普通物理期中 (數學推導)

11127137 黃乙家

所有模擬程式碼皆放在 Github 上，
連結：https://github.com/ja-errorpro/GeneralPhysicsMidtermExam

1 低軌衛星題

低軌衛星是目前趨勢, 包括著名的星鏈計畫, 然而根據普通物理的角度來思考, 低軌衛星的優缺點有哪些呢? 這題將透過引導一系列的小題來思考低軌衛星的效能。(考量地球半徑為 6400 公里, 地表重力場 $9.8N$, 不考慮太陽影響, 台灣處在緯度為 $23°$, 考量通訊利用光線傳輸且光速為 $3 \times 10^8 m/s$, 不考慮相對論效應。)

1.1 一般通訊衛星都在赤道面上, 試論為何? 是否可以沿著北緯 $23°$ 的剖面做衛星?

要求衛星速度 = 地球自轉速度，在赤道面上可維持同步軌道。可在北緯 $23°$ 的剖面做衛星，但需要克服更多阻力而不能維持同步，較耗成本，故不適用。

1.2 一般的通訊衛星是同步衛星, 請計算同步衛星距離地表多高?

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$
$$F \propto m, F \propto r^{-2} \Rightarrow F \propto mr^{-2}$$
$$\Rightarrow F = \frac{Km}{r^2} = mr\omega^2$$

設 r 為 $R+H$ (地球半徑 + 衛星高度)，所求為 H。

$$r^3 = (R+H)^3 = \frac{K}{\omega^2}$$

$$R+H = \sqrt[3]{\frac{K}{\omega^2}}$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{K}{\omega^2}} - R$$

$\because a = g$ while $H = 0$ ，$\therefore \frac{Km}{R^2} = mg \Rightarrow K = gR^2$，$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow H = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R$$

代入 $R = 6.4e6$ m, $T = 86400$ s, $g = 9.8$ N, $\pi = 3.14$

$$H \simeq 3.594e7\ m = 35940\ km$$

程式碼 (Python3)：

```
# 1_B.py
import math
R = 6.4e6
T = 86400
g = 9.8
pi = math.pi
H = (g*(R**2)*(T**2)/(4*(pi**2)))**(1/3) - R
print(H, "m, or ", H/1000, "km")
```

1.3 低空衛星高度距離地表約為 500 公里左右, 請計算繞地球一周多久?

克卜勒第三定律：$\frac{R^3}{T^2} = \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \frac{(6.4e6 + 3.594e7)^3}{86400^2} = \frac{(6.4e6 + 5e5)^3}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{(6.4e6+5e5)^3}{(6.4e6+3.594e7)^3} \times 86400^2} \simeq 5684.1\ s$$

程式碼 (Python3)：

```
# 1_C.py
import math
R = 6.4e6
T = 86400
g = 9.8
pi = math.pi
H_B = (g*(R**2)*(T**2)/(4*(pi**2)))**(1/3) - R
H_C = 5e5
T_C = math.sqrt(((R+H_C)**3)/((R+H_B)**3)*(T**2))
print(T_C, "s")
```

1.4 根據 1.2、1.3 兩題的距離討論這兩種衛星大約可以觀測地球上的球面積為多少?

設 R 為地球半徑，h 為衛星距地表高度，O 為地球中心點，A 為衛星位置，A 切地球於 B 點，$\theta = \angle AOB$：所求為球冠面積，若球冠最大開口圓半徑為 r，則

$$R = r sin\ \theta$$

積分表達面積

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi}^{\theta} 2\pi rRd\theta \\ &= \int_{\pi}^{\theta} 2\pi R^2 sin\ \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_{\pi}^{\theta} sin\ \theta d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\pi R^2(1 - cos\,\theta)$$

$$= 2\pi R^2(1 - \frac{R}{R+h})$$

兩衛星各數值代入，得：

同步衛星：$S = 2\pi \times 6400^2(1 - \frac{6400}{6400+35940}) \simeq 2.1e8\,km^2$

低空衛星：$S = 2\pi \times 6400^2(1 - \frac{6400}{6400+500}) \simeq 1.86e7\,km^2$

程式碼 (Python3)：

```
# 1_D.py
import math
R = 6400
pi = math.pi
H_B = 35940
H_C = 500
S_B = 2*pi*(R**2)*(1-R/(R+H_B))
S_C = 2*pi*(R**2)*(1-R/(R+H_C))
print("S_B: ", S_B, "km^2")
print("S_C: ", S_C, "km^2")
```

