Analytische Aufgabe 4.1

Gegeben ist ein Signal $x_c(t)$ und die Information, dass dieses Signal Frequenzanteile von 0 bis 1000 Hz besitzt. Weiters ist bekannt, dass das Signal bei der Frequenz $f_s = 300\,Hz$ eine Störung beinhaltet und diese Frequenz somit mit einem Filter zu eliminieren ist. Um dies zu tun, wird ein Filter mit jeweils 2 Polstellen und Nullstellen verwendet, dessen Übertragungsfunktion wie folgt aussieht:

$$H(z) = A \cdot \frac{(z - e^{j\Theta_0}) \cdot (z - e^{-j\Theta_0})}{(z - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (z - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})},\ r_p \in \mathbb{R}$$

Hier ist ersichtlich, dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion am Einheitskreis mit dem Winkel $\pm\Theta_0$liegen und die Polstellen den selben Winkel wie die Nullstelen haben, jedoch im Abstand r zum Ursprung stehen.
A ist wiederum ein multiplikativer Faktor. Da keine Information über eventuelle multiplikative Faktoren bekannt ist, wird dieser solange mit A bezeichnet. Dieser hat keinen Einfluss auf die Lage der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion, jedoch spielt er für den Betragsfrequenzgang eine wesentliche Rolle.
Weiters wird das Signal $x_c(t)$ mit einem Oszilloskop und einer Frequenz $f_{sample} = 2000\,Hz$ abgetastet.

(a)

Es ist Θ_0 zu berechnen, um die Störfrequenz bei 300 Hz zu unterdrücken.
Um dies zu bewerkstellen, muss ein Zusammenhang zwischen dem zeitkontinuierlichen Signal $x_c(t)$ und dem zeitdiskreten Signal $x[n]$gefunden werden. Genau das gibt die Bilineartransformation an, welche wie folgt lautet:

$$\omega = \frac{2}{T_D} \cdot \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

wobei $T_D$die Diskretisierungszeit ist, ωdie Kreisfrequenz und Θaus dem Argument der DTFT kommt. Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz im zeitkontinuierlichen und dem Winkel Θder DTFT. Nun kann durch Umformen der Gleichung und den Zusammenhängen $f = \frac{1}{T}$ und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ der Winkel $\Theta_0$zu berechnen, welcher im zeitkontinuierlichen 300 Hz entspricht:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2}{T_D} \cdot \tan\left(\frac{\Theta_0}{2}\right) \\
2 \cdot \pi \cdot f_s &= \frac{2}{T_D} \cdot \tan\left(\frac{\Theta_0}{2}\right) \\
T_D \cdot \pi \cdot 300 &= \tan\left(\frac{\Theta_0}{2}\right) \\
2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2000\,Hz} \cdot \pi \cdot 300\,Hz\right) &= \Theta_0 \\
\Theta_0 &= 0,88\,rad
\end{aligned}$$

Hier gilt $T_D = \frac{1}{f_{sample}}$, da die Diskretisierungszeit dem Kehrwert der Abtastfrequenz entspricht.
Nun muss der Winkel $\Theta_0$nur mehr von Radiant in Grad umgewandelt werden:

$$\Theta_0\,(^\circ) = \frac{\Theta_0\,(rad) \cdot 180}{\pi}$$

$$\Theta_0\,(^\circ) = \frac{0,88 \cdot 180}{\pi} = 50,42^\circ$$

Somit ist klar, dass um die Störfrequenz bei 300 Hz zu unterdrücken, die Nullstellen der Übertragungsfunktion bei $e^{\pm j50,42^{\circ}}$liegen müssen, da dort die Übertragungsfunktion gegen Null geht , somit das Ausgangssignal bei dieser Frequenz gegen Null geht und dadurch die Störfrequenz eliminiert wird.

(b)

Das Pol-Nullstellen Diagramm für H(z) ist für die Fälle i) $r_p = 0.01$und ii) $r_p = 0.99$ zu zeichnen.

