Analytische Aufgabe 3.1

Durch das Pol-Nullstellen Diagramm lassen sich die dazugehörigen Übertragungsfunktionen bis auf einen multiplikativen Faktor bestimmen. Durch die in der Angabe abgebildeten Diagramme lassen sich nun die einzelnen Polstellen und Nullstellen ablesen.

Da in den Aufgaben die Pol-Nullstellen Diagramme zu ermitteln sind und Fragen zur Stabilität zu beantworten sind, werden hier die multiplikativen Faktoren vernachlässigt, da diese die Lage der Pole und Nullstellen nicht beeinflussen.

Zusätzlich ist anzumerken, dass $y_i[n] = (x * h_i)[n]$gegeben ist, was zu einer Multiplikation im Bildbereich führt, wie in (a) beschrieben wird. Weiters ergibt sich, da x und $h_i$kausal sind, dass $y_i$ebenfalls kausal ist und somit das ROC außerhalb des Betrags des äußersten Poles liegt.

(a)

$X(z)$ und $H_1(z)$ ergeben sich aus den zugehörigen Pol-Nullstellen Diagrammen:

$$X(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})},\ H_1(z) = (z - \frac{j}{2})$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$Y_1(z) = X(z)H_1(z) \longleftrightarrow y_1[n] = (x * h_1)[n]$$

Nun wird die Multiplikation mit von X(z) mit $H_1(z) = (z - \frac{j}{2})$ ausgeführt:

$$Y_1(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{3}{2})(z-\frac{j}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})} = \frac{(z-1)(z+\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{j}{2})}$$

Im Zähler kann man nun die Nullstellen $z_{0,1}1 = 1$ und $z_{0,1}1 = -\frac{3}{2}$ablesen . Die Pole befinden sich an den Stellen $z_{\infty,1} = \frac{1}{2}$ und $z_{\infty,2} = -\frac{j}{2}$. Da der Grad des Zählerpolynoms gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist, ergibt sich durch die Überlegung $\lim_{z\to\infty} Y_1(z)$ weder eine Polstelle noch eine Nullstelle.

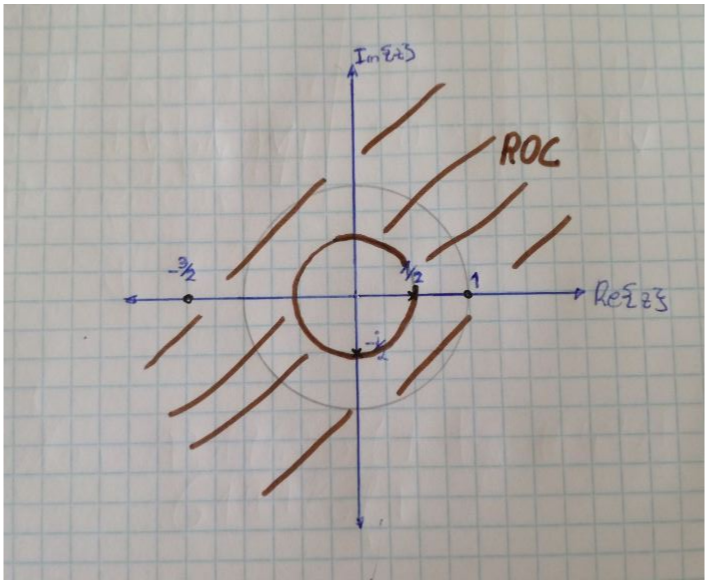

Figure 1: Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_1(z)$

Zusätzlich ist zu überlegen, ob $y_1[n]$ reellwertig sein kann. In diesem Fall kann $y_1[n]$ nicht reellwertig sein. Falls eine reelle Funktion komplexe Pol- & Nullstellen besitzt, so treten diese ausschließlich komplex konjugiert auf.. Bei $y_1[z]$ tritt der Pol $P_1 = -\frac{j}{2}$ nicht komplex konjugiert als $P_2 = \frac{j}{2}$ auf. Daher kann $y_1[n]$ nicht rein reellwertig sein.

