

MAT 1748 – Hiver 2023

Devoir 3

Professeur: Antoine Poirier

Date limite: 6 avril, 23h30

*Les devoirs doivent être soumis via [Brightspace](#). Aucun devoir ne sera accepté après la date limite. Alors, assurez-vous de soumettre votre devoir bien avant l'heure limite. Les devoirs doivent être soumis en **un seul fichier pdf**. Ils peuvent être rédigés à l'ordinateur, ou écrits à la main et ensuite numérisés. Si vous écrivez vos devoirs à la main, assurez-vous que l'écriture est lisible et que la numérisation soit d'assez bonne qualité pour que le correcteur puisse lire. Assurez-vous que les pages de votre fichier pdf sont bien ordonnées et orientées.*

QUESTION 1 (5 pts). Soit $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Trouvez le nombre de fonctions injectives $f : S \rightarrow T$ telles que $f(1) \neq a$ et $f(2) \neq b$. Justifiez votre réponse.

QUESTION 2 (5 pts). Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on définit le produit $S(n)$ comme suit:

$$S(n) = \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

Utilisez le principe d'induction pour démontrer que $S(n) < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geq 2$.

QUESTION 3 (12 pts). Justifiez brièvement vos réponses aux questions suivantes. Indiquez clairement votre réponse finale.

- (a) Combien de comités de 6 personnes provenant d'un groupe de 10 hommes et de 12 femmes contiennent plus de femmes que d'hommes?
- (b) Quel est le plus petit nombre d'étudiants dans une classe qui garantit qu'au moins 7 de ces étudiants fêtent leur anniversaire durant le même mois?
- (c) Combien de nombres, au minimum, devons-nous choisir au hasard parmi les éléments de l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ afin d'être certain que nous avons choisi deux nombres dont leur somme est 20?
- (d) Soit $A = \{a, a, b, \{a, b\}\}$ et $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Quelle est la cardinalité de $P(A \times B)$?
- (e) Quel est le coefficient de x^{-6} dans $(3x - 4x^{-2})^9$?
- (f) Supposons qu'un graphe G a 14 sommets et 28 arêtes. Supposons aussi que tous les sommets de G ont un degré égal à 0, 3 ou 7. Si G a exactement 7 sommets de degré 3, combien a-t-il de sommets isolés?
- (g) Est-ce qu'il existe un graphe (potentiellement un multigraphe) dont la séquence des degrés est 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5?