Signal Processing and Speech Communication Lab.
Graz University of Technology

SV

Aufgabe 4

Senden Sie die Hausübung bis spätestens **14.07.2017** per **Email** an `hw1.spsc@tugraz.at`. Verwenden Sie "MatrikelNummer1 MatrikelNummer2" als Betreff. Eine vollständige Abgabe besteht aus den von Ihnen erstellten Octave Dateien (`*.m`) und einem Simulationsprotokoll (PDF). Komprimieren Sie alle Dateien in eine **zip**-Datei mit Dateinamen

`YourMatrNo_YourColleaguesMatrNo.zip`

und hängen Sie diese an die Email an.

Zusätzlich zur Email müssen Sie die ausgedruckten Simulationsprotokolle und die Lösungen für die analytischen Aufgaben in unseren Briefkasten in der Inffeldgasse 16c, Erdgeschoß, einwerfen (am Wochenende ist der Zugang zum Briefkasten nicht möglich). Drucken Sie dazu für jede Teilaufgabe den Angabezettel separat aus und klammern sie ihn mit der jeweiligen Lösung/dem jeweiligen Simulationsprotokoll zusammen. Fügen Sie Ihre(n) Namen und Ihre Matrikelnummer(n) auf jedem Angabezettel ein.

Wenn Sie Ihre analytischen Lösungen mittels LaTeX erstellen, können Sie bis zu zwei Bonuspunkte erhalten. Bei handschriftlichen Lösungen analytischer Beispiele bitten wir Sie, diese ordentlich, gut strukturiert und leserlich zu verfassen. Ansonsten werden fünf Punkte abgezogen.

Arbeiten Sie soweit wie möglich mit der SPSC Formelsammlung. Kennzeichnen Sie die Stellen, wo Sie die Formelsammlung nutzen.

Vorliegende Version 3
Änderungsverlauf:
Version 1 → Version 2: Aufgabe 4.1 d) Einfügen *für beide Fälle der Polstellen (von (b))*
Version 2 → Version 3: Aufgabe 4.3 c) Link zu Literaturverweis ändern.

Name(n) Matr.Nr. **SV**

Analytische Aufgabe 4.1 (11 Punkte)

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches, reelles Signal $x_c(t)$, mit einer höchst vorkommenden Frequenz von 1000 Hz. Dieses Signal enthält eine Störung bei Frequenz 300 Hz. Sie messen $x_c(t)$ mithilfe eines Oszilloskopes mit Samplingfrequenz $f_s = 2000\,\text{Hz}$ und erhalten am Ausgang Ihres Oszilloskopes das zeitdiskrete Signal $x[n]$. Sie wollen nun ein kausales Filter $H(z)$ erstellen, welches das Störsignal in $x[n]$ am Ausgang des Filters $y[n] = (x * h)[n]$ unterdrückt.

Hierzu verwenden Sie ein Filter, welches aus jeweils zwei Pol- und Nullstellen besteht. Die Nullstellen $z_{n,1} = e^{j\theta_0}, z_{n,2} = e^{-j\theta_0}$ befinden sich am Einheitskreis mit Winkel $\pm\theta_0$. Die Polstellen befinden sich im Einheitskreis $z_{p,1} = r_p e^{j\theta_0}, z_{p,2} = r_p e^{-j\theta_0}$ mit Länge $r_p \in \mathbb{R}$ und selben Winkeln $\pm\theta_0$ wie bei den Nullstellen. Dadurch werden Frequenzen bei $\pm\theta_0$ vollkommen unterdrückt und die benachbarten Frequenzen nur gering beeinflusst.

(a) [1 Punkt(e)] Berechnen Sie θ_0 um die Störfrequenz bei 300 Hz in $x[n]$ zu unterdrücken.

(b) [1 Punkt(e)] Skizzieren Sie das Pol/Nullstellen Diagramm für zwei Fälle von Polstellen *(i)* $r_p = 0.01$ und *(ii)* $r_p = 0.99$. Achten Sie auf eine genaue Zeichnung, d.h. $r_p = 0.01 \neq 0$.

(c) [2 Punkt(e)] Gesucht ist die Übertragungsfunktion $H(z)$, abhängig von r_p und θ_0 (also allgemein, ohne explizit Werte einzusetzen). Ihr Filter soll die Bedingung $H(z)|_{z=1} = 1$ erfüllen.