1.5 根據 1.1、1.2、1.3 請設計針對台灣 (北緯 $23°$) 需要多少一般衛星或低空衛星才能使所有時間都有衛星訊號?(請考量地球自轉、衛星間轉換訊號與衛星傳遞到地面的時間)

地球表面積 $4\pi R^2 \simeq 5.1e8\,km^2$

預期 (只考慮圓)：

$S_B = 2.1e8\,km^2$ 佔地球表面積 40%，因此至少需要 3 架衛星；

$S_C = 1.86e7\,km^2$ 佔地球表面積 3.6%，因此至少需要 28 架衛星。

1.6 考量月球的影響 (月球質量為 $\frac{1}{81}$ 的地球質量、月球半徑為地球半徑的 0.27 倍、距離地球 38 萬公里), 若考量一開始地球、衛星、月球依序連成一線。評估對一般衛星、低空衛星的影響 (該題為三體運動, 通常三體運動沒有好的解析解, 但本題可以忽略衛星對地球、衛星對月球的影響, 且可以透過運動方程式與數值模擬可以知道月球對衛星的影響)。透過評估, 衛星需要多少外加動力 (能量, 通常可以透過太陽能轉換) 以維持該軌道運行。

2 化學碰撞學說題

在高中時期化學反應可以藉由碰撞學說來解釋, 然而碰撞問題牽涉到許多物理問題, 本題將透過物理的觀點來評估不考慮化學特性下的化學反應問題。

2.1 考慮最簡單的化合反應 ($A + B \to C$), 若考量最簡單的統計結果 (分子平均動能與溫度關係為 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$, 其中 m 為該分子質量、k 波茲曼常數 $= 1.38 \times 10^{-23} J/K$、$T$ 為溫度單位為 K)。另外, 為了簡化問題我們把問題簡化成化合物 A、B 一開始在一個細玻璃管的兩端, 也就是可以視為一維碰撞。討論 (1) $m_A \simeq m_B$、(2) $m_A > m_B$ 在溫度 T 的情況下有多少比例的能量可以用於克服活化能 (用 m_A、m_B、k 與 T 表示)? (活化能的古典物理圖像可以視為電子間排斥所產生的位能。) (注意 A 與 B 皆會移動)。

化合反應為兩物碰撞後黏在一起，因此為非彈性碰撞，遵守動量守恆，而總能量則有一部份拿去活化。

設 V_f 為碰撞後速度

動量守恆: $m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) V_f$

$V_f = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$

總能量: $E_{total} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{2}{3}kT + \frac{2}{3}kT = 3kT$

活化能為總能量減去碰撞後剩餘的能量:

$$E_{act} = 3kT - \frac{1}{2}(m_A + m_B)V_f^2$$
$$= 3kT - \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B})^2$$
$$= 3kT - \frac{1}{2}(\frac{(m_A v_A + m_B v_B)^2}{m_A + m_B})$$
$$= 3kT - \frac{1}{2}(\frac{m_A^2 v_A^2 + m_B^2 v_B^2 + 2m_A m_B v_A v_B}{m_A + m_B})$$

$$E_{act} = 3kT - \frac{1}{2}(\frac{m_A^2 v_A^2 + m_B^2 v_B^2 + 2m_A m_B v_A v_B}{m_A + m_B})$$

由 $\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{3}{2}kT$，兩邊同乘 $2m_A$，得 $m_A^2 v_A^2 = 3kTm_A$，

同理 $m_B^2 v_B^2 = 3kTm_B$，

設 v_A 方向為正，v_B 方向為負 (相對 A 而言)，

$m_A v_A = \sqrt{3kTm_A}$，$m_B v_B = -\sqrt{3kTm_B}$，代入上式得

$$E_{act} = 3kT - \frac{3kT(m_A + m_B - 2\sqrt{m_A m_B})}{2(m_A + m_B)}$$

如果 $m_A \approx m_B$，則 $E_{act} = 3kT$，比例為 $\frac{E_{act}}{E_t} = 1$，表示把所有能量都用於克服活化能。

