Signal Processing and Speech Communication Lab.
Graz University of Technology

SV

Assignment 3

Senden Sie die Hausübung bis spätestens **14.06.2017** per **E-Mail** an `hw1.spsc@tugraz.at`. Verwenden Sie "MatrikelNummer1 MatrikelNummer2" als Betreff. Eine vollständige Abgabe besteht aus den von Ihnen erstellten Octave Dateien (`*.m`) und einem Simulationsprotokoll (PDF). Komprimieren Sie alle Dateien in eine **zip**-Datei mit Dateinamen

`YourMatrNo_YourColleaguesMatrNo.zip`

und hängen Sie diese an die E-Mail an.

Zusätzlich zur E-Mail müssen Sie die ausgedruckten Simulationsprotokolle und die Lösungen für die analytischen Aufgaben in unseren Briefkasten in der Inffeldgasse 16c, Erdgeschoß, ebenfalls bis 14.06.2017, einwerfen (am Wochenende ist der Zugang zum Briefkasten nicht möglich). Drucken Sie dazu für jede Teilaufgabe den Angabezettel separat aus und klammern sie ihn mit der jeweiligen Lösung/dem jeweiligen Simulationsprotokoll zusammen. Fügen Sie Ihre(n) Namen und Ihre Matrikelnummer(n) auf jedem Angabezettel ein.

Wenn Sie Ihre analytischen Lösungen mittels LaTeX erstellen, können Sie bis zu zwei Bonuspunkte erhalten. Bei handschriftlichen Lösungen analytischer Beispiele bitten wir Sie, diese ordentlich, gut strukturiert und leserlich zu verfassen. Ansonsten werden fünf Punkte abgezogen.

Arbeiten Sie soweit wie möglich mit der SPSC Formelsammlung. Kennzeichnen Sie die Stellen, wo Sie die Formelsammlung nutzen.

Analytisch 3.1 (6 Punkte)

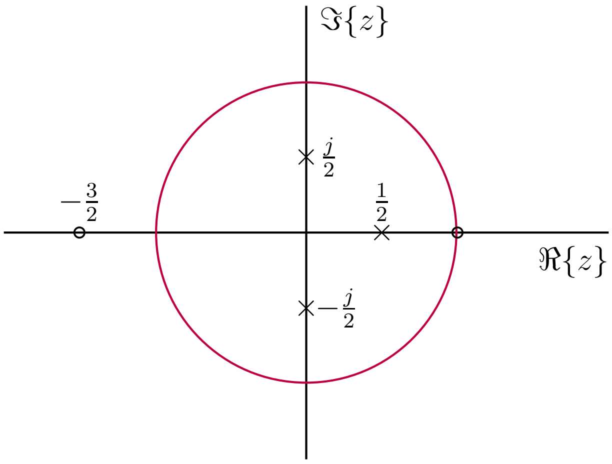


Abbildung 1: Pol-Nullstellen Diagramm von $X(z)$.

Gegeben sei das in Abbildung 1 dargestellte Pol-Nullstellen Diagramm von $X(z)$, der z-Transformierten der kausalen Sequenz $x[n]$. Weiters seien folgende Zusammenhänge definiert:

- $y_i[n] = (x * h_i)[n]$
- $h_i[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} H_i(z)$
- $y_i[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} Y_i(z)$

Die Sequenz $h_i[n]$ mit Subindex $i = 1 \ldots 5$ sei ebenfalls kausal.

(a) [1 Punkt(e)] $H_1(z)$ sei durch das Pol-Nullstellen Diagramm in Abbildung 2 beschrieben. Ermitteln und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_1(z)$. Ist $y_1[n]$ reellwertig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) [1 Punkt(e)] $H_2(z)$ sei durch das Pol-Nullstellen Diagramm in Abbildung 3 beschrieben. Finden Sie $y_2[n]$ als Funktion von $x[n]$! (**Hinweis:** Verwenden Sie hierfür die Formelsammlung.)

