Ec4 制御工学 IB　第 6 回

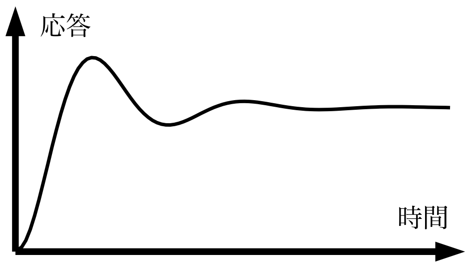
1　システムの安定性評価

システムの伝達関数が与えられたときに，そのシステムが安定となるための条件と，システムが安定かどうか判別する方法について学んだ。ここからはフィードバック制御系に限定してさらにシステムがどの程度余裕を持って安定かどうか（**安定余裕**）を調べる方法を学んでいく。

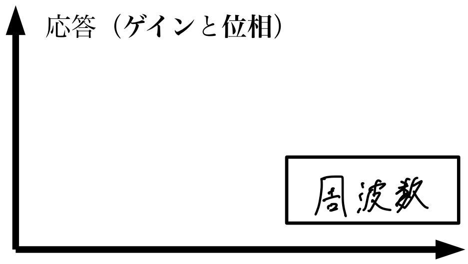
安定余裕を調べるためには**ナイキスト線図（ベクトル軌跡）**や**ボード線図**を使う。これらを理解するためには**周波数応答**を理解する必要がある。今回は周波数応答について学ぶ。

2　システムの時間応答と周波数応答

今まで主に扱ってきたステップ応答は**時間応答**の 1 つで，横軸が時間で縦軸が応答のグラフで表された。周波数応答の代表的な表し方はボード線図であり，応答を**ゲイン**と**位相**に分けて表す。



時間応答のグラフ

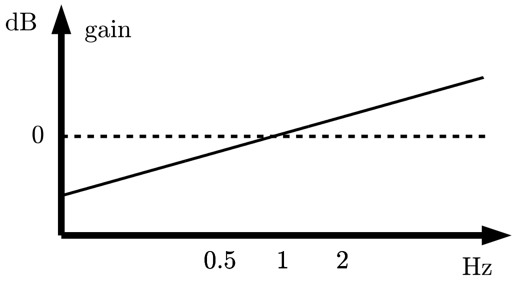


周波数応答のグラフ（ボード線図）

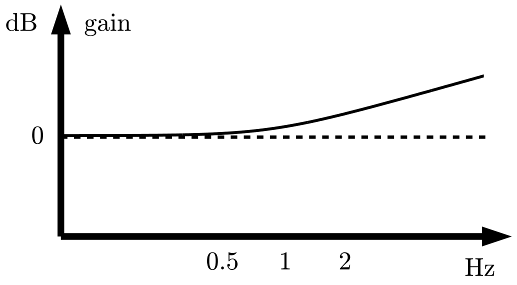
2.1　授業内演習

配布された『ゴム吊り下げボール』について，入力を〈持ち上げている手の高さ〉とし，出力（応答）を〈ボールの高さ〉としたときのゲインについてのボード線図に最も近いものを下の (A)〜(D) の中から選べ。実演しながら理由も説明できるように。

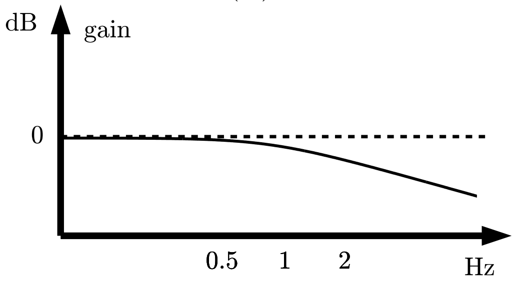
- ゲイン (gain)：入力の振幅と出力の振幅の比。0 dB なら同じ振幅で，正なら出力の方が大きい。



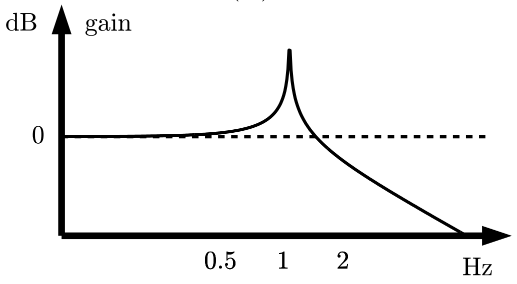
(A)



(B)



(C)



(D)

