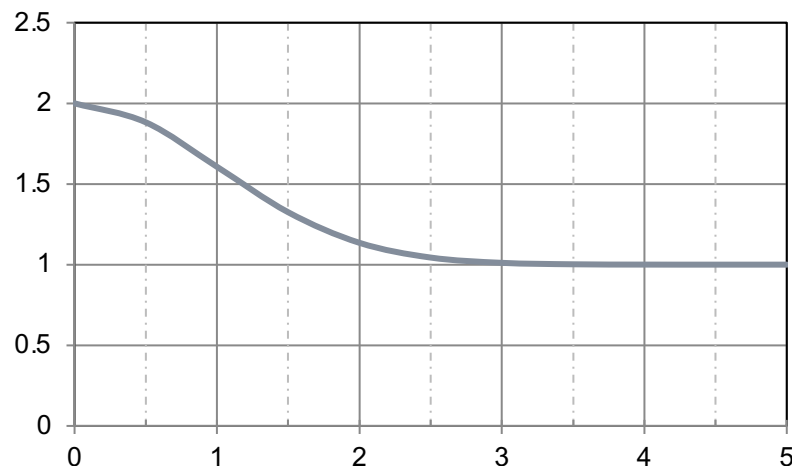
$$\int \frac{dy}{1 - y} = \int x \, dx$$

$$-\log(1 - y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$1 - y = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2 + C}$$

$$y = 1 \mp e^C e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = 1 \mp A e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$$y(0) = 2 \text{ だから}$$

$$2 = 1 \mp A$$

$$\therefore \mp A = 1$$

$$y = 1 + e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

例題: $\frac{dy}{dx} = -xy + x, y(0) = 2$

- オイラー法数値解 (ステップ0.5)

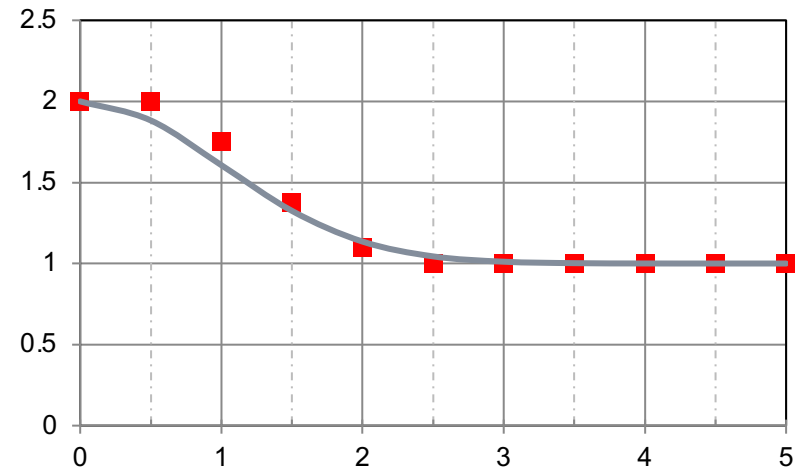
$$y(0.5) = 2 + (-0 \times 2 + 0) \times 0.5 = 2$$

$$y(1.0) = 2 + (-0.5 \times 2 + 0.5) \times 0.5 = 1.75$$

$$y(1.5) = 1.75 + (-1.0 \times 1.75 + 1.0) \times 0.5 = 1.375$$

$$y(2.0) = 1.375 + (-1.5 \times 1.375 + 1.5) \times 0.5 = 1.09375$$

...



演習課題12

- 例題の微分方程式をオイラー法で解くプログラムを実装せよ。その際、 x の初期値、ステップ幅、 x の最終値、 y の初期値はinput.csvにより、記載の順で与えることとする。

(確認) テストについて

- 持込み可
 - 教科書 (サイエンス社: 数値計算入門)
 - 自筆A4プリント1枚 (記名, テスト後回収しテストと合わせ返却)
- 持込み不可
 - 印刷・コピーしたプリント
 - 電卓
- 場所
 - ホームルーム
- 試験時間
 - 80分