(c) [1 Punkt(e)] $H_3(z)$ sei nun durch das Pol-Nullstellen Diagramm in Abbildung 4 beschrieben Ermitteln und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_3(z)$. Ist $Y_3(z)$ minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) [1 Punkt(e)] Nun sei $Y_4(z)$ durch das Pol-Nullstellen Diagramm in Abbildung 5 beschrieben. Ermitteln und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $H_4(z)$. Ist $H_4(z)$ in diesem Fall stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) [1 Punkt(e)] Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen Diagramm eines Systems $H_5(z)$, welches bewirkt dass die Inverse von $Y_5(z)$ (d.h. $Y_{5,\text{inv}} = \frac{1}{Y_5(z)}$) stabil ist.

(f) [1 Punkt(e)] Skizzieren Sie qualitativ den Absolutbetrag von $X(z)$ am Einheitskreis (i.e. $X(z)|_{z=e^{j\theta}}$ mit $\theta \in [0, 2\pi[$).

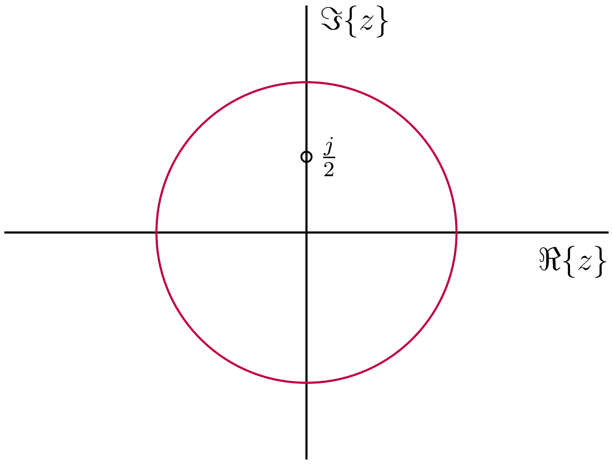


Abbildung 2: PN-Diagramm, $H_1(z)$.

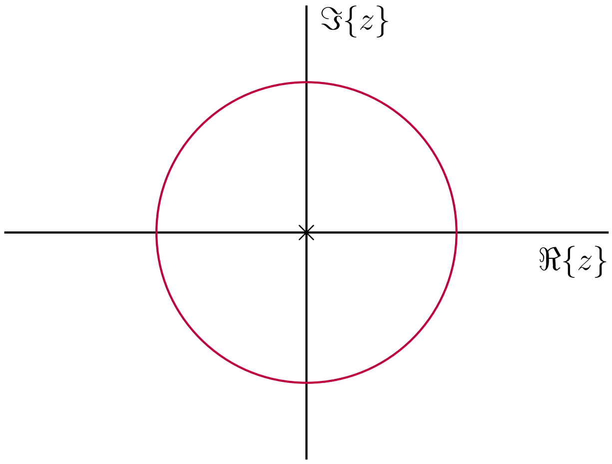


Abbildung 3: PN-Diagramm, $H_2(z)$.

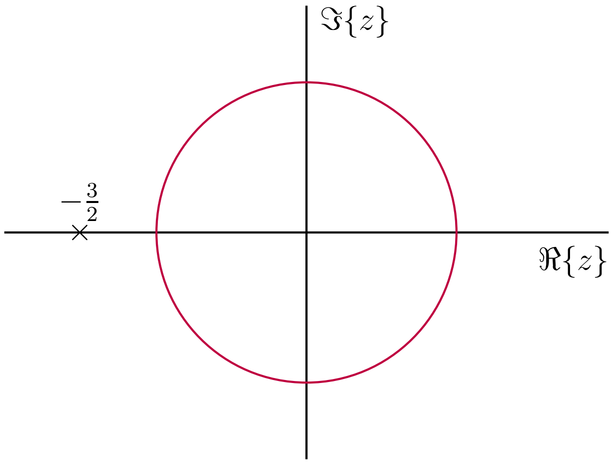


Abbildung 4: PN-Diagramm, $H_3(z)$.

