Modellbildung und Simulation, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 10

Thema: **Modelle mit verteilten Parametern - Strömungssimulation mittels FDM**

Ansprechpartner: Balazs Pritz (pritz@kit.edu), Fachgebiet Strömungsmaschinen

Einführung

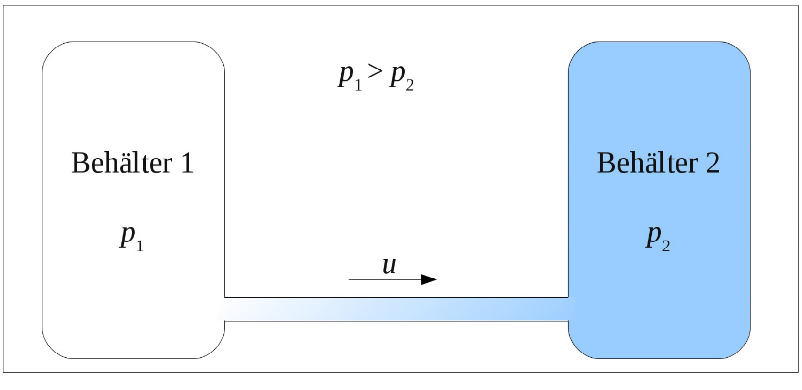
In dieser Übung werden die Studenten kennenlernen, wie die Ableitungen in den Modellgleichungen für den Rechner verständlich gemacht werden. Die Modellgleichungen werden hier mit der Finiten Differenzen Methode (FDM) diskretisiert. Im ersten Schritt müssen die vorbereiteten Matlab-Codes durch die Ableitungen, die in der Vorlesung und in der Saalübung hergeleitet wurden, ergänzt werden. Im zweiten Schritt müssen die Studenten durch die Variation von Parametern testen, wie die Genauigkeit und Stabilität des Verfahrens von der räumlichen und der zeitlichen Diskretisierung abhängt. Dies wird in der ersten Aufgabe bei einem eindimensionalen Testfall schnell durchführbar. Die zweite Aufgabe demonstriert, wie schnell der Aufwand steigt, wenn das Modell von 1D auf 2D erweitert wird. Einerseits wird der Code länger, anderseits steigt die Rechenzeit viel stärker, wenn die Auflösung verfeinert wird. Die Aufgaben bieten die Möglichkeit Erfahrung zu sammeln, wie ein Modell schnell implementiert werden kann, und wie viele Parameter die Lösung beeinflussen können.

Aufgabe 1

1D Testfall: Konvektions-Diffusionsgleichung

Sie müssen in dieser Aufgabe die Stabilitätsgrenzen von Upwind-Schema (UDS) und Zentral-Differenzen-Schema (CDS) untersuchen. Damit die Qualität der Lösung einfach überprüft werden kann, wurde ein Testfall ausgewählt, bei dem die exakte Lösung analytisch hergeleitet werden kann. Ziel ist es, die Rechenzeit niedrieg zu halten und möglichst gute Ergebnisse zu produzieren.

Es wird eine eindimensionale Strömung untersucht, in der eine Konvektion (u) in positiver x-Richtung stattfindet und ein Stoff in der Strömung eine Konzentration $\phi = 1$ an der Stelle $x = 1$ und eine Konzentration $\phi = 0$ an der Stelle $x = 0$ aufweist (Dirichlet Randbedingungen für ϕ). Die Situation kann in der Realität vorkommen, wenn zwei Behälter durch ein Rohr verbunden sind. Sei der Druck in Behälter 1 größer als in Behälter 2, dann strömt die Flüssigkeit von Behälter 1 in den Behälter 2. Wurde ein Stoff in Behälter 2 zur Flüssigkeit beigemischt, dann hat dieser eine gewisse Konzentration während in Behälter 1 die Konzentration näherungsweise 0 ist. Durch Diffusion wird dieser Stoff in Richtung des Behälters 1 transportiert.



