数値解析

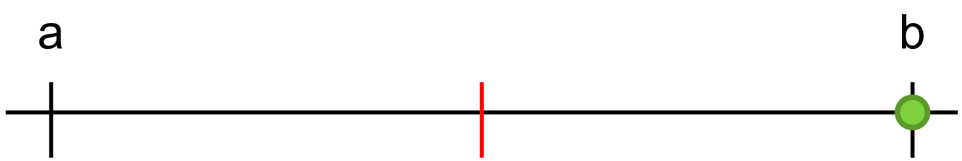
第6回 連立一次方程式の反復解法

非線形方程式の確認(復習)

- 2分法とニュートン法では一般的にニュートン法の方が収束が速い.
- 2分法は初期区間(y+とy-のペア)が見つかれば必ず収束する.
- ニュートン法は初期値設定が不適切だと収束しない.
  - Note: テイラー展開の1次近似 (初期値x_0は解に十分近い)
  - ニュートン法のプログラムでは繰返し回数による制限を必ずつける.

続復習: 打ち切り誤差

- 2分法の打ち切り誤差



(b-a) < Threshold で収束と判定する.
→ 解は (b+a)/2

誤差が最大となるのは区間の両端(a or b)のときで,
その値は(b-a)/2

誤差が表示できる程度の桁数で出力

本題: 反復解

- 繰り返しで真の解に近づける(非線形方程式のときと同じ)
  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{x}_{k+1} = \phi(\boldsymbol{x}_k)$ の形で求める.

連立方程式の場合

- ヤコビ法 (Jacobi method)
- ガウス･ザイデル法 (Gauss-Seidel method)

基本的な考え方

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

対角成分以外を右辺に移項

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ &a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ &\vdots \\ &a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n - (a_{n1}\,x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{aligned}$$

ヤコビ法

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left\{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right\}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left\{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right\}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left\{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right)\right\}$$

一般形

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)\right\}}$$

対角より左側

対角より右側

参考: 行列式で記載

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)\right\}$$

対角(D)より左側 = L

対角(D)より右側 = U

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)})$$

注意:

対角行列D，下三角行列L，上三角行列Uであるが，LU分解とは異なる.

$A = D + L + U$ (LU分解は$PA = LU$)

ガウス・ザイデル法

- 基本的な考え方: ヤコビ法で常に最新の値を使う

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left\{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right\}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left\{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right\}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left\{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)\right\}$$

直前(1行上)までで計算された値をすぐに使う.

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right\}}$$

参考: 行列式で記載

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)\right\}$$

対角(D)より左側 = L

対角(D)より右側 = U

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - L\boldsymbol{x}^{(k+1)} + U\boldsymbol{x}^{(k)})$$

注意:

対角行列D，下三角行列L，上三角行列Uであるが，LU分解とは異なる.

$A = D + L + U$ (LU分解は$PA = LU$)

演習問題

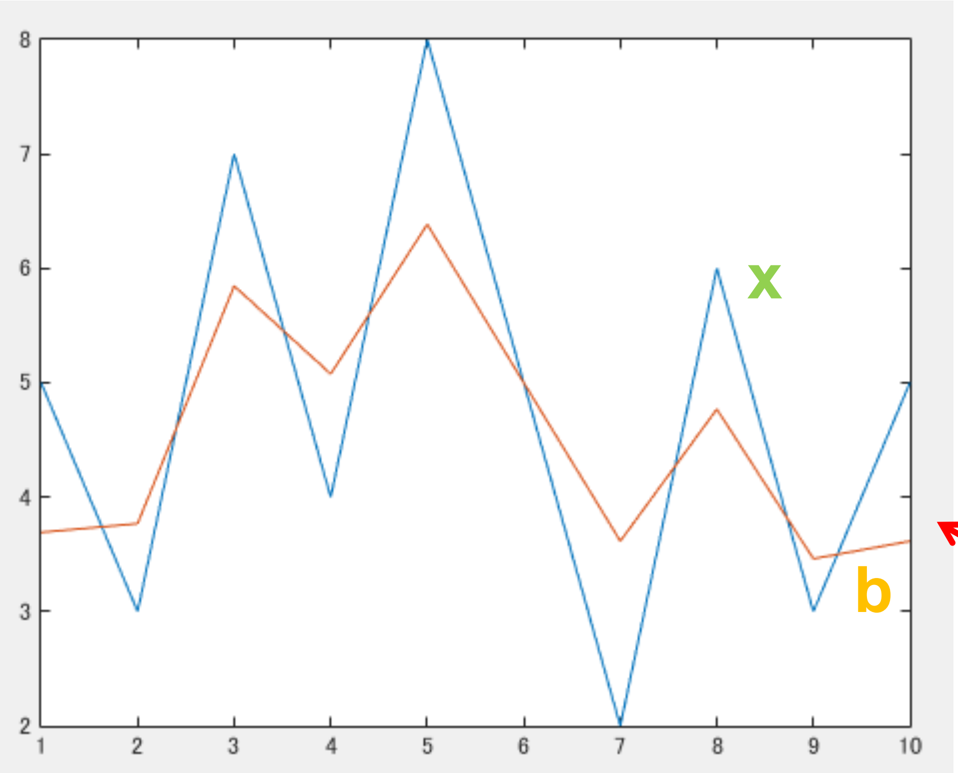
$$Ax = b$$

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3.69 \\ 3.77 \\ 5.85 \\ 5.08 \\ 6.38 \\ 5.00 \\ 3.62 \\ 4.77 \\ 3.46 \\ 3.62 \end{pmatrix}$$

Aをinput1.csv, bをinput2.csvから入力し,
ヤコビ法及びガウス･ザイデル法で上記を解け.
反復回数を決め，収束が比較できるようにすること。

補足(余談)

- 演習問題はフィルタリングの問題(終端処理省略)



正規化したxとbのグラフ

鈍った信号から元の信号を復元する問題(逆問題)