Ec4 制御工学 IB　第 10 回

1　ベクトル軌跡

ボード線図以外のシステム $G(s)$ の周波数応答を表現するとして**ベクトル軌跡**がある。システム $G(s)$ の周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は複素数なので，複素平面上で原点を始点としたベクトルとして表すことができる。ω を $0 \to +\infty$ と動かしたときの $G(j\omega)$ の終点の軌跡のことをベクトル軌跡という。

1.1　積分系

積分系 $G(s) = 1/s$ を例に考えてみると

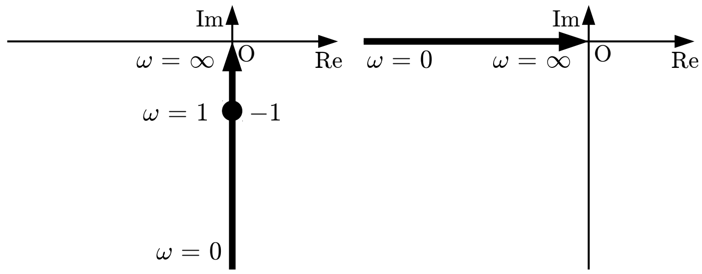
$$G(j\omega) = 1/(j\omega) = -j/\omega$$

なので，$\omega = 0 \to \infty$ とすると虚軸上での $-\infty \to 0$ という軌跡になることがわかる。

積分系 2 つの直列結合 $G(s) = 1/s^2$ では

$$G(j\omega) = -1/\omega^2$$

なので，実軸上で $-\infty \to 0$ という軌跡になる。



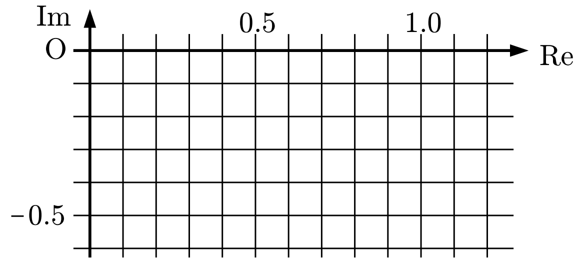
(a) $G(s) = 1/s$　　(b) $G(s) = 1/s^2$

演習：1 次システムのベクトル軌跡

定常ゲイン $K = 1$，時定数 $T = 1$ とした 1 次システム $G(s) = 1/(1+s)$ のベクトル軌跡を描いてみよう。周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

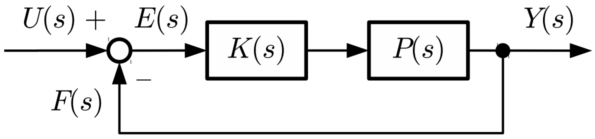
である。以下の表を完成させて，右のグラフに点を打ってつないでみよう。表は小数で書いた方が良い。



ω	0	1/7	1/3	1/2	3/4	1	4/3	2	3	7	∞
実部											
虚部											

2　一巡伝達関数と閉ループ伝達関数

ここからはフィードバック制御系に限定して考えていく。制御対象の伝達関数を $P(s)$，制御技術者の設計する制御器の伝達関数を $K(s)$ とすると以下のブロック線図で表される。



$F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ は**フィードバック信号**と呼ばれ，$E(s)$ のラプラス逆変換 $e(t)$ は**誤差信号**と呼ばれる。誤差信号 $e(t)$ からフィードバック信号 $f(t)$ までの伝達関数，つまりループを一巡する伝達関数 $L(s)$ のことを**一巡伝達関数**または**開ループ伝達関数**という（区別する場合もある）。

$$F(s) = P(s)K(s)E(s) \implies L(s) = \frac{F(s)}{E(s)} = P(s)K(s)$$

一方で入力 $U(s)$ から出力 $Y(s)$ までの伝達関数を**閉ループ伝達関数**という。閉ループ伝達関数 $G(s)$ を一巡伝達関数 $L(s)$ を使って表すと