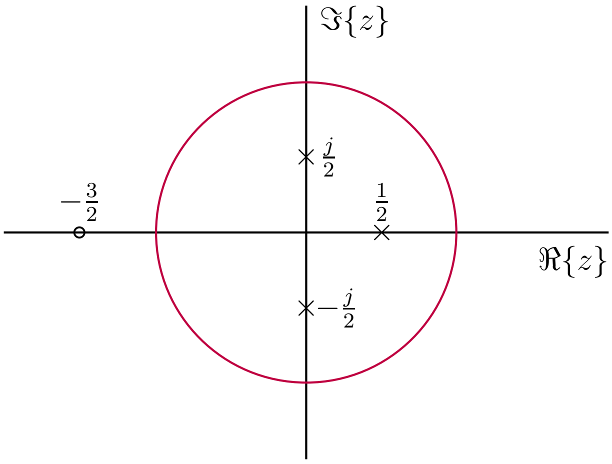


Abbildung 5: PN-Diagramm, $Y_4(z)$.

Analytisch 3.2 (10 (+ 2) Punkte)

Die folgende Differenzengleichung beschreibt das System $h[n]$, wobei $y[n]$ das Ausgangssignal des Systems ist und $x[n]$ das Eingangssignal.

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] \tag{1}$$

Die Filterkoeffizienten sind wie folgt definiert

- $a_1 = 0$
- $a_2 = -\frac{1}{4}$
- $a_3 = -\frac{1}{\sqrt{32}}$
- $b_0 = 1$
- $b_1 = 2\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $b_2 = -\mathrm{e}^{j\pi}$

(a) [1 Punkt(e)] Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

(b) [2 Punkt(e)] Unter der Bedingung, dass ein Pol gegeben ist mit $z_{\infty,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ermitteln Sie alle Nullstellen und Polstellen des Systems.
Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision zur Bestimmung der Pole. Um die Nullstellen zu ermitteln bietet es sich an die z-Transformation erst allgemein, für beliebige Nullstellen $\{z_{0,1}, z_{0,2}, z_{0,3}\}$ auszudrücken und in weiterer Folge einen Koeffizientenvergleich mit der spezifischen Lösung für die Koeffizienten $\{b_1, b_2, b_3\}$ durchzuführen. Es ist kein explizites Lösen der quadratischen Gleichung erforderlich.

(c) [2 Punkt(e)] Zeichnen Sie das zugehörige Pol-Nullstellen Diagramm und bestimmen Sie den ROC. Untersuchen Sie das System auf

1. Kausalität,
2. Stabilität,
3. Minimalphasigkeit.

(d) [2 Punkt(e)] Ist die Impulsantwort $h[n]$ reellwertig? Finden Sie zumindest ein Eingangssignal $x[n]$, für welches das Ausgangssignal $y[n]$ rein reellwertig (i.e. $y[n] \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}$) ist.

(e) [2 Punkt(e)] Bestimmen Sie das Minimalphasensystem für das gilt $|H_m(z)| = |H(z)|$ und den Allpass $H_a(z)$ unter der Bedingung $H(z) = H_a(z)H_m(z)$. Ist die Impulsantwort $h_m[n]$ reellwertig?

(f) [1 Punkt(e)] Sie schalten nun ein System $H_2(z) = c$ in Serie zu System $H(z)$, wobei es sich bei c um eine Konstante handelt. Wählen Sie $H_2(z)$ so, dass für das Gesamtsystem $H_3(z) = H(z)H_2(z)$ gilt

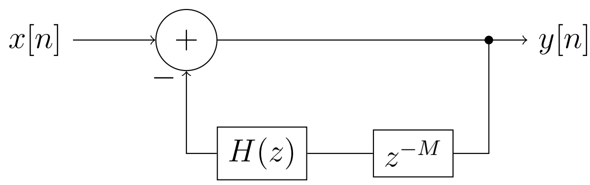
$$H_3(\mathrm{e}^{j\theta})|_{\theta=0} = 1$$

Worin unterscheiden sich die Pol-Nullstellen Diagramme von $H(z)$ und $H_3(z)$? Können Sie die Übertragungsfunktion eindeutig aus einem Pol-Nullstellendiagramm ablesen?