(d) [1 Punkt(e)] Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang von $H(z)|_{z=e^{j\theta}}$ für beide Fälle der Polstellen (von **(b)**). Diskutieren Sie beide Betragsfrequenzgänge, erklären Sie die Zusammenhänge zwischen Nullstellen, Polstellen und $H(z)|_{z=e^{j\theta}}$.

(e) [1 Punkt(e)] Für welchen Wertebereich von r_p ist $H(z)$ kausal und stabil?

(f) [2 Punkt(e)] Sie wollen das Filter $H(z)$ mittels folgender Differenzen Gleichung implementieren

$$\sum_{l=0}^{L} a_l y[n-l] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

mit $a_0 = 1$ und $y[n]$ als Ausgang und $x[n]$ als Eingang an Ihrer Filterstruktur zum Zeitpunkt n. Gesucht sind L, M und die Filterkoeffizienten $\{a_l\}$ und $\{b_m\}$ als Funktion von r_p und θ_0. Achten Sie auf die Vorzeichen!

(g) [1 Punkt(e)] Zeichnen (und beschriften) Sie die dazugehörige Direktform I und Direktform II Filterstruktur.

(h) [2 Punkt(e)] Sei für diesen Unterpunkt $r_p = 0.99$ und θ_0 aus Unterpunkt **(a)**. Sie wollen Ihre Filterstruktur implementieren und müssen daher Ihre Filterkoeffizienten aus **(f)** auf ein ganzzahliges Vielfaches von $1/64$ runden. Beantworten Sie

- Ist Ihre Filterimplementierung trotz Rundens stabil?
- Liegen die Nullstellen am Einheitskreis?
- Welche Frequenz wird am stärksten bedämpft?
- Wie groß ist die Dämpfung des 300 Hz Störsignals?

Analytische Aufgabe 4.2 (11 Punkte)

Gegeben sei ein Signal $x[n]$. Sie wollen $x[n]$ mit Faktor $L > 1$ überabtasten und erhalten $x_{ü}[n]$ als

$$x_{ü}[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir sind interessiert an einem Filter um an den Stellen der eingefügten Nullen in $x_{ü}[n]$ zu interpolieren.

(a) [2 Punkt(e)] Erstellen Sie ein Interpolationsfilter $h_1[n]$, welches am Ausgang $y_1[n] = (x_{ü} * h_1)[n]$ folgendes Signal generiert

$$y_1[n] = \begin{cases} x_{ü}[0], & n = 0, 1, \ldots, L-1 \\ x_{ü}[L], & n = L, L+1, \ldots, 2L-1 \\ x_{ü}[2L], & n = 2L, 2L+1, \ldots, 3L-1 \\ \vdots \end{cases}$$

Hierbei wird jeder Wert in $x_{ü}[n]$ $(L-1)$ mal wiederholt. Gesucht ist die Impulsantwort $h_1[n]$ (als mathematischer Term) als Funktion von L (siehe auch Übung 8).

(b) [2 Punkt(e)] Berechnen Sie die Fouriertransformierte $H_1(e^{j\theta})$ und skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang $|H_1(e^{j\theta})|$ für $L = 4$ (Achtung: nur bei Skizzen einen expliziten Wert für L einsetzen!). Berechnen Sie die Nullstellen von $H_1(e^{j\theta})$ als Funktion von L.

(c) [1 Punkt(e)] Betreiben Sie nun Ihren Abtastratenerhöher mit nachgeschaltenem Filter $h_1[n]$ für $x[n] = \sin(\pi/2n)$. Skizzieren Sie $x_{ü}[n]$ und $y_1[n]$ für $L = 2$.

(d) [0.5 Punkt(e)] Sie wollen Ihre Interpolation in $y_1[n]$ verbessern und suchen ein anderes Filter $h_2[n]$ mit Impulsantwort

$$h_2[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \leq L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzieren Sie $h_2[n]$ für $L = 4$.

(e) [1 Punkt(e)] Berechnen Sie die Fouriertransformierte $H_2(e^{j\theta})$, nutzen Sie hierfür die Eigenschaft, dass $h_2[n]$ gleich der Faltung zweier Rechteckfenster im Zeitbereich entspricht.

(f) [0.5 Punkt(e)] Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang $|H_2(e^{j\theta})|$ für $L = 4$.

(g) [1 Punkt(e)] Betreiben Sie nun Ihren Upsampler mit nachgeschaltenem Filter $h_2[n]$ für $x[n] = \sin(\pi/2n)$. Skizzieren Sie $y_2[n]$ für $L = 2$.

