Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 11

Thema: **Numerische Lösungsverfahren für partielle DGLen: Finite-Elemente-Methode**

Ausgangspunkt: Variationsprinzip

$$\delta\Pi = 0$$

Diskretisierung des Verschiebungsfeldes:

$$\begin{aligned} u_i^{approx}(x,y,z) &= \mathbf{N}_i(x,y,z)\mathbf{u}_i \\ \mathbf{N}_i(x,y,z) &:= \text{Interpolationsmatrix} \\ \mathbf{u}_i &:= \text{Knotenverschiebungen} \end{aligned}$$

Diskretisierung der Verzerrungs- und Spannungsfelder (kleine Verzerrungen, lineare Elastizität):

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{2}\left(\nabla u_i^{approx} + (\nabla u_i^{approx})^T\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{N}_i\mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{N}_i\mathbf{u}_i)^T\right) := \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i \\ \sigma_i &= \mathbf{C}_i\varepsilon_i = \mathbf{C}_i\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i \end{aligned}$$

Berechnung der Elementsteifigkeit:

$$\mathbf{K}_i = \int\limits_V \mathbf{B}_i^T\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i \mathrm{d}V$$

Überführung der Elementsteifigkeiten $\mathbf{K_i}$ (lokale KOS!) in Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K_{Ges}}$ (globales KOS!).
Systemgleichung für den Sonderfall der Statik:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_a} \\ \mathbf{f_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K^{11}_{Ges}} & \mathbf{K^{12}_{Ges}} \\ \mathbf{K^{21}_{Ges}} & \mathbf{K^{22}_{Ges}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u_a} \\ \mathbf{u_b} \end{pmatrix} = \mathbf{K_{Ges}}\mathbf{u}$$

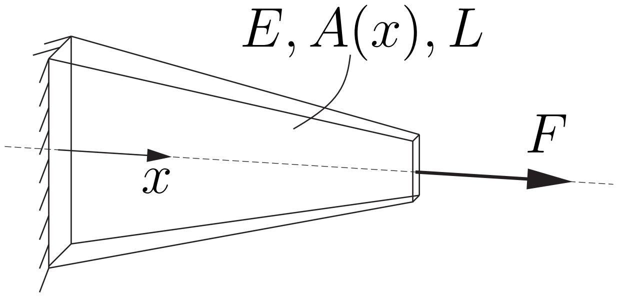
$$\begin{aligned} \mathbf{u_a} &:= \text{bekannte Verschiebungsrandbedingungen} \\ \mathbf{f_a} &:= \text{unbekannte Reaktionskräfte} \\ \mathbf{u_b} &:= \text{unbekannte Verschiebungen} \\ \mathbf{f_b} &:= \text{bekannte angreifende äußere Kräfte} \end{aligned}$$

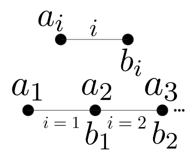
Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbf{K^{22}_{Ges}}\mathbf{u_b} &= \left(\mathbf{f_b} - \mathbf{K^{21}_{Ges}}\mathbf{u_a}\right) \\ \mathbf{f_a} &= \mathbf{K^{11}_{Ges}}\mathbf{u_a} + \mathbf{K^{12}_{Ges}}\mathbf{u_b} \end{aligned}$$

Aufgabe 1 – zu bearbeiten –

Matlabfile: fem_Bearbeitungsfile.m





Gegeben ist ein einseitig eingespannter Stab mit konisch zulaufendem rechteckigen Querschnitt (Abbildung links). Folgende Daten sind gegeben:

$$\begin{aligned} F &= 20000 \text{ [N]} \\ E &= 70 \text{ [GPa]} \\ L &= 100 \text{ [cm]} \\ A(x) &= (10 - 0.09x) \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

1. Stellen Sie mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$ und unter der Annahme kleiner Dehnungen eine systembeschreibende Differentialgleichung für $u(x)$ in Abhängigkeit der gegebenen Parameter auf. Benennen Sie außerdem alle benötigten Randbedingungen.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines geeigneten MATLAB-Solvers.
3. Das Tragwerk soll mit linearen Elementen erster Ordnung mit den Knoten a_i und b_i diskretisiert werden (Abbildung rechts). Der Knoten a_i bzw. b_i wird um $u_i^{a_i}$ bzw. $u_i^{b_i}$ verschoben. Stellen Sie einen geeigneten Ansatz für die Verschiebung $u_i(x)$ für das i-te Element auf. Bestimmen Sie die Interpolationsmatrix $\mathbf{N}(x)$, so dass sich $u_i(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}$ ergibt. Die Gesamtanzahl der Elemente M ist frei wählbar.
   Desweiteren muss die Flächenfunktion $A(x)$ diskretisiert werden. Berechnen Sie für jedes Element eine gemittelte Fläche mit Hilfe der Endpunkte $A_i = \frac{A_{i,a_i} + A_{i,b_i}}{2}$.
4. Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{B}(x)$ und $\mathbf{D}$, die sich aus der diskretisierten Dehnung $\varepsilon_i(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}$, bzw. der Spannung $\sigma_i(x) = \mathbf{D}\mathbf{B}(x)\mathbf{u}$ für das i-te Element ergeben.
5. Stellen Sie die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_i = \int_0^{V_i} \mathbf{B}^T(x)\mathbf{D}\mathbf{B}(x)\,\mathrm{d}V$ für das i-te Element auf.
6. Stellen Sie die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{Ges} = \begin{pmatrix} \mathbf{K_1^{a_1a_1}} & \mathbf{K_1^{a_1b_1}} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{K_1^{b_1a_1}} & \mathbf{K_1^{b_1b_1}} + \mathbf{K_2^{a_2a_2}} & \mathbf{K_2^{a_2b_2}} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K_2^{b_2a_2}} & \mathbf{K_2^{b_2b_2}} + \mathbf{K_3^{a_3a_3}} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & \mathbf{K_M^{b_Mb_M}} \end{pmatrix}$$

   mit $\mathbf{K_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{K_i^{a_ia_i}} & \mathbf{K_i^{a_ib_i}} \\ \mathbf{K_i^{b_ia_i}} & \mathbf{K_i^{b_ib_i}} \end{pmatrix}$ für $i = 1..M$ Elemente auf.
7. Bestimmen Sie für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_a} & \mathbf{u_b} \end{pmatrix}^T$ und Kraftvektor $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_a} & \mathbf{f_b} \end{pmatrix}^T$ die Teilvektoren $\mathbf{u_a}$ und $\mathbf{f_b}$, wobei $\mathbf{u_a}$ die bekannten Verschiebungsrandbedingungen, $\mathbf{f_a}$ die dazugehörigen unbekannten Reaktionskräfte, $\mathbf{u_b}$ die unbekannten Verschiebungen und $\mathbf{f_b}$ die bekannten angreifenden äußeren Kräfte beinhaltet.

8. Berechnen Sie die unbekannten Vektoren $\mathbf{u_b}$ und $\mathbf{f_a}$. Wie groß ist die Verschiebung $u(x = L)$? Stellen Sie schließlich die Verschiebungen und den Spannungsverlauf für die exakte Lösung (Teilaufgabe 2) und für die FEM-Lösung über die Länge des Stabes graphisch dar.
   Passen Sie die Elementanzahl M für die FEM so an, dass Ihre FEM-Lösung mit der exakten Lösung gut übereinstimmt.
   Hinweis: Nutzen Sie zur Darstellung der Spannung den *Matlab*-Befehl *stairs()* an Stelle von *plot()*.