Algebra Lineal 5

Si A es una matriz triangular superior de dimensiones (n x m), $\vec{x}$ es un vector de m componentes y $\vec{b}$ es un vector de m componentes, se define el sistema lineal:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \dots \\ \vec{x}_m \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Realizando las multiplicaciones de A con $\vec{x}$, con n, m =3, se tiene:

$$A_{11}\overrightarrow{x_1} + A_{12}\vec{x}_2 + A_{13}\vec{x}_3 = \overrightarrow{b_1}$$

$$A_{21}\overrightarrow{x_1} + A_{22}\vec{x}_2 = \overrightarrow{b_2}$$

$$A_{31}\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{b_3}$$

Despejando $\vec{x}_1$ en la primera ecuación, se tiene:

$$\vec{x}_1 = \frac{\overrightarrow{b_1} - A_{12}\overrightarrow{x_2} - A_{13}\vec{x}_3}{A_{11}}$$

O, para la componente 1 del vector $\vec{x}$ con n componentes:

$$\overrightarrow{x_{11}} = \frac{\overrightarrow{b_1} - A_{1m}\,\overrightarrow{x_m} - A_{1m-1}\overrightarrow{x_{1m-1}} - \cdots A_{12}\overrightarrow{x_2}}{A_{11}}$$

Así, se puede obtener una expresión general para obtener la componente i del vector $\vec{x}$ con la expresión:

$$\overrightarrow{x_\imath} = \frac{\overrightarrow{b_\imath} - \sum_{j=2}^{m} A_{ij}\vec{x}_j}{A_{ii}}$$

O, si tenemos que i va de 0 hasta n, y n es el número de filas:

$$\overrightarrow{x_i} = \frac{\overrightarrow{b_i} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}\vec{x}_j}{A_{ii}}$$