如果 $m_A > m_B$，則 $E_{act} = 3kT - \frac{3kT(m_A + m_B - 2\sqrt{m_A m_B})}{2(m_A + m_B)}$，比例為

$$\frac{E_{act}}{E_t} = \frac{3kT - \frac{3kT(m_A + m_B - 2\sqrt{m_A m_B})}{2(m_A + m_B)}}{3kT}$$

2.2 根據 2.1 的結論評估怎樣的條件下比較容易產生反應?(在不考慮化學性質)

活化能越小越好反應，表示第二項的 $\frac{3kT(m_A + m_B - 2\sqrt{m_A m_B})}{2(m_A + m_B)}$ 越大越好，因此 m_A, m_B 越接近越好。

程式碼 (Python3)：

```python
# 2_B.py
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T = 323
k = 1.38e-23
m_A = np.linspace(1,100,100) # 設 m_A = 1~100 kg
m_B = np.linspace(50,100,100) # 設 m_B = 50~100 kg
E_act = 3*k*T - (3*k*T * (m_A + 50 - 2 * (m_A * 50)**0.5) ) / (
    2 * (m_A + 50) ) # 計算 Activation Energy
plt.plot(m_A,E_act, label = 'm_A')
plt.plot(m_B,E_act, label = 'm_B')
plt.plot(m_A + m_B,E_act, label = 'm_A + m_B')
plt.legend()
plt.xlabel('m (kg)')
plt.ylabel('Activation Energy (J)')
plt.show()
```

2.3 做一個最糟糕的模型思考, 如果一個容器只有兩個 A 與一個 B 反應後剩一個 A 與一個 C, 假設依然符合最簡單的統計結果, 當 (1) $m_A \approx m_B$ 、(2) $m_A > m_B$ 兩個例子完成反應且熱平衡之後剩下溫度是多少? (用 m_A、m_B、k 與 T 表示)(這題的模型不夠完善, 因為統計必須在數量夠多的情況下才吻合事實, 然而可以透過這種簡易模型推測外界需要輸入多少能量才能維持所有的反應在同一溫度)

$$
\begin{gathered}
E_{total} = \frac{1}{2}(2m_A)v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \\
\frac{1}{2}(m_A)v_A^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{3}{2}kT_0 \\
\Rightarrow E_{total} = 3kT_0 + \frac{3}{2}kT_0 = \frac{9}{2}kT_0 \\
P : 2m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v_C + m_A v_{A,2} \\
E_f = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_C^2 + \frac{1}{2}m_A v_{A,2}^2
\end{gathered}
$$

2.4 然而根據 A、B、C 的結論會發覺不是所有的化學反應皆符合上述結論, 為何? 試著討論, 並且自行搜尋為何高中化學的軌域有 s、p、d、f 軌域, 該結論如何得到?

在古典物理學，拉塞福原子模型認為電子繞核做圓周運動，因此應有向心加速度，會不斷輻射電磁波做螺旋運動最後墜落到核上，但大部分原子很安定，不符合事實，因此波耳提出氫原子模型，並做了基本假設，然而波耳只考慮電子粒子性，未考慮波動性，只能解釋氫原子，因此波耳模型也不符合事實。

量子力學中以軌域解釋電子的運動，表達電子出現在特定空間的機率

3 馬尾題

女孩子綁馬尾、女孩子有馬尾跑步往往讓人感受到可愛, 為什麼這麼可愛? 本題曾經在 2012 年獲得搞笑諾貝爾物理獎可參閱 (https://pansci.asia/archives/

70394)。然而我們從另一個方向來思考為什麼這麼可愛?

3.1 若考慮每根頭髮都是一個單擺, 且髮長 L, 且不考慮頭髮處處質量即為將有效質量放在頭髮的尾端, 且質量 m, 在小角度擺動時候的週期為何?

設 $\vec{F}$ 表擺錘合力，透過力學分析可知 $\vec{F} = mgsin\,\theta$
由虎克定律可知 $\vec{F} = -k\vec{x}$
因此 $\vec{F} = -k\vec{x} = mgsin\,\theta$
因為 θ 是小角度，因此 $sin\,\theta \approx \theta = \frac{x}{L}$，$x$ 表擺錘到對稱線的水平距離

$$kx = mg\frac{x}{L}, k = \frac{mg}{L}$$

彈簧週期公式推導

$$x = sin\,\omega t, v = \dot{x} = \omega cos\,\omega t, a = \ddot{x} = -\omega^2 sin\,\omega t = -\omega^2 x$$
$$ma = -kx \Rightarrow a = -\omega^2 x = -\frac{kx}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

