Analytische Aufgabe 3.2

a) Ermittlung der Übertragungsfunktion

Aus der gegebenen Differenzengleichung, welche ein System beschreibt ist die Übertragungsfunktion des Systems mithilfe der z-Transformation zu berechnen.

Zuerst wird die Differenzengleichung allgemein transformiert und anschließend die Übertragungsfunktion berechnet:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] \\
Y(z) &= b_0X(z) + b_1X(z)z^{-1} + b_2X(z)z^{-2} - a_1Y(z)z^{-1} - a_2Y(z)z^{-2} - a_3Y(z)z^{-3} \\
& \quad b_0X(z) + b_1X(z)z^{-1} + b_2X(z)z^{-2} = Y(z) + a_1Y(z)z^{-1} + a_2Y(z)z^{-2} + a_3Y(z)z^{-3} \\
& \quad Y(z)\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}\right) = X(z)\left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}\right) \\
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}}{1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}} = \frac{\left(b_0z^2 + b_1z + b_2\right)z^3}{\left(z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3\right)z^2} \\
&= \frac{\left(b_0z^2 + b_1z + b_2\right)z}{z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3}
\end{aligned}
$$

b) Ermittlung aller Nullstellen und Polstellen des Systems

Nun sind mithilfe der gegebenen Filterkoeffizienten a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2 und unter Zuhilfename eines Pols bei $z_{\infty,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$alle Polstellen und Nullstellen des Systems zu bestimmen.

Hierzu werden das Nennerpolynom und das Zählerpolynom getrennt betrachtet und deren Nullstellen berechnet. Aus den Nullstellen des Zählerpolynomes ergeben sich die Nullstellen des Systems,

aus den Nullstellen des Nennerpolynomes die Polstellen des Systems.

Zuerst wird das Zählerpolynom betrachtet:

$$Z(z) = \left(b_0z^2 + b_1z + b_2\right)z$$

Durch den Produkt-Null Satz kann direkt eine Nullstelle bei $z_{0,1} = 0$ abgelesen werden. Um die zwei verbleibenden Nullstellen zu berechnen ist die quadratische Gleichung zu lösen:

$$
\begin{aligned}
b_0z^2 + b_1z + b_2 = 0 \\
z^2 + z(2e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}) - e^{j\pi} = z^2 + z\frac{3}{2}j + 1 = 0
\end{aligned}
$$

Diese quadratische Lösung wird nun mithilfe der Lösungsformel gelöst:

$$
\begin{aligned}
z_{0,2/3} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\
z^2 + pz + q &= 0 \\
\Rightarrow p &= \frac{3}{2}j, q = 1 \\
&= -\frac{\frac{3j}{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\frac{3j}{2})^2}{4} - 1} \\
&= -\frac{3j}{4} \pm \sqrt{\frac{\frac{-9}{4}}{4} - 1} \\
&= -\frac{3j}{4} \pm \sqrt{-\frac{9}{16} - \frac{16}{16}} \\
&= -\frac{3j}{4} \pm \sqrt{-\frac{25}{16}} \\
&= -\frac{3j}{4} \pm \frac{5j}{4}
\end{aligned}
$$

Mithilfe dieser Formel ergeben sich die Nullstellen des quadratischen Polynoms bei:

$$
\begin{aligned}
z_{0,2} &= \frac{j}{2} \\
z_{0,2} &= -2j
\end{aligned}
$$

Nun werden die Polstellen des Systems ermittelt. Hierzu berechnet man zuerst aus dem Polynom dritten Grades eine quadratische Polynom, indem man das Polynom durch die gegebene Nullstelle berechnet:
(Die Polynomdivision wird hier stückweise durchgeführt, um das Ergebnis besser nachvollziehen zu können. Diese Schritte wurden in der Ausarbeitung als eine kompakte Polynomdivision durchgeführt und werden hier als mehrere Divisionen dargestellt, wobei jeweils der Rest der vorherigen Division der Divisor der nächsten Division darstellt.)