2.2 安定なシステムに正弦波を入力したときの出力の式

伝達関数が $P(s) = N(s)/D(s)$ の安定なシステムを考える。一定周波数 $(f = \omega/2\pi)$ の正弦波 $u(t) = \sin(\omega t)$ を入力したときの定常応答 $y_\infty(t)$ を調べよう。まず，出力のラプラス変換 $Y(s)$ は

$$Y(s) = P(s)U(s) = P(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\alpha(s)}{D(s)} + \frac{\beta_1}{s+j\omega} + \frac{\beta_2}{s-j\omega}$$

と表すことができる。部分分数分解の留数定理を使って β_1, β_2 を $P(j\omega)$ や $P(-j\omega)$ の式で求めると

$$\beta_1 = \lim_{s\to -j\omega}(s+j\omega)Y(s) = \lim_{s\to -j\omega} P(s)\frac{\omega}{s-j\omega} = P(-j\omega)\frac{1}{-2j} = P(-j\omega)\frac{j}{2}$$

$$\beta_2 = \lim_{s\to j\omega}(s-j\omega)Y(s) = \lim_{s\to j\omega} P(s)\frac{\omega}{s+j\omega} = P(j\omega)\frac{1}{2j} = -P(j\omega)\frac{j}{2}$$

となることがわかる。$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha(s)/D(s)]$ とおいて $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ を求めると

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = v(t) + \beta_1 e^{-j\omega t} + \beta_2 e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = v(t) + P(-j\omega)\frac{j}{2}e^{-j\omega t} - P(j\omega)\frac{j}{2}e^{j\omega t}$$

となる。$v(t)$ は安定なシステムのインパルス応答なので $t \to \infty$ で 0 となる。したがって，定常応答 $y_\infty(t)$ はこの項を 0 にして

$$y_\infty(t) = P(-j\omega)\frac{j}{2}e^{-j\omega t} - P(j\omega)\frac{j}{2}e^{j\omega t}$$

となる。$P(j\omega) = a + jb$, $P(-j\omega) = a - jb$ とし，オイラーの公式も使って $y_\infty(t)$ の式を整理すると

$$y_\infty(t) = (a-jb)\frac{j}{2}e^{-j\omega t} - (a+jb)\frac{j}{2}e^{j\omega t}$$

$$= \frac{j}{2}(a-jb)(\cos\omega t - j\sin\omega t) - \frac{j}{2}(a+jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$= \frac{j}{2}a(-2j\sin\omega t) + \frac{b}{2}(2\cos\omega t)$$

$$= a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t$$

となるので，$|P(j\omega)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\angle P(j\omega) = \tan^{-1}(b/a)$ より

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)|\sin(\omega t + \angle P(j\omega))$$

となることがわかった。この式の意味する重要な点は以下の点である。

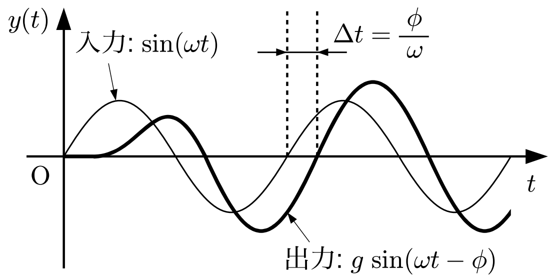
これに関連して，式に出てくる $P(j\omega)$, $|P(j\omega)|$, $\angle P(j\omega)$ には以下のような名前がついている。

$P(j\omega)$	$\lvert P(j\omega)\rvert$	$\angle P(j\omega)$

伝達関数 $P(s)$ の式がわかっていれば $s = j\omega$ を代入して $P(j\omega)$ を求め，絶対値や偏角を計算する。実験的には様々な ω の $\sin(\omega t)$ を入力したときの出力を調べれば $|P(j\omega)|$ と $\angle P(j\omega)$ がわかる。

2.3 位相とは

位相が遅れるというのは要するに「出力が出るの遅れる」ということであり，位相が進むというのは「出力が出るのが早まる」ということである。下図は $\sin(\omega t)$ を入力したときのゲインが g，位相が $-\phi$ の場合の図である。出力が入力に対して $\Delta t = \phi/\omega$ だけ 遅れて ／ 進んで いるのがわかる。位相の遅れた出力をフィードバックするとずれた時刻で入出力を比較してしまい，安定性が減少する。



2.4 複素数の偏角と arctan

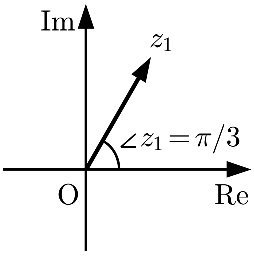
複素数 $z = z_{\mathrm{r}} + jz_{\mathrm{i}}$ の絶対値と偏角を求めるときは

