Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 6

Thema: **Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen**

Numerische Integration des Anfangswertproblems

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0}$$

Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Modells zu einem zeitdiskreten Modell mit

- explizitem Verfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \ldots, t_n)}$ vs. implizitem Verfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})}$
- Einschrittverfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_n)}$ vs. Mehrschrittverfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \ldots, t_n)}$
- Schrittweite $\boxed{h = t_{n+1} - t_n}$

Integrationsverfahren

- Euler explizit $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}_n + \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)h}$ vs. implizit $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}_n + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})h}$
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren

  1. Verfahren von Heun (2. Ordnung)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n^{(1)} &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) \\ \mathbf{k}_n^{(2)} &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(1)}, t_n + h) \\ \Longrightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\left(\mathbf{k}_n^{(1)} + \mathbf{k}_n^{(2)}\right) \end{aligned}$$

  2. Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n^{(1)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n, t_n\right) \\ \mathbf{k}_n^{(2)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(1)}/2, t_n + h/2\right) \\ \mathbf{k}_n^{(3)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(2)}/2, t_n + h/2\right) \\ \mathbf{k}_n^{(4)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(3)}, t_n + h\right) \\ \Longrightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{6}\left(\mathbf{k}_n^{(1)} + 2\mathbf{k}_n^{(2)} + 2\mathbf{k}_n^{(3)} + \mathbf{k}_n^{(4)}\right) \end{aligned}$$

Fehleranalyse und Schrittweitensteuerung

- lokaler Disrektisierungsfehler $l(h)$: Differenz zwischen exaktem und genähertem Differenzenquotienten
- globaler Diskretisierungsfehler $e(h)$: max. Fehler zwischen exakter Lösung und Näherung nach n Schritten
- Optimale Schrittweite mit vorgegebenem Fehler δ: $\boxed{h_{opt} = \left(\frac{2^p-1}{2^p}\frac{\delta}{\mathbf{x}_{n+1}-\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}}\right)^{\frac{1}{p}} h}$ mit Ordnung p (Euler $p = 1$, Heun $p = 2$, Runge-Kutta $p = 4$)

Aufgabe 1 – zu bearbeiten –

Matlabfile: MathPendel_Bearbeitungsfile.m

Für ein mathematisches Pendel lässt sich die Bewegungsgleichung

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin(\varphi) = 0$$

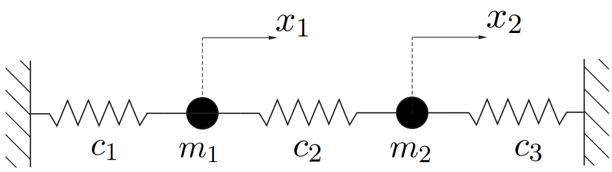
herleiten. Die Lösung der Gleichung soll mit verschiedenen Integrationsverfahren gefunden werden. Folgende Parameter sind dabei gegeben:

$$\begin{aligned} l &= 20\ [\mathrm{cm}] \\ g &= 9,81\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{6} \\ \dot{\varphi}_0 &= 0\ \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] \\ t_0 &= 0\ [\mathrm{s}] \\ n_{max} &= 10^4\ \ \text{(Anzahl der Diskretisierungsschritte)} \end{aligned}$$

1. Das Pendel soll im Folgenden für kleine Winkelauslenkungen ($\varphi \ll 1$) betrachtet werden. Linearisieren Sie dementsprechend. Überlegen Sie sich einen passenden Zustandsvektor.
2. Berechnen Sie die exakte Lösung des linearisierten Systems analytisch.
3. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung mit dem expliziten Eulerverfahren.
4. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung mit dem impliziten Eulerverfahren.
5. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung mit dem Runga-Kutta-Verfahren.
6. Berechnen Sie den lokalen Diskretisierungsfehler $l(h)$ und den globalen Diskretisierungsfehler $e(h)$ für alle drei Integrationsverfahren.
7. Zeigen Sie den zeitlichen Verlauf von $\varphi(t)$ bzw. $\dot{\varphi}(t)$ für alle drei Integrationsverfahren sowie für die exakte Lösung graphisch auf. Passen Sie die Zeitschrittweite h so an, dass alle drei Integrationsverfahren stabil sind.
   Hinweise: Achten Sie darauf, dass die Zeitschrittweite nicht unnötig klein gewählt wird, um Rechenzeit einzusparen.
8. Stellen Sie den lokalen und globalen Diskretisierungsfehler ebenfalls graphisch da.

Aufgabe 2 – freiwillig –

Matlabfile: Schwingerkette_Bearbeitungsfile.m



Es wird eine Schwingerkette betrachtet (siehe Abbildung). Dazu werden zwei Massen m_1 und m_2 mit drei seriell angeordneten Federn verbunden. Die Federenden von der ersten und dritten Feder sind dabei fest mit der Umgebung verbunden. Die Koordinate x_n beschreibt die Auslenkung der Masse m_n mit $n = 1, 2$. Für $x_n = 0$ sind die Federn ungedehnt und das System befindet sich im statischen Gleichgewicht.
Parameterwerte:

$$m_1 = m_2 = 0,5 \text{ [kg]}$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = 500 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$$
$$n_{max} = 10^4$$

1. Schneiden Sie das System frei und stellen Sie die Bewegungsgleichungen nach dem Prinzip von d'Alembert auf. Überführen Sie die Bewegungsgleichungen in ein Gleichungssystem erster Ordnung.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems. Interpretieren Sie mit diesen Werten die auftretenden Eigenschwingungsformen.
3. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf mit Hilfe des Verfahren von Heun. Benutzen Sie die Anfangsbedingungen $t_0 = 0$ [s], $x_{1,0} = 0.01$ [m], $x_{2,0} = 0.01$ [m] und $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.
4. Stellen Sie graphisch dar, wie die Eigenfrequenzen sich ändern, wenn alle Federsteifigkeiten um den gleichen Wert gesteigert werden. Erklären Sie, warum zwei Eigenfrequenzen auftreten.
   Hinweis: Für die Berechnung der Eigenfrequenzen müssen Sie den Betrag des Ergebnisse von *eig(x)* benutzen.
5. Stellen Sie das Schwingersystem in *Simulink* auf. Lassen Sie sich den zeitlichen Verlauf der Massen m_1 und m_2 einzeln ausgeben. Überprüfen Sie damit die Richtigkeit mit den durch das Verfahren von Heun berechneten Verläufen.