週期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
代入 $k = \frac{mg}{L}$ 得小角度單擺週期為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

3.2 然而女孩子在跑步時馬尾不會是小角度擺動, 請考慮任意角度的運動行為也就是考慮該單擺的 $x(t)$。

力學能分析：
設 $\theta = 0$ 時擺錘高度為零位面，位能 $\Delta U = mgh$，動能 $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$
若沒有能量損失，位能動能變化量相等，$mgh = \frac{1}{2}mv^2$
得 $v = \sqrt{2gh}$，又 $v = L\dot{\theta}$，得 $\dot{\theta} = \frac{\sqrt{2gh}}{L}$
設初始狀態 $\theta_0 = \theta(0), \dot{\theta}_0 = 0, y_0 = Lcos\,\theta_0, y_1 = Lcos\,\theta$，欲求 θ

$$h = L(cos\,\theta - cos\,\theta_0)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}(cos\,\theta - cos\,\theta_0)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{-\frac{2g}{L}sin\,\theta}{\sqrt{\frac{2g}{L}(cos\,\theta - cos\,\theta_0)}}\dot{\theta} = -\frac{g}{L}sin\,\theta$$

在小角度時 $\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\theta$ 代表某個東西的二次微分是負的自己，而且有上下界，而 sin, cos 就有這樣的性質，因此可假設解為 $\theta(t) = A\cos{(\omega t + \delta)}$

求任意角度的單擺週期：

將上式倒數同乘 $d\theta$，

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{(cos\,\theta - cos\,\theta_0)}}$$

在圓周運動中，θ 的變化過程為 $\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0$

而週期可以寫成一周轉多久，或可寫成半周轉多久的兩倍，也可寫成四分之一周轉多久的四倍

$$T = 4t(\theta_0 \to 0)$$

$$= 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{(cos\,\theta - cos\,\theta_0)}}$$

其中的積分式符合橢圓積分中的第一類橢圓積分 $F(\phi, k) = \int_0^{\phi}\frac{du}{\sqrt{1-k^2 sin^2\,u}}$，使 $sin\,u = \frac{sin\,\frac{\pi}{2}}{sin\,\frac{\theta_0}{2}}$，改寫週期公式

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}F(\frac{\pi}{2}, sin\,\frac{\theta}{2})$$

在 θ 很小時，具等時性 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

兩者相除

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}K(sin\,\frac{\theta_0}{2})$$

其中 $K(\cdot)$ 表示第一類完全橢圓積分，$K(\cdot) = F(\frac{\pi}{2}, \cdot)$

而求 θ，就是先求 K 的反函數 (雅可比橢圓函數：sn) 再求反正弦，因此

$$\theta(t) = 2\ \mathrm{arcsin}\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\ \mathrm{sn}\left[\frac{\omega_0}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right); \sin\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}$$

程式碼 (Python3)：

```
# 3_C_1.py 求角度微分方程解
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint


g = 9.8
l = 1
def diff(y, t):
    omega, theta = y
    return np.array([-(g/l)*np.sin(theta), omega])
t = np.linspace(0, 10, 1000)
theta_0 = 50 / 180 * np.pi
ret = odeint(diff, [0, theta_0 ], t)


plt.plot(t, ret[:, 0])
plt.plot(t, ret[:, 1])
plt.show()
```

```
# 3_C_2.py 模擬週期
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special
```

```
theta_0 = np.linspace(0, np.pi, 100)

L = 1

g = 9.8

omega_0 = np.sqrt(g/L)

T_0 = 2*np.pi/omega_0

T = 4*np.sqrt(L/g)*special.ellipk(np.sin(theta_0/2))

plt.plot(theta_0, T/T_0)

plt.xlabel(r'$\theta_0$')

plt.ylabel(r'$T/T_0$')

plt.show()
```

3.3 利用傅立葉轉換算出 B 中的頻率 (或是週期) 分析。

已知

$$\theta(t) = 2 \text{ arcsin} \left\{ \sin \frac{\theta_0}{2} \text{ sn} \left[\frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) ; \sin \frac{\theta_0}{2} \right] \right\}$$

傅立葉級數 $F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) cos(\frac{2\pi kt}{T}) dt, k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) sin(\frac{2\pi kt}{T}) dt, k = 1, 2, \cdots$$