Beispielweise könnte die technische Aufgabe sein, dass der Durchmesser des Verbindungsrohrs und die Drücke in den Behältern (und damit die Geschwindigkeit im Rohr) so ausgelegt werden sollen, dass kein Stoff vom Behälter 2 in den Behälter 1 gelangt. Man muss aber dabei beachten, dass der Massenstrom im Rohr nicht zu hoch werden sollte, damit nicht zu viel Flüssigkeit vom Behälter 1 in den Behälter 2 fließt.
Die Verteilung der Konzentration des Stoffes im Rohr kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) . \tag{1}$$

Das Problem hat die exakte Lösung:

$$\phi = \frac{e^{xPe} - 1}{e^{Pe} - 1} . \tag{2}$$

Hier ist Pe die Peclet-Zahl, die das Verhältnis zwischen konvektiven und diffusiven Kräften beschreibt:

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma} , \tag{3}$$

wobei Γ der Diffusionskoeffizient ist. In dieser Aufgabe ist $L = 1m$.

1. Setzen Sie in die Funktion ***MuS_ FDM_ 1d.m*** die räumlichen Ableitungen ein:
   - die 1. Ableitung mit rückwärts (UDS - steht für upwind, aber weil die Konvektionsrichtung hier vorgeschrieben ist, wird nur die rückwärts Variante benutzt) und zentralem (CDS) Differenzen Schema! Benutzen Sie dafür die Variablen *phi_ uds* und *phi_ cds*!
   - die 2. Ableitung mit zentralem Differenzen Schema. Weil die Lösungen für die ϕ Werte mit UDS und CDS unterschiedlich sind, muss die selbe Formulierung sowohl für *phi_ uds* als auch für *phi_ cds* angegeben werden.

2. Die Lösung wird iterativ gesucht. Es wird der Zeitterm zu der oben angegebenen Gleichung addiert, welcher sich im auskonvergierten Zustand dem Nullwert annähert:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) . \tag{4}$$

   Implementieren Sie das explizite Euler Schema an der markierten Stelle im ***MuS_ FDM_ 1d.m***. Beachten Sie dabei, dass Sie mit dem neuen Wert der Variable ϕ an der Stelle i den alten Wert sofort überschreiben können!

3. Wenn der Zeitschritt groß gewählt wird, wird der stationäre Zustand schneller erreicht, aber bei zu großem Zeitschritt kann die Lösung instabil werden. Das explizite Euler Schema ist bedingt stabil. Die charakteristische Diffusionszeit (D) und die charakteristische Konvektionszeit (CFL, steht für Courant-Friedrichs-Lewy) müssen berücksichtigt werden, wenn die Größe des Zeitschrittes festgelegt wird:

$$D = \frac{\Gamma dt}{\rho (dx)^2} \text{ bzw. } CFL = \frac{u}{dx} dt . \tag{5}$$

   Im Code werden beide Zahlen aufsummiert (wobei D zweifach genommen werden muss) und als DCFL Variable ausgerechnet. Sie können diese Zahl zur Orientierung benutzen, wenn Sie die Stabilität des Schemas untersuchen.

   Bestimmen Sie annähernd den höchstmöglichen stabilen Zeitschritt für die folgenden Parametersätze:

- nx=11; Pe=2 mit rho=1 kg/m^3; u0=2 m/s: gamma=1 kg/ms;
- nx=11; Pe=2 mit rho=1 kg/m^3; u0=20 m/s; gamma=10 kg/ms;
- nx=11; Pe=40 mit rho=1 kg/m^3; u0=4 m/s; gamma=0.1 kg/ms;
- nx=31; Pe=40 mit rho=1 kg/m^3; u0=4 m/s; gamma=0.1 kg/ms;

Was für Eigenschaften können Sie erkennen?

Bemerkungen

Wenn Sie den Zeitschritt ändern, denken Sie an die maximale Anzahl von Zeitschritten bzw. an die Simulationszeit!

Wenn Sie die maximale Anzahl von Zeitschritten zu klein setzen, kann eventuell der stationäre Zustand nicht erreicht werden. Wenn Sie die Anzahl zu hoch setzen, wird die Simulation zu lang dauern.