$$
\begin{aligned}
\frac{(z^3 + z^2 a_0 + z a_1 + a_2)}{(z - z_{\infty,1})} &= \frac{z^3 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{32}}{z - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
(z^3 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{32}) : (z - \frac{1}{\sqrt{2}}) &= z^2 \\
(\frac{1}{\sqrt{2}}z^2 - -\frac{1}{4}z - \frac{1}{32}) : (z - \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}z \\
(\frac{1}{4}z - \frac{1}{\sqrt{32}}) : (z - \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{1}{4} \\
0 \; Rest \\
\Rightarrow \frac{z^3 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{32}}{z - \frac{1}{\sqrt{2}}} &= z^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Um diese Gleichung zu lösen wird wiederum die quadratische Lösungsformel verwendet, woraus sich die folgenden Polstellen ergeben:

$$\begin{aligned}
z^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{4} &= 0 \\
p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q &= \frac{1}{4} \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{4} - \frac{1}{4}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{8}} \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{4}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{8}} \pm \sqrt{-\frac{1}{8}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{8}} \pm \frac{j}{\sqrt{8}} \\
z_{\infty,2} &= -\frac{1}{\sqrt{8}} - j\frac{1}{\sqrt{8}} \\
z_{\infty,3} &= -\frac{1}{\sqrt{8}} + j\frac{1}{\sqrt{8}}
\end{aligned}$$

c) Pol-Nullstellen Diagramm und ROC

Das Pol-Nullstellen Diagramm des Systems ist zu zeichnen. Zusätzlich ist das System auf Kausalität, Stabilität und Minimalphasigkeit zu untersuchen.

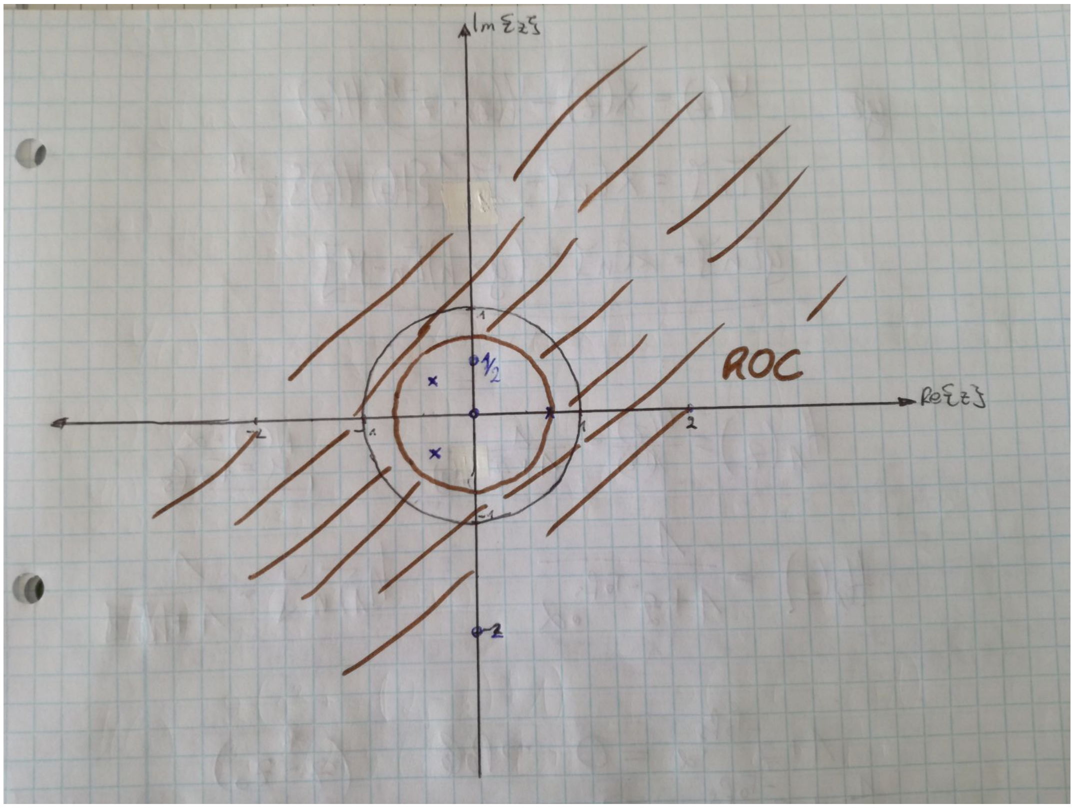

Figure 1: Pol-Nullstellen Diagramm

Nun wird das System auf folgende Eigenschaften untersucht:

1.)**Kausalität**: Ein System kann als kausal bezeichnet werden, wenn das Ausgangssignal y[n] nur von aktuellen und/oder den vergangenen Eingangs- und Ausgangssignalen abhängt.