(b)

Hier ergibt sich aus dem Pol-Nullstellen Diagramm $H_2(z) = \frac{1}{z}$.
Daraus kann $Y_2(z)$ berechnet werden:

$$Y_2(z) = X(z) \cdot H_2(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})} \cdot \frac{1}{z} = X(z) \cdot z^{-1}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich:

$$x[n-M] \longleftrightarrow X(z)z^{-M}$$

Daraus lässt sich das Ergebnis durch das Signal x[n] und eine Zeitverschiebung darstellen:

$$y_2[n] = x[n-1]$$

(c)

Durch das Pol-Nullstellen Diagramm ergibt sich $H_3(z) = \frac{1}{(z+\frac{3}{2})}$. Dadurch kann nun $Y_3(z)$ berechnet werden.

$$Y_3(z) = X(z) \cdot H_3(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z+\frac{j}{2})} \cdot \frac{1}{(z+\frac{3}{2})} = \frac{(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z+\frac{j}{2})}$$

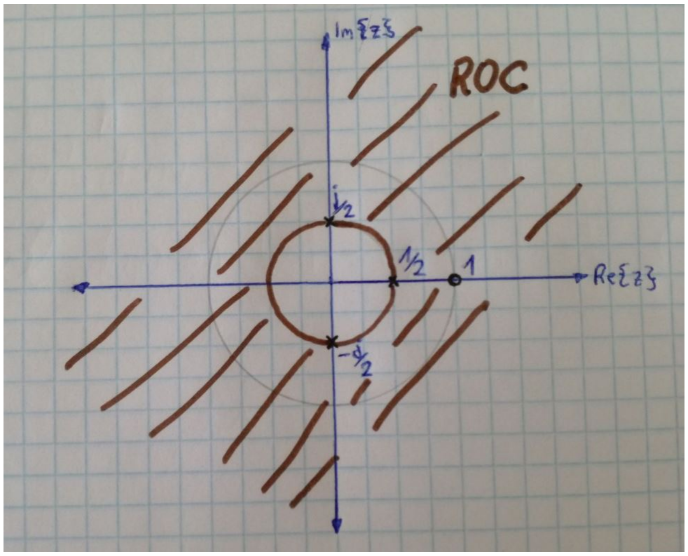

Figure 2: Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_3(z)$

Ein System ist minimalphasig, wenn die z-Transformierte und dessen Inverse BIBO stabil sind. Ein System ist BIBO stabil, wenn der Einheitskreis im ROC liegt. Hierbei darf nicht übersehen werden, dass sich durch die Überlegung $\lim_{z\to\infty} Y_3(z)$ bzw. $\lim_{z\to\infty} Y_3(z)^{-1}$ weitere Nullstellen oder Pole ergeben können, weshalb diese Grenzwerte zu berechnen sind.

$$\lim_{z\to\infty} Y_3(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z+\frac{j}{2})} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} Y_3(z)^{-1} = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z+\frac{j}{2})}{(z-1)} = \infty$$

Bei $Y_3(z)$ sind alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises, dadurch liegt dieser im ROC und die Funktion ist BIBO stabil.
Bei $Y_3(z)^{-1}$ ist dies jedoch nicht der Fall, da die Funktion bei z = 1 eine Polstelle hat, dort somit nicht konvergent ist und somit die Funktion nicht stabil ist, da der Einheitskreis nicht im ROC liegen kann.

(d)

Hier kann die Funktion $Y_4(z)$ durch das Pol-Nullstellen Diagramm abgelesen werden. Daraus ergibt sich $H_4(z)$ als:

$$Y_4(z) = X(z) \cdot H_4(z) \Rightarrow H_4(z) = \frac{Y_4(z)}{X(z)}$$

$$H_4(z) = \frac{\frac{(z+\frac{3}{2})}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}}{\frac{(z+\frac{3}{2})(z-1)}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}} = \frac{1}{(z-1)}$$