Vergewissern Sie sich, dass die Lösung den stationären Zustand erreicht hat!

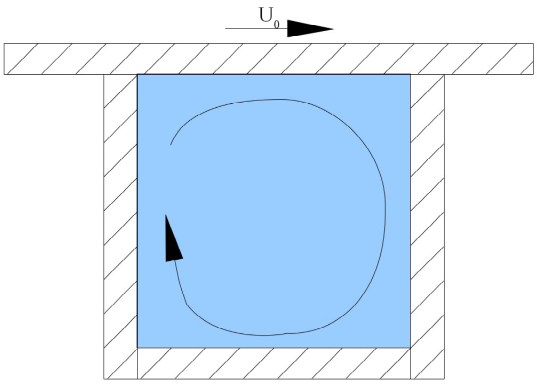
Verständnisfragen

- Was für Netz sollte man bei höheren Pe-Zahlen verwenden?
- Wenn die Zeitschrittweite erhöht wird, wird UDS früher instabiler als CDS. Was ist die Ursache?
- Würden Sie die Initialisierung anders machen? Für welche Pe-Zahlen ist sie günstiger?
- Ab welcher räumlichen Auflösung liefert UDS und ab welcher räumlichen Auflösung liefert CDS bei Pe=40 eine akzeptable Lösung?

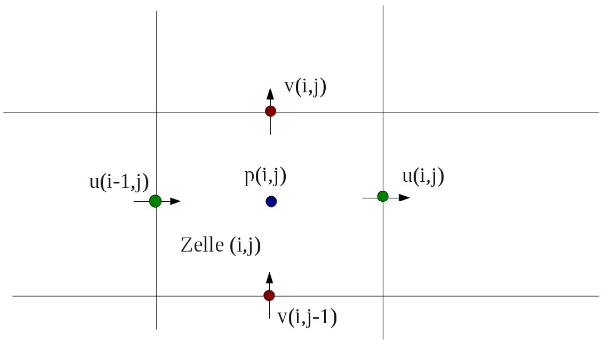
Aufgabe 2 (freiwillig)

2D Testfall: Wirbelströmung im rechteckigem Gebiet

In diesem Beispiel wird eine Strömung simuliert, die von vier Wänden abgegrenzt ist. Die Strömung wird dadurch angetrieben, dass eine Wand in seiner Ebene mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt wird. Dieser Testfall wurde ganz oft für neue Strömungslöser bzw. für neue numerischen Methoden als Validierung benutzt.



Lesen Sie die Funktion ***MuS_ FDM_ 2d.m*** durch, und versuchen Sie die Ableitungen zu identifizieren!
Vergleichen Sie die Länge und Komplexität der Codes bei den zwei Testfällen!
Damit die Lösung des finiten Differenzen Schemas nicht oszilliert, wird hier ein versetztes Netz verwendet. Die Geschwindigkeiten werden an Zellrändern und der Druck in der Zellmitte gespeichert. Die Ableitung der Geschwindigkeiten wird mit zentralen Differenzen in der Zellmitte ausgerechnet, deshalb finden Sie nur $u(\mathrm{i}) - u(\mathrm{i}{-}1)$ und keine $u(\mathrm{i}{+}1) - u(\mathrm{i}{-}1)$ Ausdrücke.



Die konvektiven Terme sind mit einer Kombination von zentralen Differenzen und einer Art Upwind Schema diskretisiert, um die Stabilität zu erhöhen. Die Wirkung des Gewichtungskoeffizientens *gamma* ist im Code erklärt.
Variieren Sie die Wandgeschwindigkeit, den Zeitschritt, die räumliche Auflösung, die Dichte, die Viskosität und gamma! Beobachten Sie dabei die Auswirkung der einzelnen Variablen!
Vergleichen Sie die Simulationzeit gegenüber dem 1D-Testfall!
Sind Strömungen mit niedrigerer oder mit höherer Reynolds-Zahl einfacher zu simulieren?