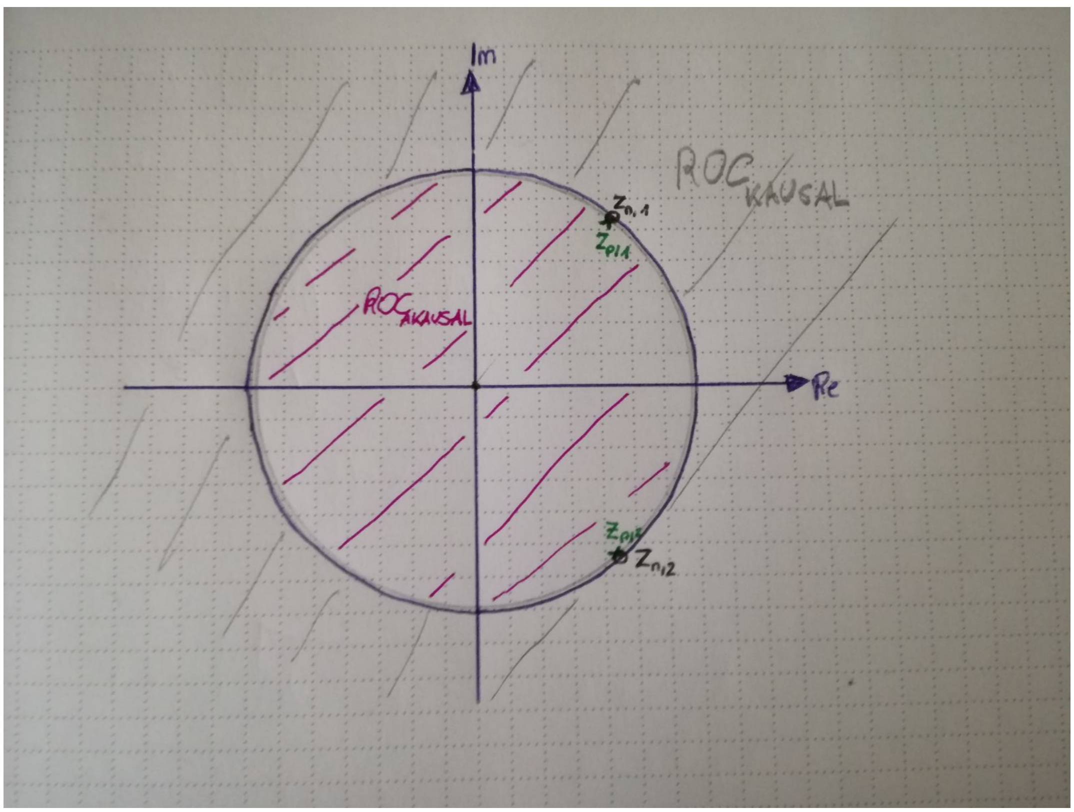

Figure 1: Das Pol-Nullstellen Diagramm für den Fall ii) $r_p = 0,99$

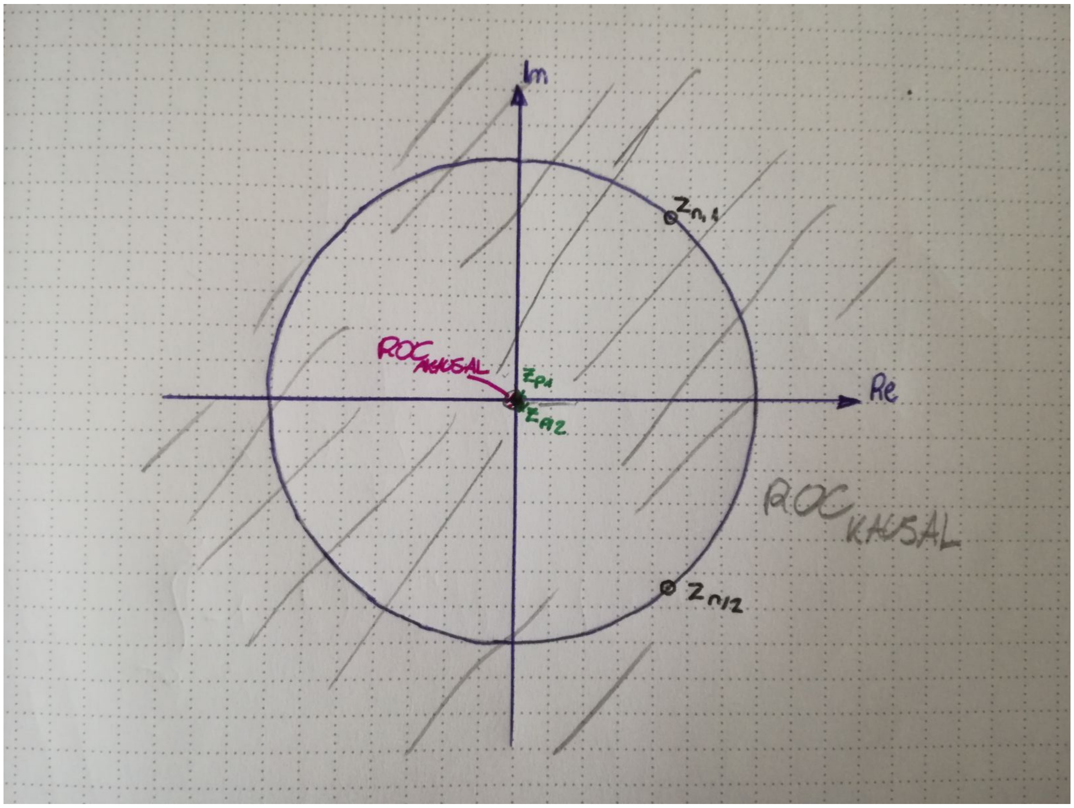

Figure 2: Das Pol-Nullstellen Diagramm für den Fall i) $r_p = 0,01$

(c)