(g) [2 (Bonus) Punkt(e)] Sie legen nun das Eingangssignal $x[n] = \cos(2\pi n)$ an $h_3[n]$ an. Bestimmen Sie das Ausgangssignal $\tilde{y}[n] = (x * h_3)[n]$.

Octave 3.3 (9 (+ 3) Punkte)

Im Simulationsprotokoll dieser Aufgabe sollen alle erstellten Abbildungen und Herleitungen zu finden sein. Die E-Mail Abgabe soll ein Skript beinhalten, das alle Ergebnisse und Abbildungen reproduziert. Die im Zuge dieser Aufgabe zu erstellenden Funktionen `ksalgorithm` und `ifftreal` sollen in separate m-Files ausgelagert werden. Ein Template für die Funktion `ksalgorithm` finden Sie auf der Homepage, passen Sie es bitte entrsprechend Ihrer Abgabe (Autoren, verwendete Octave/Matlab Version etc.) an und verwenden Sie selbiges Format auch für Ihre restlichen Funktionen. Alle begleitenden Files finden sie im zip-File Data.zip auf unserer Homepage.
Gegeben sei folgendes System:



Bei $H(z)$ handelt sich um die z-Transformierte der Impulsantwort $h[n]$ und z^{-M} stellt eine Verzögerung um M Samples dar.

(a) [1 Punkt(e)] Finden Sie eine Differenzengleichung, die das System beschreibt (d.h. $y[n]$ in Abhängigkeit von $x[n]$, $h[n]$ und M ausdrückt). Weiters Bestimmen Sie $H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

(b) [2 Punkt(e)] Verwenden Sie den Befehl `audioread` (oder, abhängig von der verwendeten Plattform und Version `wavread`) um das file `sample1.wav` zu laden, vergessen Sie hierbei nicht das zweite Ausgabeargument der Funktion um zusätzlich die Abtastrate f_s in Hertz zu erhalten. Speichern Sie das eingelesene Signal $x[n]$ im Vektor **x**. Illustrieren Sie den Absolutbetrag der DFT von $x[n]$ von $f = 0\,\mathrm{Hz}$ bis zur halben Abtastrate $f = \frac{f_s}{2}$ mithilfe des Befehls `plot`. Den Frequenzvektor f können Sie mit `f = (0:(N-1))*fs/N;` (**Achtung**: zur Wahrung der Octave Notation bedeutet hier der Stern Operator $*$ eine Multiplikation und keine Faltung.) bestimmen, wobei es sich bei `N` um die von Ihnen gewählte FFT-Länge (d.h. der Signallänge) handelt. Ermitteln Sie nun mithilfe der Befehle `fft`, `abs` und `max` die Frequenz f_0 (in Hertz) des zugrundeliegenden Signals. (**Hinweis:** `max` liefert Ihnen zwei Ausgabeargumente, wobei es sich beim zweiten Ausgabeargument um den Index des Maximums des Eingangsvektors handelt.)

(c) [1 Punkt(e)] Auf Basis der in Punkt **(a)** errechneten Grundfrequenz erstellen Sie einen Vektor $\mathbf{x}_1$, der die erste Periode der Länge T_0 des Signals $x[n]$ beinhaltet. Stellen Sie den Signalausschnitt $\mathbf{x}_1$ mithilfe von `plot` dar und achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftung.

(d) [1 Punkt(e)] Betrachten Sie nun das obige Blockschaltbild und wählen Sie $H(z) = \alpha$ und $M = T_0 f_s$. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit die Stabilität von $H_1(z)$ garantiert ist?

(e) [2 Punkt(e)] Erstellen Sie nun eine Funktion `y = ksalgorithm(x,` α`,` M`, Nout)` welche die Operation $y[n] = (h_1 * x)[n]$ implementiert ($h_1[n]$ ist die inverse z-Transformation von $H_1(z)$). Die Eingangsargumente stellen folgende Größen dar:

1. `x` ... der Eingangsvektor mit Länge `Nout`

2. α ... $H(z)$

3. M ... Verzögerung

4. `Nout` ... gewünschte Länge des Ausgangsvektors `y`, in Samples.