3　ナイキストの安定判別法

一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ について $\omega = -\infty \to \infty$ としたときの複素平面上での軌跡をそのフィードバック制御系の**ナイキスト線図**という。ベクトル軌跡との違いは，ω の動かす範囲と，ナイキスト線図はそれが一巡伝達関数だと思って書いているところである。実際には負の周波数の信号を入力することはできないので，ω を $0 \to \infty$ の範囲で動かして $L(s)$ のベクトル軌跡を描き，それを上下反転にして進む向きを逆にすることで $-\infty \to 0$ に動かした場合の軌跡を作る。これらをつなぎ合わせればナイキスト線図が得られる。

ナイキストの安定判別法とは，一巡伝達関数 $L(s)$ を使って以下の手順でフィードバック制御系全体の安定判別を行うものである。

ステップ 1　一巡伝達関数 $L(s)$ のナイキスト線図を描く。

ステップ 2　ナイキスト線図が点 $(-1, 0)$ のまわりを反時計回りにまわる回数 N を調べる。時計回りにまわる場合は -1 回として数える。

ステップ 3　一巡伝達関数 $L(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数 U を調べる。

ステップ 4　$U = N$ であればフィードバック制御系は安定である。

つまり，**ナイキスト線図が点 $(-1, 0)$ のまわりを反時計回りにまわる回数が一巡伝達関数の不安定極の個数に等しいならば，制御系は安定である。**

ラウス＝フルビッツの安定判別法と比べると，閉ループ伝達関数と比べて計測の容易な一巡伝達関数によって制御系全体の安定性が判別できる点で優れている。

4　Python-control でナイキスト線図を描く

ナイキスト線図を描くには nyquist 関数が使える。例として一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s+4)} \tag{1}$$

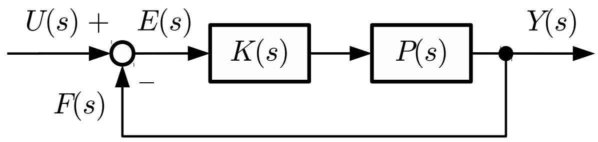
で表されるシステムについて $k = 30$ の場合のナイキスト線図を描くには以下のようにすればよい。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: import matplotlib.pyplot as plt
In[3]: from control.matlab import *
In[4]: z = []
In[5]: p = [-1, -1, -4]
In[6]: k = 30
In[7]: n, d = zpk2tf(z, p, k)
In[8]: L = tf(n, d)
In[9]: real, imag, w = nyquist(L)
```

演習：式 (1) のシステムにおいて $k = 100$ の場合の安定性をナイキストの安定判別法で判別せよ

5　ナイキスト線図における点 $(-1, 0)$ の意味

ナイキストの安定判別法においては点 $(-1, 0)$ つまり $L(j\omega) = -1$ となる点が重要となっている。この意味をしっかりと認識しておこう。



(1) $F(s) = L(s)E(s)$ であるので，$e(t) = \sin(\omega t)$ のときの $f(t)$ を $L(j\omega)$ を使って表すと

(2) ある $\omega = \omega_0$ において $L(j\omega_0) = -1$ とする。$|L(j\omega_0)|$, $\angle L(j\omega_0)$ はそれぞれ

$|L(j\omega_0)| =$　　　　　　　　　　$\angle L(j\omega_0) =$

(3) $L(j\omega_0) = -1$ であるときに $e(t) = \sin(\omega_0 t)$ としたときの $f(t)$ は

(4) $f(t)$ が返ってきたあとの誤差信号 $e'(t) = u(t) - f(t)$ について，$u(t) = 0$ の場合の $e'(t)$ は

このように $L(j\omega) = -1$ となるような ω が存在する場合，ある周波数成分が減衰せずに残って永遠に収束しなくなる。

課題

(1). 一巡伝達関数 $L_1(s)$ が次式で表されるシステムについて，Python-control を使って $K = 2,\ 0.75$ の2通りのナイキスト線図を描き，ナイキストの安定判別法によりそれぞれの安定性を判別せよ。

$$L_1(s) = \frac{K}{s-1}$$

また，閉ループ伝達関数 $G_1(s)$ の式を求め，安定性の必要十分条件（必要条件ではない）から上記の結果を確認せよ。

提出方法　Jupyter Notebook で作成し，HTML にしてダウンロードして，Teams の課題タブから提出

提出期限　次回授業まで

ファイル名　“出席番号 2 桁__授業回__氏名.html”　（例）`00_10_KazukiSakai.html`