Da in der Angabe gegeben ist, dass x[n] das Eingangssignal ist und y[n] das Ausgangssignal ist, ist diese Bedingung bei diesem System erfüllt und somit kann dieses System als kausal beschrieben werden.

Anzumerken ist, dass über ein System, welches nur durch eine Differenzengleichung gegeben ist, keine Aussage bezüglich der Kausalität gegeben werden kann, solange nicht definiert ist, was das Eingangs- und Ausgangsignal ist.

Wäre zum Beispiel bei diesem System y[n-1] das Ausgangssignal, so wäre das System nicht kausal, da y[n-1] von y[n] abhängig wäre.

2.)**Stabilität**: Ein System ist stabil, wenn der Einheitskreis im ROC liegt. Da Das vorliegende System kausal ist, ist das ROC das Gebiet, welches von Unendlich bis zum äußerstem Pol des Systems reicht.

Wie im Pol-Nullstellen Diagramm dargestellt ist, liegt der Einheitskreis im ROC, wodurch das System stabil ist.

3.) **Minimalphasigkeit**: Ein System ist minimalphasig, wenn alle Pole und Nullstellen im Einheitskreis liegen. Da das zu betrachtende System eine Nullstelle bei $z_{0,2} = -2j$ besitzt, ist dieses System nicht minimalphasig.

d) Ermittlung der Impulsantwort $h[n]$, Ermittlung eines Eingangssignals, durch welches y[n] rein reellwertig ist.

Da die z-Transformierte der Impulsantwort, H(z), nicht ausschließlich Pole und Nullstellen, welche konjugiert komplex auftreten, kann h[n] nicht rein reellwertig sein,
da ein rein reellwertiges Polynom ausschließlich rein reellwertige Nullstellen oder konjugiert komplexe Nullstellen hat.
Um ein rein reellwertiges Ausgangssignal y[n] zu ermitteln, muss zuerst ein Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal, der Übertragungsfunktion und dem Ausgangssignal gefunden werden. Es gilt:

$$Y(z) = X(z)H(Z),$$

wobei Y(z) und X(z) die z-Transformierten des Ausgangs- bzw Eingangssignals ist.
Die Übertragungsfunktion H(z) lautet:

$$H(z) = \frac{z(z+2j)(z-\frac{j}{2})}{(z-\frac{1}{\sqrt{2}})(z+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{j}{\sqrt{8}})(z+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{j}{\sqrt{8}})}$$

Wenn y[n] reellwertig sein soll, so muss Y(z) rein reellwertige Pole bzw. Nullstellen oder konjugiert komplexe Pole bzw. Nullstellen haben. Um dies sicherzustellen, muss die Multiplikation mit X(z) die Nullstellen bei $z_{0,2} = -2j$ und $z_{0,1} = \frac{j}{2}$ eliminieren.
Betrachtet man nun die beiden Nullstellen, welche die Probleme verursachen genauer, so fällt auf, dass:

$$(z+2j)(z-\frac{j}{2}) = z^2 + 2z\left(\frac{3j}{4}\right) + 1$$

gilt, was eine sehr starke Ähnlichkeit mit dem Zähler folgender Korrespondenz aus der Formelsammlung aufweist:

$$sin(\alpha n)u[n] \leftrightharpoons \frac{z \cdot sin(\alpha)}{z^2 + 2z \cdot cos(\alpha) + 1}, \quad \alpha_{\in}\mathbb{C}$$

Aufgrund dieser Korrespondenz setzen wir nun als Versuch eine Ähnlichkeit zu finden die beiden obrigen Formeln gleich, wobei vorerst nur der Nenner der gefundenen Korrespondenz von Interesse ist:

$$\begin{aligned} z^2 + 2z(\frac{3j}{4}) + 1 =& z^2 + 2z \cdot cos(\alpha) + 1 \\ \Rightarrow 2z \cdot cos(\alpha) =& 2z\left(\frac{3j}{4}\right) \\ cos(\alpha) =& \left(\frac{3j}{4}\right) \\ \alpha =& arccos\left(\frac{3j}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - j \cdot log(2) \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird sichergestellt, dass die beiden Nullstellen, welche nicht konjugiert komplex auftreten, sich mit dem Nenner des Eingangssignals kürzen und somit das entstehende Ausganssignal rein reellwertig wird.
Setzt man diesen Wert für α nun in die gefundene Korrespondenz ein erhält man:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= X(z)H(z) \\
&= \frac{z(z^2 + 2z\left(\frac{3j}{4}\right) + 1)}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{j}{\sqrt{8}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{j}{\sqrt{8}})} \cdot \frac{z \cdot sin(\frac{\pi}{2} - i \cdot log(2))}{z^2 + 2z \cdot cos(\frac{\pi}{2} - i \cdot log(2)) + 1} \\
&= \frac{z(z^2 + 2z\left(\frac{3j}{4}\right) + 1)}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{j}{\sqrt{8}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{j}{\sqrt{8}})} \cdot \frac{z \cdot \frac{5}{4}}{z^2 + 2z \cdot \left(\frac{3j}{4}\right) + 1} \\
&= \frac{z^2 \cdot \frac{5}{4}}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{j}{\sqrt{8}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{j}{\sqrt{8}})}
\end{aligned}
$$

Hier sieht man, dass das Signal Y(z) nun ausschließlich rein reellwertige oder konjugiert komplexe Pole und Nullstellen besitzt, woraus sich ergibt, dass y[n] rein reellwertig ist. Somit ist für das Eingangsignal

$$x[n] = sin\left((\frac{\pi}{2} - j \cdot log(2))n\right) u[n]$$

das Ausgangssignal y[n] rein reellwertig.

e) Ermittlung des Minimalphasensystem

Es ist ein Minimalphasensystem zu bestimmen, für welches gilt $|H(z)| = |H_m(z)|$ wobei $H(z) = H_a(z)H_m(z)$ ebenfalls gegeben sein muss.
Durch diese Vorraussetzungen ergibt sich, dass $|H_a(z)| = 1$ konstant für alle Frequenzen gelten muss, sowie dass $H_m(z)$ minimalphasig sein muss.
Hierbei geht es darum, dass sich ein System immer in einen Minimalphasigen Teil und einen Teil mit Allpasseigenschaft zerlegen lässt.
Allgemein werden dabei alle Pole und Nullstellen, welche die Minimalphasigkeit des Systems verhindern in den Allpassanteil geschrieben, wodurch der Minimalphasenteil die erforderliche Eigenschaft auch erfüllt. Dadurch wird jedoch der Betragsgang des Allpassanteils verändert. Deswegen müssen weitere Pole oder Nullstellen zum Allpassanteil hinzugefügt werden, um den Betragsfrequenzgang konstant zu halten.
Durch die Betrachtung von H(z) werden nun die Pole und Nullstellen ermittelt, welche die Eigenschaft der Minimalphasigkeit verhindern:

$$H(z) = \frac{z(z + 2j)(z - \frac{j}{2})}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{j}{\sqrt{8}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{j}{\sqrt{8}})}$$

Hier wird nun ersichtlich, dass, um H(z) auf ein $H_m(z)$ umzuformen, die Nullstelle bei $z_{0,2} = -2j$ aus dem Minimalphasenanteil eliminiert werden muss. Somit muss $H_a(z)$ folgende Form haben:

$$H_a(z) = A \cdot \frac{(z + 2j)}{f(z)}, \quad A_{\in}\mathbb{R}$$

Wobei f(z) sicherstellen muss, dass der Betrag von $H_a(z)$ konstant ist und der multiplikative Faktor A sicherstellen muss, dass der Betrag den Wert 1 hat. Das wird erfüllt, indem man f(z) so wählt, dass der Winkel von f(z) und dem Pol bei -2j derselbe ist, jedoch der Betrag reziprok ist:

$$z_\infty = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = |z_\infty| \cdot e^{j\cdot arg(z)}$$
$$z_0 = \frac{1}{|z_\infty|}e^{j\cdot arg(z)} = 0,5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Um sicherzustellen, dass der Betrag der neu gewonnenen Funktion konstant ist, wird dieser berechnet. Hier ist anzumerken, dass z durch $e^{j\Theta}$ ersetzt wird, um den Betrag einfacher zu berechen. Dies kommt der Berechnung des Betrags der DTFT gleich:

$$\begin{aligned}
|H_a(e^{j\Theta})| &= |A| \cdot |\frac{(e^{j\Theta} - 2e^{-j\frac{\pi}{2}})}{(e^{j\Theta} - 0,5e^{-j\frac{\pi}{2}})}| \\
&= |A| \cdot |e^{j\Theta}| \cdot |2e^{-j\frac{\pi}{2}}| \cdot |\frac{\frac{1}{2e^{-j\frac{\pi}{2}}} - e^{-j\Theta}}{(e^{j\Theta} - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})}| \\
&= |A| \cdot |e^{j\Theta}| \cdot |2e^{-j\frac{\pi}{2}}| \cdot |\frac{-(e^{-j\Theta} - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}})}{(e^{j\Theta} - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})}| \\
&= |A| \cdot |e^{j\Theta}| \cdot |2e^{-j\frac{\pi}{2}}| \cdot |\frac{-c}{c^*}|,
\end{aligned}$$

wobei c eine komplexe Zahl darstellt. Diese Schreibweise wird verwendet, um den Betrag des letzten Termes klarer darzustellen und zu verdeutlichen, dass eine komplexe Zahl durch ihre konjugiert komplexe Zahl dividiert wird.. Durch diese Umformungen wird nun ersichtlich, dass der Betrag von $H_a(z)$ gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}
|H_a(e^{j\Theta})| &= |A| \cdot |e^{j\Theta}| \cdot |2e^{-j\frac{\pi}{2}}| \cdot |\frac{-c}{c^*}| \\
&= |A| \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Setzt man nun für $|H_a(z)| = 1$ein, kann der Faktor A berechnet werden:

$$\begin{aligned}
1 &= |A| \cdot 2 \\
|A| &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit ist das System gegeben durch:

$$\begin{aligned}
H(z) &= H_a(z)H_m(z) \\
&= \frac{z(z - \frac{j}{2})(z + 0,5j)}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{j}{\sqrt{8}})(z + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{j}{\sqrt{8}})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(z + 2j)}{(z + 0,5j)}
\end{aligned}$$

Der Term (z+0,5j) muss im Zähler von $H_m(z)$ ergänzt werden, um die Übertragungsfunktion nicht zu verfälschen. Hier ist nun klar zu sehen, dass alle Pole und Nullstellen von $H_m(z)$ im Einheitskreis liegen und es gelten die in der Angabe gegebenen Gleichungen.
Die Impulsantwort ist jeodch nicht rein reellwertig, da H(z) wieder Nullstellen aufweist, welche nicht konjugiert komplex auftreten.

f) Serienschaltung von 2 Systemen, Berechnung von c

Es wird nun ein System $H_2(z) = c, \quad c_{\in}\mathbb{C}$ in Serie zum bestehenden System geschalten, wobei es sich bei c um eine Konstante handelt. $H_2(z)$ ist so zu wählen, dass $H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0} = 1$ gilt, wobei $H_3(z) = H(z)H_2(z)$ ebenfalls gegeben ist.
Zuerst wird nun $H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0}$ berechnet:

$$\begin{aligned}
H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0} &= H_3(1) = H_2(1)H(1) \\
&= \frac{(1-\frac{j}{2})(1+\frac{j}{2})}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{j}{\sqrt{8}})(1+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{j}{\sqrt{8}})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2j)}{(1+\frac{j}{2})} \cdot c \\
&= \frac{(1-\frac{j}{2})(1+2j)}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{j}{\sqrt{8}})(1+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{j}{\sqrt{8}})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\frac{3j}{2}}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}})} \cdot c \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\frac{3j}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 4}} \cdot c = \frac{c}{2} \cdot (3,49+2,62j) \\
H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0} &= \frac{c}{2} \cdot (3,49+2,62j)
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann nun c berechnet werden:

$$\begin{aligned}
H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0} &= \frac{c}{2} \cdot (3,49+2,62j) = 1 \\
c &= \frac{2}{(3,49+2,62j)} = 0,367 - 0,275j
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich nun $H_3(e^{j\Theta})|_{\Theta=0} = 1$. Auffällig ist hier, dass sowohl $H_3(z)$ sowie $H(z)$ dasselbe Pol-Nullstellen Diagramm besitzen. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass aus dem Pol-Nullstellen Diagramm nur die Lage der Pole und Nullstellen ausgelesen werden können. Multiplikative Faktoren, wie zum Beispiel c, welche nichts an der Lage der Pole und Nullstellen verändern, sind in diesem Diagramm nicht enthalten. Somit ist klar, dass eine Übertragungsfunktion nie eindeutig aus dem Pol-Nullstellen Diagramm ausgelesen werden kann, da genau diese Faktoren nicht berücksichtigt werden, was auf die Übertragungsfunktion jedoch erheblichen Einfluss haben kann.