(h) [2 Punkt(e)] Wie müsste ein idealer Interpolationsfilter $h_3[n]$ im Zeit und Frequenzbereich (als Funktion von L) aussehen, welcher die durch die Überabtastung entstehenden Aliaseffekte wegfiltert? Geben Sie einen mathematischen Term an oder skizzieren Sie!

(i) [1 Punkt(e)] Welcher Interpolationsfilter $h_1[n]$ oder $h_2[n]$ kommt dem idealen Filter $h_3[n]$ näher? Welchen Filter können Sie in einem Echtzeitsystem (ohne zusätzliche Laufzeitverzögerung) integrieren?

Name(n) Matr.Nr. **SV**

Octave Aufgabe 4.3 (3+2 Punkte)

Die diskrete Kosinus Transformation[1] (DCT-II) bildet ein zeitdiskretes Signal $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots, x[N-1]]^T$ mit Länge N als Summe von Kosinusfunktionen ab

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

(a) [2 Punkt(e)] Die diskrete Kosinus Transformation kann als Matrix Vektor Multiplikation angeschrieben werden

$$\mathbf{x}_{\mathrm{DCT}} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

mit $\mathbf{x}_{\mathrm{DCT}} = [X[0], X[1], \ldots, X[N-1]]^T$ und $\mathbf{C}$ als DCT Matrix mit Dimension $N \times N$. Erstellen Sie $\mathbf{C}$ für ein beliebiges N (sie können for-Schleifen verwenden, aber nicht Octave interne Funktionen wie `dct()`,...)

(b) [1 Punkt(e)] Sind die Zeilen von $\mathbf{C}$ zueinander orthogonal? Erstellen Sie $\mathbf{C}$ mit $N = 3$ und überprüfen Sie alle möglichen Zeilenpaare.

(c) [2 Bonus Punkt(e)] Wie muss die Formel der DCT-II geändert werden, sodass $\mathbf{C}$ orthogonal wird ($\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$). Hinweise und eine ausgezeichnete Zusammenfassung zur DCT finden Sie unter *https://www.spsc.tugraz.at/sites/default/files/hw4_Anlage2017.pdf*

[1] Es gibt mehrere Definitionen der diskreten Kosinus Transformation, in diesem Beispiel behandeln wir die *discrete cosine transform II (DCT-II)*

Name(n) Matr.Nr. **SV**

Octave Aufgabe 4.4 (5 Bonus Punkte)

Octave Challenge

Sie haben ein Praktikum in einem Kernkraftwerk angenommen und müssen die Netzfrequenz Ihres Generators überprüfen. Sie verwenden ein digitales Oszilloskop mit Samplingfrequenz $f_s = 1\,\mathrm{kHz}$ um die Spannung $u(t)$ mit Frequenz f_0 zu messen und erhalten folgendes Signal

$$x[n] = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \cos(k\theta_0 n + \varphi_k) + w[n] + c.$$

Der erste Term beschreibt die Summe der Grundschwingung ($k = 1$) plus der Oberschwingungen ($k = 2, 3$), mit Amplituden $\{\alpha_k\}$ und Phasenverschiebungen $\{\varphi_k\}$. Der zweite Term $w[n]$ stellt additives Rauschen da und c ist eine Konstante.

(a) [1 Punkt(e)] Angenommen, die Frequenz der Grundschwingung f_0 wäre Ihnen bekannt, wie können Sie θ_0 als Funktion von f_0 und f_s berechnen?

(b) [4 Punkt(e)] Erstellen Sie ein Octave Skript, welches f_0 aus einem gegebenen $x[n]$ berechnet. Die Daten des Oszilloskopes finden Sie unter *https://www.spsc.tugraz.at/sites/default/files/Ue4_2017.zip*. Ihr Skript soll die Frequenz f_0 in Hertz im Commandwindow ausgeben (z.B. mittels `disp(f_hat)`). Tipp: Versuchen Sie eine erste Frequenzabschätzung im Zeitbereich und identifizieren Sie diese Frequenz anschliessend im Frequenzbereich (Achten Sie auf ausreichendes zero-padding). Anschliessend böte sich eine genauere Identifizierung durch Adaptierung des Fensters, usw. an

Das Team mit der genauesten Schätzung wird fürstlich[2] entlohnt!

---

[2]vorbehaltlich der budgetären Bedeckbarkeit der TU Graz