欲進行傅立葉轉換，必須滿足狄利克雷條件，在上題結果中，t 在週期 T 內連續、有週期性、有界、有限、可積分，因此可進行傅立葉轉換。

由於 sin 是奇函數，因此 $b_k = 0$，只有 a_k 有值，且 $a_0 = 0$，先將 $\theta(t)$ 改寫成 $\theta(t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \cos \left[(2k+1)\omega t \right], k = 0, 1, 2, \cdots$

其中

$$c_{2k+1} = \frac{2}{T}\int_0^T \theta(t)\cos\ [(2k+1)\omega t]\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \arcsin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}\left[\frac{\omega_0}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right);\sin\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}\cos\ [(2k+1)\xi]\, d\xi, k=0,1,2,\cdots$$

3.4 然而頭髮不該是單擺, 因為每一段都有質量。所以先將問題考慮髮長 L, 且在 L−dL 與 L 各有質量 $\frac{m}{2}$ (也就是考慮兩個質量點), 試求在髮尾的質量其運動方程式 $x(t)$, 並透過傅立葉轉換算出頻率分析。

拉格朗日力學公式：拉格朗日量為系統動能減去系統位能，$L = T - V$

假設較上方的質量點 m_1 座標為 (x_1, y_1)，較下方的質量點 m_2 座標為 (x_2, y_2)，兩點的垂直角度為 θ_1, θ_2，髮長 L 分成 L_1, L_2，

$$x_1 = L_1\sin\ \theta_1, y_1 = -L_1\cos\ \theta_1$$

$$x_2 = x_1 + L_2\sin\ \theta_2, y_2 = y_1 - L_2\cos\ \theta_2$$

那麼

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

代入座標與角度關係得

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta_2}^2 + m_2L_1L_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)gL_1\cos\ \theta_1 + m_2gL_2\cos\ \theta_2$$

將 L 對 θ_1 與 θ_2 求偏微分，並令偏微分為 0，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_2}} - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_2}} - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$$

使用 Python 繼續推導：

```
# 3_D_1.py
from sympy import *
from sympy import Derivative as D

var("x1 x2 y1 y2 L1 L2 m1 m2 dtheta1 dtheta2 ddtheta1 ddtheta2
    t g tmp")

var("theta1 theta2", cls=Function)



sublist = [
    (D(theta1(t), t, t), ddtheta1),
    (D(theta1(t), t), dtheta1),
    (D(theta2(t), t, t), ddtheta2),
    (D(theta2(t), t), dtheta2),
    (theta1(t), theta1()),
    (theta2(t), theta2())
]

x1 = L1 * sin(theta1(t))
y1 = -L1 * cos(theta1(t))
x2 = x1 + L2 * sin(theta2(t))
y2 = y1 - L2 * cos(theta2(t))
```

```
vx1 = diff(x1, t)
vy1 = diff(y1, t)
vx2 = diff(x2, t)
vy2 = diff(y2, t)

L = m1/2 * (vx1**2 + vy1**2) + m2/2 * (vx2**2 + vy2**2) - m1 *
    g * y1 - m2 * g * y2

def lagrange(L, v):
    dv = D(v(t),t)
    a = L.subs(dv, tmp).diff(tmp).subs(tmp, dv)
    b = L.subs(dv, tmp)
    b = b.subs(v(t),v())
    b = b.diff(v())
    b = b.subs(v(), v(t))
    b = b.subs(tmp, dv)
    c = a.diff(t) - b
    c = c.subs(sublist)
    c = trigsimp(simplify(c))
    c = collect(c,
        [theta1(),theta2(),dtheta1,dtheta2,ddtheta1,ddtheta2])
    return c
```

```
eq1 = lagrange(L, theta1)
eq2 = lagrange(L, theta2)

print("eq1 = ", eq1)
print("eq2 = ", eq2)
```