Verwenden Sie die Funktion `filter` um das Ausgangssignal $y[n]$ aus $x[n]$ zu berechnen. (**Hinweis:** Verwenden Sie `help filter` für Details zur Funktion und vergleichen Sie mit der in Punkt **(a)** ermittelten Differenzengleichung.) Das Eingangssignal $x[n]$ soll als Vektor wiefolgt generiert werden: Die ersten $l = T_0 f_s$ Einträge sollen dem Vektor $\mathbf{x_1}$ entsprechen. Alle anderen Elemente werden 0 gesetzt. `Nout` soll so gewählt werden, dass die Länge des Ausgangssignals 2 Sekunden bei gegebener Abtastrate f_s entspricht. Der Parameter M soll in diesem ersten Experiment mit $M = T_0 f_s$ gewählt werden. Weiters definieren Sie $\alpha = 0.99$. Nun rufen Sie ihre Funktion mit den gewählten Parametern auf und stellen Sie das Ausgangssignal $y[n]$ mithilfe von `plot` dar.

(f) [1 Punkt(e)] Der von Ihnen (stark vereinfacht) implementierte Algorithmus[1] stellt eine Möglichkeit dar den Klang einer gezupften Saite zu synthetisieren. Verwenden Sie nun `soundsc(y,fs)` um sich den von Ihnen erzeugten Klang anzuhören (alternativ können Sie auch `audiowrite` verwenden um ihr Soundfile abzuspeichern und wiederzugeben).
Variieren Sie nun den Parameter M auf

1. round($M/2$),

2. $2M$.

Verwenden Sie `subplot` um beide Signal in einer `figure` darzustellen und hören Sie sich beide Signale an. Was fällt Ihnen auf?

(g) [1 Punkt(e)] Wie beeinflusst der Parameter α das Ausgangssignal (bzw. das Gesamtsystem)? Verwenden Sie `subplot` um Ausgangssignale für $\alpha = \{0.99, 0.5, 1, 1.01\}$ darzustellen und erklären Sie was Sie beobachten (achten Sie hierbei auf einen *sinnvollen* Darstellungsbereich des jeweiligen Signals, der Ihre Argumente untermauert)! Wie passen Ihre Beobachtungen mit der gefundenen Stabilitätsbedingung für α in Punkt **(d)** zusammen?

(h) [1 (Bonus) Punkt(e)] Generieren Sie mithilfe des Befehls `rand` einen Vektor $\mathbf{x}_2$, der dieselben Dimensionen wie der Vektor $\mathbf{x}_1$ besitzt. Rufen Sie nun die Funktion `ksalgorithm` mit $\mathbf{x}_2$ und den selben Parametern wie in Punkt **(e)** auf. Stellen Sie das resultierende Signal $y[n]$ dar. Was hat sich im Vergleich zu Punkt **(e)** $\mathbf{x}_1$ geändert?

(i) [2 (Bonus) Punkt(e)] Ein von Ihnen verwendetes Messgerät liefert Ihnen die ersten $\frac{N_{\text{FFT}}}{2}$ Punkte einer N_{FFT} Punkte langen DFT. Diese Werte befinden sich im Vektor $\mathbf{X}$, den Sie über `load('Measurement.mat')` in Ihren Workspace laden können. Sie wissen, dass das zugehörige Zeitsignal $x[n]$ (mit Länge N_{FFT}) reellwertig ist. Erstellen Sie eine Funktion `x = ifftreal(X)`, die den Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N_{\text{FFT}} - 1] \end{bmatrix}^T$ aus $\mathbf{X}$ berechnet. Gehen Sie dabei davon aus, dass N_{FFT} eine gerade Zahl ist. Stellen Sie Amplitude, Phase, Realteil und Imaginärteil

[1] K. Karplus and A. Strong. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres. Computer Music Journal,7 (2): 43-55, 1983.

der N_{FFT}-Punkte langen DFT von $x[n]$ in separaten subplots dar. Wie verhalten sich Realteil und Imaginärteil (bzw. Amplitude und Phase)? Generieren zusätzlich Sie eine Darstellung des Zeitsignals $x[n]$.