

数值解析

第7回 固有値

固有値

正則な正方行列**A**に対し

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

λ : 固有値

\mathbf{x} : 固有ベクトル

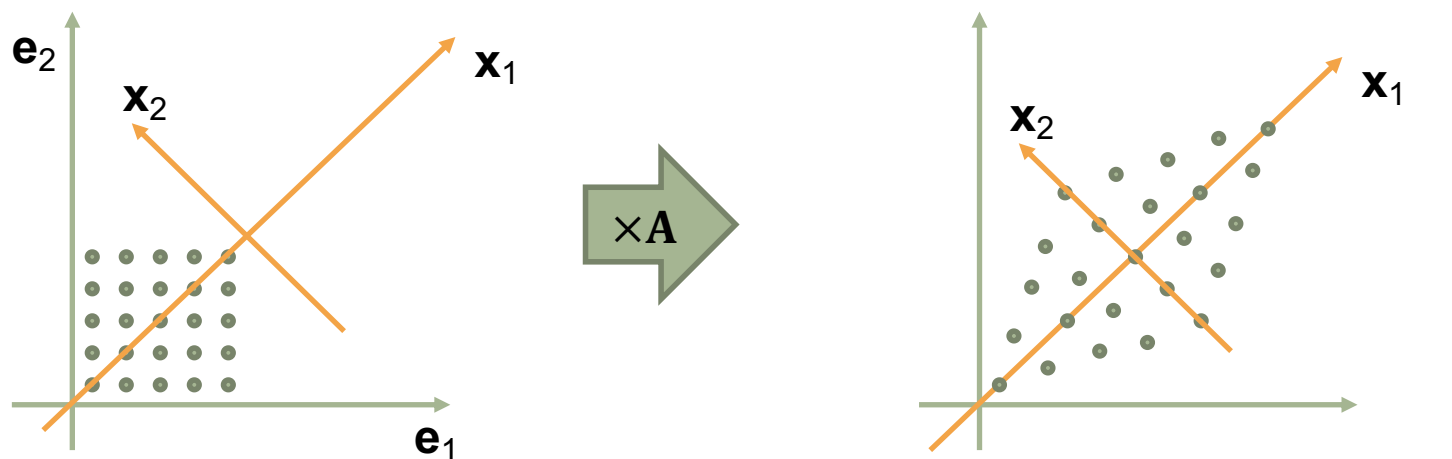
一般に, 5次以上の行列の固有値を求めるのは困難



(応用先が多い) **最大固有値・最小固有値**を求める

計算法に入る前に...

- 正則行列 \mathbf{A} の異なる固有値($\lambda_1, \lambda_2, \dots$)に対応する固有ベクトル($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$)はそれぞれ線型独立となる。(対称行列では直行する)



$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 \\ &= c'_1 \mathbf{x}_1 + c'_2 \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = c'_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + c'_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

固有ベクトル: 変換によって向きが変わらないベクトル

固有値: 変換によって引き延ばされる割合

最大固有値

- 固有値の性質から

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{y} = c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n$$

絶対値最大の固有値を λ_{max} とすると

$$\mathbf{A}^k\mathbf{y} = \lambda_{max}^k \left(c_1 \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{max}} \right)^k}_{< 1} \mathbf{x}_1 + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{max}} \right)^k}_{< 1} \mathbf{x}_2 + \cdots + c_{max}\mathbf{x}_m + \cdots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{max}} \right)^k}_{< 1} \mathbf{x}_n \right)$$

べき数 k が十分大きければ

$$\approx \lambda_{max}^k c_{max} \mathbf{x}_m$$

最大固有値の計算

- べき数 k が十分に大きい状態において

$$\frac{\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{y}}{\mathbf{A}^k\mathbf{y}} \approx \frac{\lambda_{\max}^{k+1} c_{\max} \mathbf{x}_m}{\lambda_{\max}^k c_{\max} \mathbf{x}_m} \approx \lambda_{\max}$$

この関係は適当に取った \mathbf{y} について成り立つ。

➡ 任意の \mathbf{y} を初期値とした以下の反復で固有値を求めることができる。

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)} \quad \lambda = \max_{\text{dim}} \left(\frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)}} \right)$$

比が最大となる次元

収束(終了)条件

$$\frac{|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|}{|\lambda^{(k)}|} < \varepsilon$$

(k): 括弧付きの数字は反復数

捕捉: λ の計算

内積を用いて以下のように計算しても良い。

$$\lambda = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k)}}$$

反復毎の最大値探索を内積に置き換えることで高速化

また, 次のステップの入力ベクトルは正規化した方が安定する。

$$\mathbf{y}^{(k)} \rightarrow \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}$$

最小固有値

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

両辺に逆行列 \mathbf{A}^{-1} を左側から掛ける

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$



\mathbf{A}^{-1} の最大固有値が求まれば、
逆数で最小固有値が求まる。

最小固有値の計算

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^{(k)}$$

このままでは、**Aの逆行列**が必要



$$\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)}$$

AはLU分解可能なので、

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} \quad \frac{1}{\lambda} = \max_{\text{dim}} \left(\frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)}} \right)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{y}^{(k)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{z}$$

を解く

$$\lambda = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k+1)} \cdot \mathbf{y}^{(k+1)}} \quad \text{でもOK}$$

演習問題

- 行列Aをinput.csvから読み取り, 最大固有値と最小固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 7 & -5 \\ 0 & 10 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$