Die Übertragungsfunktion des Systems in Abhängigkeit von$\Theta_0$und $r_p$ist gesucht. Hierzu muss die allgemeine Form einer Übertragungsfunktion bekannt sein:

$$F(z) = X \cdot \frac{(z - z_{n,1}) \cdot (z - z_{n,2}) \cdot .... \cdot (\text{z-}z_{n,N})}{(z - z_{p,1}) \cdot (z - z_{p,2}) \cdot .... \cdot (\text{z-}z_{p,M})}$$

wobei X ein multiplikativer Faktor ist, welcher keinen Einfluss auf die Lage der Pole und Nullstellen hat, jedoch für den Betragsfrequezgang wichtig ist, $z_{n,1}, ..., z_{n,N}$ die Nullstellen der Übertragungsfunktion sind und $z_{p,1}, ..., z_{p,M}$ die Polstellen der Übertragungsfunktion sind. Weiters ist es wichtig anzumerken, dass die Pole und Nullstellen komplexe Werte sind, welche durch Betrag und Winkel sowie als komplexe Zahlen dargestellt werden können, wobei folgende Zusammenhänge gelten:

$$z = a + jb$$
$$z = |z| \cdot e^{jarg(z)}$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$arg(z) = arctan(\frac{b}{a})$$

wobei arg(z) der Phasenwinkel der komplexen Zahl z ist.
Mithilfe dieser Grundlagen und der Informationen über die Pole und Nullstellen kann nun die Übertragungsfunktion aufgestellt werden:

$$H(z) = A \cdot \frac{(z - e^{j\Theta_0}) \cdot (z - e^{-j\Theta_0})}{(z - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (z - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})},\ r_p \in \mathbb{R}$$

Zusätzlich soll der Filter die Bedingung $H(z)\mid_{z=1} = 1$ erfüllen. Hierfür wird nun der Faktor A benötigt. Zuerst ist der Wert von H(z) ohne Berücksichtigung von A an der Stelle z = 1 auszurechnen. Wenn nun A der Kehrwert dieses Werte ist, ergibt sich H(z) an der Stelle z = 1 als 1. Der Beweis ergibt sich wie folgt:

$$H(z)\mid_{z=1} = A \cdot \frac{(1 - e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - e^{-j\Theta_0})}{(1 - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})}$$
$$A = \frac{(1 - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})}{(1 - e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - e^{-j\Theta_0})} \ \Rightarrow$$
$$H(z)\mid_{z=1} = \frac{(1 - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})}{(1 - e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - e^{-j\Theta_0})} \cdot \frac{(1 - e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - e^{-j\Theta_0})}{(1 - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})} = 1$$

Da sich die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion mit den Polen und Nullstellen von A kürzen, ergibt sich $H(z)\mid_{z=1} = 1$. Nun muss nur noch A berechnet werden

$$A = \frac{(1 - r_p \cdot e^{j\Theta_0}) \cdot (1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0})}{(1 - e^{j50,42}) \cdot (1 - e^{-j50,42})}$$
$$A = \frac{1 - r_p \cdot e^{-j\Theta_0} - r_p \cdot e^{j\Theta_0} + r_p^2 \cdot e^{j\Theta_0 - j\Theta_0}}{1 - e^{-j\Theta_0} - e^{j\Theta_0} - e^{j\Theta_0 - j\Theta_0}}$$
$$A = \frac{1 - r_p \cdot (e^{-j\Theta_0} + e^{j\Theta_0}) - r_p^2}{1 - (e^{-j\Theta_0} - e^{j\Theta_0}) + 1}$$

Durch Anwendung der Beziehung $cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ vereinfacht sich die obrige Formel nun auf folgenden Ausdruck:

$$A = \frac{1 - r_p \cdot 2 \cdot cos(\Theta_0) - r_p^2}{2 - 2 \cdot cos(\Theta_0)}$$

Wenn nun A dieser Faktor ist, ergibt sich wie gefordert $H(z)\mid_{z=1} = 1$. Wichtig anzumerken ist, dass dieser Term keine zusätzlichen Pole oder Nullstellen hinzufügt, da die Cosinus-Terme konstante Zahlenwerte abhängig von Θ_0 sind und nicht der Verlauf der Cosinus-Funktion des Winkels Θsind.

(e)

Es ist zu bestimmen, für welchen Wertebereich für r_p H(z) kausal und stabil ist.
Wie in den Pol-Nullstellen Diagrammen in Punkt b zu sehen ist, geht das ROC falls H(z) kausal ist von $+\infty$bis zum Radius der äußersten Polstellen. Falls H(z) akausal ist, geht das ROC vom Nullpunkt bis zum Radius der innersten Polstellen. Da beide Polstellen den Radius r_p besitzen, hängt die Lage des ROC ausschließlich von diesem Radius ab. Weiters ist zu berücksichtigen, dass ein System stabil ist, wenn der Einheitskreis im ROC liegt.Somit ist das kausale System stabil für alle $r_p < 1$ und das akausale System stabil für alle $r_p > 1$. Hier ist wiederum auffällig, dass für $r_p = 1$ keines der beiden Systeme stabil ist, da die Polstelle somit am Einheitskreis liegt und unabhängig der Kausalität der Einheitskreis nicht im ROC liegt