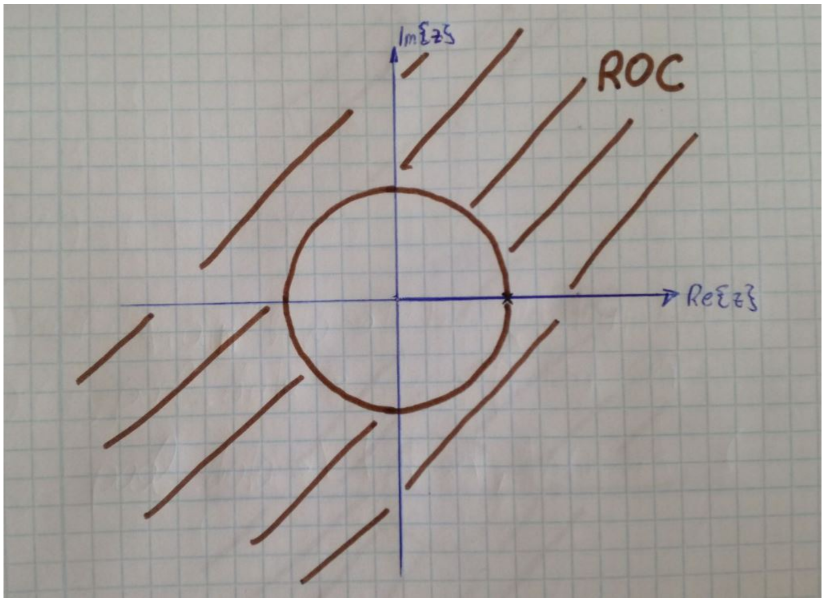

Figure 3: ROC von $H_4(z)$

Da bei der Funktion $H4(z)$ ein Pol am Einheitskreis liegen ist dieser nicht im ROC enthalten, woraus sich ergibt, dass $H_4(z)$ instabil ist.

(e)

Es soll eine Übertragungsfunktion $H_5(z)$ermittelt werden, sodass $Y_5(z)^{-1}$stabil ist.
Hierzu stellt man zuerst eine Formel zur Berechnung von $Y_5(z)^{-1}$auf und versucht danach $H_5(z)$ so zu wählen, dass das resultierende System stabil ist.
Bei diesem Beispiel ist zu beachten, dass durch das Invertieren $Y_5(z)^{-1}$ antikausal ist, also die ROC vom Betrag des innersten Pols bis zum Nullpunkt geht

$$Y_5(z)^{-1} = X(z)^{-1} \cdot H_5(z)^{-1} = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{3}{2})(z-1)} \cdot H_5(z)^{-1}$$

Damit nun $Y_5(z)^{-1}$ stabil ist, müssen alle Pole eliminiert werden, welche am Einheitskreis oder innerhalb des Einheitskreises liegen. Das trifft auf den Pol bei z = 1 zu, somit muss $H_5(z)^{-1}$so gewählt werden, dass sich dieser Pole aus dem Nenner kürzt, oder anders ausgedrückt, $H_5(z)^{-1}$muss an der Stell, an der $X(z)^{-1}$ diese Polstellen hat, eine Nullstell haben, damit sich diese kompensieren und das Gesammtsystem stabil wird. Daraus folgt:

$$H_5(z)^{-1} = (z-1), wodurch$$

$$Y_5(z)^{-1} = X(z)^{-1} \cdot H_5(z)^{-1} = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{3}{2})(z-1)} \cdot H_5(z)^{-1} = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{3}{2})(z-1)} \cdot (z-1) = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{j}{2})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{3}{2})}$$

Durch diese Wahl von $H_5(z)^{-1}$wurden nun alle Pole, die die Stabilität von $Y_5(z)^{-1}$ verhindern eliminiert. Nun muss nur noch $H_5(z)$ berechnet werden:

$$H_5(z) = ((z-1))^{-1} = \frac{1}{(z-1)}$$

Auffällig ist hier, dass die Überlegung, was bei $\lim_{z\to\infty} Y_5(z)^{-1}$ passiert, vernachlässigt werden kann, da Polstellen im Unendlichen die Stabilität einer antikausalen Folge nicht beeinflussen.
Zusätzlich ist das Pol-Nullstellen Diagramm von $H_5(z)$ nun zu zeichnen:

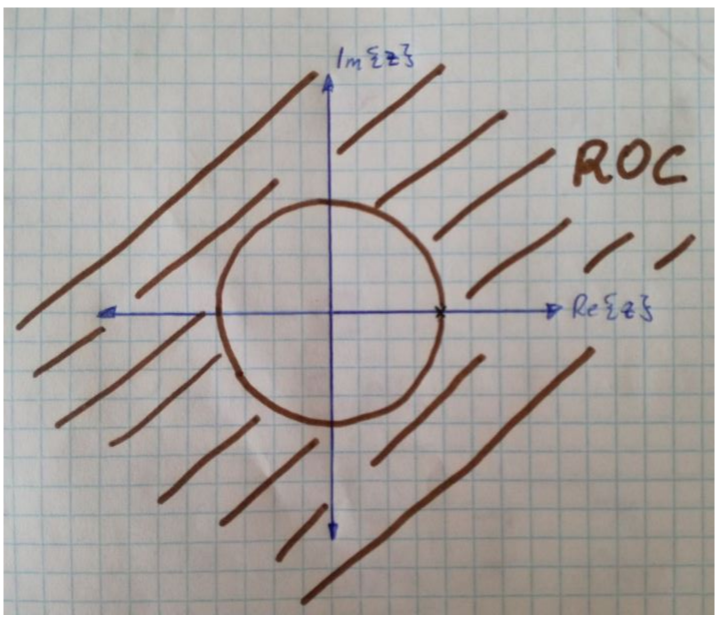

Figure 4: Pol-Nullstellen Diagramm von $H_5(z)$

(f)

Es ist der Absolutbetrag von X(z) qualitativ am Einheitskreis zu zeichnen. Hierzu muss jedoch X(z) wie folgt umgeformt werden:

$$X(z)\mid_{z=e^{j\Theta}} = X(e^{j\Theta}),\ \Theta \in [0, 2\pi]$$

Anzumerken ist, dass $X(e^{j\Theta})$ periodisch mit 2π ist. In der Skizze ist der Bereich [-π, π] gezeichnet, der weitere Verlauf des Absolutbetrags ergibt sich aus der Periodizität des Betrags.

Weiters wurden um den Absolutbetrag zu berechnen die konkreten Werte des Absolutbetrags an folgenden Stützstellen berechnet:

$$X(e^{j0}) = 0$$
$$X(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 3,04$$
$$X(e^{j\pi}) = 0,53$$
$$X(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = 3,04$$

Aus diesen Stützstellen und der Periodizität von $X(e^{j\Theta})$ ergibt sich folgender Verlauf für den Absolutbetrag von $X(e^{j\Theta})$:

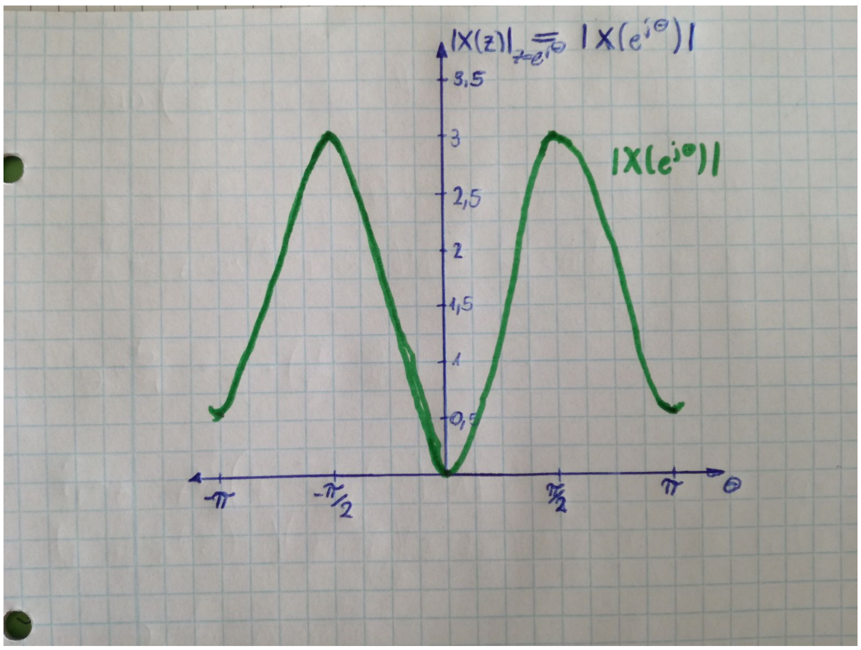

Figure 5: Absolutbetrag von $X(e^{j\Theta})$ im Bereich[-π, π]