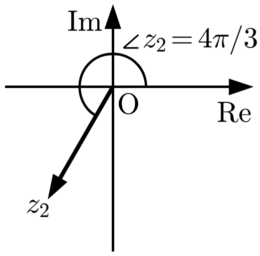
$$r = \sqrt{z_{\mathrm{r}}^2 + z_{\mathrm{i}}^2}, \quad \phi = \arctan\frac{z_{\mathrm{i}}}{z_{\mathrm{r}}}$$

で変換できる。ただし，実際に計算する際には arctan の値域に注意しなくてはならない。

$\tan x$ は周期 π の周期関数であり，例えば，$\tan(\pi/3)$ と $\tan(4\pi/3)$ は同じ値 $\sqrt{3}$ である。つまり，$\arctan\sqrt{3}$ は $\pi/3$ でも $4\pi/3$ でもよくて，n を任意の整数として $\pi/3 + n\pi$ ならなんでもよい。そこで，その中で区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ のものを arctan の**主値**と呼ぶことにし，普通の電卓などでは主値を返す。

一方，複素数の偏角 $\angle z$ や極座標での位相 ϕ の範囲は $[-\pi, \pi]$ または $[0, 2\pi]$ である。例えば，同じ絶対値で偏角 $\pi/3$ と $4\pi/3$ の複素数を複素平面上で表すと下図の左 2 つのように，別なもの（実部の符号が反転したもの）となる。主値を返す arctan を使って複素数の偏角を計算するには，実部と虚部の符号によって以下のように場合分けする必要がある。なお，$z = 0$ についての偏角は定義できない。C 言語などのプログラミング言語においてはこれに基づいた計算を行う `atan2` という関数が用意されているので，複素数の偏角の計算にはこの関数を使う。





$$\angle z = \begin{cases} \arctan(z_{\mathrm{i}}/z_{\mathrm{r}}) & z_{\mathrm{r}} > 0 \\ \arctan(z_{\mathrm{i}}/z_{\mathrm{r}}) + \pi & z_{\mathrm{r}} < 0 \wedge z_{\mathrm{i}} \geq 0 \\ \arctan(z_{\mathrm{i}}/z_{\mathrm{r}}) - \pi & z_{\mathrm{r}} < 0 \wedge z_{\mathrm{i}} < 0 \\ \pi/2 & z_{\mathrm{r}} = 0 \wedge z_{\mathrm{i}} > 0 \\ -\pi/2 & z_{\mathrm{r}} = 0 \wedge z_{\mathrm{i}} < 0 \end{cases}$$

周波数応答における $\angle P(j\omega)$ は ω について連続になるように扱い，値域は制限しない。$\omega = 0$ のときの位相を 0 とする。例えば $\angle P(j\omega_1) = -180^\circ$ から 45° 位相が遅れれば $\angle P(j\omega_2) = -225^\circ$ となる。

3　Python-control で正弦波入力に対する応答を調べる

分母・分子多項式の係数をリストとして定義することで伝達関数を扱うことができることを学んできた。そして `step` 関数でそのステップ応答を調べることができた。一般の入力に対する応答を調べるには `lsim` 関数を用いる。例として，1 次システム

$$P_{1\mathrm{st}}(s) = \frac{1}{s+1}$$

に $\omega = 2$ rad/s の正弦波 $\sin(\omega t)$ を入力したときの応答を調べるには，以下のようにすればよい。プロット範囲を 3 周期分としている（周期 $T = 2\pi/\omega$）。

```
 In[1]: import numpy as np
 In[2]: import matplotlib.pyplot as plt
 In[3]: from control.matlab import *
 In[4]: n = [1]
 In[5]: d = [1, 1]
 In[6]: P = tf(n, d)
 In[7]: w = 2.0
 In[8]: t = np.linspace(0, 3*2*np.pi/w, 1000)
 In[9]: u = np.sin(w*t)
In[10]: y, t, x = lsim(P, u, t)
In[11]: plt.plot(t, u, linestyle="--", label="u")
        plt.plot(t, y, linestyle="-", label="y")
        plt.legend()
        plt.xlabel("t [s]")
        plt.show()
```

課題

以下の項目についてまとめよ。

(1). Python-control を使い，次式の 2 次システム $P_2(s)$ $\omega = 0.2,\ 1.0,\ 2.0$ rad/s の正弦波 $\sin(\omega t)$ を入力したときの応答をそれぞれ調べよ。プロット範囲は **5 周期分**とし，入力と出力を重ねてプロットすること。

$$P_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

(2). プロットした結果からそれぞれの周波数におけるゲイン特性と位相特性を考察せよ。大きくなる／小さくなる，進む／遅れるといった定性的なものでよい。(必要があればプロット範囲を狭めて拡大するとよい)

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出
提出期限　次回授業まで
ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_06_KazukiSakai.html`