
Analytisch 3.2 (10 (+ 2) Punkte)

Die folgende Differenzengleichung beschreibt das System $h[n]$, wobei $y[n]$ das Ausgangssignal des Systems ist und $x[n]$ das Eingangssignal.

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] \quad (1)$$

Die Filterkoeffizienten sind wie folgt definiert

- $a_1 = 0$
- $a_2 = -\frac{1}{4}$
- $a_3 = -\frac{1}{\sqrt{32}}$
- $b_0 = 1$
- $b_1 = 2e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $b_2 = -e^{j\pi}$

(a) [1 Punkt(e)] Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

(b) [2 Punkt(e)] Unter der Bedingung, dass ein Pol gegeben ist mit $z_{\infty,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ermitteln Sie alle Nullstellen und Polstellen des Systems.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision zur Bestimmung der Pole. Um die Nullstellen zu ermitteln bietet es sich an die z -Transformation erst allgemein, für beliebige Nullstellen $\{z_{0,1}, z_{0,2}, z_{0,3}\}$ auszudrücken und in weiterer Folge einen Koeffizientenvergleich mit der spezifischen Lösung für die Koeffizienten $\{b_1, b_2, b_3\}$ durchzuführen. Es ist kein explizites Lösen der quadratischen Gleichung erforderlich.

(c) [2 Punkt(e)] Zeichnen Sie das zugehörige Pol-Nullstellen Diagramm und bestimmen Sie den ROC. Untersuchen Sie das System auf

1. Kausalität,
2. Stabilität,
3. Minimalphasigkeit.

(d) [2 Punkt(e)] Ist die Impulsantwort $h[n]$ reellwertig? Finden Sie zumindest ein Eingangssignal $x[n]$, für welches das Ausgangssignal $y[n]$ rein reellwertig (i.e. $y[n] \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}$) ist.

(e) [2 Punkt(e)] Bestimmen Sie das Minimalphasensystem für das gilt $|H_m(z)| = |H(z)|$ und den Allpass $H_a(z)$ unter der Bedingung $H(z) = H_a(z)H_m(z)$. Ist die Impulsantwort $h_m[n]$ reellwertig?

(f) [1 Punkt(e)] Sie schalten nun ein System $H_2(z) = c$ in Serie zu System $H(z)$, wobei es sich bei c um eine Konstante handelt. Wählen Sie $H_2(z)$ so, dass für das Gesamtsystem $H_3(z) = H(z)H_2(z)$ gilt

$$H_3(e^{j\theta})|_{\theta=0} = 1$$

Worin unterscheiden sich die Pol-Nullstellen Diagramme von $H(z)$ und $H_3(z)$? Können Sie die Übertragungsfunktion eindeutig aus einem Pol-Nullstellendiagramm ablesen?

(g) [2 (Bonus) Punkt(e)] Sie legen nun das Eingangssignal $x[n] = \cos(2\pi n)$ an $h_3[n]$ an. Bestimmen Sie das Ausgangssignal $\tilde{y}[n] = (x * h_3)[n]$.