推導出來後可以模擬動畫：

```
# 3_D_2.py
import matplotlib
matplotlib.use('WXAgg')
import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from math import *
import wx


g = 9.8
class DoublePendulum(object):
    def __init__(self,m1,m2,L1,L2):
        self.m1, self.m2 = m1, m2
        self.L1, self.L2 = L1, L2
        self.init_stat = np.array([0.0, 0.0, 0.0, 0.0])
```

```
    def equations(self,w,t):
        m1, m2, L1, L2 = self.m1, self.m2, self.L1, self.L2
        theta1, theta2, v1, v2 = w
        dth1 = v1
        dth2 = v2

        eq1a = (m1+m2)*L1*L1
        eq1b = m2*L1*L2*cos(theta1-theta2)
        eq1c = L1*(m2*L2*dth2*dth2*sin(theta1-theta2) +
            (m1+m2)*g*sin(theta1))

        eq2a = L1*m2*L2*cos(theta1-theta2)
        eq2b = L2*L2*m2
        eq2c = m2*L2*(-L1*dth1*dth1*sin(theta1-theta2) +
            g*sin(theta2))

        dv1, dv2 = np.linalg.solve([[eq1a, eq1b], [eq2a, eq2b]],
            [-eq1c, -eq2c])

        return np.array([dth1, dth2, dv1, dv2])

def double_pendulum_odeint(pendulum, l, r, step):
    t = np.arange(l,r,step)
    trk = odeint(pendulum.equations, pendulum.init_stat, t)
```

```
    theta1, theta2 = trk[:,0], trk[:,1]
    L1 = pendulum.L1
    L2 = pendulum.L2
    x1 = L1*np.sin(theta1)
    y1 = -L1*np.cos(theta1)
    x2 = x1 + L2*np.sin(theta2)
    y2 = y1 - L2*np.cos(theta2)
    pendulum.init_stat = trk[-1,:].copy()
    return [x1, y1, x2, y2]

fig = plt.figure(figsize=(6,6))

line1, = plt.plot([0,0],[0,0],"-o")
line2, = plt.plot([0,0],[0,0],"-o")
plt.axis("equal")
plt.xlim(-5,5)
plt.ylim(-5,5)

print('模擬雙擺運動(若直接按下Enter則使用預設值)：')

m1 = input('請輸入m1質量[1.0]：')
if m1 == '':
    m1 = 1.0
m2 = input('請輸入m2質量[1.0]：')
```

```python
if m2 == '':
    m2 = 1.0
L1 = input('請輸入L1長度[1.0]：')
if L1 == '':
    L1 = 1.0
L2 = input('請輸入L2長度[1.0]：')
if L2 == '':
    L2 = 1.0

pendulum = DoublePendulum(m1, m2, L1, L2)
theta1 = input('請輸入初始theta1角度(徑度)[1.0]：')
if theta1 == '':
    theta1 = 1.0
theta2 = input('請輸入初始theta2角度(徑度)[1.0]：')
if theta2 == '':
    theta2 = 1.0
pendulum.init_stat[:2] = theta1, theta2

x1,y1,x2,y2 = double_pendulum_odeint(pendulum, 0, 30, 0.02)
plt.plot(x1,y1,label="m_1")
plt.plot(x2,y2,label="m_2")

plt.title("m1 = %s, m2 = %s, L1 = %s, L2 = %s, theta1 = %s,
    theta2 = %s" % (m1, m2, L1, L2, theta1, theta2))
```

```
idx = 0

def update_line(event):
    global x1,y1,x2,y2,idx
    if idx == len(x1):
        idx = 0
        x1, y1, x2, y2 = double_pendulum_odeint(pendulum, 0, 30,
            0.02)
    line1.set_xdata([0,x1[idx]])
    line1.set_ydata([0,y1[idx]])
    line2.set_xdata([x1[idx],x2[idx]])
    line2.set_ydata([y1[idx],y2[idx]])
    fig.canvas.draw()
    idx += 1

id = wx.ID_ANY
actor = fig.canvas.manager.frame
actor.Bind(wx.EVT_TIMER, update_line, id=id)
timer = wx.Timer(actor, id)
timer.Start(1)

plt.legend()
```

```
plt.show()
```

3.5 將 D 考量成每段都有質量, 也就是每一段的質量為 $\frac{m}{n}$ (其中 n 趨近無限大), 且每段距離差 dL (dL 趨近於 0) 的髮尾運動方程式 $x(t)$ 與透過傅立葉轉換算出頻率分析。(2.4 與 2.5 是屬於混沌系統 (chaos system) 不會有好的解析解)

當考慮越多段的運動會越複雜，需要考量的因子越來越多，計算時間也將大大增加，如果要趨近無限大，無論是人算或現代電腦計算無法在有限時間內完成。